

Бомба А.Я., Сінчук А.М., Яроцк С.В.

**МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У
НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ
КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

Бомба А.Я., Сінчук А.М., Яроцjak С.В.

**МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У
НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ
КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Рівне – 2016

УДК [519.876.5:530.182]:553.98
ББК 22.161.68
Б 80

Затверджено до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № __ від __. __.2016р.)

Відповідальний редактор:

Я.Г. Савула, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка

Рецензенти:

І. В. Бейко, д.т.н., проф., професор кафедри математичної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»,

Л. М. Журавчак, д.т.н., ст.н.с., старший науковий співробітник відділу геоелектромагнітних методів Карпатського відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України,

П.М. Мартинюк, д.т.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування.

Бомба А. Я., Сінчук А. М., Ярощак С. В. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень. – Рівне: РДГУ, 2016. – 218 с.

Монографію присвячено математичному моделюванню процесів витіснення флюїдів у нафтогазових пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву та розвитку числових методів квазіконформних відображень розв'язання відповідних крайових задач одно- та багатофазної фільтрації. Орієнтована на спеціалістів з математичного моделювання та обчислювальних методів, інженерів, аспірантів, магістрантів, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

УДК [519.876.5:530.182]:553.98
ББК 22.161.68
Б 80

© А. Я. Бомба, А. М. Сінчук,
С. В. Ярощак, 2016

© Рівненський державний гуманітарний університет, 2016

ISBN

ПЕРЕДМОВА

Монографію присвячено розвитку числових методів квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення флюїдів у нафтогазових пластах за умов взаємовпливу визначальних факторів процесу на характеристики середовища, зокрема, з урахуванням впливу тріщин гідророзриву.

Проведено математичне моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах, на випадок урахування впливу тріщин гідравлічного розриву та вирв (утворених внаслідок дії вибуху зарядів) на присверловинну ділянку. З використанням квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено підхід до моделювання витіснення однієї рідини іншою у горизонтальних однорідних та зонально-неоднорідних пластах за умов урахування впливу тріщин ГРП та побудовано числові алгоритми розв'язування відповідних крайових задач, які, зокрема, адаптовано на випадок визначення усередненого коефіцієнта фільтрації привибійної зони свердловин за відомим дебітом експлуатаційної свердловини. Використовуючи ідею поетапної параметризації характеристик середовища та процесу, розроблені нові ефективні алгоритми розв'язування відповідних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники, що описують процеси зворотного впливу градієнтів квазіпотенціалу (більших за їх критичні значення) на фільтраційні характеристики середовища. На основі побудованих розв'язків таких нелінійних задач, коли коефіцієнт фільтрації та компоненти тензора фільтрації залежать як від координат фізичної області фільтрації, так і від шуканих функцій течії, потенціалу та його градієнту досліджено характер формування збурених зон середовища.

Відповідну методологію математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних нафтогазових пластах узагальнено на випадок руху більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. При цьому розроблені числові алгоритми розв'язання відповідних задач двофазної фільтрації (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат критичних точок типу «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо) модифіковано шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу.

На цій основі розроблено комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії за умов зворотнього впливу та розвинуто числові методи квазіконформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації у тріщинувато-пористих середовищах. Проведено узагальнення запропонованої в [3-5] методики дослідження двофазної фільтрації (що описувалася моделлю Баклея-Левретта) на випадок неоднорідних нафтогазових пластів, за умов урахування капілярного ефекту та існування тріщин гідравлічного розриву. Зокрема, розроблено алгоритми розрахунку процесів багатофазної фільтрації у нафтогазових пластах за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом поповнення існуючого фонду свердловин, при цьому, проаналізовано і описано всі можливі випадки формування течії залежно від значень керуючого потенціалу та виділено «ключові» типи задач на знаходження тих його значень, які забезпечували б оптимізацію певних функціоналів (витрат, перетоків тощо), зокрема, з метою уникнення формування

(значних по своїй площі) застійних зон. Розвинуто розроблені методи [2-4] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу [1]. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, зон прогріву тощо. На основі комбінації і модифікації методів квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено підхід до розв'язання відповідних крайових задач. Побудовано методику комплексного моделювання двофазної фільтрації у просторово-викривлених пластах за умови неповного витіснення, оптимізації параметрів та керування. Створено програмний комплекс, що реалізує розроблені в роботі алгоритми, які є універсальними, зокрема, придатними для вирішення досить важливої технічної задачі сьогодення – розрахунку ефективності впливу гідравлічного розриву пласта на фільтраційні характеристики процесу витіснення.

Зміст

ПЕРЕДМОВА	6
Розділ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ТА ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ПРИ РОЗРОБЦІ НАФТОГАЗОВИХ РОДОВИЩ	9
1.1 Числові методи квазіконформних відображень розв’язання нелінійних фільтраційних задач у пористих середовищах	9
1.2 Огляд праць сучасного стану та тенденцій розвитку моделювання процесів витіснення за наявності тріщин гідро розриву	19
Розділ 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ У НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ	24
2.1 Моделювання нелінійної фільтрації у низькопроникних продуктивних пластах.....	24
2.2 Математичне моделювання процесу витіснення нафти законтурною водою з урахуванням включень скінченної проникності	36
2.3 Моделювання поведінки системи «нагнітальна- експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою	56
2.4 Методика розв’язання крайових задач інтенсифікації процесу витіснення у нафтових пластах за умов збурення присвердловинної зони пласта шляхом дії вибуху	71
2.5 Моделювання процесу витіснення у низькопроникних пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву	78
2.6 Методика визначення усередненого коефіцієнта фільтрації присвердловинної ділянки пласта	86

Розділ 3 МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В УМОВАХ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ.....	93
3.1 Математичне моделювання двофазної фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин гідро розриву	93
3.2 Методи комплексного аналізу при моделюванні трифазної фільтрації в нафтогазових пластах	104
3.3 Математичне моделювання процесів витіснення нафти в неоднорідних пластах з урахуванням впливу капілярних сил	110
3.4. Розробка спеціальних схем розміщення свердловин при площовому заводненні за умов оптимізації параметрів та керування	120
3.5. Про один числовий метод комплексного аналізу розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах	140
Розділ 4 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМОРЕЖИМУ	151
4.1 Моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм за умов впливу тріщин гідро розриву	151
4.2. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термо-гравітаційного дренажу	164
4.3 Математичне моделювання термодинамічних ефектів у присвердловинній зоні газового пласта за умов гідравлічного розриву	176
Розділ 5 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У У ПРОСТОРОВО-ВИКРИВЛЕНИХ ПЛАСТАХ	187

5.1 Один метод комплексного аналізу розв'язування задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах	187
5.2 Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-викривлених пластах	195
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	206

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ТА ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ПРИ РОЗРОБЦІ НАФТОГАЗОВИХ РОДОВИЩ

У розділі наведено короткий огляд праць та аналіз проблем, що стосуються сучасного стану досягнень у сфері математичного моделювання процесів витіснення при розробці нафтогазових родовищ за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву (ГРП). Представлено основні моделі процесів витіснення та числові методи комплексного аналізу розв'язання відповідних крайових задач. Здійснено загальну постановку завдань досліджень.

1.1. Числові методи квазіконформних відображень розв'язання нелінійних фільтраційних задач у пористих середовищах

Основоположником розвитку теорії фільтрації став видатний французький інженер Г. Дарсі, який досліджуючи рух рідин у пористих середовищах встановив і опублікував (у 1856 р.) лінійний закон фільтрації: $\vec{v} = -k_{\Phi} \vec{I}$, де \vec{v} – вектор швидкості фільтрації, \vec{I} – вектор градієнта напору, k_{Φ} – коефіцієнт фільтрації [178]. Теоретичне дослідження закону Дарсі експериментально підтверджено його співвітчизниками Ж. Дюпої та Уїтейкером [181, 200].

В сучасному трактуванні закон Дарсі має дещо модифіковану форму запису, в якій розділено вплив на процес витіснення властивостей пористого середовища і рідини, що рухається в ньому [22-27, 55, 150]:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p,$$

де k – коефіцієнт проникності середовища;

μ – динамічна в'язкість рідини;

p – тиск.

У роботі розглянуто процеси витіснення у нафтогазовому пласті, обмеженому зовнішнім непроникним контуром (L), а також нагнітальними (L_*) та експлуатаційними (L^*) свердловинами за наявності тріщин гідророзриву (G_z^λ , де λ - кількість тріщин) скінченої проникності, тоді (1.1) матиме вигляд [64, 123, 129, 136, 155, 179, 196]:

$$v_l = \frac{k \cdot \mathcal{K}_l}{\mu_l} \text{grad} p,$$

де v_l - швидкість фільтрації l -ої фази за умови, що $\text{div} \sum_{i=1}^l v_i = 0$,

$k = \alpha \sigma$ – коефіцієнт проникності середовища, α - деякий емпіричний параметр, що визначається експериментально;

σ - коефіцієнт пористості середовища: $\sigma = \sigma_0$ - ґрунту, $\sigma = \sigma_\lambda$ - пористість λ -ої тріщини ГРП;

$\mathcal{K}_l = \mathcal{K}_l(s)$ - відносні фазові проникності (є заданими функціями насиченості, температури, тощо, $s = s_l(x, y, t)$ - насиченість пласта l -ою фазою, $\sum_{l=1}^d s_l = 1$);

μ_l - в'язкість l -ої фази, яка залежить від насиченості, температури, вмісту інших хімічних елементів у середовищі.

У більшості з випадків, цілісно дослідити процес витіснення, у такому пласті, та охарактеризувати взаємовплив самих свердловин – складно, тому під час розв'язування відповідних крайових задач обираємо деякий контур живлення (еквіпотенціаль) навколо свердловини, чи системи свердловин і проводимо дослідження у відповідному фрагменті

пласта. Зокрема, така задача матиме самостійний характер у випадку витіснення рідких флюїдів із пласта законтурною водою.

На початковому етапі досліджень, для більш детального представлення методології розв'язання відповідних крайових задач методами квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, у роботі розглядається спрощений випадок: витіснення однофазної фільтрації (модель «різнокольорових» рідин), яку вперше запропонував у 1932 р. Герольд С. П. [63]. В рамках такої моделі область фільтрації повністю заповнена однорідною рідиною з незмінними характеристиками, наприклад, такими ж, як у витісняємій рідині - нафті. Термін «різнокольорові» рідини введено ще в роботах Голуб'євої О.В. [65], Данілова В. Л. [67, 68], Маскета М. [120, 121] та т. ін., де під різнокольоровими рідинами у них розуміються мічені частинки (уявним кольором), що є однаковими за своїм фізичними та механічними властивостями (густина, в'язкість тощо), тобто нема дійсного зафарбування (фактично простежується переміщення первісної межі розділу рідин при відомому поле тисків). Такий підхід значно спрощує алгоритм розв'язування відповідної задачі, який дозволяє встановити положення границі розділу рідин у різні моменти часу і відповідно місцезнаходження значних по своїй площі застійних зон (сильно-насичених ділянок) та водонасичених ділянок, об'єму витісненого флюїду у пласті на протязі визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення.

Задача про витіснення розглядалася ще в так званій «поршневій» постановці, напр., як у роботах [128, 133, 144, 163], згідно якої передбачалося повне витіснення нафти із пласта. Базуючись на ідеях закладених в поршневій моделі відповідну задачу досить часто вдається

сформулювати як задачу з рухомою границею, припускаючи, що обидві рідини фізично не відрізняються. Однак поршнева модель у випадку однорідного пласта дуже спрощено відображає реальну картину розробки нафтових родовищ в умовах їх заводнення. Оскільки у припущенні однорідності пласта при використанні такої моделі спостерігається повністю безводний період розробки, що суперечить фактичним даним, згідно з якими існує досить довгий період, коли із свердловин відбирається як нафта так і вода. Варто також відмітити, що при цьому процес витіснення ніколи не буває повним, і в пласті утворюються значні по своїх розмірах зони сумісного руху декількох рідин.

Пізніше такі вені як Buckley S.E., Leverett M.C. [171], Rappoport L.A., Leas W.I. [195] створили моделі багатофазної фільтрації – «різнофазних» рідин, де не відслідковується чітка межа між фазами, зокрема, ними вводиться залежність коефіцієнта фазової проникності від насиченості. У цих моделях спільним є те, що система рівнянь, яка описує двофазну фільтрацію складається з нелінійного гіперболічного рівняння для фазової насиченості і еліптичного рівняння для тиску (квазіпотенціалу).

В подальшому у роботі, на основі теорії Баклея-Лeverетта, розглядається процес витіснення багатофазної фільтрації, де рідини рухаються сумісно і незалежно одна від одної, так ніби границі між ними є твердими стінками. При моделюванні відповідних процесів потрібно враховувати особливості фільтрації рідин, що рухаються у пласті, та співвідношення їх в'язкостей для отримання адекватних прогнозів згідно обраної моделі.

За останній період часу числовому розв'язуванню задач двофазної фільтрації присвячені роботи Колдоби А.В. [96-97], Коновалова А.Н. [102, 103], Бомби А.Я., Ярошак С.В. [19, 23-27] та інших.

Іншою достатньо розповсюдженою моделлю витіснення є модель Маскет-Леверетта, в якій, на відміну від моделі Баклея-Леверетта, враховуються капілярні сили і до системи рівнянь додається закон Лапласа. Подальшим дослідженням цієї моделі займалися такі вчені як Брусиловський А. И. [49], Васильєв В. П. [56], Зубов Н. В., Марченко Н. А. [119], Монахов В. Н. [124] і багато інших.

Наукові досягнення попередніх років у теорії фільтрації та розробці методів розв'язання відповідних задач знайшли відбиток в обширній науковій літературі, що широко застосовується як до задач нафтогазової промисловості, механіки ґрунтів, так і до проектування гідромеліоративних та гідротехнічних конструкцій. Це пов'язано, в першу чергу, з особливостями протікання відповідних процесів та введенням різного роду інженерних схематизацій об'єктів дослідження, що вимагало побудови якісних методів їх розв'язання. Розробці та розвитку методів розв'язання відповідних задач присвячено значну кількість праць як іноземних так і вітчизняних авторів, зокрема, варто відмітити праці Х. Азіза [1], А. Я. Бомби [16-27], В. М. Булавацького [50], В. Я. Булигіна [51, 52], А. П. Власюка [59], В. С. Дейнеки [70-71], Л. М. Журавчак [75-77], Р. Коллінза [98], І. І. Ляшка [115-117], М.М. Максимова [118], А.Х. Мирзаджанзаде [122], Р. І. Нігматуліна [125, 126], В. Н. Ніколаєвського [130-132], В. Ф. Півня [137], Я. Д. П'янило [130], В. В. Скопечького [17-18, 22, 50], Р. Т. Фазлієва [152], Є. Я. Чаплі [159], І. А. Чарного [160] та ін.

Павловським М.М. був запропонований точний теоретичний метод розв'язування плоских задач усталеної фільтрації – метод конформних відображень [135]. Даний метод використовували та розвивали далі у своїх роботах Лаврентєва М. А. [109-110], Лаврика В. І. [111-112], Полубаринова-Кочина П. Я. [138] та інші.

Багато вчених вивчали та досліджували виникнення фільтраційних деформацій у ґрунті; основним фактором, що зумовлює їх появу, є градієнт напору. Однак, вплив деформацій ґрунту враховувався, у кращому випадку, формальним призначенням коефіцієнта фільтрації. У формулах для обчислення витрати, коефіцієнт фільтрації ґрунту, згідно з класичною теорією фільтрації, вважається сталою величиною [14-15, 95, 104, 151]. Але, у випадках великих градієнтів напору (більших за критичні значення) навколо дрени (свердловини) відбуваються суфозійні деформації ґрунту (переміщення та зупинка дрібних частинок, переорієнтація у просторі частинок, які формують скелет тощо), що спричиняють зміну коефіцієнта фільтрації як в просторі, так і в часі, та суттєво впливають на водоприймальну спроможність дрен.

В результаті проведених А.П.Івашенком та Б.П.Сидорчуком (за методикою і під керівництвом М.М.Хлапука та А.Я.Бомби) у гідротехнічній лабораторії Українського державного університету водного господарства та природокористування ряду експериментів на ґрунтових моделях було виявлено, що втрата фільтраційної міцності ґрунтів (яка призводить до зміни коефіцієнта фільтрації) в наволодренному середовищі відбувається при перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) значення для даного ґрунту [86]. Характер і розвиток фільтраційних деформацій придренної зони визначається абсолютним значенням градієнтів, властивостями ґрунтів та конструкцією дренажу. З метою математичного моделювання такого роду процесів фільтрації, з урахуванням взаємовпливу градієнтів напору та коефіцієнта фільтрації, А.Я. Бомбою був розроблений підхід до розв'язування відповідних нелінійних крайових задач [18-19].

Така методика застосовується до розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення

при моделюванні процесів витіснення з урахуванням деформацій в пористих середовищах – довільних криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями. Термін “обернена крайова задача” означає перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega \rightarrow G_z$. Задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв’язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови, тощо), адже при постановці крайової (фізичної) задачі в області G_ω невідомими є її параметри (напр., повна фільтраційна витрата).

Основою розвитку ідей числових методів комплексного аналізу стали роботи [18-19, 54, 84] у яких проведено дослідження фільтраційних процесів витіснення в пористих середовищах – криволінійних чотирикутних областях складної геометрії, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища та процесу. Використовуючи ідею поетапної параметризації характеристик середовища та процесу, розроблені нові ефективні алгоритми розв’язування відповідних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники, що описують процеси зворотного впливу градієнтів квазіпотенціалу (більших за їх критичні значення) на фільтраційні характеристики середовища. На основі побудованих розв’язків таких нелінійних задач, коли коефіцієнт фільтрації та компоненти тензора фільтрації залежать як від координат фізичної області фільтрації, так і від шуканих функцій течії, потенціалу та його градієнту досліджено характер формування збурених зон середовища. Отримано модельні співвідношення

між характеристиками недеформівного середовища та середовища, що деформується під впливом гідродинамічної дії фільтраційного потоку. На основі проведених розрахунків встановлено, що врахування властивостей пористого середовища та впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації принципово змінює базові положення відомої у літературі методики оцінки фільтраційних характеристик ґрунтів.

Відповідну методологію Д.О. Пригорницьким [16, 17, 19] перенесено на випадок фільтрації у багатозв'язних криволінійних областях. При цьому ним вирішено проблему врахування роздвоєння лінії течії при переході від багатозв'язної області фільтрації до однозв'язної. Розроблено нові ефективні числові методи та алгоритми розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних та тривз'язних областей на основі відомого методу почергової параметризації характеристик процесу та середовища при моделюванні суфозійних явищ у ґрунтах; отримано числові розв'язки задач із врахуванням фільтраційної деформації середовища при врахуванні взаємовпливу градієнту квазіпотенціалу та фільтраційних характеристик середовища, встановлено зони збурення вихідного потоку змінним коефіцієнтом фільтрації; вперше на основі результатів числових розрахунків встановлено співвідношення між характеристиками середовища і процесу до та після деформації (фільтраційна витрата, гідродинамічна сітка, коефіцієнт фільтрації, ін.) для випадків, коли фізична область фільтрації є багатозв'язною.

Дослідження в теорії фільтрації по відношенню до проблем розробки нафтових та газових родовищ вперше було зроблено Л. С. Лейбензоном [116, 117]. Ним сформульовано задачі нестационарної фільтрації про стягування контуру нафтоносності при витісненні нафти водою та проведено дослідження по фільтрації газованих рідин. Задача про

витіснення розглядалася в так званій «поршневій» постановці [116, 117], згідно якої передбачалося повне витіснення нафти із пласта. Базуючись на ідеях закладених в поршневій моделі відповідну задачу досить часто вдається сформулювати як задачу з рухомою границею [61, 85, 103]. Припускаючи, що обидві рідини фізично не відрізняються, отримуємо ще більш спрощену модель – модель різнокольорових рідин [77, 79, 189]. В цьому випадку компоненти швидкості є відомими функціями координат, які визначаються шляхом розв’язання відповідної стаціонарної задачі теорії фільтрації [154], і не потребують перерахунку з переміщенням невідомої границі, що значно спрощує алгоритм розв’язування відповідної задачі та зменшує час, затрачений на його виконання. Такого роду спрощення доцільно використовувати для початкової оцінки взаємодії системи «пласт-рідина», коли встановлено лише деякі її характеристики. Задачу відшукування положення невідомої границі (лінії) розділу різні автори вирішували по різному відштовхуючись від тих чи інших припущень [61, 78, 103]. Так у більшості випадків, вводячи рівняння лінії розділу в неявній формі $s(x, y, t) = 0$, вони приходили до деякого рівняння

її руху
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$
, де похідні координат x , y по часу t

пов’язані з компонентами швидкості фільтрації v_x , v_y такими

співвідношеннями:
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sigma}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sigma},$$
 σ – пористість середовища

[3, 61, 77, 127, 128]. Використовуючи уже перетворене рівняння

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s = 0$$
, знаходили нове положення границі розділу за

елементарними переміщеннями вздовж нормалей до її попереднього положення. Враховуючи той факт, що рівняння руху є рівнянням конвективного переносу, та фізичну природу самого процесу [14, 200],

згідно якої частинки переносяться, в загальному випадку, не вздовж нормалей, як було зазначено в роботах [61, 171, 179, 180], а вздовж траєкторій руху рідини – ліній течії, нове положення границі розділу слід шукати за переміщеннями вздовж ліній течії, а не вздовж нормалей.

Однак, як відомо [154], поршнева модель у випадку однорідного пласта дуже спрощено відображає реальну картину розробки нафтових родовищ в умовах їх заводнення. В припущенні однорідності пласта при використанні такої моделі спостерігається повністю безводний період розробки, що суперечить фактичним даним, згідно з якими існує досить довгий період, коли з свердловин відбирається як нафта так і вода. Варто також відмітити, що при цьому процес витіснення ніколи не буває повним, і в пласті утворюються значні по своїх розмірах зони сумісного руху декількох рідин.

Вивченню фільтрації в зоні сумісного руху при витісненні нафти водою дали поштовх роботи американських дослідників Маскета [127], Леверетта [199], Баклея [189] та ін. Розвиток вітчизняного напрямку відповідного дослідження покладено роботами Г. К. Максимовича [123], Г. А. Бабаляна, В. М. Барішева, Е. І. Ібрагімова [7].

Однією із розповсюджених моделей, яка враховує сумісний рух рідин є модель Баклея-Леверетта [98, 105, 106, 109, 209], що описує процес фільтрації за умови відсутності капілярного ефекту, який, проте, в деякій мірі враховується неявно кривими фазової проникності. Згідно з цією моделлю, система рівнянь, що описує двофазну фільтрацію складається з нелінійного гіперболічного рівняння для фазової насиченості і еліптичного рівняння для тиску (квазіпотенціалу) [101, 102]. Варто також відмітити, що у зв'язку із нехтуванням капілярного ефекту для розв'язку гіперболічного рівняння відносно насиченості характерно існування скінченного розриву.

1.2. Огляд праць сучасного стану та тенденцій розвитку моделювання процесів витіснення за наявності тріщин гідророзриву

На практиці нафтогазовидобувної промисловості широкого застосування набуває новий механічний метод розробки родовищ такий як гідравлічний розрив пласта.

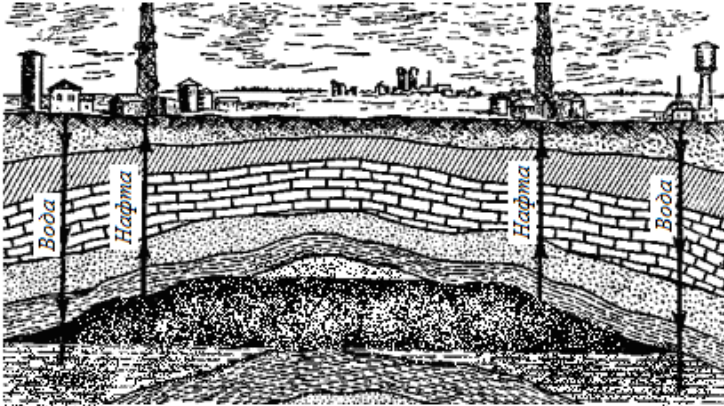


Рис. 1.1. Нафтогазове родовище [170]

Вперше він був проведений у нафтогазових пластах на території США у 1947 р., завдяки якому утворюються високопровідні тріщини гідророзриву, що дозволяють значно збільшити дебіт свердловин. Такі вчені як Баренблатт Г.И., Єнтов В.М. [8], Желтов Ю.П. [74], Geertsma J. [184], Perkins T.S. і Kern L.R. [192-193] створили перші теоретичні моделі дослідження процесу фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин ГРП. Математичне моделювання процесу витіснення після проведення процедури ГРП базується на фундаментальних законах термодинаміки, фільтрації, фізики нафтогазоносних пластів. Вперше процес витіснення до свердловини, розкритої тріщиною ГРП необмеженої довжини, в умовах стаціонарної фільтрації вивчався М. Маскетом [120], який в залежності від співвідношення коефіцієнтів проникності пласта і

тріщини та її ширини отримав розподіл тиску та ліній течії із пласта до тріщини. Необхідність оцінки ефективності гідравлічного розриву пласта викликали появу нових методів дослідження роботи свердловин розкритих тріщинами, відповідні рівняння описані, зокрема, у працях [105, 113, 118].

Аналітичне вираження для розрахунку фільтрації однорідної рідини до свердловини із тріщиною ГРП від зовнішнього контуру живлення вперше отримано М. І. Швідлером [162], при чому ним приймалися різні припущення щодо відношення коефіцієнт проникності пласта і тріщин ГРП, одне з яких це те, що тріщини є нескінченно проникними (ідеальними, тому тиск на контурі тріщини сталий і дорівнює забійному).

Пізніше Р.Д. Канєвскою [90-94] було представлено аналітичні розв'язки задач фільтрації до тріщин гідророзриву в неоднорідних та анізотропних пластах. Нею досліджувався вплив тріщин гідророзриву не тільки на продуктивність окремих свердловин, а й на розробку покладів в цілому, зокрема, проблеми інтерференції свердловин із тріщинами ГРП на них, обводнення свердловин після проведення гідророзриву.

Далі в роботах [85, 141, 168] проводилось математичне моделювання процесу витіснення у випадку існування тріщин гідророзриву скінченної проникності заповнених пропантом. Із припущень, що течія в горизонтальній тріщині радіальна, а у вертикальній – плоско-паралельна, Ю.М. Шехтманом [164] отримано розподіл тиску у пласті, в центрі якої розміщена свердловина із горизонтальною чи вертикальною тріщиною ГРП. Запропонована гіпотеза характеру течії у тріщині дозволила сформулювати граничні умови для задачі дослідження фільтрації в пласті та розв'язувати її незалежно від розподілу швидкості течії у тріщині. В результаті чого виявилось, що заповнення тріщини пропантом призводить до зменшення дебіту свердловини приблизно на 25 %. У процесі досліджень ним розраховувався розподіл тиску в обох

суміжних областях: у пласті та тріщині. У результаті чого підтвердилося, що ефект тріщин гідравлічного розриву суттєво залежить від значення коефіцієнта проникності пропанта та розмірів самої тріщини. Такими вченими як В. В. Кадетом, В. І. Сіляковим [89], М. Prats [194], досліджено граничні параметри тріщин ГРП, перевищення яких не призводить до збільшення коефіцієнта продуктивності експлуатації свердловин. В роботі А. Ф. Зазовського, Г. Т. Годуа [78] показано, що створювати дуже протяжні тріщини не завжди ефективно, так як фільтраційний потік в тріщину при її великому гідравлічному опорі локалізується близько свердловини, а віддалена частина тріщини не впливає на значення коефіцієнта продуктивності.

Відома проблема видобутку нафти з високим коефіцієнтом в'язкості (наприклад, природних бітумів та т.ін.), зокрема, такі вчені як Алішаєв М. Г. [3], Аметов И.М. [4], Ахмадишин Р.З. [7], Габриєлов Л.В. [60], Кондрат Р.М. [99-101], Briggs P.J., Wright M.S. [170] розробляли нові методи та технології підвищення коефіцієнта нафто вилучення у відповідних родовищах. Кондратом О.Р. було виявлено, що ефективною, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технологія нагнітання в пласт різних робочих агентів, зокрема, теплоносіїв. При цьому, за рахунок перенесення течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, забезпечується гідродинамічний зв'язок між ними.

При проведенні процесу витіснення у важкопроникних пластах, зокрема сланцевих осадових породах, досить ефективно застосовувати метод інтенсифікації гідравлічного розриву пласта, який об'єднує тріщини та мікротріщин, що пронизують пласт, в деревовидні структури тим самим розширюючи зону впливу, що дронується свердловиною [61, 134]. Однак у

деяких випадках використовують також вибухові технології [58, 85, 87, 108], які завдяки своїй потужності та миттєвій дії, значною мірою є ефективними. Деякі задачі збурення плоского фільтраційного потоку тріщинами різного походження розглядалися також у роботах [66, 107, 157, 158].

Проектування тріщин гідророзриву з метою досягнення максимального дебіту експлуатаційних свердловин вимагає детального вивчення різних параметрів як тріщин так і пластової системи. Як було доведено вченими, зокрема, Economides M.J., Nolte K.G. [165, 182], Elbel J.L. [183], збільшення довжини та провідності тріщин не призводить до пропорційного зростання фільтраційної витрати свердловин. Враховуючи значення сталого коефіцієнта провідності тріщини ГРП, можна визначити граничне значення її довжини, збільшення якого практично не призводить до приросту дебіту і навпаки: для тріщин усталених розмірів збільшення її коефіцієнта провідності також дає незначний ефект. Не менш важливим фактором, що впливає на вибір оптимальних розмірів тріщини гідророзриву, являється розміщення свердловин та орієнтація тріщин відносно них. Такі вчені як Lacy L.L. [188], Malekzadeh D., Khan F.U., Day J.J. [189] досліджували орієнтацію протяжних тріщин, довжина яких за розмірами наближається до значення відстані між свердловинами, з метою уникнення передчасного обводнення експлуатаційної свердловини. D.N. Meehan [190] вивчав вплив неоднорідності пласта на оптимізацію довжини тріщин і розміщення свердловин у пласті.

