МО України

Рівненський державний педінститут

Дійсні числа

Методичний посібник на допомогу студентам, вчителям та учням старших класів.

Рівне 2011

Підготували:
Кандидат фіз.-мат. наук доц. А.Бомба,
Кандидат фіз.-мат. наук доц. В.Столярчук»

У запропонованому увазі читачів посібнику авторами зроблена спроба "перекинути місток" між початковими уявленнями про дійсне число, які відомі з курсу математики середньої школи і систематичним викладом теорії дійсного числа за допомогою нескінченних десяткових дробів.

Посібник адресований учням спеціалізованих класів з поглибленим вивченням фізико-математичних дисциплін, вчителям математики та студентам математичних спеціальностей педагогічних інститутів для систематизації і поглиблення набутих знань, а також окреслення певного кругу мінімуму знань про дійсні числа при систематичному їх вивченні у вузі.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук професор, академік АНВШ В.Слюсарчук.

Рекомендовано до друку рішенням кафедри вищої математики від "10" травня 1994р. протокол № 5.

Друкується за рішенням видавничої комісії Рівненського педінституту від "26" травня 1994р. протокол № 5.

ЗМІСТ

§1. Раціональні числа.

Поняття числа, яке є первісним і основним в математиці, пройшло тривалий шлях історичного розвитку. Услід за нескінченною множиною натуральних чисел N= {1,2,3,...}, яка виникла в результаті безпосереднього рахунку предметів, з'явилась і множина цілих чисел Z={...,-1,0,1,...}.А далі було введено множину раціональних чисел $Q=\left\{\frac{m}{n}: m\in Z; n\in N\right\}$,яка тісно пов'язана із поділом цілого на частини і з звичайними дробами. Зрозуміло, що множина раціональних чисел утворюється шляхом приєднання до множини цілих чи звичайних дробів,тобто $N\subset Z\subset Q$.

Дії додавання і множення у множині 0,як відомо,вводяться чином:

$$a=\frac{m_1}{n_1}, b=\frac{m_2}{n_2}: a\cdot b=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=\frac{m_3}{n_3}\in Q;$$

$$a+b=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{n_1n_2}+\frac{m_2n_1}{n_1n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}=\frac{m_4}{n_4}\in Q$$

$$\left(m_i\in Z, n_i\in N, i=\overline{1,4}\right)$$

Нагадаємо,що знаменник n додатнього дробу $\frac{m}{n}$ вказує на скільки частин ми ділимо одиницю, а чисельник m - яку кількість цих частин ми беремо. При множенні ж дробу $\frac{m_1}{n_1}$ на дріб $\frac{m_2}{n_2}$ знаменник n_1 означає на скільки частин ми ділимо $\frac{m_2}{n_2}=b\in Q$, а чисельник m_1 - скільки таких частин ми беремо, тобто $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=m_1\left(\frac{1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\right)$, або навпаки $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{1}{n_1}\left(m_1\cdot\frac{m_2}{n_2}\right)$. Зауважимо, що дія додавання, яка грунтується на ідеї зведення дробів до однакових долей одиниці, як відомо, виконується ефективніше є використанням найменшого спільного кратного знаменників n_1 і n_2. На рис. 1 дії множення і додавання геометрично проілюстровані на конкретних прикладах.

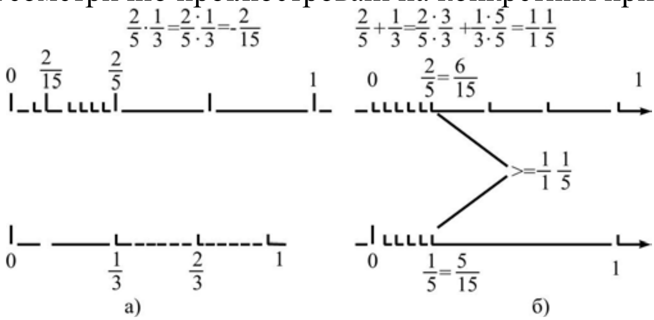


Рис. 1.

Раціональні числа відносно введених дій додавання,множення та знаків порівняння ("=","<",">") мають такі властивості:

1. Правило впорядкування. Будь-які два числа a і $b \in \mathrm{Q}$ пов'язані одним із трьох знаків ">","<" або ">". Причому, якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$; а якщо $a=b$ і $b=c$ то $a=c$ (властивість транзитивності).

2. Комутативна (переставна) властивість:
$\forall a,b,c \in \mathrm{Q} \Rightarrow a+b=b+a; a\cdot b=b\cdot a$.

3. Асоціативна (сполучна) властивість:
$\forall a,b,c \in \mathrm{Q} \Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c);(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

4. Існування нуля, тобто існування елемента $x=0$ заданої множини такого, що сума його з довільним елементом заданої множини дорівнює останньому: $\forall a \in \mathrm{Q} \Rightarrow a+0=0+a=a$.

5. Існування протилежного числа (-a) до даного числа a: $\forall a \in \mathrm{Q}$ існує $-a \in \mathrm{Q} : a+(-a)=0$.

6. Існування одиниці множення: існує $x=1 \in Q; \forall a \in Q \Rightarrow a\cdot 1=a$.

7) Існування оберненого числа $x=\dfrac{1}{a}$ до даного $a : \forall a \in \mathrm{Q}, \mathrm{a} \neq 0$, існує

$x=\dfrac{1}{a} : a\cdot\dfrac{1}{a}=1$.

8) Дистрибутивна (розподільна) властивість множення відносно додавання: $\forall a,b,c \in Q \Rightarrow (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

Усі зазначені властивості, крім сьомої, можуть бути виведені а відповідних властивостей (аксіом) множини цілих чисел, зокрема, натуральних. Властивість 7, що істотно відрізняє множину Q від множини Z, безпосередньо слідує із смислу добутку звичайних дробів.

Для прикладу обгрунтуємо властивості комутативності множення і додавання. Відповідні властивості у множинах N і Z приймаємо, як аксіоми, або самоочевидні істини, які перевірені багатовіковим досвідом. (Див., напр., рис.2).

$\forall n, m \in N \Rightarrow n+m=m+n; n \cdot m=m \cdot n$

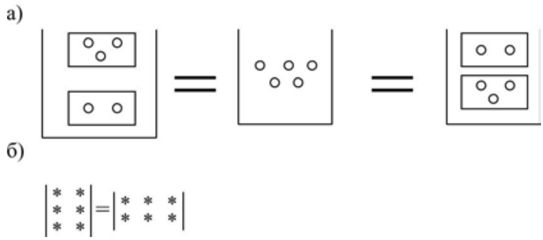


Рис. 2

На основі вищесказаного матимемо:

$$a \cdot b=\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}=\frac{m_2 \cdot m_1}{n_2 \cdot n_1}=\frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_1}{n_1}=b \cdot a$$

$$a+b=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1 n_2+m_2 n_1}{n_1 n_2}=\frac{m_2 n_1+m_1 n_2}{n_1 n_2}=\frac{n_1 m_2}{n_1 n_2}+\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}=\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_1}{n_1}=b+a$$

Інші властивості пропонуємо читачеві довести самостійно.

9. Щільність у множині Q.

Для будь-яких раціональних чисел *a* і *b*, *a*<*b* існує принаймні одне число $c \in Q$ (а, отже, їх нескінченна кількість) таке,що *a*<*c*<*b*.

Справді, за такі числа можна прийняти, наприклад, числа виду

$\frac{a+b}{2}, a+\frac{b-a}{k}, b-\frac{b-a}{t}, k, t \in N$.

10. Принцип Архімеда: $\forall f \in Q$ існує $n_a \in N : n_a > a$, що з геометричної точки зору може бути інтерпретовано таким чином: якою б малою не була одиниця масштабу (напр., 1мм) в порівнянні з великою скінченною відстанню *a* (напр., відстанню до Сонця), ми, "крокуючи масштабним відрізком" за скінченну кількість кроків n_a перевершимо цю відстань. $(n_a \cdot 1 \geq a)$

Дійсно,за число n_a можна взяти [*a*]+*K*, де [*a*] - ціла частина від числа *a*, *K* - довільне натуральне число.

Раціональні числа, як нескінченні десяткові дроби.

Розглянемо ряд прикладів на перетворення звичайного дробу $\frac{m}{n}$ у десятковий:

$1)\frac{3}{4}=0.75+0.7500...=0.75(0);$

$2)5=5.00=5(0);$

$3)\pm\frac{6}{5}=-1\frac{1}{5}=\pm1.200...=\pm1.2(0);$

$4)\frac{1}{3}=0.333...=0.(3);$

$5)-\frac{1}{6}=-0.1(6);$

$6)\frac{1}{7}=0.(142857).$

які підводять нас до наступного твердження.

Будь-який звичайний дріб (в т.ч. ціле, натуральне число) шляхом ділення чисельника на знаменник можна завжди подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Дійсно, в процесі ділення кожна з усіх можливих остач та число рідких остач не перевищуватиме дільника, а отже, починаючи з деякого кроку цифри у частці повторюватимуться.

Відзначимо, що тут (як і раніше) ми з метою економності викладу обмежуємось розглядом лише додатніх чисел. (Розповсюдження зазначених фактів на довільні числа не представляє істотних труднощів).

Проілюструємо тепер на конкретних прикладах, як, навпаки, нескінченний періодичний десятковий дріб за допомогою формули суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії можна перетворити у звичайний.

$$1)0,(37)=\frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+...=\frac{37}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...\right)=\frac{37}{100}\frac{1}{1\frac{1}{100}}=\frac{37}{99};$$

$$2)3,42(35)=3+\frac{42}{100}+\frac{35}{100^2}+...=3+\frac{42}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{35}{99}=3+\frac{42\cdot(100-1)}{9900}+\frac{35}{9900}=$$

$$=3+\frac{4200-42+35}{9900}=3+\frac{4235-42}{9900}=3+\frac{4193}{9900}$$

Дані евристичні міркування дозволяють сформулювати такі правила перетворення десяткового дробу у звичайний.

Правило 1. Для того, щоб перетворити періодичний десятковий дріб у звичайний у випадку відсутності цілої частини і цифр періоду, потрібно у чисельнику звичайного дробу записати період десяткового, а в знаменнику - стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Правило 2. Мішаний періодичний дріб у випадку відсутності цілої частини дорівнює такому звичайному дробу, у якому в чисельнику стоїть число, яке утворене цифрами, що стоять до періоду і в періоді, без числа, що стоїть до періоду, а в знаменнику міститься число, утворене в стількох дев'яток, скільки цифр у періоді, із стількома нулями, скільки цифр між комою і періодом.

Розглянемо ще один приклад на перетворення десяткового дробу в звичайний..

$$1,999...=1,(9)+\frac{9}{9}=1+1=2=2,(0)$$

Іншими словами окремі раціональні числа можуть бути записані різними способами. Щоб уникнути такої неоднозначності домовляємось дев'ятки у періоді замінювати нулями, збільшуючи на одиницю розряд до періоду,

Таким чином ми встановили взаємно однозначну відповідність між звичайними дробами і періодичними десятковими. Отже, раціональні числа тепер можуть бути означені ще й як періодичні десяткові дроби.

Зауважимо, що раціональне число буде раціональним у довільній системі числення. Правда, в одній із систем дане число може бути істотно періодичним, а в іншій - зображатись скінченним десятковим дробом. Наприклад

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = (0{,}33...)_{10} = (0,(3))_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)_3 = (0{,}1)_3 = \left(\frac{1}{11}\right)_2 = (0,(01))_2$$

Згадаємо, як зображають раціональні числа на прямій. Вибираємо на прямій напрямок, точку відліку (нуль) і одиницю масштабу. Таку пряму називатимемо числовою віссю. Щоб зобразити раціональне число $\frac{m}{n} > 0 (< 0)$ на числовій осі, потрібно поділити одиницю масштабу на n частин і відкласти вправо (вліво) від нуля m чистин. У випадку скінченного десяткового дробу, напр., a=2,13=2+0,1+0,03 ми підкладаємо на числовій осs спочатку цілу частину, далі ділимо масштабну одиницю на десять частин і приєднуємо одну із них , а потім одну із десятих долей ділимо ще на десять частин і приєднуємо три із них (див. рис. 3).

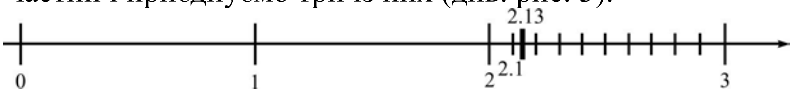


Рис. 3.

Ясно, що кожному раціональному числу відповідає єдина точка на числовій прямій, причому, множина раціональних точок (образів раціональних чисел) щільно заповнює прямі. Це слідує із щільності множини раціональних чисел і впорядкованості точок прямої.

Виникає питання: чи раціональні точки суцільно(повністю) заповнюють числову пряму, тобто кожній точці прямої відповідає раціональне число,чи на прямій і щілини, які не є образами жодного з раціональних чисел. Покажемо, що такі точки . існують. Переконаємось, наприклад, що коли за одиницю масштабу прийняти сторону квадрата, то його діагональ не може бути зображена раціональною точкою (діагональ квадрата не сумірна з його стороною). Справді, міркуючи від супротивного, дістанемо:

$$V\overline{2} = \frac{m}{n}, m, n \in N, HCC(m,n) = 1 \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2, m = 2m_0, n_0 \in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2m_0^2 = n^2 \Leftrightarrow n = 2n_0 \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{2m_0}{2n_0}$$

а останнє суперечить припущенню, що дріб —нескоротний.

Вправи.

1 . Наступні раціональні числа представити у вигляді десяткових дробів: $a)\frac{7}{200};б)\frac{19}{400};в)\frac{347}{18};г)\frac{837}{60}$.

В яких випадках відповідний десятковий дріб буде скінченним?

2.Обчислити вираз:

0,8(5)+0,17(1)+0,8(3)+0,1(6)

0,8(5)-0,17(1)+0,8(3)-0,1(6)

3. Довести, що не існує раціонального числа a такого, що $a^2=5$.

§2. Ірраціональні дійсні числа.

Ми означили раціональне число, як нескінченний періодичний десятковий дріб (нагадаємо, що на скінченні десяткові дроби ми дивимося, як на нескінченні із нулем у періоді):

$a \in Q(a>0) \Leftrightarrow a = a_0, b_1 ... b_k (a_{k+1} ... a_{k+m})$, де $a_0 \in N, b_1, ..., b_k$

Природньо ввести в розгляд символи, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами. Такі символи називатимемо ірраціональними числами. Довільний десятковий дріб ми позиватимемо дійсним числом.

Іншими словами, множина дійсних чисел R - це об'єднання множини раціональних Q і ірраціональних чисел

$I_pR = QU(R \setminus Q) = QUI_p; Q \cap I_p = \phi$.

Позначатимемо додатні дійсні числа (a) символом:

$a = a_0, a_i ...$, де $a_0 \in N, a_i \in (0,1,...,9), i = 1,2,...$.

Тут $a_0=[a]$ - ціла частина числа a. Якщо $a=-a_0,a_1a_2...$ - від'ємне дійсне число, то $[a]=-a_0-1$.

Приклади ірраціональних чисел.

1) α=0,1223334444...;

β=0,123456789101112131415...;

γ=0,1001000100001...;

δ=3,10011100001111000000... .

Доведемо, наприклад, ірраціональність числа δ. Міркуючи від противного, припустимо, що число δ є періодичним, причому період містить n цифр. Оскільки як завгодно далеко від початку у дробі є десяткові знаки 1 і 0, то ці знаки повинні увійти і в період. Але як завгодно далеко від початку дріб містить підряд n нулів. Значить період не може містити цифри 1, що й доводить неперіодичність.

2) $\sqrt{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{348} \in I_p$

Доведення ірраціональності даних чисел проводиться подібно до того, як це зроблено вище для числа $\sqrt{2}$.

2*) Довести, що $\forall l, k \in N: \sqrt[l]{k} \notin N \Rightarrow \sqrt[l]{k} \in I_p$.