Не менш важливим є дослідження процесу витіснення в неоднорідних середовищах, зокрема, Chen C.-C., Raghavan R. [189], Chu W. [174], Cinco-Ley H. [175] проаналізували вплив наявності тріщини ГРП на фільтраційно-ємкісні характеристики пласта у випадку розміщення видобувної свердловини у низькопроникній ділянці пласта, при цьому

тріщини виходять за межі включення, або повністю належать йому. Такі включення невеликих розмірів можуть характеризувати забруднюючу ділянку у привибійній ділянці свердловин. М. Prats [194] розглядав задачу стаціонарної фільтрації з урахування впливу тріщин ГРП нескінченної проникності, що розміщені в забрудненій зоні свердловини. Розрахунки показали, що наявність забрудненої зони практично не призводить до зменшення ефективного радіуса свердловини із утвореною на ній тріщиною ГРП.

При оптимізації параметрів та розміщення тріщин гідророзриву необхідно враховувати, окрім фільтраційних властивостей пласта, ще й технологічні обмеження щодо створення самих тріщин (в'язкість рідини, концентрацію пропанта тощо). Математичне моделювання та детальний гідродинамічний аналіз ділянки пласта в цілому дозволяють проаналізувати вплив розподілу неоднорідності пласта та розміщення системи нагнітальних та видобувних свердловин, визначити параметри та оптимальне розміщення тріщин ГРП.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ У НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

У розділі, на основі ідей методів квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено новий підхід до моделювання нелінійних процесів витіснення в горизонтальних нафтових пластах з урахуванням збурень фільтраційної течії включеннями скінченної проникності типу призупинених свердловин, тріщин гідравлічного розриву пласта, малопроникних зон. Розроблено числові алгоритми розв'язання відповідних крайових задач, зокрема, розрахункову процедуру обчислення коефіцієнта проникності привибійної зони свердловин нафтового пласта, з урахуванням відомого дебіту експлуатаційної свердловини. На основі чого створено програмні засоби комп'ютерної їх реалізації що дозволяють визначати, зокрема, моменти часу прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та повного її обводнення, координати критичних точок типу «призупинки» та значень квазіпотенціалу у них, положення границі розділу рідин у різні моменти часу, значення загальної фільтраційної витрати на експлуатаційній свердловині, частки у ній витісненого флюїду, об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, а також відшукування місцезнаходення значних по своїй площі застійних зон (із відповідною вмістимістю нафти).

2.1 Моделювання нелінійної фільтрації у низькопроникних продуктивних пластах

До перспективних напрямків підвищення обсягів видобутку вуглеводнів відносять ресурси сланцевих товщ Львівсько-Волинського вугільного басейну, палеогенових сланців Болтиської западини Українського щита і т. ін., які вміщують значні об'єми газу. Водночас з цим виникає проблема їх економічно вигідної (прибуткової) експлуатації, що пов'язана в першу чергу із низькою проникністю та дрібнозернистістю цієї скелясто-осадової породи пронизаної слабзорозвинутими системами тріщин, в яких і міститься газ.

Враховуючи особливості структурної будови сланцевих порід доцільне використання технологій розробки родовищ, які спрямовані на об'єднання наявних макро- і мікротріщин в єдину деревоподібну систему, основою якої є стовбури вертикальних або похилих свердловин з штучно утвореними тріщинами гідравлічного розриву пласта (ГРП). Досвід видобутку вуглеводнів із сланців у США показав, що із них, окрім газу, також досить успішно можна видобувати нафту, з тією лише відмінністю, що горизонтальний стовбур експлуатаційної свердловини повинен розташовуватись на рівень глибше від залягання більш важчих, ніж газ, конденсату і нафти [1].

Окрім вибору ефективних методів розробки родовищ з низькопроникними продуктивними пластами, виникає проблема створення адекватних математичних моделей фільтраційних процесів у складних геологічних умовах для різних законів фільтрації:

$$\text{Дарсі [2]} \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p;$$

$$\text{з початковим градієнтом тиску [3]} \quad \mathbf{v} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\beta}{|\nabla p|} \right) \nabla p, & |\nabla p| > \beta, \\ 0, & |\nabla p| \leq \beta; \end{cases}$$

$$\text{полігонний [3]} \quad \overset{\mathbf{r}}{v} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\beta \mu_0}{|\nabla p|} \right) \nabla p, & |\nabla p| \geq \beta, \\ -\frac{k}{\mu} \nabla p, & |\nabla p| \leq \beta, \quad \mu_0 = 1 - \frac{\mu}{\nu}; \end{cases}$$

$$\text{В. Хеега [3]} \quad \overset{\mathbf{r}}{v} = -\frac{k}{\mu} \frac{|\nabla p|}{\beta + |\nabla p|} \nabla p;$$

$$\text{гіперболічний [4]} \quad \overset{\mathbf{r}}{v} = -\frac{k}{\mu} \left(\sqrt{\beta^2 + (\nabla p)^2} - \beta \right) \frac{\nabla p}{|\nabla p|};$$

$$\text{М.Г. Алішеєва [5]} \quad \overset{\mathbf{r}}{v} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu} \nabla p, & |\nabla p| > \beta, \\ 0, & |\nabla p| \leq \beta; \end{cases}$$

$$\text{двочленний [6]} \quad \nabla p = -\frac{\mu}{k} \overset{\mathbf{r}}{v} - \frac{\rho}{u} |\overset{\mathbf{r}}{v}| \overset{\mathbf{r}}{v};$$

$$\text{С.А. Христиановича [4]} \quad \nabla p = -\Phi \left(|\overset{\mathbf{r}}{v}| \right) \frac{\overset{\mathbf{r}}{v}}{|\overset{\mathbf{r}}{v}|},$$

де $\overset{\mathbf{r}}{v}$ – швидкість фільтрації; μ , ν – в'язкість відповідно при великих і малих градієнтах тиску $|\nabla p|$; β – початковий градієнт тиску; k , u – коефіцієнт проникності і деякий параметр пористого середовища; ρ – густина; Φ – задана функція.

З використанням ідей поетапної фіксації характеристик процесу і середовища запропонована методологія математичного моделювання витіснення флюїдів з осадових порід у складних геологічних умовах, коли за умов квазістаціонарності фільтрації процес витіснення описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі з початковим градієнтом.

Розглянемо модельну задачу нелінійного витіснення флюїду із пласта G_z , що експлуатується однією свердловиною в умовах інтенсифікації припливу рідини до неї з використанням технології ГРП.

Для математичної постановки задачі фільтрації рідин у пористому середовищі запишемо рівняння нерозривності та рівняння руху у зонах підвищеної проникності – тріщинах ГРП та в частині пласта без тріщин у вигляді [7–10]

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \chi(I, I_{kr}) \operatorname{grad} \varphi, \quad (x, y) \in G_z \quad (1)$$

за відповідних умов на контурах пласта $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ та умов неперервності потоку і тиску (квазіпотенціалу) при переході через границі тріщин ГРП. Тут $I = |\operatorname{grad} \varphi| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – модуль градієнта квазіпотенціалу φ швидкості фільтрації $\mathbf{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$; $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – контур живлення та контур свердловини відповідно; χ – коефіцієнт, що характеризує проникність породи в ускладнених геологічних умовах фільтрації і визначається за співвідношенням

$$\chi(I, I_{kr}) = \frac{k}{\mu} \left(1 + \begin{cases} F(I - I_{kr}), & I > I_{kr} \\ 0, & I \leq I_{kr} \end{cases} \right), \quad (2)$$

де μ – в'язкість флюїду, F – задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} – початковий градієнт квазіпотенціалу. Відзначимо також, що потенціал φ пов'язаний з тиском в пласті формулою Лейбензона [11], а всі приведені в роботі величини вимірюються в системі погоджених одиниць Сі.

Для спрощення викладок зупинимось на радіальній течії. Використаємо метод збурення початкового розподілу величин $\varphi = \varphi^{(0)}(r)$,

$I = I^{(0)}(r)$, $Q = Q^{(0)}$ та $r_c = r_c^{(0)}$ (Q – дебіт свердловини), які характеризують процес витіснення і отримуються із розв’язку відповідної задачі в недеформованому пласті:

$$\frac{d}{dr} \left(\chi^{(0)} r \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq R_0, \quad \varphi(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi(R_0) = \varphi_*, \quad (3)$$

$$\varphi^{(0)}(r) = \varphi_* + \eta \ln \frac{r}{R_0}, \quad I^{(0)}(r) = \frac{\eta}{r}, \quad Q^{(0)} = 2\pi \chi^{(0)} \eta, \quad r_c^{(0)} = \frac{\eta}{I_{kr}}, \quad (4)$$

де r_0 , R_0 – відповідно радіуси свердловини та контура живлення;

$\eta = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\ln r_0 / R_0}$; $\chi = \chi^{(0)} = \frac{k}{\mu}$; $r_c^{(0)}$ – початкове наближення величини r_c , що

ділить пласт на збурену $[r_0, r_c]$ і незбурену $[r_c, R_0]$ зони.

З урахуванням розв’язку (4) задачі (3) перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{d}{dr} \left(\chi(I, I_{kr}) r \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq R_0, \quad (5)$$

побудуємо його розв’язок за умов $\varphi(r_0) = \varphi^*$, $\varphi(R_0) = \varphi_*$ на відповідних контурах області пласта, використовуючи ідеї поетапної фіксації характеристик середовища і процесу [9, 10]. З ітераційної корекції розв’язку задачі (3) при $k = idem$ та $F(I - I_{kr}) = \alpha(I - I_{kr})$ одержимо:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k}{\mu} \left(1 + \alpha(I^{(0)} - I_{kr}) \right) r \frac{d\varphi_1^{(1)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_c^{(0)},$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{d\varphi_2^{(1)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_c^{(0)} \leq r \leq R_0,$$

$$\varphi_1^{(1)}(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi_2^{(1)}(R_0) = \varphi_*, \quad [\varphi(r)]|_{r=r_c^{(0)}} = 0, \quad [\nu]|_{r=r_c^{(0)}} = 0.$$

Тоді перше наближення розв’язку матиме вигляд:

$$\varphi^{(1)}(r) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(r) = \varphi^* - \Phi(r_c^{(0)}) \ln \frac{\alpha I_{kr} (r_c^{(0)} - r_0) + r_0}{\alpha I_{kr} (r_c^{(0)} - r) + r}, & r_0 \leq r \leq r_c^{(0)}, \\ \varphi_2^{(1)}(r) = \varphi_* + (1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)}) \ln \frac{r}{R_0}, & r_c^{(0)} \leq r \leq R_0, \end{cases}$$

$$I^{(1)} = \frac{d\varphi^{(1)}}{dr} = \begin{cases} I_1^{(1)} = \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dr} = \frac{(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)})}{\alpha I_{kr} (r_c^{(0)} - r) + r}, & r_0 \leq r \leq r_c^{(0)}, \\ I_2^{(1)} = \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dr} = \frac{(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)})}{r}, & r_c^{(0)} \leq r \leq R_0, \end{cases}$$

$$Q^{(1)} = \frac{2\pi k}{\mu} (1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)}), \quad r_c^{(1)} = \frac{(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)})}{I_{kr}},$$

$$\text{де } \Phi(r) = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{(1 - \alpha I_{kr}) \ln \frac{r}{R_0} + \ln \left(\alpha I_{kr} + (1 - \alpha I_{kr}) \frac{r_0}{r} \right)}.$$

Аналогічну форму запису маємо і у загальному випадку для пошуку n -го наближення:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k}{\mu} \left(1 + \alpha (I_2^{(n-1)} - I_{kr}) \right) r \frac{d\varphi_1^{(n)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_c^{(n-1)},$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{d\varphi_2^{(n)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0,$$

$$\varphi_1^{(n)}(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi_2^{(n)}(R_0) = \varphi_*, \quad [\varphi(r)] \Big|_{r=r_c^{(n-1)}} = 0, \quad [v] \Big|_{r=r_c^{(n-1)}} = 0,$$

$$\varphi^{(n)}(r) = \begin{cases} \varphi_1^{(n)}(r) = \varphi^* - \Phi(r_c^{(n-1)}) \ln \frac{\alpha I_{kr} (r_c^{(n-1)} - r_0) + r_0}{\alpha I_{kr} (r_c^{(n-1)} - r) + r}, & r_0 \leq r \leq r_c^{(n-1)}, \\ \varphi_2^{(n)}(r) = \varphi_* + (1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(n-1)}) \ln \frac{r}{R_0}, & r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0, \end{cases}$$

$$I^{(n)} = \frac{d\varphi^{(n)}}{dr} = \begin{cases} I_1^{(n)} = \frac{d\varphi_1^{(n)}}{dr} = \frac{(1-\alpha I_{kr})\Phi(r_c^{(n-1)})}{\alpha I_{kr}(r_c^{(n-1)} - r) + r}, & r_0 \leq r \leq r_c^{(n-1)}, \\ I_2^{(n)} = \frac{d\varphi_2^{(n)}}{dr} = \frac{(1-\alpha I_{kr})\Phi(r_c^{(n-1)})}{r}, & r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0, \end{cases}$$

$$Q^{(n)} = \frac{2\pi k}{\mu}(1-\alpha I_{kr})\Phi(r_c^{(n-1)}), \quad r_c^{(n)} = \frac{(1-\alpha I_{kr})\Phi(r_c^{(n-1)})}{I_{kr}},$$

де $n = 2, 3, \dots$

Згідно побудованої моделі ($\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r_0 = 0.1$, $R_0 = 100$, $k = 0.1 \cdot 10^{-14}$, $\mu = 0.1 \cdot 10^{-4}$, $I_{kr} = 0.0048$, $\alpha = 10$) прослідкуємо стабілізацію величин $\varphi = \varphi^{(n)}(r)$, $I = I^{(n)}(r)$ залежно від n . На рис. 1 показано розподіл квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(r)$ і величини градієнта $I = I(r)$ для різних n . Було помічено, що вже на ітераційному кроці $n = 10$ процес уточнення величин $\varphi = \varphi^{(n)}(r)$, $I = I^{(n)}(r)$ можна припиняти.

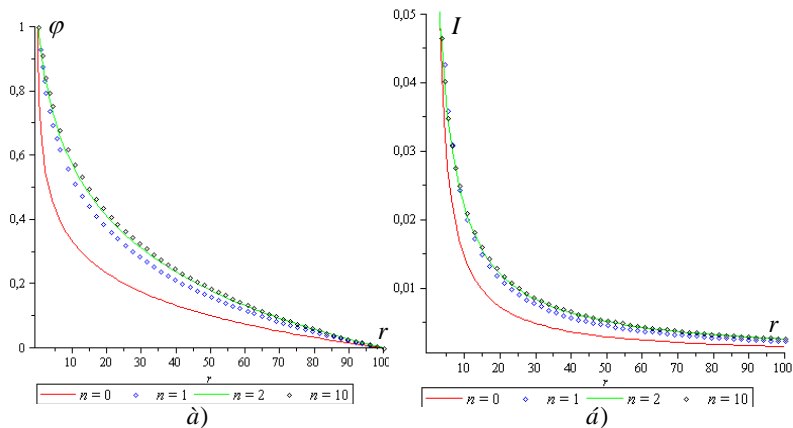


Рис.1. Розподіл величин квазіпотенціалу (а) та його градієнта (б) на ітераціях $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 10$

При цьому отримано значення дебіту експлуатаційної свердловини, що становить $Q \approx Q^{(10)} = 1.68 \cdot 10^{-10}$, а також визначено радіус $r_c \approx r_c^{(10)} = 55.438$ впливу критичного градієнту, що в свою чергу дозволяє оцінити можливий об'єм зони дренування, де $r \in [r_0, r_c]$.

У випадку наявності у пласті кругової тріщини ГРП (рис. 2) коефіцієнт $k = k(x, y)$ матиме вигляд: $k = \begin{cases} k_1, & (x, y) \in D_1, \\ k_2, & (x, y) \in G_z \setminus D_1, \end{cases}$ де D_1 – ділянка пласта, що відповідає тріщині; k_1, k_2 – коефіцієнти проникності, відповідно, тріщини і пласта без тріщини.

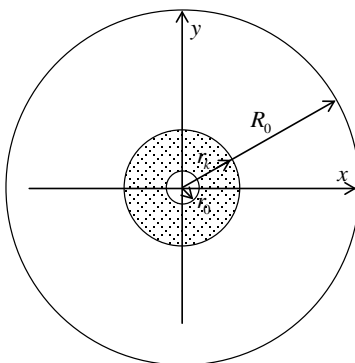


Рис. 2. Круговий пласт з тріщиною гідророзриву

Аналогічно до вищезгаданого випадку (пласта без тріщин) побудуємо нульове наближення фільтраційних характеристик для недеформованого пористого середовища та існування тріщини ГРП, як розв'язок наступної системи диференціальних рівнянь за відповідних граничних умов:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_1}{\mu} r \frac{d\varphi_1^{(0)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_k,$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{\mu} r \frac{d\varphi_2^{(0)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_k \leq r \leq R_0,$$

$$\varphi_1^{(0)}(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi_2^{(0)}(R_0) = \varphi_*, \quad [\varphi(r)]|_{r=r_k} = 0, \quad [\nu]|_{r=r_k} = 0$$

і отримаємо, що

$$\varphi^{(0)}(r) = \begin{cases} \varphi_1^{(0)}(r) = \varphi^* - k_2 \beta \ln \frac{r_0}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ \varphi_2^{(0)}(r) = \varphi_* + k_1 \beta \ln \frac{r}{R_0}, & r_k \leq r \leq R_0, \end{cases}$$

$$I^{(0)}(r) = \begin{cases} I_1^{(0)} = k_2 \frac{\beta}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ I_2^{(0)} = k_1 \frac{\beta}{r}, & r_k \leq r \leq R_0, \end{cases} \quad Q^{(0)} = 2\pi k_1 k_2 \beta / \mu,$$

$$\text{де } \beta = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{k_1 \ln \frac{r_k}{R_0} + k_2 \ln \frac{r_0}{r_k}}.$$

Далі вважатимемо, що $I_{kr} > I(r_k)$ (випадок $I_{kr} < I(r_k)$ досліджується аналогічно) і тоді

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_1}{\mu} r \frac{d\varphi_1^{(1)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_k,$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{\mu} \left(1 + \alpha (I_2^{(0)} - I_{kr}) \right) r \frac{d\varphi_2^{(1)}(r)}{dr} \right) = 0,$$

$$r_k \leq r \leq r_c^{(0)}, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{\mu} r \frac{d\varphi_3^{(1)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_c^{(0)} \leq r \leq R_0,$$

$$\varphi_1^{(1)}(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi_3^{(1)}(R_0) = \varphi_*, \quad [\varphi(r)]|_{r=r_k} = [\varphi(r)]|_{r=r_c^{(0)}} = 0,$$

$$[v] \Big|_{r=r_k} = [v] \Big|_{r=r_c^{(0)}} = 0,$$

$$\text{де } r_c^{(0)} = k_1 \frac{\beta_0}{I_{kr}}.$$

Перше наближення розв'язку задачі інтенсифікації припливу рідини до експлуатаційної свердловини має вигляд:

$$\varphi^{(1)}(r) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(r) = \varphi^* - k_2(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)}) \ln \frac{r_0}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ \varphi_2^{(1)}(r) = \varphi_1^{(1)}(r_k) + k_1 \Phi(r_c^{(0)}) \ln \frac{r + \alpha I_{kr}(r_c^{(0)} - r)}{r_k + \alpha I_{kr}(r_c^{(0)} - r_k)}, & r_k \leq r \leq r_c^{(0)}, \\ \varphi_3^{(1)}(r) = \varphi_* + k_1(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)}) \ln \frac{r}{R_0}, & r_c^{(0)} \leq r \leq R_0; \end{cases}$$

$$I^{(1)}(r) = \begin{cases} I_1^{(1)}(r) = k_2(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(0)})}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ I_2^{(1)}(r) = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(0)})}{r + \alpha I_{kr}(r_c^{(0)} - r)}, & r_k \leq r \leq r_c^{(0)}, \\ I_3^{(1)}(r) = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(0)})}{r}, & r_c^{(0)} \leq r \leq R_0; \end{cases}$$

$$Q^{(1)} = 2\pi k_1 k_2 (1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(0)}) / \mu;$$

$$r_c^{(1)} = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(0)})}{I_{kr}},$$

$$\text{де } \Phi(r) = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{k_2(1 - \alpha I_{kr}) \ln \frac{r_0}{r_k} + k_1 \left(\ln \frac{r_k + \alpha I_{kr}(r - r_k)}{R_0} - \alpha I_{kr} \ln \frac{r}{R_0} \right)}.$$

Аналогічну форму запису маємо і у загальному випадку для n -го наближення:

$$\frac{d}{dr} \left(k_1 r \frac{d\varphi_1^{(n)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_k;$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{\mu} (1 + \alpha (I_3^{(n-1)} - I_{kr})) r \frac{d\varphi_2^{(n)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_k \leq r \leq r_c^{(n-1)};$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{\mu} r \frac{d\varphi_3^{(n)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0;$$

$$\varphi_1^{(n)}(r_0) = \varphi^*, \quad \varphi_3^{(n)}(R_0) = \varphi_*, \quad [\varphi(r)] \Big|_{r=r_k} = [\varphi(r)] \Big|_{r=r_c^{(n-1)}} = 0;$$

$$[\nu] \Big|_{r=r_k} = [\nu] \Big|_{r=r_c^{(n-1)}} = 0;$$

$$\varphi^{(n)}(r) = \begin{cases} \varphi_1^{(n)}(r) = \varphi^* - k_2(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(n-1)}) \ln \frac{r_0}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ \varphi_2^{(n)}(r) = \varphi_1^{(n)}(r_k) + k_1 \Phi(r_c^{(n-1)}) \ln \frac{r + \alpha I_{kr}(r_c^{(n-1)} - r)}{r_k + \alpha I_{kr}(r_c^{(n-1)} - r_k)}, & r_k \leq r \leq r_c^{(n-1)}, \\ \varphi_3^{(n)}(r) = \varphi_* + k_1(1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(n-1)}) \ln \frac{r}{R_0}, & r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0; \end{cases}$$

$$I^{(n)}(r) = \begin{cases} I_1^{(n)}(r) = k_2(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(n-1)})}{r}, & r_0 \leq r \leq r_k, \\ I_2^{(n)}(r) = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(n-1)})}{r + \alpha I_{kr}(r_c^{(n-1)} - r)}, & r_k \leq r \leq r_c^{(n-1)}, \\ I_3^{(n)}(r) = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(n-1)})}{r}, & r_c^{(n-1)} \leq r \leq R_0; \end{cases}$$

$$Q^{(n)} = 2\pi k_1 k_2 (1 - \alpha I_{kr}) \Phi(r_c^{(n-1)}) / \mu, \quad r_c^{(n)} = k_1(1 - \alpha I_{kr}) \frac{\Phi(r_c^{(n-1)})}{I_{kr}},$$

де $n = 2, 3, \dots$

Для дослідження впливу ГРП на приплив рідини до експлуатаційної свердловини порівняємо результати отримані згідно побудованої математичної моделі процесу витіснення без врахування тріщини ГРП та моделі з тріщиною при таких її параметрах: $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r_0 = 0.1$, $R_0 = 100$, $r_k = 10$, $k = 0.1 \cdot 10^{-14}$, $k_1 = 10k$, $k_2 = k$,

$\mu = 0.1 \cdot 10^{-4}$, $I_{kr} = 0.0048$, $\alpha = 10$. Прослідкуємо також стабілізацію величин $\varphi = \varphi^{(n)}(r)$ та $I = I^{(n)}(r)$ зі збільшенням n .

На рис. 3 показано розподіл квазіпотенціала $\varphi = \varphi(r)$ та величини його градієнта $I = I(r)$ на етапах їх стабілізації. При цьому отримано значення дебіту експлуатаційної свердловини з тріщиною ГРП $Q \approx Q^{(10)} = 2.45 \cdot 10^{-10}$, який перевищує отримане вище значення дебіту у випадку відсутності тріщини. Помічено значне збільшення радіусу $r_c \approx r_c^{(10)} = 80.959$ зони впливу критичного градієнту, що призводить до збільшення зони дренування пласта експлуатаційною свердловиною.

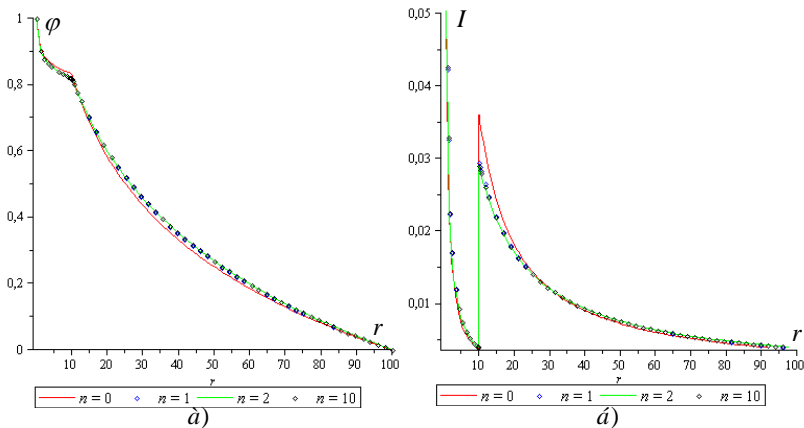


Рис. 3. Розподіл величин квазіпотенціалу (а) та градієнта квазіпотенціалу (б) на етапах $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 10$ їх стабілізації

На рис. 4 показано розподіли квазіпотенціалу і величини його градієнта в пласті з тріщиною ГРП та без неї.

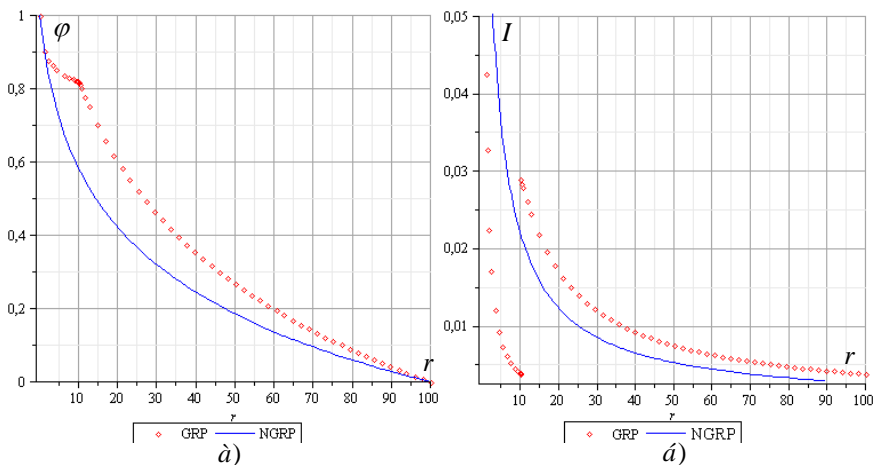


Рис.4. Розподіл величин квазіпотенціалу (а) та градієнта квазіпотенціалу (б) в пласті з тріщиною ГРП та без неї

Таким чином, модифікований у вигляді (1) і (2) закон Дарсі з початковим градієнтом тиску допускає в умовах квазістаціонарності з використанням поетапної фіксації характеристик процесу і середовища моделювати нелінійну фільтрацію флюїдів в низькопроникних продуктивних пластах. Це дозволяє оцінювати ефективність використання тих або інших технологій інтенсифікації видобутку вуглеводнів у складних геологічних умовах.

2.2 Математичне моделювання процесу витіснення нафти законтурною водою з урахуванням включень скінченної проникності

Розглянемо модельну задачу на еволюцію (рух) границі розділу R , двох різнорозмірних рідин [2, 29, 197], за умов їх не змішування, коли

«витісняєма» (пластова) і «витісняюча» рідини характеризуються одними і тими ж властивостями (описуються одними і тими ж рівняннями; відрізняються лише уявним кольором, що не впливає на параметри, грубо кажучи «нафта» витісняється «нафтою»), в пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому контуром живлення L_* та контуром експлуатаційної свердловини L^* (рис. 2.1). Для зручності викладок, на початковому етапі застосуємо найпростіший із законів витіснення: закон Дарсі та рівняння нерозривності течії, які моделюють даний процес, представимо відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \text{жк}$ (тут $p(x, y, t)$ – тиск у точці (x, y) в момент часу t , жк – деяке характерне його значення) [19]: $\text{div} \mathbf{v} = k \text{grad} \varphi$, $\text{div} \mathbf{v} = 0$, тоді k – коефіцієнт проникності середовища: $k = k_0$ – ґрунту, $k = k_\lambda$ – проникність λ -ої тріщини ГРП.

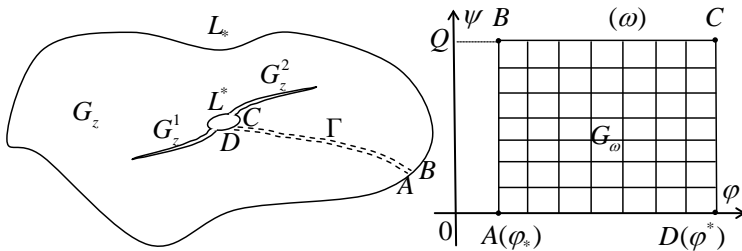


Рис. 2.1. Горизонтальний пласт за умов існування тріщин ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Аналогічно до [23], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз \tilde{A} області G_z вздовж лінії розділу течії, що визначається точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$ та $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки,

відшукування фільтраційної витрати $Q = \oint_{L^*} v_y dx + v_x dy$ та інших

характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [18],

утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \tilde{\Lambda}$ на відповідну

прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*,$

$0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2.1)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2.2)$$

$$[\varphi]_{\partial G_z^\lambda} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_z^\lambda} = 0, \quad (2.2^*)$$

де $[\bullet]_{\partial G_z^\lambda}$ – стрибок відповідної функції на контурі ∂G_z^λ .

Границя розділу R , двох різнокольорових рідин визначається наступним рівнянням з відповідними умовами [19]:

$$\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \cdot \text{grad} \zeta = 0, \quad \zeta_{L_*} = 1, \quad \zeta(x, y, t)|_{t=t_0} = 0. \quad (2.3)$$

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.4)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\left[x(\varphi, \psi) \right]_{\partial G_{\omega}^{\lambda}} = \left[y(\varphi, \psi) \right]_{\partial G_{\omega}^{\lambda}} = 0, \quad \left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\underline{v}, \underline{r}) \right]_{\partial G_{\omega}^{\lambda}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2.7)$$

де f^* , f – задані функції, що визначають контури відповідно L^* , L .