3) Довести, що $\log_2 3 \in I_p$.

Справді, припустимо, міркуючи від супротивного, що $\log_2 3 = \frac{m}{n}, m, n \in N$. Тоді $2^{\frac{m}{n}} = 3$ або $2^m=3^n$, що неможливо.

4) Можна довести, що числа виду

$e, \pi, 2^{\sqrt{3}}, \pi^e, e^{\pi}, e^{\sqrt{2}}, \pi^2, \ldots$ є ірраціональними.

5) Довести самостійно, що:

а) якщо n>6, $n \in N$, то $\sin\frac{\pi}{n} \in I_p$;

б) якщо $r \in Q: r\pi \neq \frac{\pi}{2}n, n \in Q, r\pi \neq \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, то $\sin r\pi \in I_p$.

<u>Теорема</u> <u>1</u> . Алгебраїчна сума раціонального та ірраціонального числа є число ірраціональне:

$\forall \alpha, \beta \in R: \alpha \in Q, \beta \in I_p \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta \in I_p$.

Доведення.

Припустимо, що $\gamma \in Q$. Тоді $\pm\beta = \gamma - \alpha \in Q$, що суперечить умові.

<u>Теорема</u> <u>1</u>°. $\forall \alpha, \beta \in R: \alpha \in Q, \alpha \neq 0, \beta \in R \Rightarrow \gamma = \alpha\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \in I_p$.

Доведення аналогічне до доведення теореми 1. Наведені вище приклади 1 теореми переконують нас в тому, що і ірраціональних чисел в деякому розумінні "не менше", ніж раціональних. Справді, додаючи, наприклад, до $\sqrt{2}$ будь-яке раціональне число, ми одержимо число ірраціональне. Більше того, ми покажемо, що ірраціональних чисел значно "більше", ніж раціональних. Для цього введемо такі поняття.

<u>Означення</u>. Нескінченна множина називається зчисленною,

якщо між її елементами і натуральними числами можна встановити взаємно однозначну відповідність, або, як кажуть, її елементи можна пронумерувати (представити у вигляді послідовності).

В противному випадку нескінченна множина називається незчисленною.

Приклади.

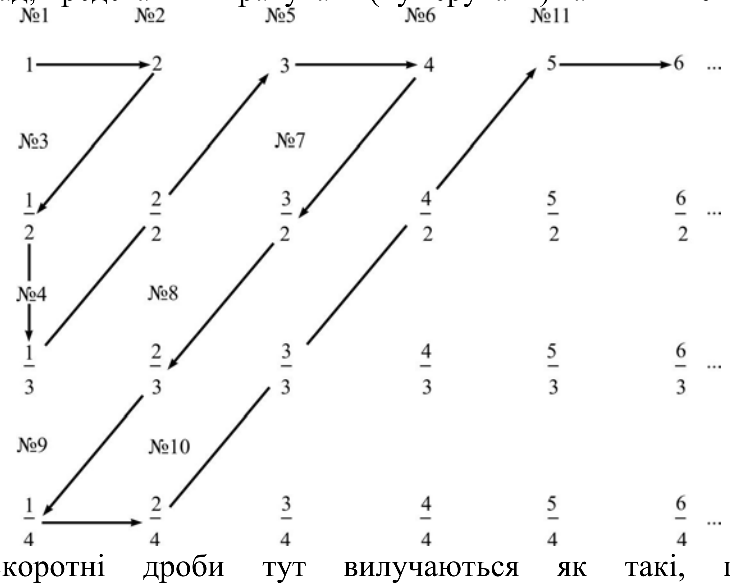
1) Множина цілих чисел Z=(...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...) є зчисленною. Дійсно: $1 \Leftrightarrow 0, 2 \Leftrightarrow 1, 3 \Leftrightarrow -1, 4 \Leftrightarrow 2, 5 \Leftrightarrow -2, 6 \Leftrightarrow 3, \ldots, n \Leftrightarrow a_n = \frac{n}{2}$, якщо n - парне і $\frac{n-1}{2}$ - якщо n - непарне.

1) Множина $\left(a + \sqrt{2} : a \in Z\right)$ є зчисленною.

Доведення аналогічне.

Теорема 2. Множина раціональних чисел Q є зчисленною.

Доведення. Множину додатніх раціональних чисел ми можемо, наприклад, представити і рахувати (нумерувати) таким чином:



Скоротні дроби тут вилучаються як такі, що вже пронумеровані.

2. Зчисленність всіх раціональних чисел встановлюється аналогічно до обгрунтування зчисленності множини Z.

Теорема 3. Множина дійсних чисел інтервалу

$(0{,}1)=\left(x\in R: x=0,x_1,x_2,...,x_i\in\overline{0{,}9}\right)$ є незчисленною.

Доведення. Припустимо, що елементи a даної множини можна пронумерувати:

$a_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}...,$

$a_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}...,$

$a_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}...,$

......

Утворимо число $a=0,a_1a_2a_3\ldots$ таке, що $a_1\neq a_{11}, a_2\neq a_{22},.....$Ясно, що $a\in(0{,}1)$. Разом з тим, воно не співпадає в жодним з чисел $a_i, i=1,2,3,....$

Зауважимо, що множина всіх, дійсних чисел, тим більше, буде незчисленною.

<u>Теорема</u> <u>3°</u>. Множина ірраціональних чисел I_p – незчисленна.

Доведення. Припускаючи, що множину I_p можна занумерувати, тобто $I_p=(b_1,b_2,\ldots)$ і враховуючи, що множину Q теж можна подати таким чином: $Q=(a_1,a_2,\ldots)$, ми приходимо до можливості представлення множини R у вигляді $R=(c_1=a_1,\ c_2=b_1,\ c_3=a_2,\ c_4=b_2,...)$, тобто до її зчисленності, що суперечить вже доведеному.

<u>Порівняння, десяткові наближення і зображення дійсних чисел.</u>

Кажуть, що два додатніх дійсних числа $a=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ і $b=b_0,b_1b_2\ldots b_n\ldots$ рівні між собою, якщо для довільного $\kappa=0,1,2,3,...,a_k=b_k$.

Кажуть, що $a<b$, якщо існує номер m такий, що $a_0=b_0,a_1=b_1,...,$ $a_{m-1}=b_{m-1},\ a_m<b_m$.

Введемо десяткові наближення додатнього дійсного числа точністю до цілих, десятих, сотих і т.д. з недостачею і надлишком відповідно таким чином:

$$\underline{a}_0=a_0,\underline{a}_1=a_0,a_1,\underline{a}_2=a_0,a_1,a_2,...,a_n=a_0,a_1,a_2...a_{n-1}a_n,...;$$

$$\overline{a}_0=a_0+1,\overline{a}_1=a_0,a_1+\frac{1}{10},\overline{a}_2=a_0,a_1a_2+\frac{1}{10^2},...,$$

$$\overline{a}_n=a_0,a_1a_2...a_{n-1}a_n+\frac{1}{10^n}=a_n+\frac{1}{10^n}...$$

Очевидно, що послідовність раціональних чисел $(\underline{a}_n)$є неспадною, а

$(\overline{a}_n)$ - незростаючою, причому, в силу принципу Архімеда для раціональних чисел різниця $\overline{a}_n - \underline{a}_n = \dfrac{1}{10^n}$ прямує до нуля при n прямує до ∞.

Зауважимо також, що $\forall 1, j \in N$ справедлива нерівність $\underline{a}_i \le a \le \overline{a}_j$, тобто $(\underline{a}_n)$ обмежена зверху (довільним з чисел $\overline{a}_j$), а $(\overline{a}_n)$ - обмежена знизу (довільним з чисел $\underline{a}_i$), див рис. 4 (без збереження масштабу).

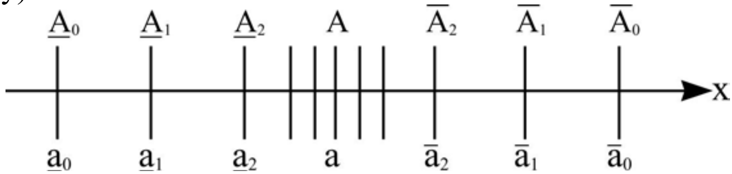


Рис. 4.