Маючи характеристичну функцію течії $z = z(\omega)$ та виділивши її дійсну і уявну частини $x = \operatorname{Re} z(\omega)$, $y = \operatorname{Im} z(\omega)$, знаходимо поле швидкості, компоненти якої визначаємо такими співвідношеннями:

$$v_x = \frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \text{де}$$

$$J(\varphi, \psi) = x'_{\varphi} y'_{\psi} - x'_{\psi} y'_{\varphi}. \quad \text{З урахуванням вищеописаного, задачу (2.3)}$$

перепишемо так:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \quad (2.8)$$

$$\zeta(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, \quad \zeta(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0,$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \quad (2.9)$$

Інтегруючи відповідне (2.8) характеристичне диференціальне

рівняння $\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}$, знайдемо час t проходження частинкою шляху від

точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ уздовж відповідної лінії течії

$$\psi(x, y) = \bar{\psi}_0 :$$

$$t = \hat{O}(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\vartheta, \bar{\psi}_0), y(\vartheta, \bar{\psi}_0)) d\vartheta, \quad (2.10)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$. Використовуючи (2.10), знаходимо положення лінії розділу $\hat{O}(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної свердловини, відповідно $t_{\min} = \hat{O}(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \hat{O}(\varphi^*, \psi)$, $t_{\max} = \hat{O}(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \hat{O}(\varphi^*, \psi)$.

Для обчислення наближеного об'єму добутої нафти в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, в результаті розв'язку рівняння $\hat{O}(\varphi^*, \psi) = \bar{t}$ ($0 \leq \psi < Q$, $t_{\min} < \bar{t} < t_{\max}$) знаходимо відповідні точкам N_{ω} , $N_{\omega'}$ перетину даної лінії розділу течії із контуром експлуатаційної свердловини (рис. 2.2.), що ділять його на ділянки поступання нафти та води, відповідно, значення $\psi = \psi_{\omega}(\bar{t})$, $\psi = \psi_{\omega'}(\bar{t})$. Тоді дебіт відбору нафти у даний момент часу становитиме: $Q_u(\bar{t}) = (\psi_{\omega'}(\bar{t}) - \psi_{\omega}(\bar{t})) \times \oint_L v_y dx + v_x dy = (\psi_{\omega'}(\bar{t}) - \psi_{\omega}(\bar{t})) \cdot Q$. Звідси шуканий об'єм добутої нафти з

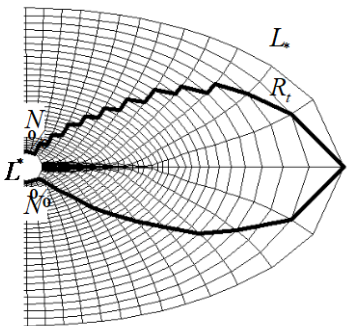


Рис.2.2. Розміщення границі розділу рідин R_t в елементі симетрії пласта G_z

пласта від початку витіснення до моменту часу $t = \bar{t}$ визначається за формулою: $V_{ai}(\bar{t}) = \int_{t_0}^{\bar{t}} Q_i(\psi) d\psi$. Тоді як об'єм нафти, що міститься у ньому до початку витіснення визначається: $V_i = V \cdot \sigma$, де V - обем досліджуваного пласта. Таким чином, залишок нафти у відповідний момент часу наближено обчислимо за формулою: $V_{\psi}(\bar{t}) = V_i - V_{ai}(\bar{t})$.

Для побудови різницевого аналогу поставленої задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \text{ де } \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n} \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \text{ де } \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi, \Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ .

Рівняння (2.7) у середині сіткової області G_ω та розрізі \tilde{A} , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) апроксимуємо наступним чином [142, 199]:

$$\begin{cases} \gamma^2(k_{i,j+\frac{1}{2}}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-\frac{1}{2}}(x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma^2(k_{i,j+\frac{1}{2}}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-\frac{1}{2}}(y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (2.13)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad k_{i,j+1/2} = k\left(\frac{x_{i,j+1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2}\right),$

$$k_{i,j-1/2} = k\left(\frac{x_{i,j} + x_{i,j-1}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2}\right), \quad k_{i+1/2,j} = k\left(\frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j} + y_{i,j}}{2}\right),$$

$$k_{i-1/2,j} = k\left(\frac{x_{i,j} + x_{i-1,j}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i-1,j}}{2}\right); \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} - \text{квазіконформний інваріант.}$$

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m \cdot \Delta\varphi}{\gamma}$, величину

γ – одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}},$$

де $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$, $\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$.

Згідно з (2.10) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж j -тої лінії течії від i_* до i^* еквіпотенціалей:

$$t_{j(i_*,i^*)} = \sum_{i=i_*}^{i^*} \frac{\sigma \cdot k_{\varphi_j} \cdot \Delta\varphi}{v^2(x(\varphi_{\varphi_j}, \psi_j), y(\varphi_{\varphi_j}, \psi_j))}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (i_*, i^*) = \overline{0, n}. \quad (2.15)$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо наступним чином:

- для внутрішніх вузлів сітки:

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для вузлів сітки на розрізі \tilde{A} :

$$(v_x, v_y)_{i,0} = (v_x, v_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для граничних вузлів сітки L^* :

$$(v_x, v_y)_{0,j} = \frac{k_{0,j}}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для граничних вузлів сітки L_* :

$$(v_x, v_y)_{n,j} = \frac{k_{n,j}}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для точок С, D:

$$(v_x, v_y)_{0,0} = (v_x, v_y)_{0,m} = \frac{k_{0,0}}{2\Delta\psi J_{0,0}} (y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1}),$$

$$J_{0,0} = \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для точок А, В:

$$(v_x, v_y)_{n,0} = (v_x, v_y)_{n,m} = \frac{k_{n,0}}{2\Delta\psi J_{n,0}} (y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1}),$$

$$J_{n,0} = \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi}. \quad (2.16)$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (2.4)–(2.7) різницевою задачею в загальному випадку, як і в роботах [16-19], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної

області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (2.12), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки i , використовуючи (2.14), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та

невідому величину витрати $Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}$. Проводимо уточнення

координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (2.11) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (2.13). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.14), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} - \text{зміщення вузлів на границі за}$$

проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області

комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.4):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв’язана із необхідною точністю.

Після встановлення гідродинамічної сітки, поля потенціалу, знаходимо за формулою (2.15) час руху частинки від фіксованої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi})$ уздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$. Враховуючи той факт, що рівняння (2.8) є одномірним гіперболічним, адже змінна ψ лише в якості параметру, а положення границі розділу рідин R , не обов’язково характеризується вузлами гідродинамічної сітки, здійснимо побудову різницевого алгоритму її відшукання виходячи з ідей методу характеристик, аналогічно [18-19].

З метою підтвердження адекватності запропонованої математичної моделі, розглянемо процес стаціонарної фільтрації однорідної рідини для випадку, коли $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 2 \cdot \cos(\theta), y^*(\theta) = 2 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$,

$$G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{a_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_\lambda} \right)^2 \leq 1 \right\} \text{ де } a_1 = 10 \text{ м., } b_1 = 0.1 \text{ м., та } L_* = \{x + iy :$$

$$x_*(\theta) = 0,1 \cdot \cos(\theta), y_*(\theta) = 0,1 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\} \text{ при } p_* = 112 \cdot 10^5 \text{ Па.,}$$

$$p^* = 198 \cdot 10^5 \text{ Па., } k_0 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ } \dot{\text{и}}^2, k_1 = 11 \cdot 10^{-12} \text{ } \dot{\text{и}}^2, n \times m = 38 \times 80 \text{ (рис.}$$

2.3. а).

Як відомо, для того щоб результати могли описати достатньо

широкий клас задач, розв'язок зазвичай шукають у безрозмірних величинах. Такий підхід дозволяє не тільки виявити характерні особливості процесу, але й якісний опис його розвитку у ширшому класі розглядаємих явищ, не проводячи щоразу розрахунки у випадку зміни вхідних параметрів задачі, які вимагають додаткового часу та відповідних ресурсів. Тому введемо комплекс обезрозмірювання характерних величин:

$$\%x = \frac{x}{L}, \quad \%y = \frac{y}{L} \quad (L = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \sqrt{(x^*(\theta + \pi) - x^*(\theta))^2 + (y^*(\theta + \pi) - y^*(\theta))^2} - \text{характерний розмір пласта}),$$

$$\%t = \frac{t}{T} \quad (T \approx t_{\max}), \quad \%v_i = \frac{v_i \cdot T}{L}, \quad \%p = \frac{(p^* - p_*) \cdot k \cdot T}{\mu_i \cdot L^2},$$

звідки будемо мати: $a_1 = 1$, $b_1 = 0.05$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k_1 = 10$, $k_0 = 1$.

На рис. 2.3. б зображено відповідну гідродинамічну сітку, розраховану за описаним вище алгоритмом з точністю $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$.

Для такого конфокального взаємного розміщення свердловини та тріщини ГРП [6] існують аналітичні формули розрахунку характерних фільтраційних параметрів, зокрема комплексного потенціалу $\omega(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ відповідного фільтраційного поля та значення витрати Q :

$$\omega_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_1 \sum_{n=0}^{+\infty} D_n z^{2n}, \quad (2.17)$$

$$\omega_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_0 \sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^{-2n}, \quad (2.18)$$

$$Q = Q_0 \frac{\ln R_c - \ln r_w}{\ln(R_c/r_w) + S}, \quad (2.19)$$

де D_n , B_n – сталі й знаходяться з відповідних умов на контурах тріщини та фільтраційної області (при цьому знаходження поля швидкості

фільтрації в пласті та тріщині є можливим шляхом диференціювання комплексного потенціалу (2.17) – (2.18));

S – скін-фактор (характерний параметр, що відображає вплив тріщини ГРП на продуктивність свердловини);

$$Q_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot k_1 \cdot h \cdot (\varphi_s - \varphi^*)}{\mu \cdot \ln(R_c / r_w)} - \text{дебіт свердловини без тріщини ГРП [6].}$$

На основі вищеописаних аналітичних формул побудовано відповідну гідродинамічну сітку (рис 2.3. в). Порівняння числових значень розрахунків фільтраційно-ємкісних характеристик у відповідних вузлах сітки є вагомим аргументом адекватності запропонованої нами математичної моделі та ефективність методу. Крім цього, формули (2.17) – (2.19) доцільно використовувати для контролю точності та вибору початкового наближення параметрів.

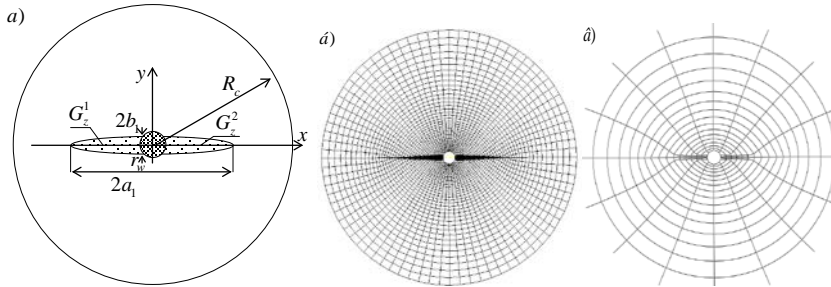


Рис. 2.3. Круговий пласт із тріщинами гідророзриву (а) й відповідні йому гідродинамічні сітки, розраховані за допомогою розробленого алгоритму (б) та аналітичних формул (в)

На основі запропонованого нами алгоритму дослідження закономірностей процесу витіснення нафти законтурною водою з

урахуванням тріщин ГРП $(G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{1}{a_\lambda} (x \cos \alpha_\lambda + y \sin \alpha_\lambda) \right)^2 + \right.$

$$+\left\{\frac{1}{b_\lambda}(-x \sin \alpha_\lambda + y \cos \alpha_\lambda)\right\}^2 \leq 1\}, \text{ проведемо числові розрахунки для}$$

більш ускладненої моделі в результаті збільшення кількості тріщин та зміни їх розміщення, яка не має аналітичних розв'язків для пласта обмеженого контурами $L^* = \{x + iy : x^*(t) = 0.1 \cdot \cos(\theta), y^*(t) = 0.1 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ та $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1 \cos(3\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1 \sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ при $\varphi_* = 0, \varphi^* = 1, \sigma = 0.5, n \times m = 70 \times 180, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, де $k_0 = 1, k_1 = k_2 = 10$. На рисунку 2.4 зображено гідродинамічні сітки пласта при відсутності тріщин ГРП (рис. 2.4. а) та їх наявності: $a_1 = 1, b_1 = 0.05, \alpha_1 = 0$ (рис. 2.4. б), $a_1 = 0.05, b_1 = 1, \alpha_1 = 135$ (рис. 2.4. в), $a_1 = b_2 = 1, b_1 = a_2 = 0.05, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ (рис. 2.4. г).

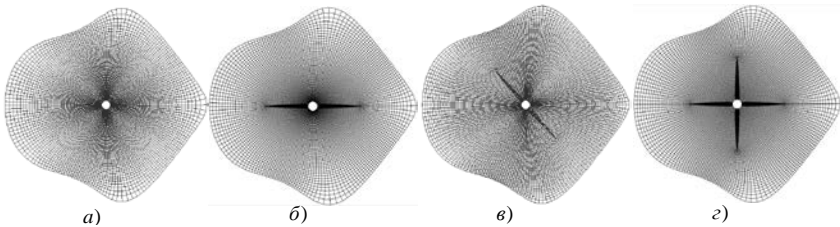


Рис. 2.4. Гідродинамічні сітки у пласті при відсутності (а) та наявності (б-г) тріщин гідророзриву

На рисунку 2.5 зображено гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу для вищеписаних випадків, зокрема значення загальної фільтраційної витрати експлуатаційної свердловини, відповідно, дорівнюють: 2.114, 2.956, 2.847, 3.564.

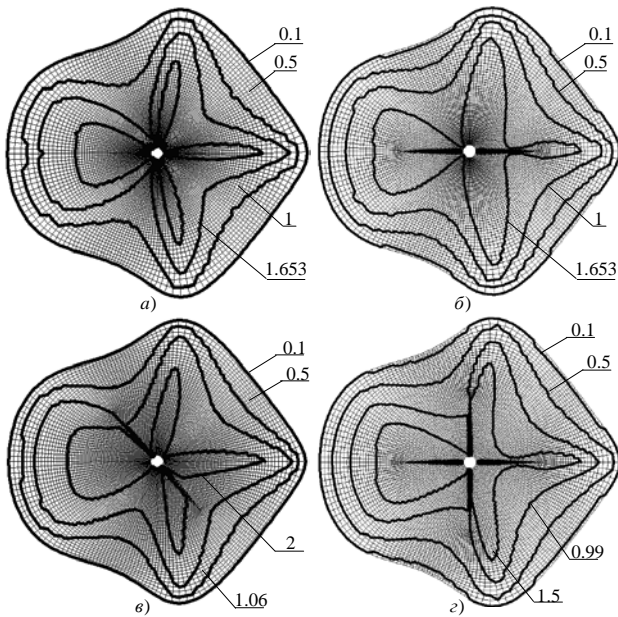


Рис. 2.5. Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу

На рис. 2.6 зображено графік залежності частки витісняючої рідини (води) Q_t у загальній фільтраційній витраті Q експлуатаційної свердловини від часу для вищеописаних випадків. Враховуючи той факт, що на практиці процес витіснення в основному припиняють за умови $Q_t/Q > 0.8$, то в результаті здійснення розрахунків, встановлено і позначено на графіку (штрих-пунктирними лініями) моменти часу виконання даної умови для кожного з випадків: $\bar{t}_1 = 3.71$, $\bar{t}_2 = 3.14$, $\bar{t}_3 = 2.76$, $\bar{t}_4 = 2.28$, відповідно $V_{\text{дт}}(\bar{t}_1) = 2.12$, $V_{\text{дт}}(\bar{t}_2) = 2.08$, $V_{\text{дт}}(\bar{t}_3) = 2.04$, $V_{\text{дт}}(\bar{t}_4) = 2.06$. На графіку також відзначено момент часу прориву води до експлуатаційної свердловини: 1.756, 1.653, 0.923 та 0.989, та повного її

обводнення: 4.334, 3.505, 3.066, 2.337. Так як об'єм нафти, що міститься у пласті до початку витіснення становить $V_i = 2.4$. Як бачимо, з використанням процедури ГРП віддача пласта значно збільшується зі збільшенням кількості тріщин.

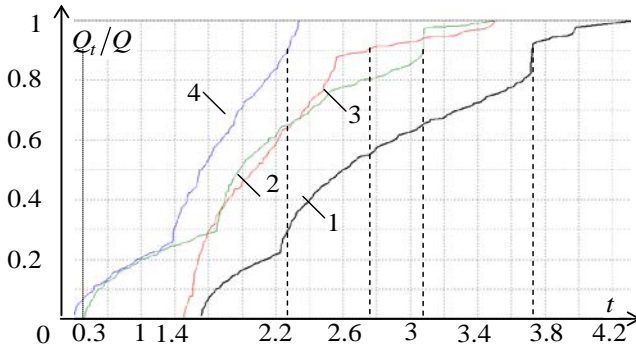
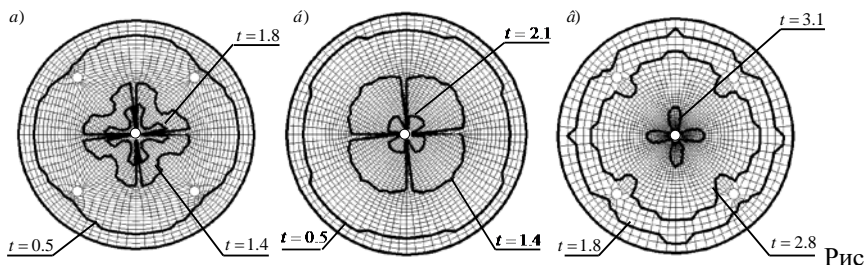


Рис. 2.6. Графік залежності частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті від часу.

Таким чином, змінюючи орієнтацію тріщин чи збільшуючи їх кількість змінюються відповідно і фільтраційно-ємкісні характеристики процесу витіснення, що підтверджують доцільність застосування ГРП для інтенсифікації нафтовидобутку, в результаті чого вдається підібрати такі параметри тріщин (розміри і положення), при якому час розробки пласта є мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною.

Досить часто при розробці нафтових родовищ відбувається призупинка свердловин, тому проведемо дослідження процесу витіснення у пласті, обмеженому зовнішнім контуром живлення $L^* = \{(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}): x^2 + y^2 = R_c^2\}$, у випадку наявності включень скінченної проникності типу призупинених свердловин $G_z^{\%} = \{(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}): (x - x_0^{\%})^2 + (y - y_0^{\%})^2 = 1\}$ і утворених на експлуатаційній свердловині $L_w = \{(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}): x^2 + y^2 = r_w^2\}$

тріщин ГРП $G_{\frac{\delta}{\rho}}^{\delta} = \left\{ (\delta, \rho) : \left(\frac{x}{a_{\frac{\delta}{\rho}}} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_{\frac{\delta}{\rho}}} \right)^2 = 1 \right\}$, де $\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\delta}{\delta_0} = \lambda$, $k_{\frac{\rho}{\delta}} = 1000$,
 $k_{\frac{\delta}{\rho}} = 10$, $k_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta^* = 10^{-5}$, $R_c = 2$, $r_w = 0.1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $a_1 = 1$,
 $b_1 = 0.05$, $n \times m = 38 \times 80$ (рис. 2.7).



2.7. Гідродинамічні сітки пласта з включеннями типу призупинених свердловин та тріщинами ГРП (а), тільки з тріщинами ГРП (а'), тільки з включеннями типу призупинених свердловин (а'')

Таблиця 2.1.

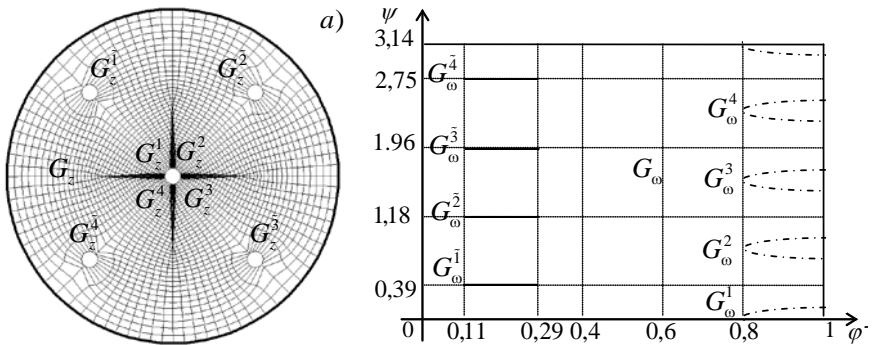
Значення Q , t_{\min} та t_{\max} для відповідних випадків (а), (б), (в).

	Q	t_{\min}	t_{\max}
а)	3,305	1,425	1,884
а')	3,306	1,483	2,213
а'')	2,086	2,55	3,247

У таблиці 2.1. представлені значення фільтраційної витрати Q , часу прориву t_{\min} витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та часу повного її заводнення – t_{\max} у кожному із описаних вище випадків.

Бачимо, що наявність у досліджуваному пласті недіючих свердловин значно сповільнює процес витіснення, на відміну від тріщин ГРП, при наявності яких суттєво збільшується фільтраційна витрата і зменшується час повного обводнення, що значно оптимізує процес витіснення однак, при наявності і недіючих свердловин, і тріщин ГРП час витіснення – найменший, а витрата майже не змінилась.

З використанням вищеописаної моделі, проведемо порівняння фільтраційних характеристик у випадку існування у пласті включень, що мають різні значення коефіцієнту проникності. На рис. 2.8 зображено ситуаційні стани формування течії у випадках, близьких до критичних ($k_{\phi} = 0$ та $k_{\phi} = \infty$), а саме, коли $k_{\phi} = 0,1$ (а) та $k_{\phi} = 1000$ (б).



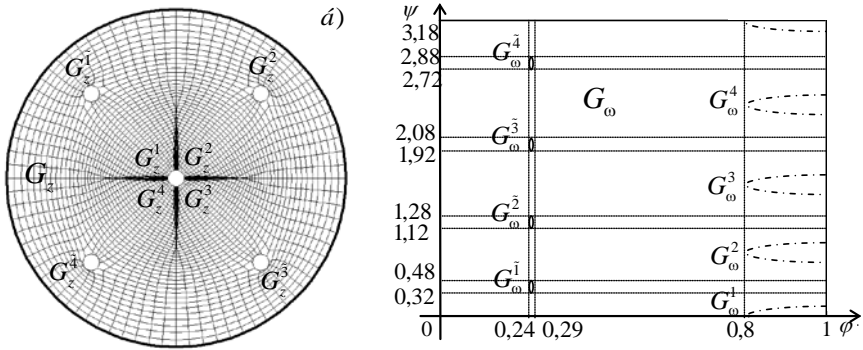


Рис. 2.8. Фізична область G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $k_{\%}=0,1$ (а) та $k_{\%}=1000$ (б)

Як відомо, підобласті $G_\omega^{\%}$ (образи $G_z^{\%}$) при $k_{\%} \rightarrow 0$ вироджуються в горизонтальні відрізки, адже утворюються зони оптикання непроникних (малопроникних) зон, а при $k_{\%} \rightarrow \infty$ - «вертикальні» еліпси, що пояснюються прискоренням руху навколо цих зон. Отже, маємо: по-перше, ще один варіант перевірки адекватності моделі та ефективності методу і, по-друге, наблизений розв'язок відповідних задач: обтікання непроникних включень; перетікання через включення з нескінченно великою проникністю (обмеженими еквіпотенціальними лініями).

Найчастіше при моделюванні розробки нафтових родовищ спостерігається висока неоднорідність пластів-колекторів, тому проаналізуємо зміну фільтраційних характеристик у випадку зміни розміщення експлуатаційної свердловини та тріщин ГРП на ній відносно зон неоднорідностей скінченої проникності. Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого зовнішнім контуром живлення $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(7\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta))\}$,

$0 \leq \theta < 2\pi$ та контуром експлуатаційної свердловини $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 0.1 \cos(\theta) + \mathcal{X}_0^*, y^*(\theta) = 0.1 \sin(\theta) + \mathcal{Y}_0^*, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, при $n \times m = 48 \times 80$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\sigma = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, $k_0 = 1$, коли фільтраційна течія збурена малопроникними зонами $G_z^{\mathcal{X}_0} = \left\{ (x, y) : \left((x - \mathcal{X}_0^*) / a_{\mathcal{X}_0} \right)^2 + \left((y - \mathcal{Y}_0^*) / b_{\mathcal{X}_0} \right)^2 = 1 \right\}$ і утвореними на експлуатаційній свердловині тріщинами гідророзриву $G_{\mathcal{X}_0}^{\mathcal{X}_0} = \left\{ (x, y) : \left((x - \mathcal{X}_0^*) / a_{\mathcal{X}_0} \right)^2 + \left((y - \mathcal{Y}_0^*) / b_{\mathcal{X}_0} \right)^2 = 1 \right\}$, де $\mathcal{X}_0^* \lambda_{\mathcal{X}_0} = \lambda$, $k_{\mathcal{X}_0} = 0,4$ ($\mathcal{X}_0^* = \overline{1,3}$), $a_{\mathcal{X}_0} = 0,5$, $b_{\mathcal{X}_0} = 0,4$ ($\mathcal{X}_0^* = \overline{1,2}$), $a_{\mathcal{X}_0} = 0,4$, $b_{\mathcal{X}_0} = 0,5$ ($\mathcal{X}_0^* = 3$), $k_{\mathcal{X}_0} = 8$ ($\lambda_{\mathcal{X}_0} = \overline{1,2}$), $a_{\mathcal{X}_0} = b_{\mathcal{X}_0+1} = 0,05$ і $b_{\mathcal{X}_0} = a_{\mathcal{X}_0+1} = 1$ ($\lambda_{\mathcal{X}_0} = 1$) (рис. 2.9).

Проведемо порівняння зміни положення границі розділу рідин у різні моменти часу (рис. 2.10) розробки пласта та встановимо значення фільтраційної витрати, час прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та час повного її обводнення (табл. 2.2) відносно зон неоднорідностей ґрунту, що дозволить, в свою чергу, передбачити напрямки обводнення і провести відповідні дії щодо уникнення пов'язаних з цим небажаних ефектів.

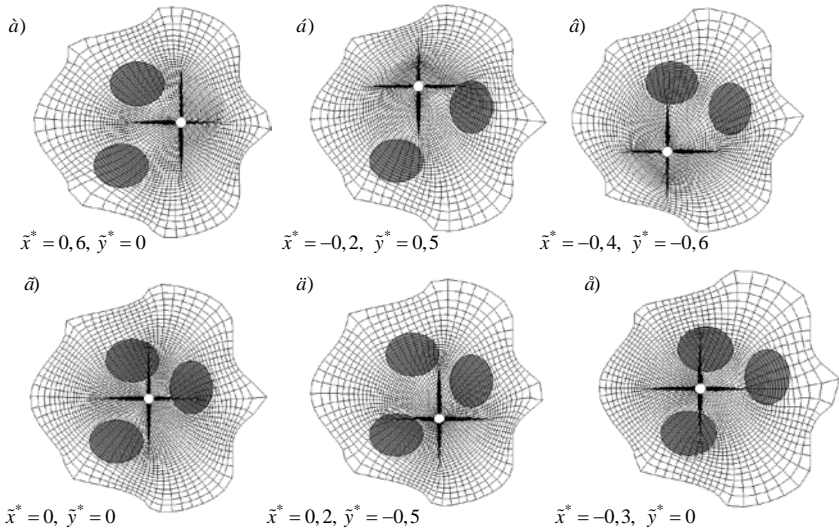


Рис. 2.9. Гідродинамічні сітки для локально неоднорідного пласта

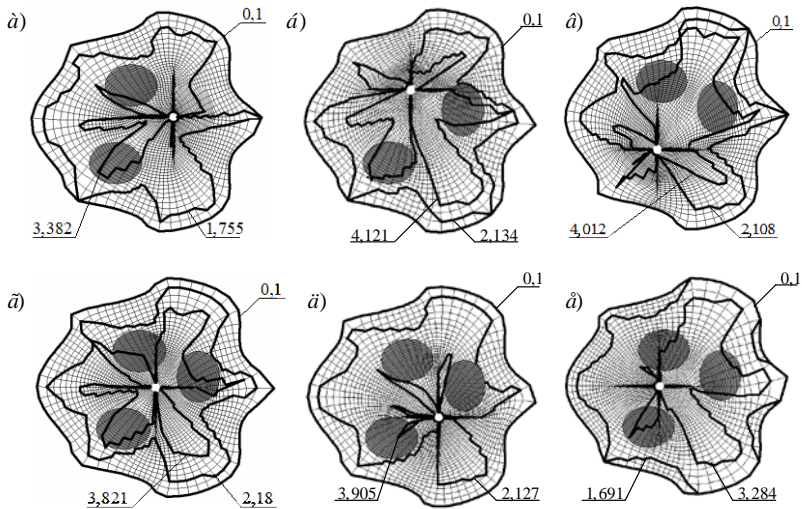


Рис. 2.10. Гідродинамічні сітки для різних випадків розміщення експлуатаційної свердловини відносно зон неоднорідностей у пласті

Таблиця 2.2.

Значення Q , t_{\min} та t_{\max}

	$a)$	$\acute{a})$	$\hat{a})$	$\bar{a})$	$\grave{a})$	$\text{a}^{\circ})$
Q	2,537	2,564	2,394	2,692	2,691	2,614
t_{\min}	0,59	0,45	0,18	1,11	0,48	1,12
t_{\max}	5,62	7,49	6,31	4,52	4,69	4,73

В результаті досліджень було помічено, що при розміщенні експлуатаційної свердловини у одній із зон неоднорідностей (рис. 2.10 a , 2.10 \acute{a} , 2.10 \hat{a}), на відміну від випадків її розміщення між ними (рис. 2.10 \bar{a} , 2.10 \grave{a} , 2.10 a°), значення її дебіту значно менше, час повного обводнення – більше, у зв'язку із вищим загальним фільтраційним опором пласта в його привибійній ділянці. Змінюючи просторове розміщення експлуатаційної свердловини, при використанні розробленого алгоритму, вдалося підібрати таке її положення, при якому час розробки пласта є мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною, що забезпечує оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів.

2.3 Моделювання поведінки системи «нагнітальна-експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою

У даному параграфі, на основі методів комплексного аналізу [32], розроблено підхід до математичного моделювання поведінки системи «нагнітальна-експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою, запропоновано числовий алгоритм інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП скінченної проникності. Він дозволяє врахувати взаємне

розміщення свердловин на продуктивній площі, тріщин гідророзриву, розподіл неоднорідностей пласта тощо. На конкретному прикладі проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив характеристичних параметрів тріщини на роботу експлуатаційної та нагнітальної свердловин.

Розглянемо модельну задачу дослідження еволюції границі розділу різнокольорових рідин у горизонтальному, неоднорідному пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L , контурами нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин (рис. 2.13), коли фільтраційне поле збурене тріщинами гідророзриву G_z^λ .

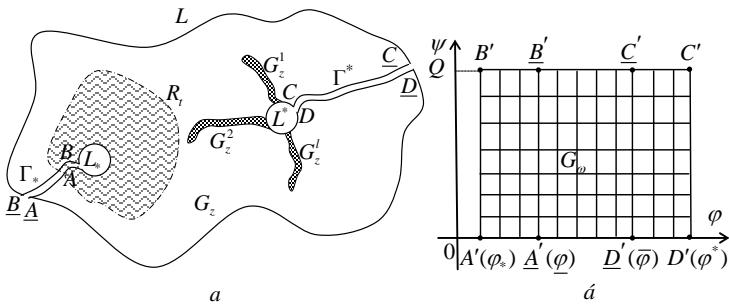


Рис. 2.13. Фізична область в пласті G_z за умови існування тріщин ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Для математичної постановки задачі фільтрації рідин у пористому середовищі запишемо рівняння нерозривності та рівняння руху у тріщинах ГРП $D_z = \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda$, $\lambda = \overline{1, d}$, де d - кількість тріщин, а також в частині пласта

без тріщин $G_z^0 = G_z \setminus \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda$, наступним чином [13, 19]: $div^I v = 0$,

$v = k(x, y) grad \varphi$, $(x, y) \in G_z$, за умов $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_L = 0$ на

свердловинах і зовнішньому контурі пласта, тут φ - квазіпотенціал

швидкості фільтрації, $k(x, y) = \begin{cases} k_1, & (x, y) \in G_z^\lambda, \lambda=1, d \\ k_0, & (x, y) \in G_z^0 \end{cases}$ – коефіцієнт фільтрації.

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ , як попередньо, та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [18], утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2.24)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi_\lambda = \varphi_0|_{\partial G_z^\lambda}, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2.25)$$

$$(v_\lambda)_n = (v_0)_n|_{\partial G_z^\lambda}, \quad v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad (2.26)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $Q = \oint_{L_*} v_y dx + v_x dy$ – невідома витрата на контурі експлуатаційної свердловини.

Як і раніше, більш доцільним є перехід до оберненого квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_z^0$, що спрощує та в деякій мірі автоматизує побудову гідродинамічної сітки, тоді крайова задача (2.24)-(2.26) та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин

(виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії будуть записані у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.27)$$

$$u_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$u(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad u(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (2.28)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (2.29)$$

$$\left[x(\varphi, \psi) \right]_{\partial G_\omega^+} = \left[y(\varphi, \psi) \right]_{\partial G_\omega^+} = 0,$$

$$\left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\underline{\nu}, \underline{n}) \right]_{\partial G_\omega^+} = 0, \quad (2.30)$$

$$\nu(x(\underline{\varphi}, \underline{\psi}), y(\underline{\varphi}, \underline{\psi})) = 0, \quad \nu(x(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), y(\bar{\varphi}, \bar{\psi})) = 0, \quad \underline{\psi} \in \{0, Q\}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2.32)$$

де $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» (відповідно «розходження» та «сходження» течії), u_* , u^* , u – функції, що визначають контури області G_z : L_* , L^* , L відповідно.

Для запису різницевого аналогу задачі (2.27) – (2.32) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ ää } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \text{ i } \delta\bar{\delta} i = \overline{0, n_1}, l = 1, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ ää } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}, \text{ i } \delta\bar{\delta} i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ ää } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, \text{ i } \delta\bar{\delta} i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, l = 3, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = Q/m, \quad j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу двох середовищ з різними його значеннями, рівняння (2.32) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [199]. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \\ \quad + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\ \quad + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\text{де } k_{i,j\pm 1/2} = k \left(\frac{x_{i,j\pm 1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1} + y_{i,j}}{2} \right), \quad k_{i\pm 1/2,j} = k \left(\frac{x_{i\pm 1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j} + y_{i,j}}{2} \right),$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi} - \text{квазіконформні інваріанти.}$$

Крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів апроксимуємо таким чином [29, 31]:

$$\begin{cases} u_* (x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, u^* (x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ u(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, u(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1 \cup n_1 + n_2, n}; \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулами:

$$Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \alpha\varphi^*}{1 + \beta\alpha}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \beta\varphi_*}{1 + \beta\alpha},$$

де
$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \beta\alpha = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\beta\alpha = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}.$$

Величини квазіконформних інваріантів γ_i

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1, 0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n-n_1-n_2)} \sum_{i,j=\overline{n_1+n_2,0}}^{n-1,m-1} \gamma_{i,j}, \quad (2.37)$$

$$\text{де } \gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2},$$

$$k_{i+1/2,j+1/2} = k \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4} \right).$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо наступним чином:

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1,$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = (\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}),$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3;$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,j} = \frac{k_{0,j}}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad l = 1, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,j} = \frac{k_{n,j}}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,m} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,m}), \quad l = 2,$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,m} - y_{i,m-1}) - (x_{i,m} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = \frac{k_{i,0}}{\Delta\psi J_{i,0}} (y_{i,1} - y_{i,0}, x_{i,0} - x_{i,1}), \quad i = \overline{n_1 + 2, n_1 + n_2 - 1},$$

$$J_{i,0} = \frac{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,j} = \frac{k_{n_1+1,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,j}} (y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1}, x_{n_1+1,j-1} - x_{n_1+1,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n_1+1,j} = \frac{(x_{n_1+2,j} - x_{n_1+1,j})(y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1}) - (x_{n_1+1,j+1} - x_{n_1+1,j-1})(y_{n_1+2,j} - y_{n_1+1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,j} = \frac{k_{n_1+n_2,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,j}} (y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1}, x_{n_1+n_2,j-1} - x_{n_1+n_2,j+1}),$$

$$J_{n_1+n_2,j} = \frac{(x_{n_1+n_2,j} - x_{n_1+n_2-1,j})(y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \frac{(x_{n_1+n_2,j+1} - x_{n_1+n_2,j-1})(y_{n_1+n_2,j} - y_{n_1+n_2-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,0} = (\nu_x, \nu_y)_{0,m} = \frac{k_{0,0}}{2\Delta\psi J_{0,0}} (y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1}),$$

$$J_{0,0} = \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,0} = (\nu_x, \nu_y)_{n,m} = \frac{k_{n,0}}{2\Delta\psi J_{n,0}} (y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1}),$$

$$J_{n,0} = \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_3};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,0} = (\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,m} = \frac{k_{n_1+n_2,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,0}} \times$$

$$\times (y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1}, x_{n_1+n_2,m-1} - x_{n_1+n_2,1})$$

$$J_{n_1+n_2,0} = \frac{(x_{n_1+n_2,0} - x_{n_1+n_2-1,0})(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} -$$

$$- \frac{(x_{n_1+n_2,1} - x_{n_1+n_2,m-1})(y_{n_1+n_2,0} - y_{n_1+n_2-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,0} = (\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,m} = \frac{k_{n_1+1,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,0}} (y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1}, x_{n_1+1,m-1} - x_{n_1+1,1}),$$

$$J_{n_1+1,0} = \frac{(x_{n_1+2,0} - x_{n_1+1,0})(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} -$$

$$- \frac{(x_{n_1+1,1} - x_{n_1+1,m-1})(y_{n_1+2,0} - y_{n_1+1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}$$

Згідно з (2.15) наближено знаходимо час проходження частинкою шляху вздовж j - тої лінії течії від i_* - ї до i^* - ї еквіпотенціалей.

Маючи різницеву задачу для ітераційного відшукування гідродинамічної сітки, коли відома тільки геометрія області фільтрації (контури границі та умови на них), слід задати «якісне» початкове наближення розміщення її вузлів, як на границі так і в середині області, тому, що швидкість збіжності ітераційного процесу сильно залежить від нього.

Задання початкового наближення розміщення точок на контурах області не викликає труднощів, особливо, коли контури задані параметрично. Для побудови початкового наближення координат внутрішніх вузлів, можна використати один із алгебраїчних чи варіаційних

методів побудови сіток, наприклад метод трансфінитної інтерполяції [19]. Проте, використання такого роду методів для геометрично складних областей, досить часто призводить до небажаних результатів, наприклад, в деяких місцях лінії сітки можуть перетинати самі себе. Для уникнення цього ефекту та покращення побудованої сітки, доцільно ввести корегуючі поправки на взаємне розміщення вузлів або ж здійснити їх поправку вручну.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (2.27)–(2.32) різницевою задачею у загальному випадку, як і в роботах [22-23], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_1 , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [142], для аналітичного обґрунтування його збіжності.

На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L , L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1 , n_2 , n_3 та m) та параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (2.35), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (2.37), знаходимо початкове наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_1^{(0)}$ та невідомих величин $\varphi^{(0)} = \frac{\varphi_* + \beta\varphi^*}{1 + \beta\alpha}$,

$$\bar{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \beta\varphi_*}{1 + \beta\alpha}, \quad Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \text{де}$$

$$\alpha = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \beta = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}. \quad \text{Проводимо}$$

уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (2.34) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (2.36). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.37), знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.27):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \quad l = \begin{cases} 1, \text{ і } \delta \in i = \overline{1, n_1}, \\ 2, \text{ і } \delta \in i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ 3, \text{ і } \delta \in i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}. \end{cases}$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше,

виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого контурами $L_* = \{ x + iy : x_*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + \mathcal{W}_0, y_*(\theta) = 0.1\sin(\theta) + \mathcal{W}_0, 0 \leq \theta < 2\pi \}$, $L^* = \{ x + iy : x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + \mathcal{W}_0^*, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta) + \mathcal{W}_0^*, 0 \leq \theta < 2\pi \}$, $L = \{ x + iy : x_0(t) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(3\theta)), y_0(t) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi \}$ при $\varphi_* = 0, \varphi^* = 1, k_0 = 1, \sigma = 0.5, \varepsilon = 10^{-5}, n_1 \times n_2 \times n_3 = 8 \times 40 \times 8, m = 70$. На експлуатаційній свердловині змодельовано тріщини гідравлічного розриву пласта у вигляді еліпсів з осями a_i та b_i , коефіцієнт проникності яких $k_1 = k_2 = 10$. Зазначимо, що об'єм нафти, що міститься у пласті до початку витіснення становить $V_i = 6,28$. На рисунку 2.14 зображено гідродинамічні сітки при різних положеннях тріщин утворених в наслідок проведення процедури ГРП на експлуатаційній свердловині.

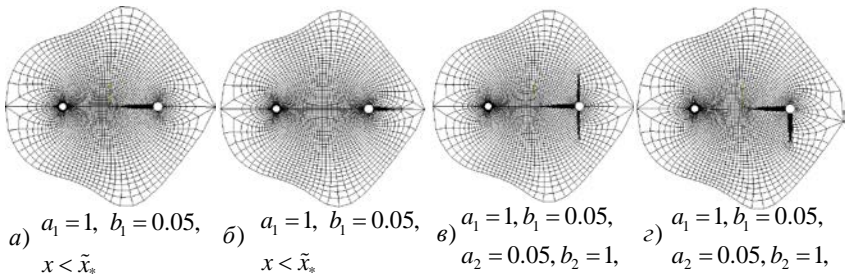


Рис. 2.14 Гідродинамічні сітки для пласта з тріщинами ГРП

Для розміщення свердловин та тріщин ГРП як зображено на рис. 2.14, проведемо порівняння зміни положення границі розділу рідин, загальної фільтраційної витрати, значень частки витісненого флюїду

(нафти) від часу в експлуатаційній свердловині, координат критичних точках типу «призупинки» $((x_0^*, y_0^*), (x_*^0, y_*^0))$, значень квазіпотенціалу у них $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$, моментів часу прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини t_{\min} та повного обводнення t_{\max} її, що дозволить в свою чергу передбачити напрямки обводнення і провести відповідні дії щодо уникнення пов'язаних з цим небажаних ефектів [26].

В першу чергу визначимо вищеописані характеристики у випадку, коли в пласті відсутні тріщини гідророзриву (рис. 2.15): $Q = 0.879$, $Q_i(0.5) = 0.879$, $Q_i(2.1) = 0.789$, $Q_i(18.3) = 0.091$, $\underline{\varphi} = 0.17$, $\overline{\varphi} = 0.84$, $t_{\min} = 1.96$, $t_{\max} = 48.05$. який характерний сповільненим процесом витіснення та найменшим значенням дебіту видобувної свердловини і, як

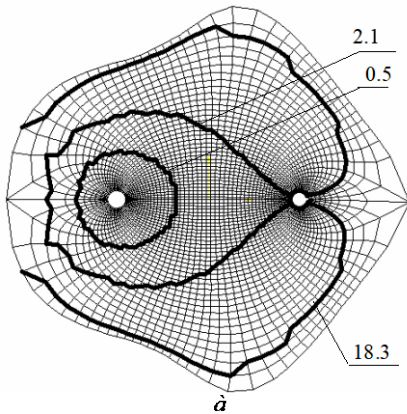


Рис. 2.15. Ізображення гідродинамічної сітки і ліній розділу фаз у відповідні моменти часу за умов симетрії пласта є вагомим підтвердженням точності методу.

наслідок, найменшим значенням об'єму добутої нафти $V_{\text{дт}}(18.3) = 5.81$ з пласта від початку витіснення до моменту часу $\bar{t} = 18.3$ заводнення видобувної свердловини більше як на 90%, адже подальша експлуатація свердловини стає економічно не вигідна і процес витіснення в більшості випадків припиняють, або ж проводять водоізоляційні та інші роботи [106, 167]. Водночас

симетричність гідродинамічної сітки і ліній розділу фаз у відповідні моменти часу за умов симетрії пласта є вагомим підтвердженням точності методу.

Провівши збурення фільтраційної течії тріщиною ГРП (частина еліпса) в напрямку нагнітальної свердловини (рис. 2.16 а) було помічено, що час прориву та час повного обводнення експлуатаційної свердловини зменшились, а фільтраційна витрата значно зросла, в зв'язку з пониженням загального фільтраційного опору пласта в його привибійній ділянці, як наслідок, значення об'єму добутої нафти становить $V_{\dot{a}i} (17.2) = 5.89$.

На рисунку 2.16 б продемонстровано процес витіснення нафти та зміну положення границі розділу рідин у випадку розміщення тріщини у протилежному напрямку від нагнітальної свердловини, в результаті чого час прориву води до видобувної свердловини є таким, як і при відсутності тріщин ГРП, а час повного її обводнення значно меншим, ніж у попередніх випадках. При такому розміщенні тріщини, процес витіснення (до виконання умови $Q_i(t)/Q < 0.1$) є найдовшим, а об'єму добутої нафти становить $V_{\dot{a}i} (19.2) = 5.96$ є найбільшим.

У випадку наявності декількох тріщин симетрично розміщених відносно осі симетрії пласта (рис. 2.16 в) суттєвим є те, що значення фільтраційної витрати зросло до $Q = 1.016$, а значення об'єму добутої нафти становить $V_{\dot{a}i} (16.3) = 5.78$, що є найменшим показником, відносно всіх попередніх випадків (це пояснюється тим, що у період часу $t_{\min} < t < t_{\max}$ значення частки витісняючої рідини $Q_i(t)$ у загальній фільтраційній витраті Q різко зменшується. На відміну від вищерозглянутих можливих розміщень тріщин ГРП, у випадку їх асиметрії, як зображено на рисунку 2.16 г, продемонстровано порушення симетрії фронту витіснення, що призводить у даному випадку до передчасного обводнення видобувної свердловини та нерівномірного «вимиву» нафти з пласта. При цьому, як наслідок, спостерігається зміщення точок «призупинки» течії та зміна значень квазіпотенціалу у

них. У такому випадку час процесу витіснення $\bar{t} = 15.1$ є мінімальним, а значення об'єму добутої нафти протягом цього часу суттєво не збільшилося відносно випадку відсутності тріщин ГРП у пласті і становить: $V_{\dot{a}t}(15.1) = 5.83$.

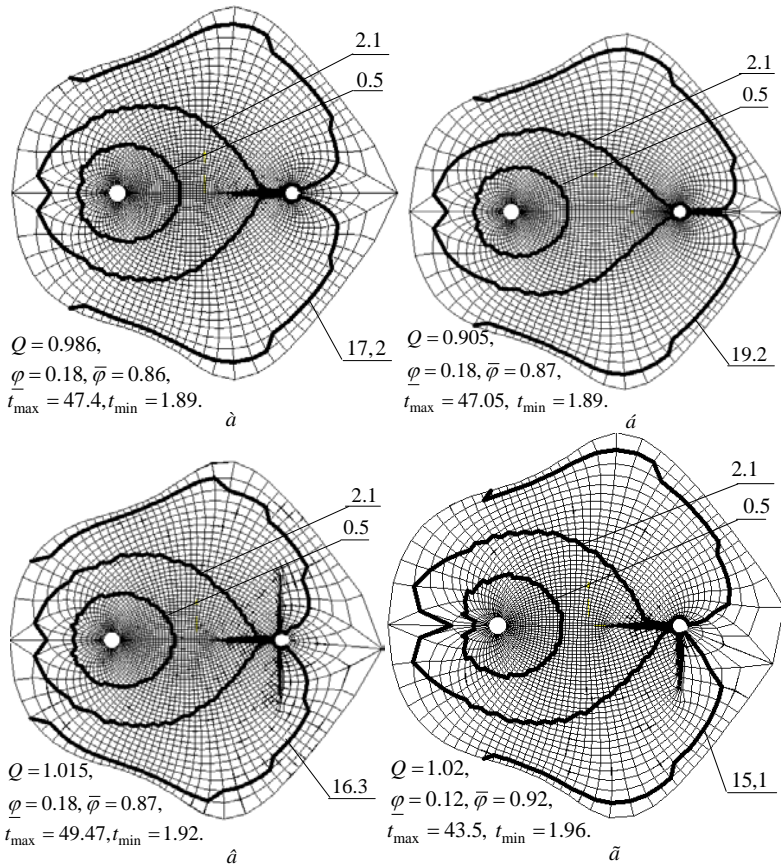


Рис. 2.16. Положення границі розділу рідин у різні моменти часу в пласті при наявності тріщин гідророзриву

Таким чином, змінюючи положення та параметри тріщин, при фіксованому розміщенні свердловин, можемо забезпечити оптимальні

умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів. Ввівши цільову функцію, що враховує об'єм залишеної нафти, її локальну зосередженість, та затрати на буріння, експлуатацію нових свердловин і тріщин ГРП на них, розв'язавши традиційну задачу оптимізації (на екстремум цільової функції), можливим є прийняття автоматизованого рішення стосовно доцільності розробки пласта. Щоб уникнути виникнення ефекту передчасного обводнення та, як наслідок, зменшення залишку нафти у пласті $V_{\text{св}}(\bar{t})$, доцільно проводити процедуру ГРП таким чином, щоб загальна площа тріщин приймала однаковий об'єм рідини в одиницю часу та їх розміщення було у протилежному напрямку від нагнітальної свердловини.

2.4 Методика розв'язання крайових задач інтенсифікації процесу витіснення у нафтових пластах за умов збурення присвердловинної зони пласта шляхом дії вибуху

У параграфі розроблено алгоритм числового розв'язання обернених краєвих задач теорії вибуху із застосуванням методології поетапної фіксації характеристик процесу і середовища та числового методу квазіконформних відображень.

Нехай в деяку область G_z ($z = x + iy$) поміщено заряд заданої форми з постійним квазіпотенціалом на ньому і процес руху частинок описується за допомогою рівняння $\dot{v} = k \cdot \text{grad}\varphi$ (закон Дарсі) та рівняння нерозривності $\text{div}\dot{v} = 0$, де $\dot{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, $k = k(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ – коефіцієнт провідності середовища, а

$\varphi = \varphi(x, y) = -P / \rho$ – квазіпотенціал відповідного поля, $P = \int_0^{t_0} p dt$ –

імпульс тиску [58, 87-88], p – тиск, що діє на протязі часу $t \in [0, t_0]$, ρ – густина середовища. Вважаємо, що область пласта обмежена такими контурами (рис. 4.1): $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_*(\theta), y = y_*(\theta), \alpha_* < \theta < \beta_*\}$ – контур заряду, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x^*(\theta), y = y^*(\theta), \alpha^* < \theta < \beta^*\}$, де $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$.

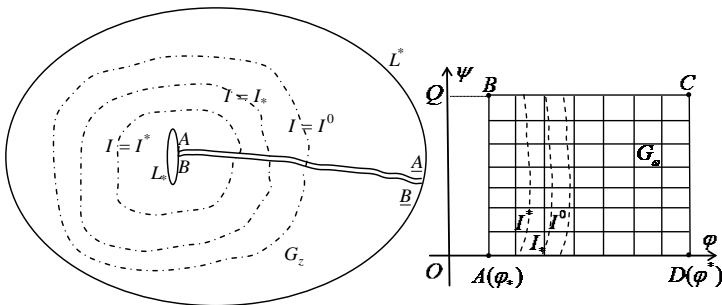


Рис. 4.1. Область пласта із вибуховим зарядом L_*

Один із варіантів моделювання вибуху є врахування взаємовпливу градієнта I квазіпотенціала $\varphi = \varphi(x, y)$ та коефіцієнта провідності k і виділення ділянок (рис. 4.1), в яких проводиться корекція значення коефіцієнта k в залежності від значень I за наступною формулою:

$$k = \begin{cases} k_0 + \beta(I - I^*)(I - I^0), & I > I^0, \\ k_0, & I \leq I^0, \end{cases}$$

де $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – величина градієнту, а I^0 , I^* – критичні його значення, які характеризують затримку та відрив частинок (положення лінії розділу), параметр β підбирається виходячи з фізичного експерименту. Залежності

коефіцієнта провідності від величини градієнта вздовж однієї з ліній течії схематично зображено на рис. 4.2, де I_* – критичне значення градієнта, що відповідає значенню коефіцієнта провідності $k_* = k_0 + \beta(I_* - I^0)(I_* - I^0)$.

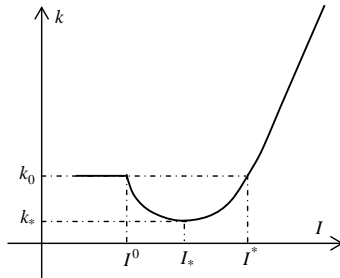


Рис. 4.2. Розподіл коефіцієнта провідності відносно значень градієнту

Аналогічно до [16], ввівши комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії) та здійснивши умовний розріз області вибуху вздовж ліній розділу течії (через \underline{AA} та \underline{BB} на рис. 4.1 позначено відповідно верхній та нижній берег розрізу) приходимо до відповідної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [19] утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / \underline{AA}$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром Q :

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\underline{AA}} = 0, \quad \psi|_{\underline{BB}} = Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy. \quad (4.2)$$

Обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізі для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) функції течії при невідомому положенні розріза та значенні Q одержимо у вигляді:

$$\begin{cases} k(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})y_\psi = x_\varphi, \\ k(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})x_\psi = -y_\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{matrix} \quad (4.3)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4.4)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Алгоритм числового розв'язання поставленої задачі побудуємо аналогічно до [18]. А саме, різницеві аналоги рівнянь (4.6), крайових умов (4.4), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, j = \overline{0, m}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\}$

запишемо відповідно у вигляді:

$$\begin{cases} \gamma^2 \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+0.5,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{k_{i-0.5,j}} \right) + k_{i,j+0.5}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-0.5}(x_{i,j} - x_{i,j-1}) = 0, \\ \gamma^2 \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+0.5,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{k_{i-0.5,j}} \right) + k_{i,j+0.5}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-0.5}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) = 0, \end{cases}$$

де $k_{i+0.5,j} = k \left((x_{i+1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i+1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i+1/2,j}) - (y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1})/(4\Delta\psi J_{i+0.5,j}), (x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i+0.5,j}) \right),$
 $k_{i-0.5,j} = k \left((x_{i-1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i-1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1})/(4\Delta\psi \cdot J_{i-0.5,j}) - (y_{i-1,j-1} + y_{i,j-1})/(4\Delta\psi \cdot J_{i-0.5,j}), (x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i-0.5,j}) \right)$
 $,$

$$\begin{aligned} k_{i,j+0.5} &= k \left((x_{i,j+1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j+1} + y_{i,j})/2, (y_{i,j+1} - y_{i,j})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j+0.5}), \right. \\ &\left. (x_{i,j} - x_{i,j+1})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j+0.5}) \right), \quad k_{i,j-0.5} = k \left((x_{i,j-1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j-1} + y_{i,j})/2, \right. \\ &\left. (y_{i,j} - y_{i,j-1})/(\Delta\psi J_{i,j-0.5}), (x_{i,j-1} - x_{i,j})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j-0.5}) \right); \quad J_{i+0.5,j} = ((x_{i+1,j} - x_{i,j}) \times \\ &\times (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - \\ &- x_{i,j-1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i-0.5,j} = ((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) - \\ &- (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j-1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i,j+0.5} = \\ &= ((y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) - (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - \\ &- y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i,j-0.5} = ((y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - \\ &- x_{i-1,j}) - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - \\ - y_{0,j-1}) = 0, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + \\ + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Формулу для наближення величини γ одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності” елементарних чотирикутників [3] двох областей:

$$\gamma = \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{k_{i,j}^* a_{i,j} + a_{i+1,j}}{nm b_{i,j} + b_{i,j+1}},$$

де

$$k_{i,j}^* = k \left((x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}) / 4, (y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}) / 4, \right.$$

$$\left. (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) / (2\Delta\psi J_{i,j}^*), (x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i,j+1} - x_{i+1,j+1}) / (2\Delta\psi J_{i,j}^*) \right),$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$J_{i,j}^* = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi} \left((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - \right.$$

$$\left. - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j}) \right).$$

Задавши параметри розбиття області G_ω n та m , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність роботи алгоритму розв’язання різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$ (так, щоб виконувались умови (4.8)) та внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за формулою (4.10) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(\alpha)}, y_{i,j}^{(\alpha)})$ із заданою точністю ε_1 (α – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв’язання (4.7) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні

значення градієнта напору та функції k у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації. Підправляємо граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (4.9), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену α -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(\alpha)} - x_{i,j}^{(\alpha-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(\alpha)} - y_{i,j}^{(\alpha-1)}\right)^2} \quad ((i,j) - \text{індекси координат}$$

граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$

величин Q та γ за формулою (4.10) та умовою зв'язку між ними:

$$Q = m\Delta\varphi \cdot \gamma. \text{ Якщо } \left|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}\right| > \varepsilon_3, \text{ то знову повертаємося до уточнення}$$

внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку “квзіконформності”

отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь

(4.3):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - k_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + k_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|. \end{cases}$$

Комп'ютерна реалізація алгоритму та числові розрахунки. Відповідний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Числові розрахунки проведено для області з коефіцієнтом провідності, що визначається вище запропонованим виразом (4.14) при $k_0 = 1$, $\beta = 0.058$,

$$I^* = 7, \quad I^0 = 0.6; \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad n \times m = 20 \times 60, \quad L^* = \{x + iy :$$

$$x_*(\theta) = 0.01 \cos(\theta) - 0.1, \quad y_*(\theta) = 0.3 \sin(\theta) \quad 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

$$L_* = \{x + iy : x^*(\theta) = 2 \cos(\theta), \quad y^*(\theta) = 2 \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

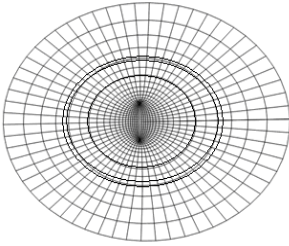


Рис. 4.3. Область вибуху

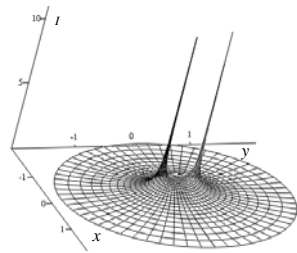


Рис. 4.4. Поле градієнту

На рисунку 4.3 зображено область вибуху, що відповідає еліптичному заряду з півосями 0.01 та 0.3, де виділені відповідні положення границі розділу впresованої, мало впresованої зон. Рисунок 4.4 відображає залежність величини градієнту від координат за умови сталості коефіцієнта провідності $k = 1$. Значення параметрів k_* та Q рівні відповідно: $k_* = 0.4$, $Q = 1.966$, де $I_* = 3.8$.

2.5 Моделювання процесу витіснення у низькопроникних пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

Враховуючи особливості будови важкопроникних, типу сланцевих, осадових порід, їх низьку проникність та тріщинуватість, одним із найефективніших методів інтенсифікації витіснення із систем тріщин та мікротріщин до стовбурів свердловин є гідравлічний розрив пласта (ГРП) [80, 114, 191], який їх об'єднує в деревовидні структури тим самим розширюючи зону впливу, що дренується свердловиною.

У цьому параграфі, на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу [22-25, 84], розроблено комплексний підхід до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію відтоку нафти з важкопроникних тріщинувато-пористих (зокрема, сланцевих) осадових порід з урахуванням суміжних

деформаційних процесів у присвердловинній зоні пласта [82-83], коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі (відносно критичного значення градієнта тиску).

Розглянемо задачу комплексного дослідження фільтраційних процесів в присвердловинній зоні пласта G_z ($z = x + iy$), що виникають внаслідок витіснення нафти від зовнішнього контуру живлення L_* тріщинувато-пористої осадової породи до контуру експлуатаційної свердловини L^* (рис. 4.5).

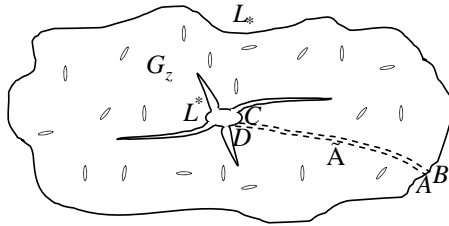


Рис. 4.5. Схематичне зображення фізичної області фільтрації.