Точки прямої $\underline{A}_i$ - образи відповідних раціональних чисел $\underline{a}_i$, лежатимуть неправіше відповідних точок $\overline{A}_j$ - образів $\overline{a}_j$, причому відстань між точками $\underline{A}_i$ і $\overline{A}_j$ прямує до нуля при і прямує до нескінченності. Дані точки породжують геометричні відрізки $[\underline{A}_n, \overline{A}_n]$ - множину точок, що лежать нелівіше точки A_n і неправіше точки $\overline{A}_n$, кожен наступний із яких входить у попередній $\left(\forall n \in N \Rightarrow [\underline{A}_{n+1}, \overline{A}_{n+1}] \subset [\underline{A}_n, \overline{A}_n]\right)$, а довжина загального прямує до нуля $\left(|\underline{A}_n \overline{A}_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$.

Природньо припустити (принцип Кантора), що існує єдина точка А, спільна для усіх цих відрізків, яка лежить нелівіше всіх точок $\underline{A}_n$ і неправіше усіх точок $\overline{A}_n$, яку вважатимемо геометричним образом числа а.

Нижче ми покажемо, що й навпаки: будь-які послідовності, які мають зазначені вище властивості визначають єдине дійсне число, якому відповідає єдина точка на прямій.

Нехай тепер А - будь-яка точка числової прямої. Розглянемо дві послідовності раціональних чисел $(\underline{a}_n)$ і $(\overline{a}_n)$ такі, що:

1) $(\underline{a}_n)$ - неспадна, $(\overline{a}_n)$ - незростаюча;

2) $\overline{a}_n - \underline{a}_n \to 0$ при $n \to \infty$;

3) точки $\underline{A}_n$ і $\overline{A}_n$ даної прямої, які є образами відповідних чисел $\underline{a}_n$ і $\overline{a}_n$ знаходяться відповідно неправіше і нелівіше точки А.

Тоді число а, що визначатиметься даними послідовностями, відповідатиме даній точці А. Таким чином, між точками прямої і множиною дійсних чисел встановлюється взаємнооднозначна відповідність.

§3. Дії над дійсними числами.

Розглянемо послідовності із десяткових наближень $(\underline{a}_n)$, $(\overline{a}_n)$, $(\underline{b}_n)$, $(\overline{b}_n)$ дійсних чисел a і b. Складемо такі нові послідовності:

$$\underline{d}_n = \underline{a}_n + \underline{b}_n \quad \overline{d}_n = \overline{a}_n + \overline{b}_n$$
$$\underline{c}_n = \underline{a}_n - \underline{b}_n \quad \overline{c}_n = \overline{a}_n - \overline{b}_n$$
$$\underline{p}_n = \underline{a}_n \underline{b}_n \quad \overline{p}_n = \overline{a}_n \overline{b}_n \qquad (a \geq b)$$
$$\underline{g}_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} \qquad \overline{g}_n = \frac{\overline{a}_n}{\overline{b}_n} (b \neq 0)$$

Легко переконатись, що кожна з утворених послідовностей $(\underline{d}_n), (\underline{c}_n)$, $(\underline{p}_n)$, $(\underline{g}_n)$ є неспадною і обмеженою зверху (наприклад, $\underline{d}_n \leq a_0 + 1 + b_0 + 1$ при $\forall n \in N$, а кожна з $(\overline{d}_n)$, $(\overline{c}_n)$, $(\overline{p}_n)$, $(\overline{g}_n)$ - незростаючою і обмеженою знизу. Крім цього, різниці $\overline{d}_n - \underline{d}_n$, $\overline{c}_n - \underline{c}_n$, $\overline{p}_n - \underline{p}_n$, $\overline{g}_n - \underline{g}_n$ прямують до нуля при $n \to \infty$ (наприклад, $\overline{p}_n - \underline{p}_n = \frac{1}{10^n} \cdot \underline{d}_n + \frac{1}{10^{2n}} \to 0$ при $n \to \infty$, оскільки $\frac{1}{10^n} \to 0$, а $\underline{d}_n$ – обмежена величина). Покажемо, що зазначені пари послідовностей $((\underline{d}_n), (\overline{d}_n), \ldots)$ визначають єдиним чином деякі дійсні числа d, c, p, g, які ми і приймемо відповідно за суму, різницю (a>b), добуток, частку (b≠0) чисел a і b. З цією метою введемо такі означення.

<u>Означання</u>. Кажуть, що послідовність цілих чисел (a_n) стабілізується до деякого цілого числа a_0, якщо існує $n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n = a_0 \in Z$.

Наприклад, 10, 20, 40, 80, 80, 80, … (n_0=3, a_0=80).

Зауважимо, що будь-яка неспадна (незростаюча), обмежена зверху (знизу) деяким цілим числом a* послідовність цілих чисел (a_n) стабілізується до деякого цілого числа a_0^≤a*(a_0>≥a*).

<u>Означення</u>. Кажуть, що послідовність дійсних чисел (a_n)

$$a_1, a_{10}, a_{11}, a_{12} ...,$$

$$a_2, a_{20}, a_{21}, a_{22} ...,$$

$$a_3, a_{30}, a_{31}, a_{32} ...,$$

......

$$a_n, a_{n0}, a_{n1}, a_{n2} ...,$$

стабілізується до деякого числа $a_0=a_{00}, a_{01}, a_{02}$ ... (позначатимемо $a \to a_0$), якщо V $\forall k = 0,1,2,3,...$ k-ий стовпець відповідної нескінченної таблиці стабілізується до a_{0k} (тобто $\forall k \Rightarrow a_{nk} \to a_{0k}$ при $n \to \infty$.

Наприклад, послідовності $\underline{a}_n$ і $\overline{a}_n$ десяткових наближень дійсного числа a стабілізуються до даного числа.

Зауважимо, що з того, що послідовність (a_n) стабілізується до деякого числа a ($a_n \to a$), слідує що дана послідовність збігається до цього числи a ($a_n \to a, a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$).

Справді, $|a-a_n|=0,000...0a_{kn}a_{kn+1}... \to 0$ ігри $n \to \infty$ (а, отже, $K_n \to \infty$).

Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Наприклад,послідовність (a_n):

$$a_{2k} = 1,\underbrace{00...0}_{k\text{раз}}11...(k = 1,2,...);$$

$$a_{2k01} = 0,\underbrace{99...9}_{k\text{раз}}11...(k = 1,2,...);$$

збігається до 1, але не стабілізується.

<u>Лема</u>. (про стабілізацію послідовності).

Усяка неспадна (незростаюча) обмежена зверху (знизу) послідовність (a_n) (тільки скінченних, або тільки нескінченних десяткових дробів) стабілізується до деякого числа.

Доведення. Зауважимо спочатку, що вимога тільки скінченності (нуль в періоді), або тільки нескінченності усіх чисел a_n, є істотною, оскільки, наприклад, послідовність $a_1=a_3=a_{35}$=...=0,999..., $a_2=a_4=a_6$=1,000... не стабілізується.

Обмежимось надалі розглядом лише неспадної обмеженої зверху послідовності. Звідси випливатиме обмеженість і не спадання послідовності натуральних чисел (a_{n0}) нульового стовпця відповідної таблиці, а, отже, в силу зробленого вище зауваження, її стабілізація до деякого натурального числа a_{00},тобто існує $n_0 \in N : n \geq n_0 \Rightarrow a_{n0} = a_{00}$.

Аналогічно приходимо до висновку, що послідовність, чисел 1-ого стовпця, будучи обмеженою зверху (оскільки $0 \leq a_{1i} \leq 9$) і неспадною, починаючи з номера n_i,стабілізуватиметься до деякого числа a_{i0}, тобто існує $n_1 \in N\left(n_1 \geq n_0\right) : \forall n \geq n_1 \Rightarrow a_{n0} = a_{00}, a_{n1} = a_{01}$.