Відповідний процес фільтрації, по аналогії з [35-36], опишемо за допомогою рівняння нерозривності та рівняння руху (спеціальним чином модифікованого закону Дарсі, відносно критичного значення градієнту тиску):

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = -\frac{k \chi(I, I_{kr})}{\mu} \operatorname{grad} p,$$

за відповідних умов на контурах пласта: $p|_{L_*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$ ($p_* > p^*$). Тут

$I = I(x, y) = |\operatorname{grad} p(x, y)| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ – величина градієнта тиску p ;

$\rho = \rho(p)$, μ – густина і в'язкість газу; k – коефіцієнт абсолютної проникності середовища, який у випадку існування тріщин ГРП

представимо у вигляді: $k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, & (x, y) \in G_z^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_\lambda G_z^\lambda \end{cases}$, G_z^λ – ділянки

пласта, яку займає λ -та тріщина; χ – коефіцієнт, що характеризує залежність проникності осадової породи (при ускладнених геологічних умовах фільтрації, для яких k_0/μ мала величина) від величини градієнта тиску і визначається наступним співвідношенням

$$\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{ї дè } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{ї дè } I \leq I_{kr}, \end{cases}$$

де F – задана монотонно зростаюча функція;

I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [12]: $\varphi(p) = \varphi_* + \frac{k}{\mu} \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$ та перепишемо відносно нього рівняння (4.11) з відповідними крайовими умовами:

$$\operatorname{div}(\chi(\mathcal{V}_\alpha I_{kr}) \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad \mathcal{V}_\alpha = \frac{\chi(\mathcal{V}_\alpha I_{kr})}{\mathcal{V}_\alpha \varphi} \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^*, \quad (\varphi_* < \varphi^*), \quad (4.13)$$

де $\mathcal{V}_\alpha \varphi = \rho(p(\varphi))$, $\mathcal{V}_\alpha = \frac{\mu}{k \mathcal{V}_\alpha \varphi} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$.

Аналогічно до [19], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз \tilde{A} області G_z вздовж лінії розділу течії, що визначаються точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, поставлена вище задача зводиться до задачі на

квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \tilde{A}$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\frac{\chi(\mathcal{P}_{kr}^0)}{\mathcal{P}\mathcal{K}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\chi(\mathcal{P}_{kr}^0)}{\mathcal{P}\mathcal{K}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$[\varphi]_{\partial G_z^0} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_z^0} = 0,$$

де $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ – невідома витрата; $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$;

$[\bullet]_{\partial G_z^0}$ – стрибок заданої функції на ∂G_z^0 .

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї [18], яка, включаючи рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин відповідної характеристичної функції течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ (виконання яких вимагатимемо і на розрізі, що «роздвоюється» при переході від області G_z до G_ω), запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\chi(\mathcal{P}_{kr}^0)}{\mathcal{P}\mathcal{K}(\varphi)} y_\psi = x_\varphi, \\ \frac{\chi(\mathcal{P}_{kr}^0)}{\mathcal{P}\mathcal{K}(\varphi)} x_\psi = -y_\varphi, \end{cases} \quad \begin{aligned} &(\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ &J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q \quad (4.16)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} [x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} &= [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = 0, \\ \left[\frac{\chi(\mathcal{Y}_{I_{kr}}^\circ)}{\mathcal{R}(\varphi)} J \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\mathcal{U}, \mathbf{n}) \right]_{\partial G_\omega^\lambda} &= 0, \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\mathcal{Y}_{I_{kr}}^\circ)}{\mathcal{R}(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathcal{R}(\varphi)}{\chi(\mathcal{Y}_{I_{kr}}^\circ)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\mathcal{Y}_{I_{kr}}^\circ)}{\mathcal{R}(\varphi)} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathcal{R}(\varphi)}{\chi(\mathcal{Y}_{I_{kr}}^\circ)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^\lambda = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\Delta\psi = Q/m$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ , $\gamma = \Delta\varphi/\Delta\psi$ – квазіконформний інваріант, $n, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу.

Різницеві аналоги рівнянь (4.19) (з урахуванням умов (4.18)), крайових умов (4.16), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) запишемо відповідно у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} &\gamma^2 \left(\frac{\chi(\mathcal{Y}_{i,j+1/2, I_{kr}}^\circ)(x_{i,j+1} - x_{i,j})}{\mathcal{R}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\mathcal{Y}_{i,j-1/2, I_{kr}}^\circ)(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\mathcal{R}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ &+ \frac{\mathcal{R}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\chi(\mathcal{Y}_{i+1/2,j, I_{kr}}^\circ)} - \frac{\mathcal{R}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\chi(\mathcal{Y}_{i+1/2,j, I_{kr}}^\circ)} = 0, \\ &\gamma^2 \left(\frac{\chi(\mathcal{Y}_{i,j+1/2, I_{kr}}^\circ)(y_{i,j+1} - y_{i,j})}{\mathcal{R}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\mathcal{Y}_{i,j-1/2, I_{kr}}^\circ)(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\mathcal{R}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ &+ \frac{\mathcal{R}(\varphi_{i+1/2,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})}{\chi(\mathcal{Y}_{i+1/2,j, I_{kr}}^\circ)} - \frac{\mathcal{R}(\varphi_{i-1/2,j})(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\chi(\mathcal{Y}_{i-1/2,j, I_{kr}}^\circ)} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \varphi_{i,j \pm 1/2} = \frac{(\varphi_{i,j \pm 1} + \varphi_{i,j})}{2},$$

$$\varphi_{i \pm 1/2, j} = \frac{(\varphi_{i \pm 1, j} + \varphi_{i, j})}{2}, \quad \varphi_{i, j \pm 1/2}^{\%} = \frac{(\varphi_{i, j \pm 1}^{\%} + \varphi_{i, j}^{\%})}{2}, \quad \varphi_{i \pm 1/2, j}^{\%} = \frac{(\varphi_{i \pm 1, j}^{\%} + \varphi_{i, j}^{\%})}{2},$$

$$\varphi_{i, j}^{\%} = \frac{\mu \cdot \beta_{i, j}}{k \cdot J_{i, j} \cdot \varphi_{i, j} \cdot \Delta \psi}.$$

Невідому витрату Q наближено шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$,

величину γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників [202] двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i, j=0}^{n-1, m-1} \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2}}{\chi(\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{\%}, I_{kr})} \frac{\alpha_{i, j} + \alpha_{i, j+1}}{\beta_{i, j} + \beta_{i+1, j}},$$

$$\text{де } \alpha_{i, j} = \sqrt{(x_{i+1, j} - x_{i, j})^2 + (y_{i+1, j} - y_{i, j})^2}, \quad \beta_{i, j} = \sqrt{(x_{i, j+1} - x_{i, j})^2 + (y_{i, j+1} - y_{i, j})^2}.$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (4.15)–(4.19) різницевою задачею в загальному випадку, побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного

квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (4.21), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (4.23), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати $Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}$. Проводимо уточнення координат внутрішніх

вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (4.20) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (4.22). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (4.23), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} - \text{зміщення вузлів на границі за}$$

проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (4.15):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\varphi_{i,j}, I_{kr})}{\beta \varphi_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\varphi_{i,j}, I_{kr})}{\beta \varphi_{i,j}} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю.

Проведемо числові розрахунки у випадку існування еліптичної тріщини гідравлічного розриву, що характеризується своїми півосями

$$a_1 = 0.6, \quad b_1 = 0.05 \quad \text{і займає область } G_z^1 = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_1} \right)^2 \leq 1 \right\} \text{ пласта}$$

обмеженого контуром свердловини $L^* = \{x^*(t) = 0.1 \cos(t), y^*(t) = 0.1 \sin(t)\}$

та контуром живлення

$$L_* = \{x_*(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(2t)), y_*(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(4t))\} \quad \text{при}$$

$$0 \leq t < 2\pi, \quad n \times m = 40 \times 60, \quad \rho = 0.9, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5},$$

$$k_1 = 10, \quad k_0 = 0.01, \quad \chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{і дè } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{і дè } I \leq I_{kr}, \end{cases} \quad \text{де } F = 1,$$

$$I_{kr} = 0.6.$$

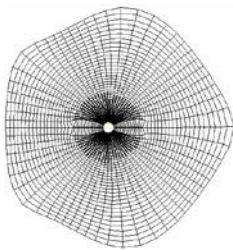


Рис. 4.6. Гідродинамічні сітки, відповідно при відсутності та наявності тріщин ГРП з урахуванням суміжних деформаційних ефектів

На основі отриманих результатів, підтверджено, що у випадку наявності тріщин гідравлічного розриву у сланцевому пласті відбуваються суміжні деформаційні процеси, зокрема, навколо цих тріщин утворюється зона (рис. 4.6), яка характеризується підвищеною проникністю по відношенню до всього пласта і благотворно впливає на дебіт експлуатаційної свердловини: при їх відсутності $Q = 2.104$, а при наявності – $Q = 12.726$.

2.6 Методика визначення усередненого коефіцієнта проникності присвердловинної ділянки пласта

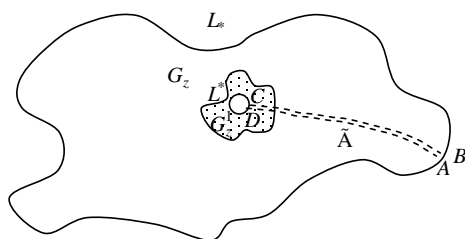


Рис. 2.11. Пласт з неоднорідністю у навколо свердловинній ділянці

Задача визначення фільтраційно-ємкісних характеристик нафтогазових пластів, за даними, отриманими внаслідок лабораторних дослідів на керні, є досить актуальною, проте важливим етапом такого дослідження є

виділення в пласті зон впливу цих параметрів та встановлення основних їх характеристик: коефіцієнта фільтрації та природу його зміни в межах виділеної зони, геометричні розміри зон впливу, фільтраційні параметри тріщин гідравлічного розриву пласта, тощо. Така задача ідентифікації відноситься до класу обернених коефіцієнтних задач [19, 33, 82-83] і виникає, зокрема, на етапі адаптації геолого-гідродинамічної моделі досліджуваного об'єкта по відомим апіорним даним щодо фільтраційних і динамічних властивостей розроблюваного пласта [62, 81] При спорудженні та експлуатації свердловин в частинах пласта, що прилягають

до них, відбуваються зміни фільтраційних властивостей пористого середовища та його фільтраційно-ємкісних характеристик і формується система навколосвердловинних зон з особливими умовами фільтрації. Ефект такої зміни при моделюванні, в деяких випадках, враховують завдяки введенню кусково-неперервного коефіцієнта проникності у припущенні, що границі зон є нерухомими і заданими.

Ідентифікація фільтраційно-ємкісних параметрів проводиться в умовах стаціонарної однофазної фільтрації рідини у горизонтальному зонально неоднорідному пласті (області G_z , $z = x + iy$), обмеженому контуром живлення L_* та контуром експлуатаційної свердловини L^* (рис. 2.11) і описується рівнянням нерозривності та законом Дарсі [4,5]:

$\operatorname{div} \overset{\circ}{v} = 0$, $\overset{\circ}{v} = k(\delta, \delta) \operatorname{grad} \varphi$ відповідно, де $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал

швидкості фільтрації $\overset{\circ}{v} = v_x + iv_y$, $k(x, y) = \begin{cases} k^*, & (x, y) \in G_z^1, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus G_z^1, \end{cases}$ –

коефіцієнт фільтрації, k^* – шукане значення коефіцієнта фільтрації в присвердловинній зоні G_z^1 (із заданою границею), k_* – відомий коефіцієнт фільтрації в області $G_z \setminus G_z^1$.

Задачу на ідентифікацію фільтраційно-ємкісних характеристик нафтового пласта зводимо до задачі на квазіконформне (кусково-конформне) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_\omega^0 = G_z \setminus \tilde{A}$, де \tilde{A} – умовний розріз вздовж лінії розділу течії (через AD та BC на рис. 2.11 позначено відповідно верхній та нижній його береги), на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, з відповідними рівняннями типу Коші-Рімана (2.1) і початковими умовами

(2.2), граничними умовами на контурі забрудненої зони: $[\varphi]_{\partial G_z^1} = 0$,

$$[v_n]_{\partial G_z^1} = 0.$$

Для відшукування значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони G_z^1 введемо в розгляд функцію нев'язки $\mathcal{Q}(k)$, мінімізація якої і дозволяє його знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k) &= |Q(k) - Q^*| = \left| \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy - Q^* \right| = \\ &= \left| \int_{L^*} -k \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - Q^* \right| = \left| \int_{L^*} \left(k \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} - \frac{Q^*}{2\pi r^*} \right) dl \right|, \quad (2.20) \end{aligned}$$

де Q^* – заданий дебіт експлуатаційної свердловини радіуса r^* .

Як і в попередньому параграфі, через геометрична складність заданої області G_z^0 (що, зокрема, породжує проблему побудови гідродинамічної сітки) та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω , ми розглядатимемо обернену задачу на квазіконформне відображення $(G_\omega \rightarrow G_z^0)$, яка має вигляд (2.4)-(2.5), (2.7)

з відповідними граничними умовами:

$$\begin{aligned} [x(\varphi, \psi)]_{\partial G_\omega^1} &= 0, \quad \left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\nu, \mathbf{n}) \right]_{\partial G_\omega^1} = 0, \quad (2.21) \\ [y(\varphi, \psi)]_{\partial G_\omega^1} &= 0, \end{aligned}$$

тоді відповідну формулу відшукування функції нев'язки (2.20) представимо у вигляді:

$$\mathcal{Q}(k) = |Q(k) - Q^*| = \left| \int_0^{Q^*} \frac{k}{J} \left(\left(\frac{\partial y(\varphi^*, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x(\varphi^*, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi - Q^* \right|. \quad (2.22)$$

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо, як і у попередньому параграфі, в області G_ω ортогональну сітку G'_ω та рівняння (2.7), у внутрішності сіткової області G_ω та розрізі \tilde{A} , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умовами ортогональності) апроксимуємо аналогічно (2.11) – (2.13).

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ – одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей, аналогічно (2.14).

Використовуючи (2.22), формулу для наближеного знаходження значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони запишемо у вигляді:

$$k^{*(p)} = \frac{Q^*}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{4\Delta\psi^2 J_{n,j}^{(p-1)}} \left(\left(x_{n,j-1}^{(p-1)} - x_{n,j+1}^{(p-1)} \right)^2 + \left(y_{n,j-1}^{(p-1)} - y_{n,j+1}^{(p-1)} \right)^2 \right)}, \quad (2.23)$$

де p – ітераційний параметр.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку вищеописаної оберненої диференціальної задачі з різницевою задачею, в загальному випадку, побудуємо, як і в попередньому параграфі, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_n, L^* та привибійної зони, кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ та рівень

квазіконформності δ_* відображення Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.14), знаходимо нове наближення величини Q та за допомогою формулу (2.23) наближено знаходимо значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони пласта, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(p)} - x_{i,j}^{(p-1)})^2 + (y_{i,j}^{(p)} - y_{i,j}^{(p-1)})^2} - \text{зміщення вузлів на границі за}$$

проведену p -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_3 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії. Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю.

Використовуючи розроблений алгоритм, розв'яжемо задачу ідентифікації коефіцієнта проникності присвердловинної зони при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k_* = 1$, $Q^* = 1.018$. Зовнішній контур живлення та контур експлуатаційної свердловини запишемо у параметричній формі:

$$L_* = \{ \delta + 3\delta: x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(4\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)),$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \}, L^* = \{ \delta + 3\delta: x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + 0.2, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta) - 0.2,$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi \}$, границю забрудненої зони змодельюємо у вигляді кола:

$$G_z^1 = \{ (x, y): (x - 0.2)^2 + (y + 0.2)^2 \leq 0.5 \}.$$

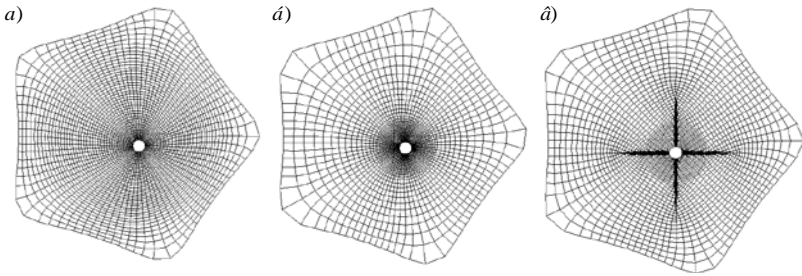


Рис. 2.12. Гідродинамічні сітки однорідного пласта (а) зонально неоднорідного (б) та із тріщинами ГРП (в).

На рис. 2.12. а-б зображено гідродинамічні сітки у випадку однорідного пласта та при наявності зони забруднення відповідно. З використанням розробленого числового алгоритму, встановлено значення коефіцієнта фільтрації привибійної зони $k_1^* = 0.352$.

З проведених числових розрахунків, було встановлено, що дане забруднення присвердловинної зони приводить до зменшення дебіту свердловини на 48% від розрахункового значення $Q = 2.108$ (для пласта без забруднення). З метою збільшення віддачі свердловини хоча б до значення витрати $Q = 3.11$, проведено процедуру ГРП з тріщинами фіксованих розмірів (взаємноортогональних еліпсів з півосями $a = 0.06$, $b = 1.5$, рис. 2.12. в) та встановлено відповідне значення коефіцієнта фільтрації в тріщинах $k_1^* = 10.15$.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМИ «СВЕРДЛОВИНИ-ТРИЩИНИ-ПЛАСТ» В УМОВАХ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ

У розділі узагальнено методи комплексного аналізу розв'язання задач багатофазної фільтрації на випадок математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтових пластах з урахуванням тріщин гідророзриву. Створено підхід до розв'язання задач неізотермічної багатофазної фільтрації, основні властивості якого продемонстровані на прикладі площового заводнення, побудовано числовий алгоритм для розрахунку гідродинамічної сітки, відшукування полів температури та насиченості, координат критичних точок, фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо. Проведено аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик та здійснено порівняння протікання процесу витіснення у випадках неізотермічної та ізотермічної фільтрації.

3.1 Математичне моделювання двофазної фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

У даному параграфі розроблено підхід стосовно дослідження поведінки елементів системи «свердловина-тріщина-пласт», зокрема, врахування зміни насиченості при двофазній фільтрації в однорідному горизонтальному пласті, на випадок інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини шляхом збурення течії тріщинами гідравлічного розриву пласта скінченної проникності.

Розглянемо процес двофазної фільтрації при витісненні однієї рідини іншою в нафтовому пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L , контурами нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин (рис. 2.13), коли фільтраційне поле збудене тріщинами ГРП G_z^l .

Закон руху та рівняння нерозривності двофазної фільтраційної течії, запишемо відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \mathcal{P}k$ (тут $p(x, y, t)$ – тиск у точці (x, y) в момент часу t , $\mathcal{P}k$ – деяке характерне його значення), згідно з [24-27] подамо відповідно у вигляді:

$$\mathbf{v}_l = \frac{k(\bar{\sigma}, \sigma) \mathcal{K}\varphi}{\mu_l} \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v}_l = 0, \quad \sum_{l=1}^2 s_l = 1, \quad l = 1, 2, \quad (3.1)$$

де \mathbf{v}_l , μ_l – вектор швидкості, динамічна в'язкість відповідної l – тої фази;

$$k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, & (x, y) \in G_z^\lambda, \quad \lambda=1,2,.. \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda, \end{cases} \quad \text{– коефіцієнт проникності пласта;}$$

$\mathcal{K}\varphi$, $\mathcal{K}\varphi_2$ – відносні фазові проникності (є заданими функціями насиченості: $\mathcal{K}\varphi = \mathcal{K}\varphi(s)$, $\mathcal{K}\varphi_2 = \mathcal{K}\varphi_2(s)$, $s = s_2 = 1 - s_1$);

σ – пористість ґрунту;

$s_l = s_l(x, y, t)$ – насиченість пласта відповідної l – тої фази.

Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ фільтраційної

течії, маємо: $\text{div} \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} = \bar{k}(s) \text{grad} \varphi$, $\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} f(s) = 0$, де

$$\bar{k}(s) = \frac{k \mathcal{K}\varphi(s)}{\mu_1} + \frac{k \mathcal{K}\varphi_2(s)}{\mu_2}, \quad f(s) = \frac{\mu_1 \mathcal{K}\varphi_2(s)}{\mu_2 \mathcal{K}\varphi(s) + \mu_1 \mathcal{K}\varphi_2(s)}.$$

Вважаємо, що на нагнітальній L_* та експлуатаційній L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* , φ^*), на границі ∂G_z^l тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску, а інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких має місце рівність $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$, де $L = \{z : x = x_0(\theta), y = y_0(\theta), \alpha_0 \leq \theta \leq \beta_0\} = \{z : u(x, y) = 0\}$, $L_* = \{z : x = x_*(\theta), y = y_*(\theta), \alpha_* \leq \theta \leq \beta_*\} = \{z : u_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : x = x^*(\theta), y = y^*(\theta), \alpha^* \leq \theta \leq \beta^*\} = \{z : u^*(x, y) = 0\}$. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальній свердловині позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = \mathcal{S}(x, y)$ і $s|_{L_*} = s_*$.

Аналогічно до [19], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$, та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» течії $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та відповідними точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задачу про побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі квазіконформного відображення, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L'} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$[\varphi]_{\partial G_z^I} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_z^I} = 0, \quad v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L^*} = s_*, \quad s(x, y, t)|_{t=0} = \mathfrak{H}(x, y), \quad (3.3)$$

де $Q = \oint_{L^*} v_y dx + v_x dy$, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$.

Обернена до (3.1)–(3.2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії запишуться у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.4)$$

$$u_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$u(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad u(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.5)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (3.6)$$

$$v(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \quad v(x(\bar{\varphi}, \psi), y(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \psi \in \{0, Q\},$$

$$\left[\begin{array}{l} x(\varphi, \psi) \\ y(\varphi, \psi) \end{array} \right]_{\partial G_z^I} = 0, \quad \left[\begin{array}{l} \bar{k} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\nu, n) \\ J \end{array} \right]_{\partial G_z^I} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.8)$$

де $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» (відповідно «роздвоєння» та «здвоєння» течій);

u_* , u^* , u – функції, що визначають контури області G_z : L_* , L^* , L , відповідно.

Використавши формули переходу [6-8] $J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{y_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{x_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3) і формули для обчислення}$$

компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$

задачу для насиченості (3.3) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.9)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \mathfrak{B}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (3.10)$$

де отримане диференціальне рівняння в частинних похідних є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Для запису різницевого аналогу задачі (3.4)–(3.10) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним

чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \text{ при } i = \overline{0, n_1}, l = 1, \\ \varphi + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}, \\ \text{при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, \\ \text{при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, l = 3, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = Q/m, \quad j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу;

$\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта проникності (у відповідних еліптичних рівняннях), що є функцією від координат та насиченості і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу тріщини ГРП, рівняння (3.8) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи основні ідеї методу скінченних об'ємів [199], що дозволяє забезпечити виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативність відповідної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

2)

$$\text{де } \bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j}), \quad \bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j}), \quad x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j),$$

$$y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi} - \text{квзίκонформні інваріанти.}$$

Крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів апроксимуємо таким чином [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ u(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad u(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{array} \right.$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалів $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ у точках «призупинки» течії шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за

$$\text{формулами [24-27]: } Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \mathcal{E}\varphi^*}{1 + \mathcal{E}\mathcal{O}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \beta\varphi_*}{1 + \beta\mathcal{O}}, \quad \text{де}$$

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \mathcal{E}\mathcal{O} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\beta\mathcal{O} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}. \quad \text{Величини квазіконформних інваріантів } \gamma_l$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому»

відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad (3.15)$$

де

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}},$$

$$\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.9) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [199] наступним чином:

$$\mathcal{I}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi_l} f' \left(\frac{s_{i-1,j} + s_{i,j}}{2} \right) \cdot (s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad (3.16)$$

де τ – крок за часом; $s_{i,j}$, $\mathcal{I}_{i,j}$ – насиченості у відповіді моменти часу;

$v_{i,j}$ – швидкість (знаходимо, як у роботі [19]), $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1}$, при $l = 1$, $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$, при $l = 2$, $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}$, при $l = 3$.

Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \mathcal{I}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3.4)–(3.10) різницевою задачею у загальному випадку, як і в роботах [17–19], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації (зокрема,

для аналітичного обґрунтування його збіжності). Так, на першому кроці роботи алгоритму задаємо геометричну конфігурацію пласта G_z , крок за часом τ , параметри розбиття n_1, n_2, n_3, m , області G_ω та точності $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.13)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів, за формулами (3.15) знаходимо наближення величин $\gamma_1^{(0)}$ та значення $\underline{\varphi}^{(0)}, \bar{\varphi}^{(0)}, Q^{(0)}$. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ шляхом розв'язання (3.12) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Після цього, підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (3.14). Знаходимо значення квазіконформних інваріантів (3.15) та уточнюємо величин $Q, \underline{\varphi}, \bar{\varphi}$. Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є: стабілізація граничних вузлів $\left(\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2 \right)$; стабілізація витрати $Q \left(\left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon_1 \right)$ тощо. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (3.16) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Проведено числові розрахунки процесу витіснення у пласті обмеженому зовнішнім непроникним контуром:

$L_0 = \{x + iy : x_0(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(3\theta)),$
 $y_0(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(5\theta)), \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$, контурами свердловин:
 $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 0.1\cos(\theta) - 1, \quad y_*(\theta) = 0.1\sin(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$,
 $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + 1, \quad y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$ при
 існуванні тріщини ГРП, контур якої задано рівнянням еліпса: $G_z^1 = \{(x, y) :$
 $((x-1)/0.7)^2 + (y/0.05)^2 \leq 1\}$ на експлуатаційній свердловині (рис. 3.1 а),
 при умовах $\varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad \sigma = 0.5, \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1, \quad \tau = 0.0001,$
 $k_1^0 = (1-s)^2, \quad k_2^0 = s^2, \quad s_* = 1, \quad \forall(x, y) = 0, \quad k_1 = 10, \quad k_* = 1,$
 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 2 \times 40 \times 2 \times 70, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}.$

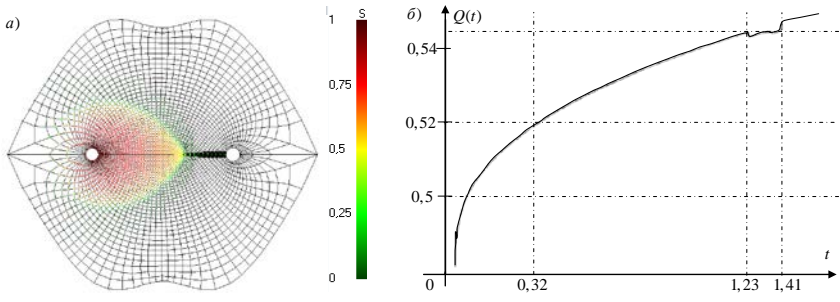


Рис. 3.1. Гідродинамічна сітка (а) та розподіл сумарної витрати (б)

На основі результатів числових розрахунків, встановлено, що швидкість просування фронту витіснення з наближенням до тріщини ГРП зменшується, як і сумарна фільтраційна витрата на експлуатаційній свердловині. Це пов'язано, в основному, із відмінністю коефіцієнтів проникності в пласті та на втрамбованому, в результаті ГРП, контури тріщини, адже при перетіканні через границю середовищ різної проникності витісняючій рідині необхідно перебороти супротив,

породжений внутрішніми силами – так званий капілярний ефект. Вплив внутрішніх сил на зміну сумарної витрати $Q = Q(t)$ продемонстрований на рис. 3.1 б, зокрема, підтверджено наявність, «ступінчато-подібного» ефекту її зміни на проміжку часу $t \in [1.23, 1.41]$.

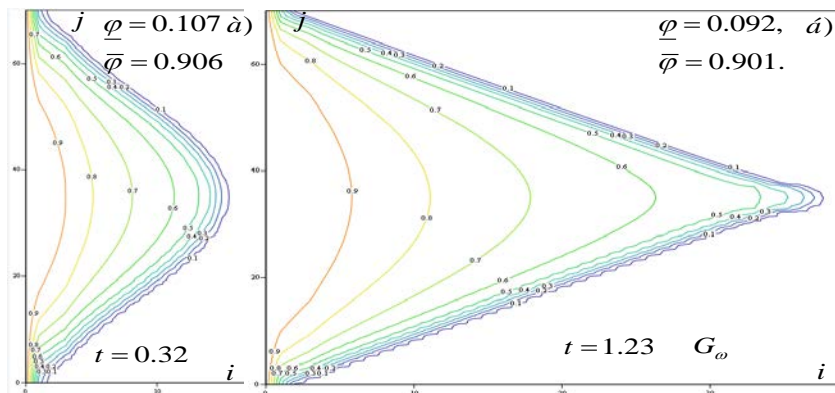


Рис. 3.2. Розподіл насиченості в області G_ω у відповідні моменти часу

$$t = \frac{\tau}{\kappa}$$

На рисунку 3.2 зображено розподіл насиченості в області G_ω , у деякий момент часу $t = 0.32$ та в момент $t = 1.23$ – проникнення витісняючого агенту в тріщину гідралічного розриву.

Величини сумарної фільтраційної витрати у відповідні моменти часу становлять: $Q(0.23) = 0.519$ та $Q(1.23) = 0.545$. Таким чином, після прориву витісняючого флюїду (води) у тріщину ГРП із більшим коефіцієнтом проникності ніж пласта відбувається пришвидшення фільтрації та збільшення витрати в цілому.

3.2 Методи комплексного аналізу при моделюванні трифазної фільтрації в нафтогазових пластах

При дослідженні процесу розробки нафтогазових родовищ з використанням їх математичних моделей стає питання вибору певної абстракції представлення взаємодії рідин, що рухаються в пласті, між собою та скелетом, зокрема. Складність такого вибору, в першу чергу, пов'язана з процесами, які протікають в пласті, та режимом його розробки. Так, наприклад, коли пластовий тиск перевищує деяке критичне значення, яке відповідає невідокремленому сумісному руху газу та нафти, такий процес можна описати двофазною моделлю [1–2]: однією із фаз є суміш нафти та газу, а другою – вода. Проте, при відсутності активної підтримки пластового тиску ззовні з наступним відбором флюїдів із пласта через експлуатаційні свердловини, суміш газу та нафти починає відокремлюватися з утворенням окремих фаз, що призводить, в свою чергу, до руху в пласті більш складної гетерогенної системи, складовими якої є нафта, газ та вода [1–2].

У цій роботі комплексний підхід [3–5] до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних нафтогазових пластах узагальнено на випадок більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. При цьому розроблені в [3–5] числові алгоритми розв'язання відповідних задач двофазної фільтрації (на побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат критичних точок типу «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо) модифіковано шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу.

Розглянемо процес витіснення (трифазної ізотермічної фільтрації) в пласті, що породжений перепадом тиску на нагнітальних (●) та експлуатаційних (○) свердловинах, контури $\bar{L}_\alpha, \bar{L}_\beta$ ($\alpha = \overline{1, n_*}, \beta = \overline{1, n^*}$) яких разом з зовнішнім контуром (непроникним або ж проникним – контур живлення) L визначають область G_z фільтрації флюїдів (див. рис.1).

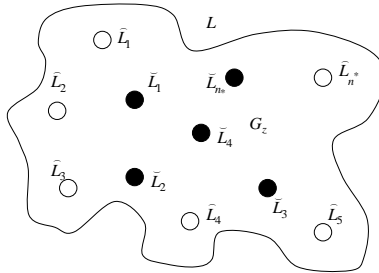


Рис. 1. Схематичне зображення пласта з $n_* + n^*$ свердловинами

Закони, що описують рух гетерогенної системи, складовими якої є водяна нафтова та газова фази, в такій області, згідно з [1-2], представимо у вигляді:

$$\vec{v}_l = \frac{k\mathcal{K}\rho}{\mu_l} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_l = 0, \quad l = w, o, g, \quad s_w + s_o + s_g = 1,$$

де $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \mathcal{K}$ – квазіпотенціал швидкості фільтрації ($p(x, y, t)$ – тиск в точці (x, y) в момент часу t , \mathcal{K} – деяке характерне його значення); $s_w(x, y, t)$, $s_o(x, y, t)$, $s_g(x, y, t)$ – насиченості пористого середовища водою, нафтою та газом в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); σ , k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\mathcal{K}\rho = \mathcal{K}\rho(s_w, s_o)$ – відносні фазові проникності, де $l = w, o, g$; \vec{v}_l , μ_l – вектор швидкості та коефіцієнт

в'язкості l – ої фази. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_o + \vec{v}_g$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)} \vec{v} \right) = 0, \quad \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)} \vec{v} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } \vec{v} = \bar{k} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \bar{k}(s_w, s_o) = \frac{k\%_w(s_w, s_o)}{\mu_w} + \frac{k\%_o(s_w, s_o)}{\mu_o} + \frac{k\%_g(s_w, s_o)}{\mu_g}.$$

Для зручності подальшого використання, з урахуванням (1), систему рівнянь (2) перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)} \right) &= 0, \\ \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Вважаємо, що на нагнітальних L_α та експлуатаційних L_β свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* та φ^*), а інші ділянки границі області G_z можуть бути як лініями течії (зовнішній контур непроникний) так і екіпотенціальними лініями (зовнішній контур є контуром живлення), вздовж яких, зокрема, матимуть місце рівності $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$ або $\varphi|_L = \varphi^0$, де $L_\alpha = \{z = x + iy : f_\alpha(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + x_\alpha, y = r^0 \sin(\tau) + y_\alpha, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L_\beta = \{z = x + iy : f_\beta(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + x_\beta, y = r^0 \sin(\tau) + y_\beta, 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $L = \{z : f(x, y) = 0\}$. Початкові розподіли насиченості води, нафти та газу в пласті і їх значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s_w(x, y, 0) = \%_w(x, y)$,

$$s_o(x, y, 0) = \mathcal{R}_o(x, y), \quad s_g(x, y, 0) = 1 - \mathcal{R}_w(x, y) - \mathcal{R}_o(x, y) \quad \text{та} \quad s_w|_{L_\alpha} = s_{w*},$$

$$s_o|_{L_\alpha} = s_{o*}, \quad s_g|_{L_\alpha} = s_{g*}, \quad \alpha = \overline{1, n_*}.$$

Алгоритм розв'язання задачі. Згідно запропонованої в роботах [3-9] методології розв'язання нелінійних задач двофазної фільтрації у нафтогазових пластах, область протікання процесу витіснення для яких є багатозв'язною, необхідною умовою використання методу числового квазіконформного відображення та основних ідей методики поетапної фіксації характеристик середовища і процесу (з метою переходу від прямої задачі до оберненої, а саме від фізичної області до однозв'язної області комплексного квазіпотенціалу) є введення серії умовних розрізів області G_ζ вздовж ліній течії, що проходять через точки призупинки потоку [6].

Після здійснення такого перетворення області G_ζ та побудови відповідної області комплексного квазіпотенціалу необхідно переписати задачу багатозв'язної фільтрації вже відносно нової розрахункової області -

$$G_\omega, \quad \text{використовуючи наступні формули} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \text{де } \varphi \text{ та}$$

ψ є комплексно спряженими функціями [3]. Тоді матимемо:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\nu^2}{\bar{k}(s_w, s_o)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{kk_w(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_w} \right) &= 0, \\ \sigma \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\nu^2}{\bar{k}(s_w, s_o)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{kk_o(s_w, s_o)}{\bar{k}(s_w, s_o)\mu_o} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система рівнянь (4), як і у випадку двохфазної фільтрації, є фактично просторово-одновимірною, адже змінна ψ тут теж фігурує як параметр.

Рівняння (4)-(6), в залежності від вибору конфігурації області руху гетерогенної системи, доповнюватимемо відповідними крайовими та початковими умовами [3,6].

Відзначимо, що використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченостей s_w , s_o розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційних свердловин.

Різницевий аналог задачі дослідження багатофазної фільтрації та алгоритм її розв'язання будується аналогічно як і в роботах [3-6], шляхом введення в області комплексного квазіпотенціалу рівномірної ортогональної сітки з вузлами в точках (φ_i, ψ_j) ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$),

відносно якої здійснюється апроксимація рівнянь (4)–(6), наприклад, так [3–9]:

$$\gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0,$$

$$\gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0,$$

$$\mathfrak{g}_{wi,j} = s_{wi,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(\frac{kk_w(s_{wi,j}, s_{oi,j})}{\bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j}) \mu_w} - \frac{kk_w(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j})}{\bar{k}(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j}) \mu_w} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{oi,j} = s_{oi,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(\frac{kk_o(s_{wi,j}, s_{oi,j})}{\bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j}) \mu_o} - \frac{kk_o(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j})}{\bar{k}(s_{wi-1,j}, s_{oi-1,j}) \mu_o} \right),$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j}}{2}$, $\bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j}}{2}$,

$\bar{k}_{i,j} = \bar{k}(s_{wi,j}, s_{oi,j})$, $\gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi}$. З наступним вибором кроку по часу,

параметрів розбиття області комплексного квазіпотенціалу (що визначають положення вузлів (φ_i, ψ_j) сітки), точності роботи алгоритму, початкових наближень координат граничних вузлів гідродинамічної сітки, початкового наближення координат її внутрішніх вузлів знаходимо значення квазіконформних інваріантів. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання відповідних (4) різницевих аналогів. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин витрат (дебітів свердловин). Серед умов завершення алгоритму

побудови гідродинамічної сітки (відшукання невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат, стабілізація граничних вузлів [3] тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поля насиченостей з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з різницеvim аналогом рівнянь (6) знаходимо нові розподіли насиченостей у пласті та повторюємо кроки алгоритму. Рівняння (6) розв'язуємо за умови поетапної фіксації величин s_w , s_o : а саме знаходимо розподіл s_w в кожній точці гідродинамічної сітки, при фіксованому s_o , після чого перераховуємо значення s_o з урахуванням знайденого значення s_w .

Висновок. Комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації узагальнено на випадок більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. Шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики, згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу, модифіковано алгоритми розв'язання відповідних крайових задач.

3.3 Математичне моделювання процесів витіснення нафти в неоднорідних пластах з урахуванням впливу капілярних сил

Однією з важливих технологій інтенсифікації процесу розробки нафтогазових родовищ є гідравлічний розрив пласта (ГРП), основна мета якого покращення фільтраційних характеристик присвердловинних зон та утворення високопроникної деревовидної (канальної) структури з

системою існуючих тріщин, що розвинута в різному ступені та присутня всім породам-колекторам, як теригенним, так і карбонатним. Проте варто відзначити, що вплив тріщинуватості (як природної, так і штучної – тріщини ГРП) на фільтраційні процеси не обмежується збільшенням фільтраційної проникності пласта. Так, наприклад, в роботі [1] показано, що при обтіканні ізольованої тріщини фільтраційним потоком однофазної рідини в зоні контакту потоків, що входять та виходять з тріщини, величина градієнту тиску наближається до нуля, що призводить до сповільнення процесу фільтрації в цій ділянці пласта і є передумовою утворення в ній застійних зон. А це, в свою чергу, може протистояти ефективному витісненню пластового флюїду. Зокрема, у роботі [2] з використанням моделі Баклея-Леверетта встановлено, що швидкість просування фронту витіснення з наближенням до тріщини ГРП спадає. Тут такий ефект пояснюється відмінністю коефіцієнта проникності в пласті і тріщині. В зв'язку з цим рідині при перетіканні через границю середовищ необхідно перебороти супротив, породжений внутрішніми силами – так званим капілярним ефектом.

Метою роботи є узагальнення запропонованого в [2-4] методу математичного моделювання багатофазної фільтрації на випадок неоднорідних нафтогазових пластів за умов урахування капілярних сил, зокрема, при існуванні тріщин гідравлічного розриву.

Постановка задачі. Розглянемо задачу моделювання процесу двофазної ізотермічної фільтрації при витісненні нафти водою в горизонтальному пласті за умов існування певного роду симетрії, яка дозволяє виділити елемент G_z ($z = x + iy$), що містить 2 нагнітальні свердловин та 1 експлуатаційну (див. рис. 1, де $d = 4(r^0 + a)$, r^0 – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h –

відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин), коли фільтраційне поле збурене тріщинами ГРП.

Вважається, що динамічні в'язкості фаз постійні, рух рідини – повільний та відбувається без фазових переходів, а функції відносних фазових проникностей і капілярного тиску є відомими та однозначними функціями насиченості.

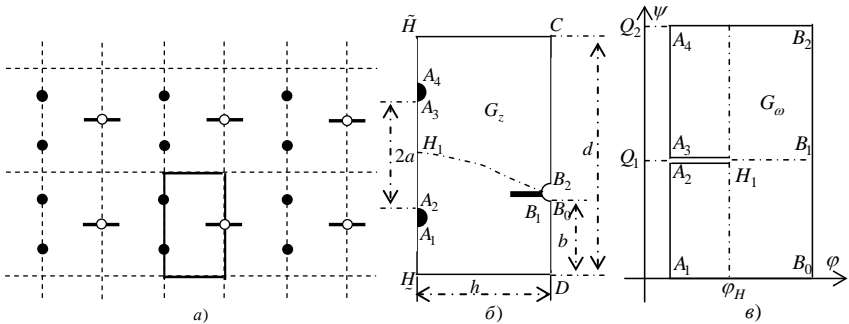


Рисунок 1. Схематичне зображення розміщення свердловин в пласті (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в) (○ – експлуатаційна, ● – нагнітальна свердловини)

З урахуванням капілярних сил закон фільтрації [5-7] для двох фаз запишемо у вигляді рівняння нерозривності

$$\frac{\partial(\sigma s_l)}{\partial t} + \text{div}(v_l) = 0, \quad (l = o, w),$$

і рівняння руху

$$v_l = -k(x, y) \frac{k_l^\alpha(s)}{\mu_l} \text{grad}(p_l), \quad (l = o, w),$$

де p_l – тиск в фазах, μ_l – динамічна в'язкість, v_l – швидкість фільтрації l -ї фази, s_l – насиченість пласта l -ю фазою; σ ,

$$k(x, y) = \begin{cases} k_{\alpha}, (x, y) \in D_{\alpha}, \\ k_{*}, (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_{\alpha} D_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad - \text{ коефіцієнти пористості та}$$

абсолютної проникності ґрунту, де D_{α} – ділянка пласта, що відповідає тріщині з індексом l ; $\mathcal{K}_w^o = \mathcal{K}_w^o(s)$, $\mathcal{K}_o^o = \mathcal{K}_o^o(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_w$). Індексами « w » і « o » позначено величини, що характеризують воду та нафту. Різниця тисків в фазах приймається рівною капілярному тиску: $p_o - p_w = p_c$, де $p_c = \chi \cos \theta \sqrt{\sigma/k} J(s)$, χ – коефіцієнт поверхневого натягу, θ – крайовий кут змочування, $J(s)$ – безрозмірна функція Леверетта. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\dot{v} = \dot{v}_w + \dot{v}_o$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \dot{v} = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -k(x, y) \lambda(s) \left(\left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - f(s) \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) i + \left(\frac{\partial p_o}{\partial y} - f(s) \frac{\partial p_c}{\partial y} \right) j \right) = \\ &= k(x, y) \lambda(s) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j \right) = \bar{k}(x, y, s) \cdot \operatorname{grad}(\varphi), (3) \end{aligned}$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \dot{v} \cdot \operatorname{grad} f(s) + \operatorname{div}(\beta(x, y, s) \operatorname{grad}(p_c)) = 0, (4)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, t)$ – квазіпотенціал швидкості фільтрації,

$$\beta(x, y, s) = k(x, y) \frac{\mathcal{K}_w^o(s) \mathcal{K}_o^o(s)}{\mu_w \mu_o \lambda(s)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(s) \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(s) \frac{\partial p_c}{\partial y} - \frac{\partial p_o}{\partial y},$$

$$f(s) = \frac{\mathcal{K}_w^o(s)}{\mu_w \lambda(s)}, \quad \bar{k}(x, y, s) = k(x, y) \lambda(s), \quad \lambda(s) = \frac{\mathcal{K}_o^o(s)}{\mu_o} + \frac{\mathcal{K}_w^o(s)}{\mu_w}.$$

Для вираження тиску p_o через φ виконаємо наступні перетворення:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = f(s) \left(\frac{\partial p_c}{\partial x} dx + \frac{\partial p_c}{\partial y} dy \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} dx + \frac{\partial p_o}{\partial y} dy \right) = f(s) \frac{dp_c}{ds} ds - dp_o,$$

в результаті чого матимемо: $p_o = -\varphi + \int_0^{s_w} f(s) \frac{dp_c(s)}{ds} ds$.

Вважаємо, що на нагнітальних L_g та експлуатаційних L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* та φ^*), на межі ∂D_λ тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску, а інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\mathcal{L}_0} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\mathcal{L}_g} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\mathcal{L}} = 0,$$

де $L^* = \{z = x + iy \mid f^*(x, y) = 0\} = \{z \mid x = r^0 \cos(\tau) + h, y = r^0 \sin(\tau) + b + r^0,$

$\pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\}$, $\mathcal{L}_0 = A_1 H_0 \cup H_0 D \cup DB_0 = \{z \mid f_0(x, y) = 0\}$, $A_1 H_0 = \{z \mid x = 0, 0 \leq y \leq a\}$, $H_0 D = \{z \mid y = 0, 0 \leq x \leq h\}$, $DB_0 = \{z \mid x = h, 0 \leq y \leq b\}$, $L_g =$

$\{z = x + iy \mid f_g(x, y) = 0, g = \overline{1, 2}\} = \{z \mid x = r^0 \cos(\tau), y = r^0 \sin(\tau) + (2g - 1) \times (a + r^0) 3\pi/2 \leq \tau \leq 5\pi/2\}$,

$\mathcal{L} = A_2 H_1 A_3 = \{z \mid x = 0, 2(a + r^0) - a \leq y \leq 2(a + r^0) + a\}$

$\mathcal{L}_0 = A_4 H_0 \cup H_0 C \cup CB_2 = \{z \mid f_0(x, y) = 0\}$,

$A_4 H_0 = \{z \mid x = 0, d - a \leq y \leq d\}$,

$H_0 C = \{z \mid y = d, 0 \leq x \leq h\}$,

$CB_2 = \{z \mid x = h, b + 2r \leq y \leq d\}$. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s_0(x, y)$ та $s = s_*$.

Аналогічно до [3,8], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної

витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^2 G_g \cup \bar{L}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{k}(x, y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(x, y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_1} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\frac{1}{2}L_0} = 0, \quad \psi|_{\frac{1}{2}L_0} = Q_2, \quad \psi|_{A_2 H_1 A_3} = Q_1, \quad (6) \\ [\varphi]_{\partial D_\alpha} &= 0, \quad [v_n]_{\partial D_\alpha} = 0, \end{aligned}$$

$$\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot \text{grad} f(s) + \text{div}(\beta(x, y, s) \text{grad}(p_c)) = 0,$$

$$s|_{L_1} = s_*, \quad s|_{L_2} = s_*, \quad s|_{t=0} = \mathfrak{S}(x, y), \quad (7)$$

де $[\bullet]_{\partial D_\alpha}$ – стрибок відповідної функції на ∂D_α , $v(x, y) = |v(x, y)|$,

$$G_1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q_1\}, \quad G_2 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad Q_1 < \psi < Q_2\}$$

$$\bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{H_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}, \quad Q_1 = \oint_{L_1} v_y dx + v_x dy, \quad Q_2 - Q_1 = \oint_{L_2} v_y dx + v_x dy$$

– невідомі витрати.

Обернувши до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (8)$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1,$$

$$f_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$x_-(\varphi, Q_1) = 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_1) \leq y_{H_1},$$

$$x_+(\varphi, Q_1) = 0, \quad y_{H_1} \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq 2(a+r) + a,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_1},$$

$$[x(\varphi, \psi)]|_{\partial D_\alpha} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial D_\alpha} = 0,$$

$$\left[\frac{\bar{k}}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\mathbf{U}, \mathbf{n}) \right] |_{\partial D_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

(10)

Використавши відповідні формули переходу [3, 9-11] умови (8) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості, задачу для насиченості (7) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{v^2}{k^2} \left(\beta \frac{\partial^2 p_c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial p_c}{\partial \varphi} \right) + v^2 \left(\beta \frac{\partial^2 p_c}{\partial \psi^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \frac{\partial p_c}{\partial \psi} \right) + \frac{v^2}{k} \frac{\partial f(s)}{\partial \varphi} = 0, \quad (11)$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = s^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1,$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2. \quad (12)$$

Алгоритм числового розв'язання задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_{H_1} - \varphi_*)/(n_1 + 1), \\ \varphi_{H_1} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{H_1})/(n_2 + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j\Delta\psi_g, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1}, (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (\mathcal{Q}_g - \mathcal{Q}_{g-1})/m_g, g = \overline{1, 2}, \mathcal{Q}_0 = 0, m_0 = 0,$$

$n = n_1 + n_2 + 1, m = m_1 + m_2 + 1, m_l, n_1, n_2 \in N$. Рівняння (10) апроксимуємо наступним чином [3]:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \quad (13)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}, a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+},$

$$a_s = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2,$$

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2, \quad k_n = 2k_{i,j}k_{i,j+1}/(k_{i,j} + k_{i,j+1}),$$

$$k_s = 2k_{i,j}k_{i,j-1}/(k_{i,j} + k_{i,j-1}), \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається аналогічно, як і у роботі [11]. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned}
f_2(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, \quad j = \overline{m_1+1, m_1+m_2+1}, \\
f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}, \\
x_{i,m_1} &= 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_{i,m_1} \leq y_{H_1}, \\
x_{i,m_2} &= 0, \quad y_{H_1} \leq y_{i,m_2} \leq 2(a+r) + a, \quad i = \overline{0, n_1}, \\
f_{\text{of}}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, \quad f_{\text{of}}(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{0, n}.
\end{aligned}$$

Тут, як і в [3], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned}
(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, \\
j = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, 2}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - \\
-x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Невідомі витрати Q_g та значення потенціалу φ_{H_1} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами: $\varphi_{H_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g$, $Q_g = m_g\Delta\psi_g$, де $\Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}$, а γ_l^g одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^g &= \sum_{i=0, j=\mathbb{N}_g}^{n_1, \mathbb{N}_g-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\mathbb{N}_g}^{n, \mathbb{N}_g-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \quad \mathbb{N}_g = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \\
\mathbb{N}_g &= \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1, j}}, \quad g = \overline{1, 2},
\end{aligned}$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$$

Рівняння (11) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [3] наступним чином:

$$\mathcal{S}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma} \left(\frac{f(s_{i,j}) - f(s_{i-1,j})}{\bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} - \mathcal{J}_{i,j} \right),$$

де

$$\mathcal{J}_{i,j} = \frac{\beta_{i,j} (\mathcal{J}_{i+1,j} - \mathcal{J}_{i,j}) + \beta_{i-1,j} (\mathcal{J}_{i,j} - \mathcal{J}_{i-1,j})}{\bar{k}_{i,j}^2 \Delta \varphi_l^2} + \frac{\beta_{i,j} (\mathcal{J}_{i,j+1} - \mathcal{J}_{i,j}) + \beta_{i,j-1} (\mathcal{J}_{i,j} - \mathcal{J}_{i,j-1})}{\Delta \psi_g^2},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1 + 1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1 + 2, n}, \quad l = 2; \quad \mathcal{J}_{i,j} = p_c(s_{i,j}),$$

$\beta_{i,j} = \beta(x_{i,j}, y_{i,j}, s_{i,j})$, τ – крок по часу, $s_{i,j}$, $\mathcal{S}_{i,j}$ – насиченості у

відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (шукаємо як і в роботі [3]).

Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \mathcal{J}_{i,j}.$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_ω та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувалися умови (14)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулами (16) наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (13) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [11], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних,

використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{H_1} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(k+1)} - Q_g^{(k)}| < \varepsilon_1$) та стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо.

Використовуючи побудоване поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), з (17) знаходимо розподіл насиченості у пласті на даному часовому етапі, після чого повторюємо кроки алгоритму.

Висновки. Числовий метод комплексного аналізу дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів узагальнено на випадок неоднорідних нафтогазових пластів з урахуванням капілярних сил та можливості існування тріщин гідравлічного розриву. В майбутньому цей підхід буде використано для оцінки впливу перехідної зони в околі тріщин на залишкову нафтонасиченість пласта.

3.4 Розробка спеціальних схем розміщення свердловин при площовому заводненні за умов оптимізації параметрів та керування

У попередньому параграфі розвинуто методи комплексного аналізу на випадок двофазної фільтрації при взаємодії нагнітальної та експлуатаційної свердловин за умов збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП. Однак на сьогоднішній день найбільш суттєвим є дослідження перебігу процесу нафтовилучення у багаторядних схемах розробки родовищ. Тому у даному параграфі розроблено підхід, на основі моделі Баклея-Леверетта, до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію процесу видобутку у випадку рядної схеми розміщення свердловин.

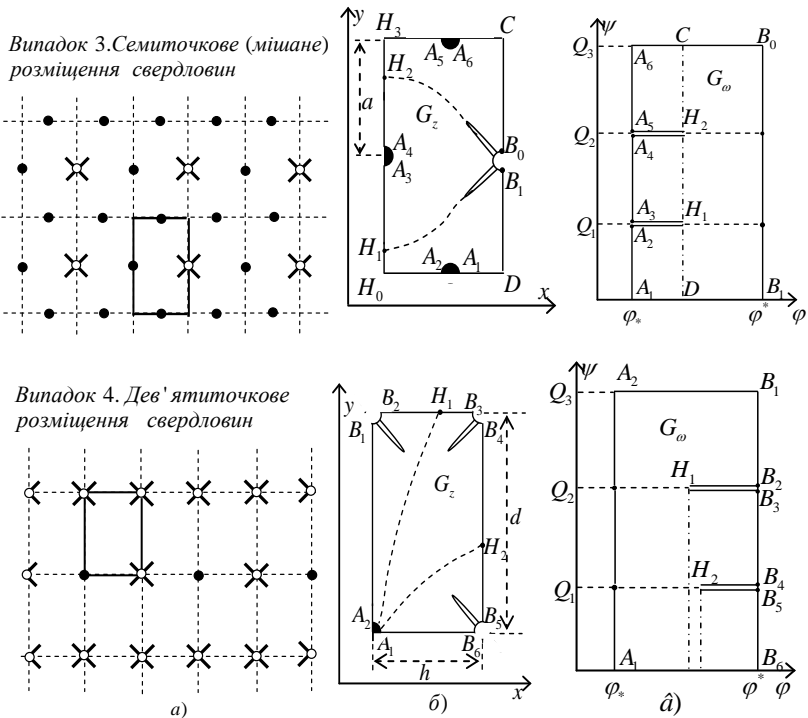


Рис. 3.3. Схематичне зображення розробки пласта (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в)

Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації у горизонтальному пласті-колекторі, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщеними прямолінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (див. рис. 3.4 а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами.

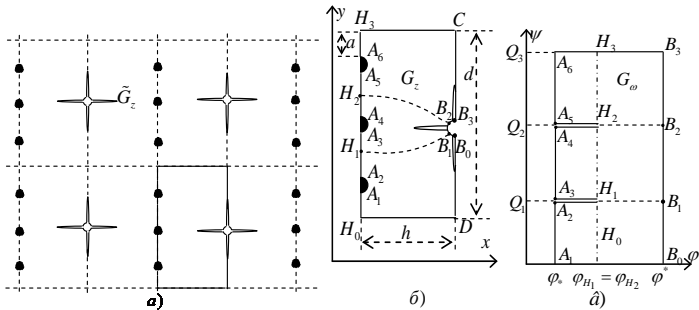


Рис. 3.4 – Схематичне зображення розробки пласта: *a* – з виділеним елементом симетрії ((●) – нагнітальна, (○) – експлуатаційна свердловини); *б* – відповідна фізична область; *в* – область комплексного квазіпотенціалу

З огляду на симетрію розміщення свердловин, у пласті \mathcal{G}_z^0 маємо можливість виділити елемент $G_z \in \mathcal{G}_z^0$, що містить n_* нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну з відповідними тріщинами та симетричними їх частинами (див. рис. 3.4 б, де $d = 2n_*(r^0 + a)$ – відстань між лініями розділу елементів симетрії, r^0 – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами, $n_* = 3$).

Закон руху та рівняння нерозривності течії, представимо у вигляді (3.1). Контур λ -ої тріщини гідророзриву на експлуатаційній свердловині задамо у вигляді:

$$G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{1}{a_\lambda} \left((x-h) \cos \alpha_\lambda + \left(y - \frac{d}{2} \right) \sin \alpha_\lambda \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{b_\lambda} \left((h-x) \sin \alpha_\lambda + \left(y - \frac{d}{2} \right) \cos \alpha_\lambda \right) \right)^2 \leq 1 \right\},$$

де a_λ , b_λ , α_λ – відповідні півосі еліпсів, що

моделюють тріщини ГРП та кут її нахилу. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\dot{v} = \dot{v}_1 + \dot{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \bar{v} = \bar{k}(s) \operatorname{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi^*, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_g} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L^*} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L^*} = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*,$$

$$s|_{L_g} = s^*, \quad s(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$\text{де} \quad f(s) = \frac{\mu_1 \varphi(s)}{\mu_2 \varphi(s) + \mu_1 \varphi(s)}, \quad \bar{k}(s) = \frac{k \varphi(s)}{\mu_1} + \frac{k \varphi(s)}{\mu_2}, \quad L_g = \{z = x + iy :$$

$$x = r^0 \cos(\theta), \quad y = r^0 \sin(\theta) + (2g-1)(a+r^0), \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2\} =$$

$$= \{z : u_g(x, y) = 0, \quad g = \overline{1, n_g}\}, \quad L^* = \{z = x + iy : \quad x = r^0 \cos(\theta) + h,$$

$$y = r^0 \sin(\theta) + d/2, \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\} = \{z : u^*(x, y) = 0\}, \quad L_* = \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2} A_{2u-1},$$

$$A_{2u-2} A_{2u-1} = \{z : 2(u-1)(a+r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a+r^0) + a, \quad x = 0\}, \quad L =$$

$$= A_1 H_0 \cup H_0 D \cup D B_0 = \{z : f(x, y) = 0\}, \quad \bar{L} = A_{2n_*} H_{n_*} \cup H_{n_*} C \cup C B_{2n_*+1} =$$

$$= \{z : \bar{f}(x, y) = 0\}, \quad A_1 H_0 = \{z : x = 0, \quad 0 \leq y \leq a\}, \quad H_0 D = \{z : y = 0,$$

$$0 \leq x \leq h\}, \quad D B_0 = \{z : x = h, \quad 0 \leq y \leq d/2\}, \quad A_{2n_*} H_{n_*} = \{z : x = 0,$$

$$d-a \leq y \leq d\}, \quad H_{n_*} C = \{z : 0 \leq x \leq h, \quad y = d\},$$

$$C B_{2n_*+1} = \{z : x = h, \quad d/2 \leq y \leq d\}.$$

Аналогічно, як у попередньому параграфі, ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну

область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n_*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n_*-1} \bar{L}_g :$

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi_*, \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \psi|_{L} = 0, \psi|_{L} = Q_{n*}, \psi|_{L_{g-1}} = Q_{g-1}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, s|_{t=0} = \mathfrak{K}(x, y), \quad (3.18)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_g = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_{g-1} < \psi < Q_g, Q_0 = 0\}$, $L_g = \{\omega: \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_g\}$;

$Q_g - Q_{g-1} = \oint_{L_g} -v_y dx + v_x dy$ – невідомі сумарні фільтраційні витрати з

нагнітальних свердловин;

$Q = \sum_{g=1}^{n*} (Q_g - Q_{g-1}) = Q_{n*}$ – сумарна витрата на експлуатаційній

свердловині.

При цьому значення відбору нафти визначається за формулою:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= \oint_{L^*} (1 - f(s)) \cdot (-v_y dx + v_x dy) \approx \\ &\approx (1 - f(\bar{s})) \cdot \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy = (1 - f(\bar{s})) \cdot Q_{n*}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де \bar{s} – деяке усереднене значення насиченостей на контурі L^* .

Об'єм добутої нафти у процесі витіснення від його початку, за час t_* в одному елементі симетрії всього досліджуваного пласта-колектора, визначається за формулою:

$$V_{\text{дт}}(t_*) = \int_0^{t_*} Q^* dt, \quad (3.20)$$

тоді як, об'єм нафти, що міститься в ньому до початку відбору знайдемо за формулою:

$$V_i = \left(d \cdot h - \pi \cdot (r^0)^2 \cdot (n_* + 1) / 2 \right) \cdot \sigma. \quad (3.21)$$

Таким чином, залишок нафти $V_{\text{цв}}$ на момент часу t_* у відповідному елементі обчислюється за формулою: $V_{\text{цв}}(t_*) = V_i - V_{\text{дт}}(t_*)$.

Обернено до (3.17) крайову задачу квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також (як наслідок) рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.22)$$

$$u_{\underline{z}}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \mathfrak{H}x(\varphi, Q_{n_*}), y(\varphi, Q_{n_*}) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$u_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_{n_*}, \quad g = \overline{2, n_*},$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r^0) + a,$$

$$\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3.22) і формули для}$$

обчислення компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$,

$v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$, задачу для насиченості (3.18) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.25)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \mathfrak{H}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi),$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.26)$$

де рівняння (3.25) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут входить як параметр. Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі – подання його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно. Спочатку за фіксованим розподілом насиченості s , аналогічно до [25], розв'язуємо задачу квазіконформного відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри. Далі за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.25) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукування поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроєктованого розміщення свердловин та тріщин ГРП на них. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти [69, 114, 166], в залежності від заданих параметрів тріщин ГРП на експлуатаційній свердловині. При цьому виникає потреба розв'язання більш ширших задач, коли приходить встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло б ті чи інші критерії. Зокрема, ставиться задача підібрати таке значення величин a_l , b_l та α_l , за умов сталості a та h , так щоб час прориву $t = \%$ води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти $V_{ar}(t)$ були максимальними, а в наступні моменти часу $t > \%$ об'єм води в сумарній витраті був мінімальним.