Карл Вейерштрасс

Ріхард Дедекінд

Георг Кантор

Методом повної математичної індукції можна переконатись, що послідовність чисел (a_{nk}) k-го стовпця стабілізується до деякого числа a_{0k}. Лема доведена.

Використовуючи дану лему, приходимо до висновку, що послідовності $\left(\underline{d}_n\right), \left(\underline{c}_n\right)$, $\left(\underline{p}_n\right)$, $\left(\overline{d}_n\right)$, $\left(\overline{c}_n\right)$, $\left(\overline{p}_n\right)$, стабілізуються (збігаються) до деяких чисел $\overline{d}, \overline{c}, \overline{p}, \overline{g}, \underline{d}, \underline{c}, \underline{p}, \underline{g}$, причому, в силу того, що різниці $\overline{d}_n - \underline{d}_n, \overline{c}_n - \underline{c}_n, \overline{p}_n - \underline{p}_n, \overline{g}_n - \underline{g}_n$ прямують до нуля при $n \to \infty$, матимемо $\overline{d} = \underline{d} = d, \overline{c} = \underline{c} = c, \overline{p} = \underline{p} = p, \overline{g} = \underline{g} = g$, так що d=a+b, c=a–b, (a>b), p=a·b, g=a/b (b≠0). При цьому бачимо, що дійсні числа d, c, p, g можна було б отримати за допомогою лише одного характеру відповідних послідовностей, наприклад, $\underline{d}_n, \underline{c}_n, \underline{p}_n, \underline{g}_n$.

<u>Основні властивості Множини дійсних чисел.</u>

1). Властивість порядку, тобто $\forall a, b \in R$ має місце одне і тільки одне із співвідношень: a=b, a>b, a<b.

<u>Наслідок 1</u>. $\forall a, b, c : a < b, b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивна властивість нерівностей).

Наслідок 2. $\forall a,b : a < b \Rightarrow$ існує $c \in R : a < c < b$ (щільність множини R).

2). Властивості дій додавання і віднімання:

а) $\forall a,b \in R \Rightarrow a + b = b + a$ (комутативна властивість дії додавання);

б) $\forall a,b,c \in R \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$ (асоціативна властивість дії додання);

в) $\forall a \in R \Rightarrow a + 0 = a$ (існування нульового елемента);

г) $\forall a \in R \Rightarrow a + (-a) = 0$ (існування протилежного елемента).

д) $\forall a,b \in R : a < b, \forall c \in R \Rightarrow a + c < b + c$.

3). Властивості дій множення і ділення:

а) $\forall a,b \in R \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ (комутативна властивість дії множення);

б) $\forall a,b,c \in R \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (асоціативна властивість дії множення);

в) $\forall a \in R \Rightarrow a \cdot 1 = a$ (існування одиничного елемента);

г) $\forall a \in R, a \neq 0 \Rightarrow a \cdot 1 = a/1$ (існування оберненого елемента);

д) $\forall a,b \in R : a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

2-3). $\forall a,b,c \in R \Rightarrow (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивний закон).

4). Принцип Архімеда. $\forall a \in R$ існує $n_a \in N : n_a > a$.

Доведемо одну Із сформульованих властивостей, наприклад,2а.

$$a + b = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n + a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n = b + a .$$

Аналогічно, грунтуючись на відповідних властивостях у множині Q, доводяться Інші властивості, які пропонуємо довести читачеві самостійно.

Зауважимо, що із принципу Архімеда випливають співвідношення виду :

$\lim i/n, \lim g^n = 0(|g| < 1), \lim 1/a^n = 0(a > 1)$ і т.п.

5). Властивість неперервності (повноти) дійсних чисел. (принцип вкладених відрізків Кантора).

Нехай задана послідовність відрізків $[a_n, b_n]=(x : a_n \leq x \leq b_n)$ таких, що кожен з наступних міститься у попередньому

$(\ldots \subset [a_n \cdot b_n] \subset \ldots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1])$?

, причому $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тоді існує єдине число (точка), яке одночасно належить усім цим відрізкам.

Доведення. Обмежимось розглядом випадку, коли $a_1 \geq 0$. Розглядаючи послідовність (a_n) лівих кінців відрізків, приходимо до висновку, що вона як неспадна і обмежена зверху, стабілізується до $\underline{c}$. Аналогічно послідовність (b_n) стабілізується до $\overline{c}$. При цьому $\forall n, m \in N a_n \le \underline{c} \le \overline{c} \le b_m$, зокрема, дана нерівність справедлива при n=m, тобто числа $\underline{c}$ і $\overline{c}$ належать усім відрізкам [a_n, b_n]. Покажемо, що $\underline{c} = \overline{c}$. Припустимо, що $\underline{c} > \overline{c}$, тобто $\overline{c} - \underline{c} = \varepsilon > 0$. Тоді $\forall n b_n > \overline{c} - \underline{\underline{c}} = \varepsilon > 0$, а це суперечить, що $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Лема доведена.

§ 4. Існування кореня, степеня, логарифма.

1. Степінь з натуральним показником.

Означення. Якщо $a \in R; a ? 0; n \in N$, то $a^{n} \stackrel{df}{=} a \cdot a \cdot .... \cdot a; a^{o} \stackrel{df}{=} 1$.

Властивості: (довести самостійно);

1°) $\forall n, m \in N \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

2°) $\forall n, m \in N, n \ge m \Rightarrow a^n / a^m = a^{n-m}$;

3°) $\forall n, m \in N \Rightarrow (a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

4°) а) Якщо a>1 , то $\forall n, m \in N : n > m \Rightarrow a^n > a^m$;

б) Якщо a<1, то $\forall n, m \in N : n < m \Rightarrow a^n < a^m$;

5°) $\forall a, b \in R, a \ge 0, b \ge 0; a > b \forall n \in N \Rightarrow a^n > b^m$;

6°) $\forall n \in N, \forall a, b, c \in R; a \ge 0, b \ge 0; \Rightarrow a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, (b \ne 0)$.

2. Степінь з цілим показником.

Означення. Якщо $a \in R, a > 0, n \in N$, то $a^{-n} \stackrel{df}{=} \dfrac{1}{a} n$.

Переконатися самостійно, що властивості 1°-6° переносяться на випадок, коли $n, m \in Z$.

3. Існування кореня.

Нехай a-довільне дійсне число, а n - натуральне. Виникав питання: чи існує число $b \in R(b > 0)$ таке, що b^n=a. У випадку існування такого числа b назвемо його коренем арифметичним n-го степеня із числа a і позначатимемо $\sqrt[n]{a} = b$.

<u>Теорема.</u> Існує арифметичний корінь довільного натурального степеня їв довільного додатнього дійсного числа.

<u>Доведення</u>. Компоненти $b_0, b_1, b_2, \ldots$ числа $b = b_0, b_1, b_2$ шукатимемо шляхом послідовного підбору, а саме через b_0 позначимо 0, або натуральне число таке, що $\underline{b}_0^{n} \overset{bf}{=} b_0^n \le a \le (b_0 + 1)^n \overset{bf}{=} \overline{b}_0^{\,n}$. Далі через b_1 позначимо таку із цифр, що $\underline{b}_1^{n} \overset{bf}{=} b_0^n, b_1^n \le a \le \left(b_0, b_1 + \frac{1}{10} \right)^n \overset{bf}{=} \overline{b}_1^{\,n}$ і т.д.

Черва b_m позначимо таку із цифр, що $\underline{b}_m^n \le a \le \overline{b}_m^{\,n}$ і п. д. В результаті матимемо дві послідовності: $(\underline{b}_m)$ - неспадну і обмежену зверху та $(\overline{b}_m)$ - незростаючу і обмежену знизу, причому $\overline{b}_m - \underline{b}_m \to 0$ при $n \to \infty$.

В силу леми про стабілізацію послідовності побудоване таким чином дійсне число b буде шуканим.

Зауважимо, що $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \left(\forall a, b > 0, n \in N \right)$. Дійсно

$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \right)^n = \left(\sqrt[n]{a} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b} \right)^n = a \cdot b$.

<u>4. Степінь з раціональним показником.</u>

<u>Означення</u>. Якщо $a \in R, a > 0, n \in Z, m \in N$, то $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}} \right)^n = \left(a^n \right)^{\frac{1}{m}}$.