Різницевий аналог та алгоритм розв'язання задачі будуємо як у [24-26]. На початковому етапі знаходимо величини параметрів φ_{H_1} , φ_{H_2} , далі

послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 3.4 в. Вузли (φ_i, ψ_j) сіткової області G_ω визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*) / (n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi^* - \varphi_{H_g}) / (n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

де $j = \overline{\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_q}$, $\mathcal{M}_p = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1$, $\mathcal{M}_q = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1$, $\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1}) / m_g$,

$$m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, n_*}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n = n_1^g + n_2^g + 1,$$

$$m = \sum_{l=1}^{n_*} m_l + n_* - 1, \quad m_l, n_1^g, n_2^g \in N. \quad \text{Рівняння (3.24) апроксимуємо,}$$

використовуючи метод скінченних об'ємів [199], наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (3.27)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}$, $a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}$, $a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}$,

$$a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+}{2}, \quad \Delta\psi = \frac{\Delta\psi_- + \Delta\psi_+}{2},$$

$$k_n = \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}, \quad k_s = \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}}, \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{H_1}$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$.

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned}
u_g(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\
x_{i, m_{g-1}} &= 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_{i, m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, \\
x_{i, m_g} &= 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_{i, m_g} \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad i = \overline{0, n_1}, \\
x_{i, 0} &= 0, \quad y_{i, 0} = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad g = \overline{2, n_*}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Тут, як і в [34-35], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\
&+ (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\
&(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\
&+ (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Невідомі наближені значення витрат Q_g та потенціалу φ_{H_g} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де } \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а } \gamma_1^g$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^g &= \sum_{i=0, j=\overline{0, m_g-1}}^{n_1, \overline{0, m_g-1}} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\overline{0, m_g-1}}^{n, \overline{0, m_g-1}} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \\
\gamma_{i,j} &= \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad g = \overline{1, n_*},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\text{де } a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.24) апроксимуємо, як і раніше, різницевою схемою «проти потоку» наступним чином:

$$s_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi_i^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \quad (3.31)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1^g + 1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1^g + 2, n}, \quad l = 2,$$

де τ – крок за часом;

$s_{i,j}$, $s_{i,j}^j$ – насиченості у відповідні моменти часу;

$v_{i,j}$ – швидкість фільтрації.

Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s(x_{i,j}, y_{i,j})$, $j = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1^g , n_2^g , m_g , $g = \overline{1, n_g}$, області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.27)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$), за формулами (3.29) знаходимо наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.26) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , $Q^*(t)$, $V_{\hat{a}t}(t)$, φ_{H_g} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є: стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (3.29) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Вище описаний алгоритм числового розрахунку поставленої задачі реалізуємо у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Проведемо дослідження відповідного процесу витіснення у випадку, коли в елементі симетрії на одну експлуатаційну свердловину припадає дві нагнітальних, змінюючи просторову орієнтацію тріщин ГРП, отримаємо відповідні гідродинамічні сітки при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r^0 = 0.2$, $a = 1$, $h = 2.5$, $b = 2.2$, $k_0 = 1$, $k_\lambda = 10$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\sigma = 0.5$, $s_* = 1$, $\mathcal{W}(x, y) = 0$, $\tau = 0.001$, $t = 0$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 10 \times 40 \times 35 \times 35$, зображені на рисунку 3.5.

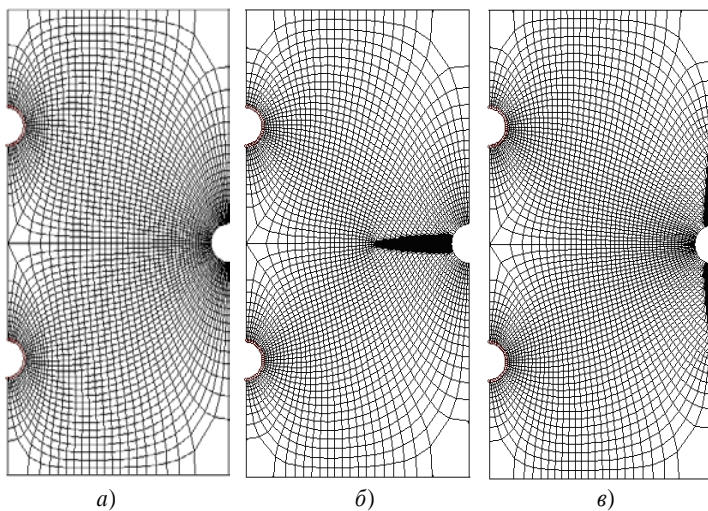
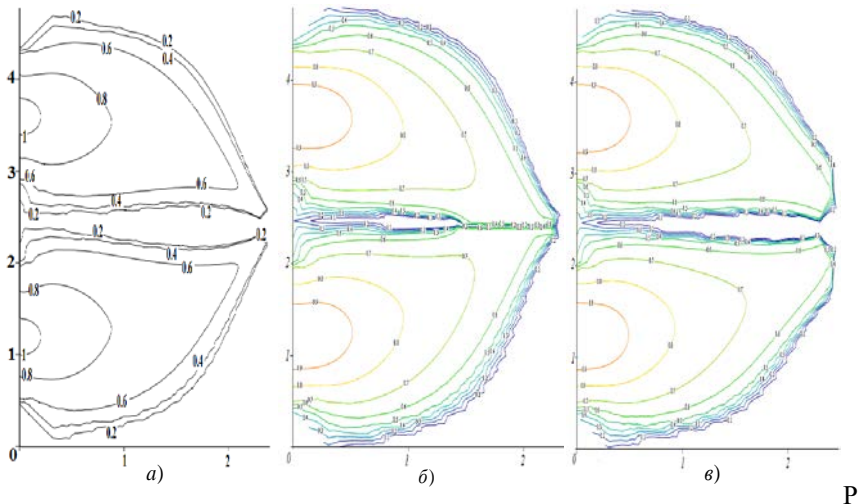


Рис. 3.5. Гідродинамічні сітки елементів симетрії пласта, за умов відсутності (а) та наявності тріщин ГРП ($a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (б), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (в))

Розподіл насиченості у відповідних елементах симетрії площового заводнення пласта, зображених на рисунку 3.6, у момент часу $t = 4.09$, дозволяє проаналізувати процес витіснення та підібрати оптимальне

розміщення тріщин, а також порівняти залежність зміни контурів рівня насиченості за умов відсутності та наявності впливу тріщин ГРП на процес витіснення.



ис. 3.6. Поле насиченості в момент часу $t = 4.09$ у відповідних елементах симетрії

Залежність від часу сумарної фільтраційної витрати (суцільні лінії) та значення відбору нафти (пунктирні лінії) зображено на рисунку 3.7, відповідно у випадках відсутності (рис. 3.6 *a*) та наявності тріщин ГРП (рис. 3.6 *б-в*), що мають параметри: $a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (*б*), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (*в*). Дослідження в цілому доводить ефективність утворення тріщин ГРП вздовж границі елемента симетрії для збільшення зони впливу нагнітальних свердловин, зокрема, спостерігається значний приріст значення витрати на початковому етапі нагнітання води в пласт в наслідок зменшення загального фільтраційного опору у привибійній ділянці.

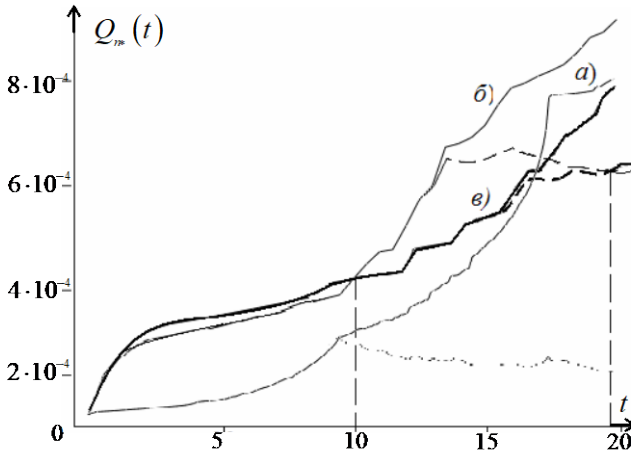


Рис. 3.7. Графік залежності сумарної витрати від часу у відповідних елементах симетрії

Далі проведемо числові розрахунки тої ж самої математичної моделі, однак при різних значеннях характерних параметрів, які задають геометрію тріщин ГРП та їх розміщення, за умов $h = 3$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 4 \times 20 \times 25 \times 25$.

На рисунках 3.8 *a-v* зображено гідродинамічні сітки елементів симетрії, у початковий момент часу, а на рисунках 3.8 *а' - а'* – відповідний розподіл насиченості у момент часу $t = 9\%$ при таких параметрах тріщин гідророзриву: $a_1 = b_2 = 0.1$, $b_1 = a_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ (Випадок 1); $a_1 = a_2 = 0.1$, $b_1 = b_2 = 1$, $\alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$ (Випадок 2); $a_1 = 0.18$, $b_1 = 1$, $\alpha = 0^\circ$ (Випадок 3).

На рисунку 3.9 зображено залежності сумарної фільтраційної витрати $Q_m(t)$ та значень відбору нафти $Q^*(t)$ від часу $t \in [0, t_*]$ ($t_* = 18.62$, далі проводити розрахунки практично немає сенсу, через різке зниження відбору нафти) для вищеприписаних характерних випадків.

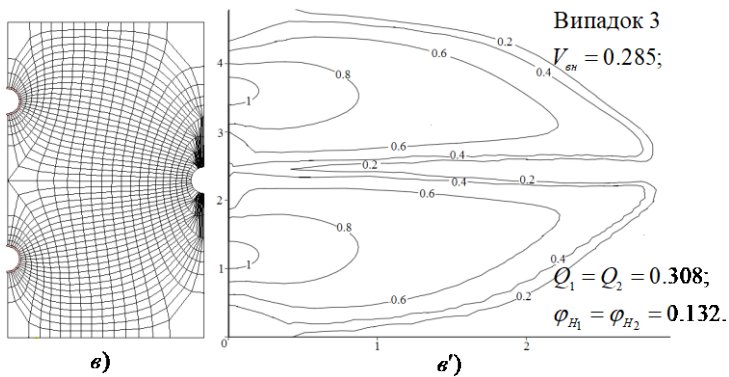
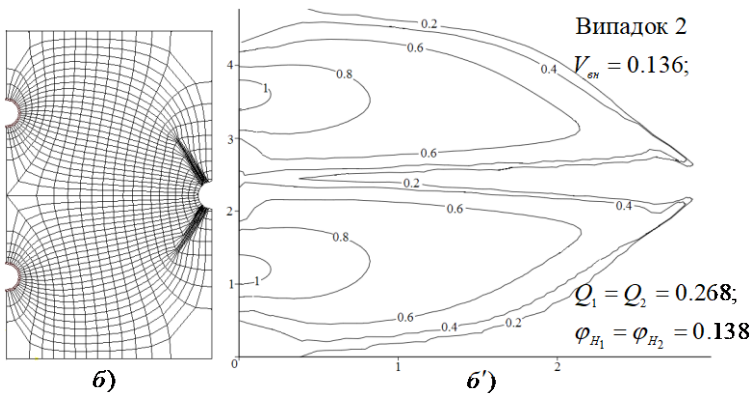
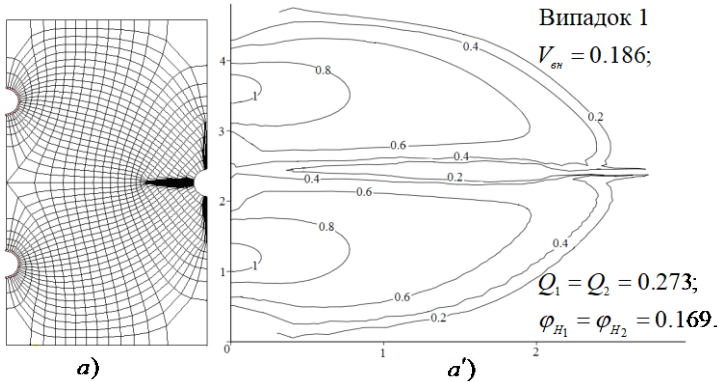


Рис. 3.8 – Гідродинамічні сітки (а, б, в) та, відповідні їм, розподіли насиченості елементів симетрій у момент часу $\%a= 4.64$ (\acute{a}'), $\%a= 4.92$ (\acute{a}'), $\%a= 5.98$ (\acute{a}')

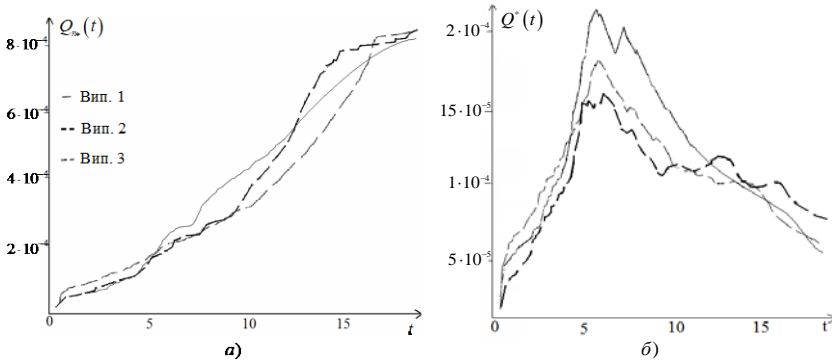


Рис. 3.9 – Графік залежності сумарної витрати (а) та значення відбору нафти (б) від часу у відповідних елементах симетрії

За підрахунками, згідно формул (3.20) - (3.21), об'єм нафти, яка знаходилась у цих елементах симетрії до початку витіснення – $V_i = 7.106$, а об'єм добутої нафти та її залишок у пласті за час протікання процесу, відповідно, становить $V_{\acute{a}i} = 3.965$, $V_{\zeta\acute{e}}(18.62) = 3.141$ (для випадку 1), $V_{\acute{a}i} = 3.428$, $V_{\zeta\acute{e}}(18.62) = 3.678$ (для випадку 2). $V_{\acute{a}i} = 3.789$, $V_{\zeta\acute{e}}(18.62) = 3.317$ (для випадку 3).

Згідно експериментального дослідження, бачимо, що при $t > \%a$, об'єм відбору нафти різко зменшується, а значення об'єму витісняючого реагента (що потрапляє у експлуатаційну свердловину) в сумарній фільтраційній витраті у кожному з випадків зростає по-різному. Це пояснюється суттєвою різницею коефіцієнтів в'язкості фаз, відносної фазової проникності, параметрів та розміщень тріщин ГРП: у випадку 1 відбувається швидке обводнення експлуатаційної свердловини через одну з тріщин і виникає ризик утворення так званих зон застою нафти; у випадку 2 цей ризик значно зменшується, однак збільшується час для повного витіснення нафти; у випадку 3 спостерігаємо надто повільний перебіг процесу відбору нафти («близькість» відборів, особливо для

випадків 1 та 3, пояснюється рівністю площ тріщин ГРП). Також підтверджується факт, що напрямленість тріщин ГРП в «поперечному напрямку» (стосовно лінії розміщення нагнітальних свердловин) пришвидшує час прориву витісняючого реагента до експлуатаційної свердловини (хоча забезпечує певне зростання значень відбору нафти на початкових часових етапах), а їх розміщення «вздовж» – сприяє зменшенню зон застою нафти. При цьому підкреслимо, що зони застою нафти в даних випадках є близькими до так званих застійних зон (ділянок пластів, в кожній точці яких величина градієнта є меншою деякого критичного значення).

Для підтвердження точності даного методу проведемо дослідження процесу витіснення з нафтового пласта на основі натурних даних [177]:

$$p_* = 112 \cdot 10^5 \text{ Па.}, \quad p^* = 198 \cdot 10^5 \text{ Па.}, \quad r^0 = 0.1 \text{ м.}, \quad a = 7.1 \text{ м.}, \quad h = 12.3 \text{ м.},$$

$$b = 14.4 \text{ м.}, \quad k_0 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ і}^2, \quad k_\lambda = 11 \cdot 10^{-12} \text{ і}^2, \quad \mu_1 = 2 \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \dot{\text{і}}}{\tilde{n}},$$

$$\mu_2 = 1 \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \dot{\text{і}}}{\tilde{n}}, \quad \sigma = 0.3, \quad s_* = 1, \quad \mathcal{W}(x, y) = 0, \quad \tau = 0.01 \text{ с.}$$

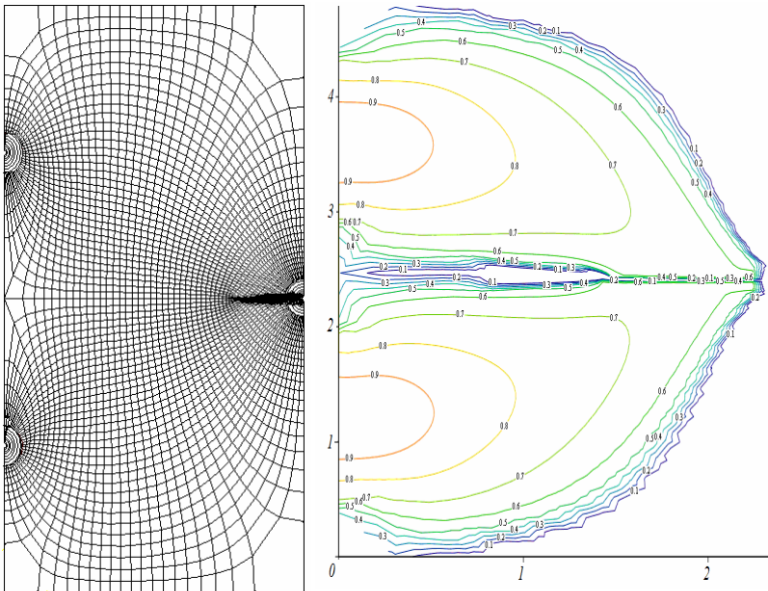


Рис. 3.10 – Гідродинамічна сітка та розподіл насиченості у момент часу $\%e=10.4$.

Як бачимо, процес витіснення тут відбувається надто повільно, порівняно із попередніми тестовими розрахунками, однак поле насиченості (в порівнянні) суттєво не змінилась.

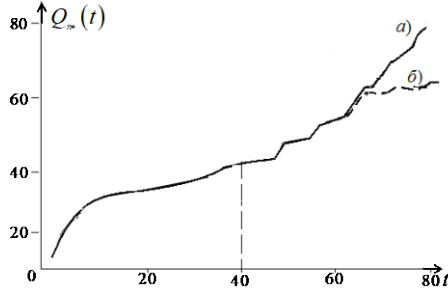


Рис. 3.11 – Графік залежності сумарної витрати (a) та значення відбору нафти (b) від часу.

На рисунку 3.11 зображено графік залежності сумарної фільтраційної витрати (a) та значення відбору нафти (b) від часу, який також підтверджує якість розрахунків.

Таким чином, проведені попередньо обчислювальні експерименти з використанням безрозмірних величин, які отримані із натурних даних за

допомогою формул обезрозмірювання [121] ($\%e = \frac{x}{L}$, $\%e = \frac{y}{L}$

($L = \sqrt{h^2 + 4b^2}$ - характерний розмір пласта), $\%e = \frac{t}{T}$ ($T \approx t_{\max}$), $\%e = \frac{v_i \cdot T}{L}$,

$\%e = \frac{(p^* - p_*) \cdot k \cdot T}{\mu_i \cdot L^2}$), мають підґрунтя для проведення відповідного аналізу

перебігу процесу витіснення у нафтових пластах.

3.5. Про один числовий метод комплексного аналізу розв'язання задач багатозфазної фільтрації в нафтогазових пластах

При моделюванні процесів витіснення у нафтогазових пластах, з використанням математичного апарату комплексного аналізу, зокрема, методу квазиконформного відображення [3,4] виникає необхідність систематизації та додаткового дослідження формування області комплексного квазіпотенціалу, в залежності від вигляду якої спрощується чи ускладнюється різницева модель відповідної оберненої задачі. Складність розв'язання задач на обернене квазиконформне відображення, в першу чергу полягає в тому, що область протікання процесу є багатозв'язною (пласт, обмежений еквіпотенціальними лініями та лініями течії), а відповідна їй область комплексного квазіпотенціалу («розрахункова») може змінювати свій вигляд (бути однолистою чи багатолистою [2, 5, 6]) в залежності від впливу різних факторів (введення комбінації умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, вибору потенціалів на свердловинах тощо), частина із яких описана в роботах [2, 3, 6], проте, що характерно, ці фактори не впливають на її загальну структуру, складові якої – склеєні між собою певним чином прямокутники.

У цій роботі адаптовано числовий метод квазиконформного відображення для розв'язання задач багатозв'язної фільтрації в нафтогазових пластах, що експлуатуються рядними системами розстановки свердловин, зокрема, встановлено особливості формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від послідовності введення умовних розрізів багатозв'язної області фільтрації флюїдів.

Загальна постановка задачі. Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації в пласті (див., рис.1), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L та відповідно контурами L_{α}° , L_{β}° ($\alpha = \overline{1, n^*}$, $\beta = \overline{1, n^*}$) нагнітальних (●) і експлуатаційних (○) свердловин.

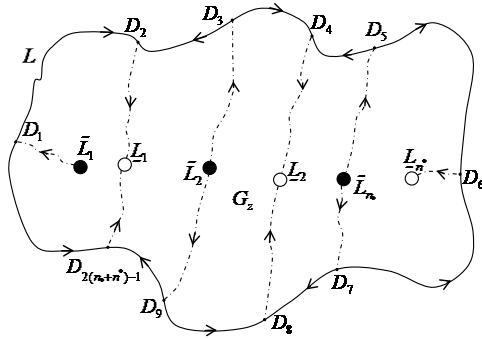


Рис. 1. Схематичне зображення пласта з $n_* + n^*$ свердловинами

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \mathcal{P}(p(x, y, t) - \text{тиск в точці } (x, y) \text{ в момент часу } t, \mathcal{P} - \text{ деяке характерне його значення})$, згідно з [1, 6, 7] представимо у вигляді:

$$\mathbf{v}_l = \frac{k\mathcal{K}\varphi}{\mu_l} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\mathbf{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де $s_1(x, y, t)$, $s_2(x, y, t)$ відповідно насиченості пористого середовища нафтою та водою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); σ , k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\mathcal{K}\varphi = \mathcal{K}\varphi(s)$, $\mathcal{K}_2\varphi = \mathcal{K}_2\varphi(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); \mathbf{v}_l , μ_l – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -тої фази. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \bar{k} \cdot \text{grad}\varphi,$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}f(s) = 0,$$

$$\text{де } f(s) = \frac{\mu_1 k_{\alpha}^{\circ}(s)}{\mu_2 k_{\beta}^{\circ}(s) + \mu_1 k_{\alpha}^{\circ}(s)}, \quad \bar{k}(s) = \frac{k k_{\beta}^{\circ}(s)}{\mu_1} + \frac{k k_{\alpha}^{\circ}(s)}{\mu_2}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних L_{α}° та експлуатаційних L_{β}° свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_* та φ^*), інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, має місце рівність $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$, де

$$L_{\alpha}^{\circ} = \{z = x + iy : \varphi_{\alpha}^{\circ}(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + x_{\alpha}^0, \quad y = r^0 \sin(\tau) + y_{\alpha}^0, \\ 0 \leq \tau < 2\pi\}, \quad L_{\beta}^{\circ} = \{z = x + iy : f_{\beta}^{\circ}(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + x_{\beta}^0, \\ y = r^0 \sin(\tau) + y_{\beta}^0, \quad 0 \leq \tau < 2\pi\},$$

$$L = \bigcup_{l=1}^{2(n_* + n^* - 1)} D_l D_{l+1} \cup D_{2(n_* + n^* - 1)} D_1 = \{z : f(x, y) = 0\}. \quad \text{Початковий розподіл}$$

насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s(x, y)$ та $s = s_*$.

Згідно запропонованої в роботах [2–6] методології розв’язання нелінійних задач багатофазної фільтрації у нафтогазових пластах область протікання процесу витіснення для яких є багатозв’язною, необхідною умовою використання методу числового квазіконформного відображення та основних ідей методики поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, з метою переходу від прямої задачі до оберненої (від фізичної області до однозв’язної області комплексного квазіпотенціалу), є введення серії умовних розрізів вздовж ліній течії, що проходять через точки призупинки потоку [4–6] $D_l, l = 1, 2(n_* + n^*) - 1$.

Проблеми побудови області комплексного квазіпотенціалу. Як можна помітити, вже у випадку зображеному на рис. 2 виникає певна

неоднозначність в структурі області комплексного квазіпотенціалу (рис. 2.а – багатоліста область, рис. 2.б – одноліста), що перш за все пов’язана з характером та послідовністю введення згаданих вище розривів. Тому доцільним є проведення додаткового аналізу стосовно формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від кількості свердловин в ряді та послідовності введення умовних розривів.

З метою зручності подальших викладок, розглянемо на початку простіший випадок, коли свердловини чергуються, а їх загальна кількість рівна $n_* + n^*$, причому вважається, що ряд розпочинається з нагнітальної свердловини і може закінчуватися як нагнітальною так і експлуатаційною в залежності від співвідношень між n_* та n^* .

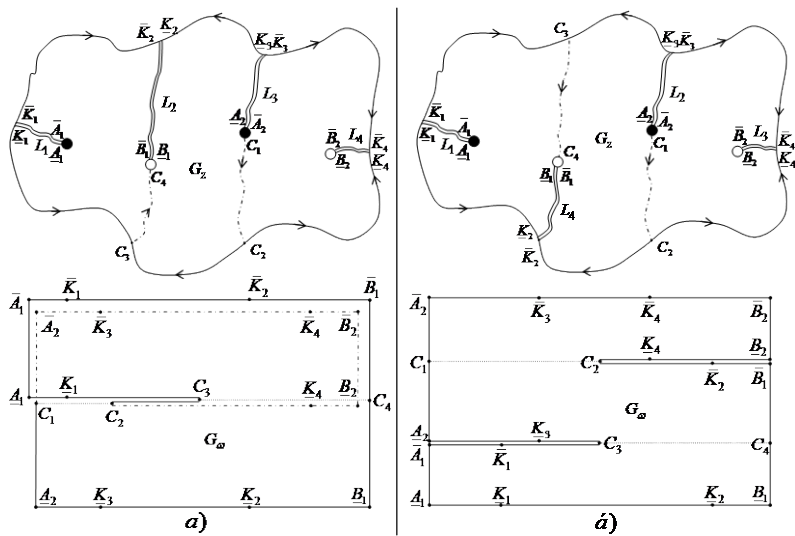


Рис. 2. Пласт G_2 та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $n_* = n^* = 2$

На рисунках 2–4 зображено фізичні області фільтрації та відповідні області комплексного квазіпотенціалу в залежності від співвідношення

значень n_* і n^* та послідовності введення умовних розрізів L_λ ($\lambda = \overline{1, n_* + n^*}$). Зокрема, на рис. 2а, 3а, 4а зображено випадки при введенні умовних розрізів фізичної області G_z (що характеризуються точками призупинки течії [4–6]), коли відповідні області комплексного квазіпотенціалу є багатолістими, а на рис. 2б, 3б, 4б – однолістими.

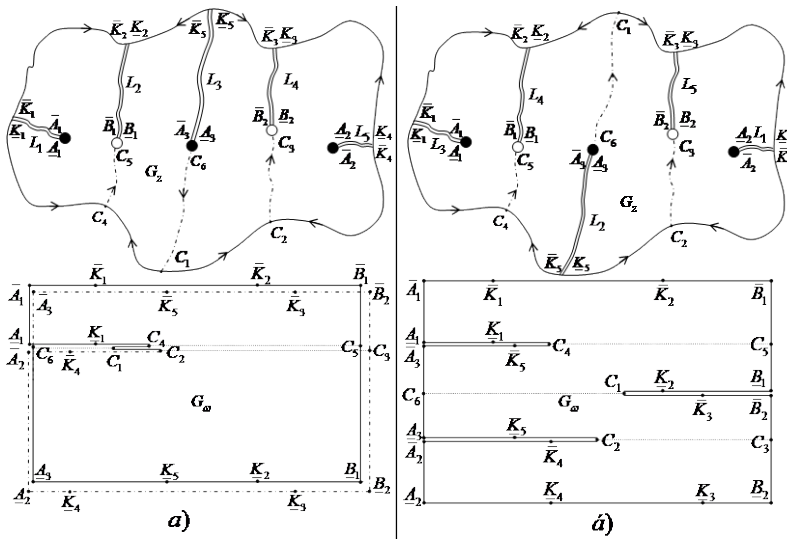


Рис. 3. Плат G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

G_ω при $n_* = 3$, $n^* = 2$

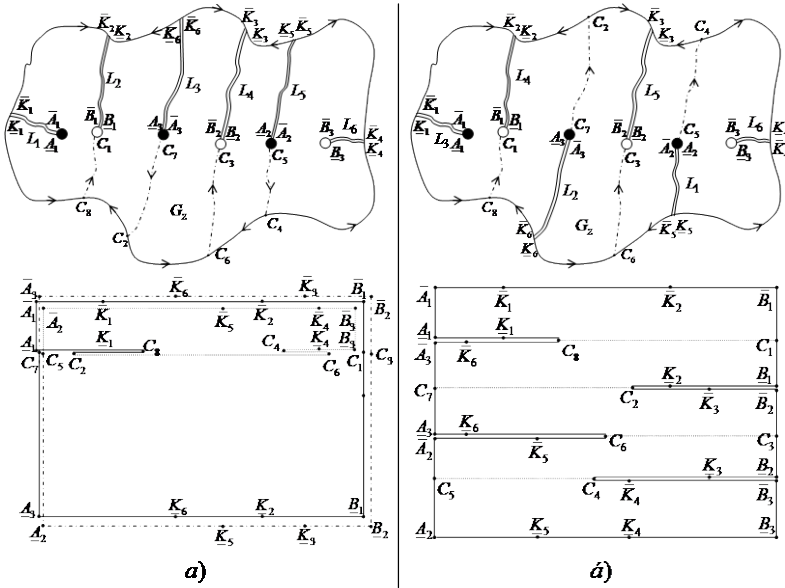


Рис. 4. Пласти G_ω та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $n_* = n^* = 3$

Безумовно, що доцільним є здійснення процедури умовного розрізування фізичної області лише таким чином, щоб відповідна область комплексного квазіпотенціалу була однолистою, це дозволить уникнути проблеми неоднозначності у виборі належності характеристичних точок течії тому чи іншому листу багатолистої поверхні, що тим самими спростить процедуру побудови різницевої задачі та алгоритму її розв'язання. Адже у випадку багатолистої області комплексного квазіпотенціалу, як було відзначено в роботах [5, 6], при побудові різницевого аналогу задачі необхідно вводити додатковий індекс для шуканих змінних, значення якого зв'яже їх з конкретним листом та обмежує область використання при розрахунках, а також призводить до додаткових затрат оперативної пам'яті при реалізації відповідних алгоритмів у вигляді прикладних програм для подальшого комп'ютерного

моделювання відповідних процесів.