Відзначимо також, що властивості 1°-4° п.1 степеня з натуральним показником залишаються справедливими і для степенів з раціональними показниками. Наприклад, доведемо властивість 1°:

4° а. Нехай $\alpha = \frac{m}{n}, \beta = \frac{p}{q}$. Тоді

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot g}{n \cdot g}} \cdot a^{\frac{p \cdot n}{n \cdot g}} = \sqrt[n \cdot g]{a^{m \cdot g}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt[n \cdot g]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[n \cdot g]{a^{m \cdot g} \cdot a^{p \cdot n}} = \sqrt[n \cdot g]{a^{m \cdot g + p \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot g + p \cdot n}{n \cdot p}} = a^{\frac{m \cdot g}{n \cdot p} + \frac{p \cdot n}{n \cdot g}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{n}{g}} = a^{\alpha + \beta},$$

Припустимо, міркуючи від супротивного, що при $a > 1, \frac{m}{n} > \frac{p}{g}$,

виконується нерівність $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{g}}$

Тоді $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n\cdot g} = a^{m\cdot g} < \left(a^{\frac{p}{g}}\right)^{n\cdot g} = a^{p\cdot n}$, а це суперечить 4 в п.1.2.

Теорема*. Для будь-якого $a \in R, a > 0 \alpha \in Q \Rightarrow \lim\limits_{\alpha \to 0} a^{\alpha} = 1$

Доведення.

Проведемо для частинного випадку, коли $\alpha = \frac{1}{n}, n \in N, a > 1$.

Маємо, що $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow a(1+\varepsilon)^n$, а останню нерівність, починаючи з деякого номера n_ε, ми можемо задовільним,спираючись на аксіому Архімеда.

В загальному випадку теорема може бути доведена з використанням теореми про границю проміжної змінної.

5. Степінь з довільним дійсним показником.

Означення. Нехай $a, b \in R, a > 0, b > 0, b = b_0 b_1 b_2 ... b_n$. Розглянемо послідовності $\underline{c}_n$ - неспадну і обмежену зверху та $\overline{c}_n$ - незростаючу і обмежену внизу:

$\underline{c}_0 = a^{b0} \le \overline{c}_0 = a^{b0+1}$

$\underline{c}_1 = a^{b0,b1} \le \overline{c}_1 = a^{b0,b1+\frac{1}{10}}$

$\underline{c}_2 = a^{b0,b1,b2} \le \overline{c}_2 = a^{b0,b1b2+\frac{1}{10}2}$

Легко бачити ,що $\overline{c}_n - \underline{c}_n = a^{b0,b1...bn}\left(1 - a^{\frac{1}{n}n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$ (як добуток обмеженої величини на нескінченно малу).

Єдине число c, до якого стабілізуються дані послідовності, приймемо за степінь в основою а і показником b ($c=a^b$).

Проілюструємо дане означення на прикладі степеня $3^{\sqrt{2}}$ (див. рис 5; без збереження масштабу).

$\sqrt{2} = 1{,}417...,$

$1 \underset{1}{<} 1{,}4 \underset{1{,}4}{<} 1{,}41 < \underset{\sqrt{2}}{...} < \sqrt{2} < \underset{1{,}5}{...} < 1{,}42 \underset{2}{<} 1{,}5 < 2;$

$3 < 3 < ... < 3... < 3 < 3$

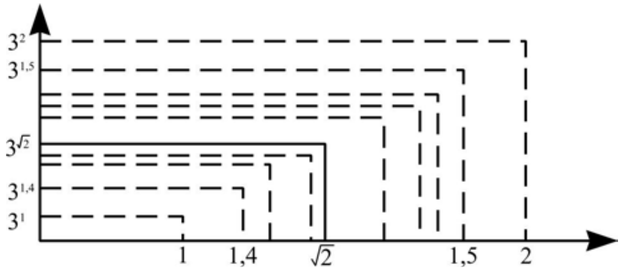


Рис. 5.

Зауважимо, що тут і в наступному пункті запропонований алгоритм для обгрунтування існування дійсного числа a^b не є ефектним при наближених обчисленнях відповідних степенів.

Наприклад при обчисленні $\sqrt[5]{3}$ ми зустрічаємось з двоякого роду наближеннями. А саме, при кожному раціональному наближенні числа $\sqrt[5]{3}$ ми змушенні будувати послідовності зв'язані з наближенням числа $\sqrt{2}$.

Можна переконатись, що властивості 1°-4° п.1 степеня з натуральним показником і теорема залишаються справедливими для степенів з дійсними показниками. Доведення цих фактів пропонуємо провести самостійно, використовуючи теорему про граничний перехід у нерівностях і теорему про грані цю проміжної змінної і.

<u>6. Існування логарифмів.</u>

<u>Означення</u>. Нехай $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Тоді $\log_a b \overset{df}{=} d_0 : a^c = b$.

<u>Теорема.</u> Логарифм довільного дійсного додатнього числа b за довільною дійсною додатньою, відмінною від і основою a існує.

<u>Доведення</u>. Шукаємо невідоме число c у випадку, коли a>1, b>1 у вигляді $c=c_0,c_1c_2...$ де натуральне число c_0 і цифри c_1,c_2,c_3 .... підбираємо таким чином, щоб:

$\underline{d}_0 \overset{df}{=} a^{\underline{c}1} \leq b \leq a^{\bar{c}0} \overset{df}{=} d_0$;

$\underline{d}_1 \overset{df}{=} a^{\underline{c}1} \leq b \leq a^{\bar{c}1} \overset{df}{=} d_1$.

Легко бачити, що побудовані послідовності $(\bar{d}_n)$і$(\underline{d}_n)$ стабілізуються до числа b. Тоді $\log_a b = c$.

§5. Різні підходи до побудови творі і дійсного числа 1 введення принципу неперервності.

В кожній з цих теорій використовується в тій чи іншій мірі множина раціональних чисел (як вихідна множина) і з неї зразу дістають всю сукупність дійсних чисел, які в порівнянні з множиною раціональних чисел мають ще одну властивість - неперервність (повноту). Ця спеціальна властивість,сформульована в рівних теоріях по-різному, є ідейною основою єдиного конструктивного принципу, за яким здійснюється розширення. У явлення і підходи еквівалентних між собою понять неперервності і повноти були різними. Один з них грунтувався на прагненні встановити взвємнооднозначну відповідність між числами і точками прямої та представленнях про неперервність (повноту) прямої .. Що ж розуміти під неперервністю прямої? Це пряма без щілин? А що розуміти під прямою без щілин (дірок, перерізів)? Ріхард Дедекінд ситуацію неперервності прямої описує так: "Кожна точка р прямої ділить пряму на дві ' частини таким чином,що кожна точка однієї частини розташована лівіше кожної точки іншої. Я вбачаю тепер суть неперервності в зворотньому принципі, тобто в наступному: "Якщо Всі точки прямої розпадаються на два класи такого роду , що кожна точка першого класу лежить лівіше від кожної точки другого класу, то існує одна, і лише одна точка , яка ділить пряму на два класи, - це розтин прямої на два куски. [3].

Факт неперервності прямої можна охарактеризувати ще й принципом Г.Кантора про існування єдиної точки системи вкладених і стягувальних сегментів (див. § 3). Існують також інші принципи та їх різновидності, які характеризують неперервність прямої.

Ми намагались конструювати теорії дійсного числа, притримуючись ідей Вейєрштрасса. А саме, на додатне дійсне число ми давились, як на нескінченний символ виду:

$$a = a_0 a_1 a_2 ... a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...,$$

де $a_0 \in N, a_i \in (0,1,...,9)$

Тут ми а самого початку постулюймо, що цей символ мав смисл (є дійсним, природнім) або іншими словами, існує

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, тобто таке означення дійсного числа передбачав неперервність множини R. 1 принцип Кантора для числових відрізків може бути доведений як теорема. Він потрібен лише як аксіома,стосовно геометричних відрізків з метою обгрунтування взаємнооднозначної відповідності між множиною R і числовою прямою.

Зауважимо, що в цьому випадку задати дійсне число $a=\pm a_0,a_1a_2\ldots$ означає задати закон (правило), згідно з яким одержується натуральне число a_0 та цифри a_1, a_2,... . Причому при побудові теорії дійсного числа можна було б використовувати не тільки десяткову систему числення, а й двійкову, вісімкову, і інші.

Із перелічених властивостей 2)-3) дійсного числа слідує, що множина R із введеними у ній діями додавання і множення $(\forall a, b \in R$ існує $c, d \in R : c = a + b; d = a \cdot b)$, як і множина раціональних чисел Q, є адитивною і мультиплікативною групою і полем.

У даній множині вводять поняття модуля елемента а - відстані відповідної точки від початку координат:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{яякщ a} \geq 0 \\ -a, \text{яякщ a} < 0 \end{cases}$$

та відстані $\rho(x, y)$ між елементами (точками) $x, y : \rho(x, y) = |y - x|$.

Причому, легко бачити, що введена функція (відстань,метрика) $\rho(x,y)$ має такі властивості:

1) $\forall x, y \in R \Rightarrow \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\forall x, y \in R \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\forall x, y, z \in R \Rightarrow \rho(x, y) \leq 0, \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

А це означає, що множина R із введеною метрикою утворює метричний простір. Можна довести, що цей простір є повним, тобто будь-яка фундаментальна послідовність в цьому просторі має границю. Зауважимо, що із існування границі послідовності завжди слідує її фундаментальність. Обернене твердження, взагалі кажучи, не правильне.

Так, у просторі Q із означеною вище відстанню послідовність десяткових наближень a_n числа V2 є фундаментальною, але не збігається в ньому. Тобто множина Q на відміну від множини R не в повною(неперервною). З цієї точки зору на множину R можна дивитись як на поповнення множини Q за допомогою множини ірраціональних чисел I_p. Факт повноти простору R може бути одним із еквівалентів принципу неперервності. Наведемо також без доведення інші аналоги принципу неперервності:

а) Довільна обмежена зверху (знизу) деяким числом M непорожня множина $A \subset R$ має точну верхню (нижню) грань C ≤ M (C ≥ M);

б) Якщо множину дійсних чисел R розбити на дві непорожні множини: $R = A \cup B$ так, що $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a < b$, то або існує число C, найбільше в A, а, отже, в B немає найменшого, або у множині B існує найменше число C, а в A немає найбільшого.

в) Якщо $Q_1, Q_2 \subset R : \forall x_1 \in Q_1, \forall x_2 \in Q_2 \Rightarrow x_1 \le x_2; \forall \varepsilon > 0$ існує $y_1 \in Q_1$, $y_2 \in Q_2 : y_2 - y_1 < \varepsilon$,то існує і $x \in R : x_1 \le x \le x_2 \left(\forall x_1 \in Q_1, \forall x_2 \in Q_2\right)$.

В основу побудови теорії дійсного числа Кантор покладав клас еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей раціональних чисел. Саме такого роду послідовностями є послідовності $\left(\underline{a}_n\right)$ і $\left(\overline{a}_n\right)$ десяткових наближень дійсного числа a.

Дійсним числом Кантор називав не деякий символ відомої або невідомої природи (як це робить Вейєрштрасс), а клас еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей раціональних чисел. Очевидно, що для характеристики так означеного дійсного числа можна взяти одну з послідовностей окремого класу. Наприклад, для побудови (характеристики, наближення) дійсного числа a досить взяти послідовність $\left(\underline{a}_n\right)$, або довільну її підпослідовність. При цьому число a, яке визначається фундаментальною послідовністю $\left(a_n\right) \subset Q$, буде раціональним або ірраціональним (нової природи) в залежності від того, чи (a_n) збіжна в 0, чи розбіжна. Для того, щоб ввести, наприклад, дію додавання z=x+y, беремо деякі представники (x_n) і (y_n) класів еквівалентних між собою послідовностей, які визначають числа x, y. Далі конструюємо нову послідовність $\left(z_n\right): z_n = x_n + y_n \left(\forall n \in N\right)$. Далі фундаментальна (чому?) послідовність породжує деяке дійсне число z, яке й приймаємо за суму чисел x та y.

В основу теорії дійсного числа за Дедекіндом покладено поняття перерізів в полі раціональних чисел. Кажуть, що здійснено переріз Дедекінда в полі Q, якщо множину Q подано у вигляді суми непорожніх підмножин Q_1 і Q_2 $Q = Q_1 \cup Q_2$ таких, що

1) $\forall x_1 \in Q_1$ і $\forall x_2 \in Q_2 \Rightarrow x_1 < x_2$

2) $\forall x \in Q \Rightarrow x \in Q_1$ і $x \in Q_2$

Переріз g, породжиний класами Q_1 і Q_2 позначатимемо через $g=Q_1/Q_2$. Неважко обгрунтувати існування тільки трьох видів такого роду перерізів:

I. У першому класі (Q_1) є найбільше число, а в другому (Q_2) немає найменшого.

II. У першому класі немає найбільшого елемента, а в другому є найменший.

III. У першому класі немає найбільшого числа, а в другому - найменшого.

Тоді дійсним числом назвемо довільний із перерізів Дедекінда, а ірраціональним - переріз третього виду.

Добуток двох чисел $x' = Q_1'/Q_2'$ і $x'' = Q_1''/Q_2''$ означимо як число $x = x' \cdot x''$ таке, що для $\forall x_1' \in Q_1', x_1'' \in Q_1'', x_2' \in Q_2', x_2'' \in Q_2'' \Rightarrow x_1' \cdot x_1'' \le x \le x_2' \cdot x_2''$.

При цьому будемо вважати, що $\alpha = Q_{1\alpha} / Q_{2\alpha} \le \beta = Q_{2\alpha} / Q_{2\beta}$, якщо $Q_{1\alpha} \subset Q_{2\alpha}$.

Аналогічно можуть бути означені інші арифметичні операції з R та доведені їх властивості.

На закінчення відзначимо, що в будь-якому із підходів до побудови теорії дійсного числа у деякій множині вводяться поняття одиничного, нульового елемента, співвідношень ">" ("<") "=" та дій "+", "*", ("-", ":") із яких випливають:

1°. Властивість упорядкованості;

2°. Властивості дії додавання;

3°. Властивості дії множення;

4°. Принцип Архімеда;

5°. Принцип неперервності.

<u>Аксіоматичний же підхід</u> до теорії дійсного числа полягає в тому, що вводиться деяка множина об'єктів із діями, що задовольняють умовам (аксіомам) 1°- 5°. А із останніх виводяться всеможливі (відомі нам) твердження стосовно множини R.

§6. Задачі на дійсні числа.

I. Три визначні нерівності.

1. Нерівності БернуллІ.

а) $\forall n \in N, \forall a,b \in R^{+} \Rightarrow (a+b)^{n} \geq a^{n} + na^{n-1}b$.

Зокрема, при a=1, b=a ≥ 0 матимемо: $(1+a)^n \geq 1+na$.

Доведення:

$$\underline{(a+b)^{n}} = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n} + \left(\underbrace{\underbrace{a\ldots a}_{n} b + \ldots + b \underbrace{a\ldots a}_{n-1}}_{n} \right) +$$

$$+\left(\left(\underbrace{aa\ldots a}_{n-2} \cdot b \cdot b + \ldots\right) + \ldots\right) \geq a^{n} + na^{n-1}b$$

б) $\forall n \in N, \forall a,b \in R^{+}, a+b \geq 0 \Rightarrow (a+b)^{n} \geq a^{n} + na^{n-1}b$.

Доведення методом повної математичної індукції. (Провести самостійно).

в) $\forall p \geq -1, \forall n \in N \Rightarrow \sqrt[n]{1+p} \leq 1 + \frac{p}{n}$

Доведення негайно слідує з б).

II. Перша нерівність Коші.

$$\forall a_i, b_i \in R, i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

Доведення.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(a_1^2 b_1^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2\right) + \left(2a_1 b_1 a_2 b_2 + 2a_1 b_1 a_3 b_3 + \ldots + 2a_{n-1} b_{n-1} a_n b_n\right);$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2\right) + \left(\left(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 + a_2^2 b_1^2\right) + \ldots + \left(a_{n-1}^2 b_n^2 + a_n^2 b_{n-1}^2\right)\right).$$

Залишається показати, що $\forall a,b,c,d \in R \Rightarrow a^2 b^2 + c^2 d^2 \geq 2abcd$. А остання нерівність очевидна.

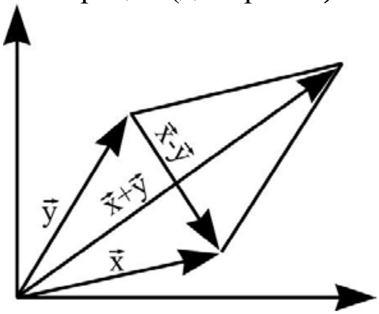
У випадку n=2 або n=3 дана нерівність негайно слідує із формули дискалярного добутку векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} .$$

Наслідок. Нерівність Мінковського (трикутника).

$$\forall x_i y_i \in R, i=1,n \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Доведення: проводиться шляхом піднесення обох частин нерівності до квадрата з використанням попередньої нерівності. У випадку n=2 нерівність Мінковського допускає просту геометричну ілюстрацію (див. рис. 5)



$$\vec{x}=(x_1,x_2), \vec{y}=(y_1,y_2)$$
$$\vec{x}\pm\vec{y}=(x_1\pm y_1, x_2\pm y_2)$$
$$|\vec{x}\pm\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$$

Рис.5.

3. Друга нерівність Коші.

$$\forall a_1,...,a_n \in R^+ \Rightarrow \frac{a_1+...a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\ .$$

Доведення методом повної математичної індукції.

При k=2 нерівність очевидна і допускає просту геометричну ілюстрацію (див. рис. 6).

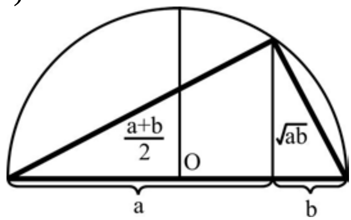


Рис.6.

Припускаємо, що нерівність справедлива при k=n, доведемо її для k=n+l:

$$\left(\frac{a_1+...a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{\frac{a_1+...+a_n}{n}\cdot n}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(\frac{\sqrt[n]{a_1...a_n}\cdot n}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$=\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}+\frac{a_{n+1}-\sqrt[n]{a_1...a_n}}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^{n+1}+(n+1)\cdot\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^{n}\times$$

$$\times\frac{a_{n+1}-\sqrt[n]{a_1...a_n}}{n+1}=\left(a_1...a_n\right)\cdot\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}+a_{n+1}-\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)=a_1a_2...a_{n+1}$$

II. Різні задачі.

1. Довести,що ціле число а, яке не є кубом цілого числа, не може бути кубом одного із раціональних чисел.

2. Довести ірраціональність чисел виду:

$\sqrt[3]{3+\sqrt{2}},\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. Довести, що $\frac{\pi}{3}<\sqrt{2},\frac{\pi}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Довести, що якщо катети прямокутного трикутника мають цілочисельну довжину, то його гіпотенуза також має або цілочисельну довжину, або неспіввимірна з катетом (її довжина є ірраціональним числом).

5. Нехай $a,b,c\in Z$. При якій умові рівняння $ax^2+bx+c=0$ має раціональні корені. Довести необхідність і достатність цієї умови.

6. а) Довести, що $\inf\left(|\sin n|:n\in N\right)=0$

Вказівка: потрібно довести, що яким би малим не було число ε>0, завжди можна підібрати числа n і $m\in N$ такі, що $|n-m\pi|<\varepsilon$, або $\left|\frac{n}{m}-\pi\right|<\frac{\varepsilon}{m}$

б) Довести, що $\sup\left(|\sin n|:n\in N\right)=1$.

7. а) Довести, що $\forall n\in N:n>6\Rightarrow\sin\frac{\pi}{n}\in I_p$.

б) Довести, що $\forall g\in Q:g\pi\neq\frac{\pi}{2}\cdot n;g\pi\neq\pm\pi m,n\in Z\Rightarrow\sin g\pi\in I_p$.

8. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}2^n a_n=\frac{\pi}{3}$, де $a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n}},a_0=6$.

9. Довести, що число $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}}$ (при довільному натуральному n,n>2) є ірраціональним.

Розв’язування:

Випадок а): $n \neq m^2, m \in N$. Припустимо, що $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}} = k$,

$k \in Q, \sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}} = k^2 - 1 \in Q \sqrt{3+...+\sqrt{n}} =$

$= \left(\left(k^2-1\right)^2 - 2\right) \in Q, ..., \sqrt{n} \in Q$

випадок б):

$n = m^2, m > 1, m \in N \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}} = \sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{m^2+m-1}}} = a$

Припустимо, що $a \in Q \Rightarrow \sqrt{m^2+m-1} \in Q$. Але $(m-1)^2 < m^2 - m - 1 < m^2$, $m^2 < m^2 + m - 1 < (m+1)^2$

10. Які цифри стоять у розрядах і десятих у десятковому записі числа $a = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1980}$.

Розв'язування:

1) Позначимо $m = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1980} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{1980} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{980} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{980}$

тоді $m > a = m - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{1980} > m - 0{,}5^{1980} > m - 0{,}1$

2) Доведемо, що m є цілим. Позначимо $a_n = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n} +$
$+ \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{n} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{n}, \alpha_n = 5+2\sqrt{6}, \beta_n = 5-2\sqrt{6}$

Тоді $a_{n+1} = \left(5+2\sqrt{6}\right)\alpha_n + \left(5-2\sqrt{6}\right)\beta_n$,

$a_{n+2} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^2 \alpha_n + \left(5-2\sqrt{6}\right)^2 \beta_n = 10a_{n+1} - a_n$

Оскільки $a_0 = 2, a_1 = 10 \in N$, то $a_n \in N(\forall n)$ а, зокрема $m = a_{980} \in N$

3) Знайдемо останню цифру числа m. Оскільки $a_n + a_{n+2} = 10a$, то $\forall n\left(a_n + a_{n+2}\right) \vdots 10$ А отже,

$a_{n+4} - a_n = \left(\left(a_{n+4} + a_{n+2}\right) - \left(a_{n+2} + a_n\right)\right) \vdots 10$ числа $a_2, a_4, a_6, a_{110}, ..., a_{990}$ мають однакові залишки при діленні на 10. Оскільки $a_2=98$, то натуральне число $m=a_{990}$ закінчується цифрою 8.

4) Нехай $m=b_k b_{k-1}...b.,8,0...$ Тоді $b_k...b_2 8,0...0<a<b_k...b_2 8,00...$ Звідси $a=b_k...b_2 7,9a_2a_3...$.

11) $a, b, c > 0, a, b, c \in Q$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c \Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b} \in Q$

Розв'язування:

$$\sqrt{a}=c-\sqrt{b}\Rightarrow a=c^2-2\sqrt{b}c+b\Rightarrow\sqrt{b}=\frac{c^2+b^2-a}{2c}\in Q\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow\sqrt{a}=c-\sqrt{b}\in Q$$

12) Нехай через h_n позначена остання відмінна від нуля цифра десяткового запису числа n_1. Довести,що число
$0,h_1h_2h_3h_4...$ є ірраціональним.

Література:

1. Андронов И.К. Математика действительных и комплексних чисел. М.:Просвещение, 1975.
2. Андронов И.К., Окунев А.К.Арифметика рациональных чисел М.,1971.
3. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. изд. 4-е. Пер. С.О.Шатуновокого. Одесса, 1923.
4. Бугров Я.С., Никольский СМ. Диференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
Б. Макаров И.П. Теория функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1968.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс диференциального и интегрального исчисления, т.1, М.: Наука, 1970.
7. Фіхтенгольц Г.М. Ірраціональні числа в середній школі. В зб. питання викладання математики. Алгебра, К.: Радянська школа, 1951.