Таким чином для застосування методу квазіконформного відображення до розв'язування відповідних задач (в порівнянні, наприклад, з [4]) необхідно провести «підготовчий етап» щодо вибору характеристичних точок сходження та розходження течії та згідно запропонованого вище, здійснити розрізування багатозв'язної області спочатку через точки розходження течії, а потім через точки сходження в результаті чого отримана таким чином область комплексного квазіпотенціалу буде однолистою. Тоді аналогічно, як і в роботах [2–6], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задачу на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну однолисту область комплексного квазіпотенціалу.

Алгоритм розв'язку. Для переходу до оберненого квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області комплексного квазіпотенціалу на G_z використовуємо наступні

$$\text{формули [4–6]} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \text{ тоді рівняння для відшукування дійсної } x = x(\varphi, \psi) \text{ і уявної}$$

$y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії та розподілу насиченості матимуть вигляд:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

$$\text{де } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}.$$

Крайові умови, наприклад, для випадку, зображеного на рис. 2б мають вигляд:

$$f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1;$$

$$x(\varphi, 0) = x_-(\varphi, Q_1), \quad y(\varphi, 0) = y_-(\varphi, Q_1), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{K_1};$$

$$f(x_-(\varphi, Q_1), y_-(\varphi, Q_1)) = 0, \quad \varphi_{K_1} \leq \varphi \leq \varphi_{C_3};$$

$$f(x_+(\varphi, Q_1), y_+(\varphi, Q_1)) = 0, \quad \varphi_{K_3} \leq \varphi \leq \varphi_{C_3};$$

$$x(\varphi, Q_3) = x_+(\varphi, Q_1), \quad y(\varphi, Q_3) = y_+(\varphi, Q_1), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{K_3};$$

$$f_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_3;$$

$$f(x(\varphi, Q_3), y(\varphi, Q_3)) = 0, \quad \varphi_{K_3} \leq \varphi \leq \varphi_{K_4};$$

$$x(\varphi, Q_3) = x_+(\varphi, Q_2), \quad y(\varphi, Q_3) = y_+(\varphi, Q_2), \quad \varphi_{K_4} \leq \varphi \leq \varphi^*;$$

$$f_2(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q_2 \leq \psi \leq Q_3;$$

$$f(x_+(\varphi, Q_2), y_+(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_{C_2} \leq \varphi \leq \varphi_{K_4};$$

$$f(x_-(\varphi, Q_2), y_-(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_{C_2} \leq \varphi \leq \varphi_{K_2};$$

$$x(\varphi, 0) = x_-(\varphi, Q_2), \quad y(\varphi, 0) = y_-(\varphi, Q_2), \quad \varphi_{K_2} \leq \psi \leq \varphi^* ;$$

$$f_1(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2 ;$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_{K_1} \leq \varphi \leq \varphi_{K_2} ;$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \mathfrak{B}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$\text{де} \quad \varphi_{K_l} = \varphi(x_{K_l}, y_{K_l}), \quad x_{K_l} = x_{\bar{K}_l} = x_{\underline{K}_l}, \quad y_{K_l} = y_{\bar{K}_l} = y_{\underline{K}_l}, \quad l = \overline{1, 4} ;$$

$$\varphi_{C_2} = \varphi(x_{C_2}, y_{C_2}), \quad \varphi_{C_3} = \varphi(x_{C_3}, y_{C_3}) ; \quad Q_1 = \oint_{\Delta_1 \bar{A}_1} -v_y dx + v_x dy ,$$

$$Q_2 = Q_1 + \int_{\Delta_2 C_1} -v_y dx + v_x dy, \quad Q_3 = Q_2 + \int_{\bar{C} \bar{A}_2} -v_y dx + v_x dy .$$

Відзначимо, що використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційних свердловин.

Різницевий аналог задачі дослідження багатофазної фільтрації та алгоритм її розв'язання будується аналогічно як і в роботах [2–6], шляхом введення в області комплексного квазіпотенціалу рівномірної ортогональної сітки з вузлами в точках (φ_i, ψ_j) ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), відносно якої здійснюється апроксимація рівнянь (1)–(3), наприклад, так [4–6]

$$\begin{aligned}
& \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \\
& \quad + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\
& \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\
& \quad + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\
& \mathfrak{g}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau u_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(f(s_{i,j}) - f(s_{i-1,j}) \right),
\end{aligned}$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j}}{2}$, $\bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j}}{2}$,

$\gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi}$, та відповідних їм граничних та початкових умов. З наступним

вибором кроку по часу, параметрів розбиття області комплексного квазіпотенціалу (що визначають положення вузлів (φ_i, ψ_j) сітки) та точності роботи алгоритму, початкових наближень координат граничних вузлів гідродинамічної сітки і початкового наближення координат її внутрішніх вузлів. Після чого знаходимо значення квазіконформних інваріантів. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання відповідних (2) різницевих аналогів. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин витрат (дебітів свердловин). Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат; стабілізація граничних вузлів [6] тощо. У випадку невиконання якоїсь із

цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з різницеvim аналогом рівняння (3) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Висновок. Числовий метод квазіконформного відображення адаптовано для розв'язання задач багатофазної фільтрації в нафтогазових пластах, що експлуатуються рядними системами розстановки свердловин, зокрема, встановлено особливості формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від послідовності введення умовних розрізів багатозв'язної області фільтрації флюїдів.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМОРЕЖИМУ

У розділі встановлено особливості протікання процесу витіснення нафти із важкопроникних (зокрема, сланцевих) осадових порід з використанням дії енергії зарядів вибухових речовин та тріщин гідравлічного розриву пласта. На основі модифікованого закону Дарсі, шляхом введення критичного значення градієнта тиску та з використанням ідей методів комплексного аналізу, розроблено алгоритми числового наближення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач у горизонтальних і просторово-викривлених пластах.

4.1. Моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм за умов впливу тріщин гідророзриву

При розробці нафтових родовищ, в'язкість якої перевищує деякі критичні значення (наприклад, родовища нафти середньої та високої в'язкості, природних бітумів), ефективною, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технологія нагнітання в пласт різних робочих агентів – теплоносіїв [5, 114, 145, 154, 172], при цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, забезпечується гідродинамічний зв'язок між ними.

У цьому параграфі розвинуто розроблені нами методи комплексного аналізу [29-34] математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти з горизонтального пласта теплоносієм, в умовах його гідравлічного розриву (ГРП). При цьому, на

основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо.

Розглянемо задачу моделювання процесу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) в горизонтальному пласті, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщеними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (див. рис. 3.10 а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами. За умов існування певного роду симетрії, можна виділити елемент G_z ($z = x + iy$), що містить 2 – нагнітальні свердловини та 1 – експлуатаційну (див., рис. 3.12 б, де $d = 4(r + a)$, r – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин).

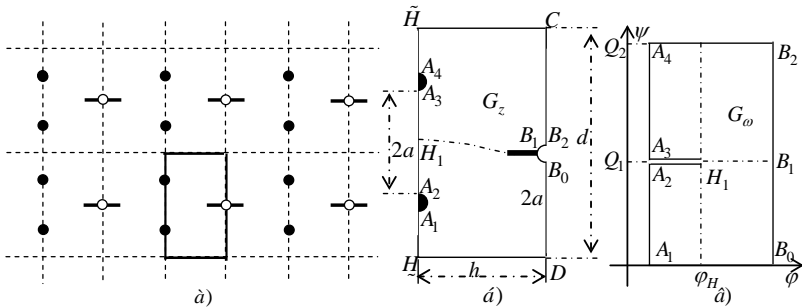


Рис. 3.12. Рядна схема розміщення свердловин (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (ϵ) (● – нагнітальна свердловина, —○— – експлуатаційна з тріщиною ГРП)

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані

відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації

$\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \mathcal{P}(p(x, y, t))$ – тиск в точці (x, y) в момент часу t , \mathcal{P} – деяке характерне його значення), згідно з [19] представимо у

вигляді:
$$\mathbf{v}_l = \frac{k(x, y) \mathcal{K}^l}{\mu_l(T)} \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$
 де

$s_1(x, y, t)$, $s_2(x, y, t)$ – відповідно насиченості пористого середовища нафтою та водою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші

величини є безрозмірними); σ , $k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda(x, y) \in G_z^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots \\ k_0(x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l G_z^\lambda, \end{cases}$ –

коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту, де G_z^λ – ділянка

пласта, що відповідає λ -ій тріщині; $\mathcal{K}^l = \mathcal{K}^l(s)$, $\mathcal{K}^g = \mathcal{K}^g(s)$ – відносні

фазові проникності ($s = s_2$); \mathbf{v}_l , $\mu_l(T)$ – вектор швидкості та коефіцієнт

в'язкості l -тої фази, $T = T(x, y, t)$ – температура. Звідси, з урахуванням

сумарної швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \bar{k}(s, T) \cdot \text{grad} \varphi,$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} f(s, T) = 0,$$

де $f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \mathcal{K}^g(s)}{\mu_2(T) \mathcal{K}^l(s) + \mu_1(T) \mathcal{K}^g(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \mathcal{K}^l(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \mathcal{K}^g(s)}{\mu_2(T)}.$

Вважаємо, що на нагнітальних L_g ($g = \overline{1, 2}$) та експлуатаційній L^*

свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали

позначимо: φ_* та φ^*), на межі ∂D_λ тріщин ГРП виконуються умови

неперервності потоку і тиску, а інші ділянки границі області G_z є лініями

течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0$,

де $L_g = \{z = x + iy : f_g(x, y) = 0\} = \{z : x = r \cdot \cos(\tau), y = r \cdot \sin(\tau) + (2g - 1) \cdot (a + r), 1,5\pi \leq \tau \leq 2,5\pi\}$, $L^* = \{z = x + iy : f^*(x, y) = 0\} = \{z : x = r \cdot \cos(\tau) + h, y = r \cdot \sin(\tau) + d/2, 0,5\pi \leq \tau \leq 1,5\pi\}$,
 $L_{\Omega_0} = A_1 H_{\Omega_0} \cup H_{\Omega_0}^D \cup DB_0 = \{z : f_{\Omega_0}(x, y) = 0\}$, $A_1 H_{\Omega_0} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\}$,
 $0 \leq x \leq h\}$, $H_{\Omega_0}^D = \{z : y = 0, DB_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq d/2 - r\}$,
 $L_{\Omega_1} = A_4 H_{\Omega_1} \cup H_{\Omega_1}^C \cup CB_2 = \{z : f_{\Omega_1}(x, y) = 0\}$, $A_4 H_{\Omega_1} = \{z : x = 0, d - a \leq y \leq d\}$,
 $H_{\Omega_1}^C = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}$, $CB_2 = \{z : x = h, d/2 + r \leq y \leq d\}$,
 $L = A_2 H_1 A_3 = \{z : x = 0, 2(a + r) - a \leq y \leq 2(a + r) + a\}$. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s^0(x, y)$ та $s|_{L_g} = s_*$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, приймемо однотемпературну модель, згідно з якою передбачається миттєва передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння [8]:

$$\frac{\partial (\sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3) \cdot T}{\partial t} + \text{div}((c_1 \rho_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \rho_2 \mathbf{v}_2) \cdot T) = 0, \quad (3.34)$$

де $\sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3 = C(s)$ – об'ємна теплоємність пористого середовища;

c_κ, ρ_κ – питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта ($\kappa = \overline{1,3}$).

Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води: $\dot{v}_1 = (1 - f(s, T)) \cdot \dot{v}$, $\dot{v}_2 = f(s, T) \cdot \dot{v}$ і співвідношення (3.32), рівняння (3.34) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \mathcal{Y}(s)}{\partial t} + \dot{v} \cdot \text{grad} \mathcal{Y}(s, T) = 0$$

де $\mathcal{Y}(s) = C(s) \cdot T = (\alpha s + \beta \bar{q}) \cdot T$, $\mathcal{Y}(s, T) = (\alpha f(s, T) + c_1 \rho_1) \cdot T$,

$\alpha = \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1$, $\beta = \rho_1 c_1 + (\sigma^{-1} - 1) \rho_3 c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (3.35) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (3.33) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених в роботах [24-27] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатозфазної фільтрації.

Для однозначності відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу $T(x, y, 0) = T^0(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{L_0} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{L_1} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{L_2} = 0, \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T^*.$$

Ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу) полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного

квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^2 G_g \cup \bar{L}_1$:

$$\bar{k}(s, T) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_1} = \varphi|_{L_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad [\varphi]_{\partial D_2} = 0, \quad [\nu_n]_{\partial D_2} = 0, \quad (3.37)$$

$$\psi|_{L_1} = 0, \quad \psi|_{A_2 H_1 A_3} = Q_1, \quad \psi|_{L_2} = Q_2,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_1} = s|_{L_2} = s_*, \quad s|_{t=0} = s^0(x, y), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial y} \right), \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T_*, \quad T|_{t=0} = T^0(x, y), \quad (3.39)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}$,
 $G_2 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\}$, $\bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{H_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}$,
 $Q_1 = \oint_{L_1} v_y dx + v_x dy$, $Q_2 - Q_1 = \oint_{L_2} v_y dx + v_x dy$ – невідомі витрати, а Q_2 –
сумарна витрата на експлуатаційній свердловині, $[\bullet]_{\partial G_z^l}$ –стрибок
відповідної функції на ∂G_z^l .

Обернувши до (3.37) крайову задачу на квазіконформне відображення
 $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок,
рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин
характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega,$$

$$u_{\mathcal{L}}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad u_{\mathcal{L}}(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$u_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1, \quad u_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$x_-(\varphi, Q_1) = 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_1) \leq y_{H_1},$$

$$x_+(\varphi, Q_1) = 0, \quad y_{H_1} \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq 2(a+r) + a, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_1},$$

$$[x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_2^+} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_2^+} = 0,$$

$$\left[\frac{\bar{k}}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\underline{v}, \underline{r}) \right]_{\partial G_2^+} = 0, \quad l \in N,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3.40) та формули для}$$

обчислення компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi},$

$v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$ задачі для насиченості та теплопровідності (3.38)–

(3.39) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [0, Q_1] \cup (Q_1, Q_2],$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = s^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*],$$

$$(3.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial \varphi},$$

$$\mathcal{P}^0(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\alpha^0 s_* + \beta^0) \cdot T_*, \quad \psi \in [0, Q_1] \cup (Q_1, Q_2],$$

$$\mathcal{F}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = (\mathcal{A}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \beta \mathcal{A} \cdot T^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$0 \leq \psi \leq Q_2, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

де рівняння (3.43) та (3.45) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Таким чином використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу дозволило суттєво спростити розв'язання задачі неізотермічної багатофазної фільтрації та представити відповідний алгоритм її розв'язування у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури (розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.43) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (3.45) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму (зокрема, однією з таких умов зупинки, може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини).

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначасмо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_{H_1} - \varphi_*) / (n_1 + 1), \\ \varphi_{H_1} + (i - n_1 - 1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{H_1}) / (n_2 + 1), \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad j = \overline{0, m_1}, \quad \overline{m_1}, \quad \overline{m_2} = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \overline{m_2} = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1}) / m_g, \quad g = \overline{1, 2}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0,$$

де $n = n_1 + n_2 + 1$, $m = m_1 + m_2 + 1$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in N$.

Рівняння (3.42) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [199] наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (3.47)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}$, $a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}$, $a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}$,

$$a_s = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2,$$

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2, \quad k_n = 2 \cdot k_{i,j} k_{i,j+1} / (k_{i,j} + k_{i,j+1}),$$

$$k_s = 2 \cdot k_{i,j} k_{i,j-1} / (k_{i,j} + k_{i,j-1}), \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5 \cdot (k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ визначається належністю вузла

(φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо

$$\varphi_i = \varphi_H, \quad \psi_j^g = 0, \quad \text{то} \quad \Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1, \quad \Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2, \quad \Delta\psi_+ = \Delta\psi_1, \quad \Delta\psi_- = \Delta\psi_1.$$

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$u_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1}, \quad u_2(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad \overline{m}, \quad \overline{m_2} x_{i,0}, y_{i,0} = 0, \quad y_{i,m}^*(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{0, n},$$

$$\begin{aligned}
x_{i,m_1} &= 0, \quad 2(a+r^0) - a \leq y_{i,m_1} \leq y_{H_1}, \\
x_{i,m_2} &= 0, \quad y_{H_1} \leq y_{i,m_2} \leq 2(a+r^0) + a, \quad i = \overline{0, n_1}.
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

Тут, як і в [19], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) \cdot (x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\
&(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m_2}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) \cdot (x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\
&+ (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \cdot (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}.
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

Невідомі витрати Q_g ($g = \overline{1, 2}$) та значення потенціалу φ_{H_1} в точці розгалуження ліній течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^1, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де } \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а } \gamma_i^g$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=m_1}^{n_1, m_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=m_1}^{n, m_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}},$$

$$\text{де } a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.43) та (3.45) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [202] таким чином:

$$s_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi_l} (f(s_{i,j}, T_{i,j}) - f(s_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (3.51)$$

$$T_{i,j} = T_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi_l} (f_{\rho} s_{i,j}, T_{i,j}) - f_{\rho} s_{i-1,j}, T_{i-1,j}), \quad (3.52)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1 + 1}$, для $l = 1$, $i = \overline{1, n_1 + 2, n}$, для $l = 2$; τ – крок по часу, $s_{i,j}$, $T_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу, $f_{\rho} s_{i,j} = (\alpha_{\rho} s_{i,j} + \beta_{\rho}) \cdot T_{i,j}$, $f_{\rho} s_{i,j} = (\alpha_{\rho} s_{i,j} + \beta_{\rho}) \cdot T_{i,j}$, $f_{\rho} s_{i,j}, T_{i,j} = (\alpha_{\rho} f(s_{i,j}, T_{i,j}) + c_1 \rho_1) \cdot T_{i,j}$, $v_{i,j}$ – швидкість фільтрації. Граничну та початкову умови для насиченості та температури в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s^0(x_{i,j}, y_{i,j}),$$

$$T_{0,j} = (\alpha_0 s_* + \beta_0) \cdot T_*, \quad T(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = (\alpha_0 s_{x_{i,j}, y_{i,j}} + \beta_0) \cdot T^0(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_{ω} та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (3.48)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$) знаходимо за формулами (3.50) наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.47) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [37], підправляємо граничні

вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{H_1} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(k+1)} - Q_g^{(k)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $u_{i,j}$ та поле насиченості $s_{i,j}$ і температури $T_{i,j}^0$ з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), знаходимо розподіл насиченості $k_{i,j}$ у пласті на даному часовому етапі, згідно з (3.51), та, використовуючи (3.52), розраховуємо поле температури $T_{i,j}^1$, після чого перераховуємо поле швидкості і потенціалу.

Використовуючи вище описаний алгоритм, проведемо числові розрахунки поставленої задачі. На рисунку 3.13 а зображено гідродинамічну сітку в елементі симетрії G_z в момент часу $t = 8.15$, при $r = 0.3$, $a = 1.2$, $h = 5$, $d = 6$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k_0 = 1$, $k_1 = 10$, $\tau = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $\mu_1 = 5 \cdot e^{120 \cdot (\frac{1}{T} - \frac{1}{60})}$, $\mu_2 = \frac{9.1787}{1 + 0.0337 \cdot T + 0.000221 \cdot T^2}$, $\rho_1 = 800$, $c_1 = 1880$, $\rho_2 = 1000$, $c_2 = 4200$, $\rho_3 = 2200$, $c_3 = 1800$, $s_* = 1$, $s^0 = 0$, $T_* = 90$, $T^0(x, y) = 30$, $k_1^0(s) = (1-s)^2$, $k_2^0(s) = s^2$, $G_z^1 = \{(x, y) : (x-h)^2/4 + (y-d/2)^2/0.04 \leq 1\}$, $n_1 \times n_2 = 3 \times 45$, $m_1 = m_2 = 30$.

На рисунку 3.13 б-в представлено поле температур та поле насиченості, відповідно, при витісненні нафти водою у випадку неізотермічного процесу фільтрації. Для порівняння ефективності застосування теплового методу витіснення, на рисунку 3.13 г наведено поле насиченості для елемента симетрії пласта із такими ж геометричними параметрами та фізичними властивостями середовища та нафти у випадку ізотермічного процесу витіснення.

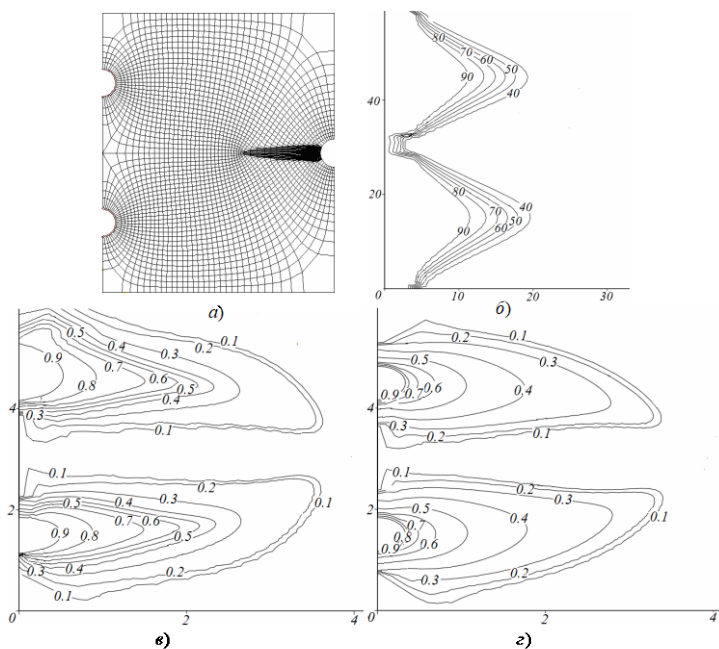


Рис. 3.13. Гідродинамічна сітка (а), розподіл температур (б) і розподіл насиченості в елементі симетрії G_z у випадку неізотермічної (в) та ізотермічної (г) фільтрації у момент часу $t = 8.15$

На рисунку 3.14 представлено графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу у випадку неізотермічного (суцільною лінією) та ізотермічного (штрих пунктирною) процесу витіснення.

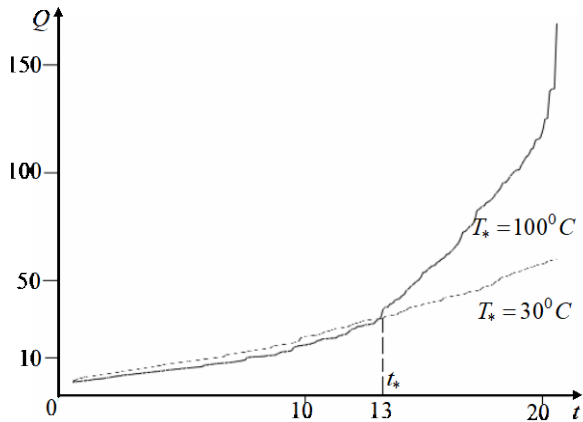


Рис. 3.14 – Графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу при $T_* = 100^{\circ}C$ та $T_* = 30^{\circ}C$

В результаті проведених числових розрахунків, підтверджується факт значного збільшення дебіту експлуатаційної свердловини при витісненні нафти гарячою водою, так як при збільшенні температури в'язкість нафти зменшується і швидкість фільтрації зростає. При цьому відзначимо, що з початку моменту нагрівання до певного часу t_* (у нашому випадку $t_* = 13$) інтенсивність відбору менша ніж у випадку ізотермічного процесу, це пояснюється тим, що енергія гарячої води затрачається на нагрівання середовища і нафти, що знаходиться в елементі симетрії.

4.2. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термо-гравітаційного дренажу

Вступ. У процесі видобутку нафти середньої та високої в'язкості (наприклад, природних бітумів) ефективними, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технології

нагнітання в пласт різних робочих агентів – теплоносіїв, при цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними.

Однією із таких технологій є термогравітаційний дренаж (у випадку нагнітання пару – парогравітаційний дренаж, SAGD [1]), при застосуванні якої на висоті 4-6 метрів, одна над одною, буриться пара паралельних горизонтальних свердловин – нагнітальна та експлуатаційна (див. рис. 1а). Через нагнітальну свердловину в пласт вводиться теплоносій, який прогріває зону навколо свердловин тим самим покращуючи реологічні властивості пластового флюїду, що сприяє процесу його відтоку до експлуатаційної свердловини.

У роботі розвинуто розроблені методи [2-4] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу [1]. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, зон прогріву тощо.

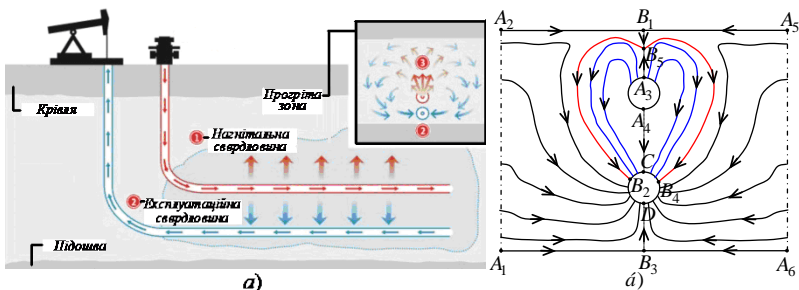


Рис. 1. Схема роботи термогравітаційного дренажу (а) та поперечний переріз пласта (б)

Загальна постановка задачі. Розглянемо двовимірну задачу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) з використанням технології термогравітаційного дренажу. Вважається, що динамічні в'язкості фаз змінюється зі зміною температури, рух рідини – повільний та відбувається без фазових переходів.

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t)$, згідно з [2, 5, 6] представимо у вигляді:

$$\mathbf{v}_l = \frac{k\mathcal{K}_l(s)}{\mu_l(T)} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\mathbf{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де \mathbf{v}_l , $\mu_l(T)$ – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості для l -тої фази, $T(x, y, t)$ – температура; $k(x, y)$ – коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту; $\mathcal{K}_l = \mathcal{K}_l(s)$, $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); σ – коефіцієнт пористості ґрунту; $s_l(x, y, t)$ – насиченість пористого середовища відповідною фазою в точці $(x, y) \in \mathcal{G}_z^0$ у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини вимірюються в одиницях СІ), \mathcal{G}_z^0 – область поперечного перерізу пласта (рис. 1б). В зв'язку з існуючою симетрією області \mathcal{G}_z^0 , для спрощення викладок розглядатимемо елемент G_z ($z = x + iy$), що містить половину нагнітальної та половину експлуатаційної свердловини, при $B_1 = B_5$ (рис. 2).

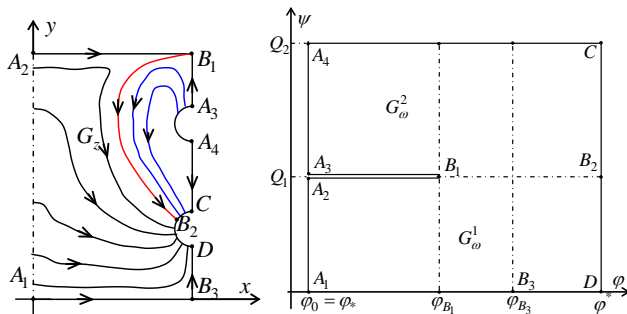


Рис. 2. Елемент поперечного перерізу пласта та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

З урахуванням сумарної швидкості $\dot{v} = \dot{v}_1 + \dot{v}_2$ фільтраційної течії,

маємо:

$$\operatorname{div} \dot{v} = 0, \quad \dot{v} = \bar{k}(s, T) \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \dot{v} \operatorname{grad} f(s, T) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \mathcal{K}_2(s)}{\mu_2(T) \mathcal{K}_1(s) + \mu_1(T) \mathcal{K}_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \mathcal{K}_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \mathcal{K}_2(s)}{\mu_2(T)}.$$

Вважаємо, що на контурах нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо: φ_* та φ^*), а інші ділянки границі області G_* є екіпотенціальними лініями та лініями течії, вздовж яких, мають місце

$$\text{рівності } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{A_2 B_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{B_1 A_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{A_4 C} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{D B_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{A_1 B_3} = 0,$$

$$\varphi|_{A_1 A_2} = \varphi^0, \quad \text{де } A_1 A_2 = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq h\}, \quad A_2 B_1 = \{z : y = h, 0 \leq x \leq d\},$$

$$B_3 D = \{z : x = d, 0 \leq y \leq a\}, \quad A_4 C = \{z : x = d, a + 2r \leq y \leq h - b - 2r\},$$

$$L_* = \{z : x = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y = r \cdot (\sin(\theta) - 1) + h - b, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\},$$

$L^* = \{z : x = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y = r \cdot (\sin(\theta) + 1) + a, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}, \quad h = |A_1 A_2|,$
 $d = |A_1 B_3|, \quad a = |B_3 D|, \quad b = |A_3 B_1|, \quad B_1 A_3 = \{z : x = d, \quad h - b \leq y \leq h\},$
 $A_1 B_3 = \{z : y = 0, \quad 0 \leq x \leq d\}; \quad |g|$ – відстань між двома точками, r – радіус свердловин. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальній свердловині та контурі живлення позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s_0(x, y)$ та $s|_{L^*} = s_*$, $s|_{A_1 A_2} = s_0$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, прийемо однотемпературну модель [7, 8], згідно з якою є миттєвою передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння:

$$\frac{\partial C(s)T}{\partial t} + \text{div}[(c_1 \rho_1 \overset{r}{v}_1 + c_2 \rho_2 \overset{r}{v}_2)T] = 0, \quad (3)$$

де $C(s) = \sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3$ – об'ємна теплоємність пористого середовища, c_l, ρ_l ($l = \overline{1,3}$) – питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта. Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води [2]: $\overset{r}{v}_1 = (1-f(s,T)) \cdot \overset{r}{v}$, $\overset{r}{v}_2 = f(s,T) \cdot \overset{r}{v}$ і співвідношення (1), рівняння (3) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \overset{r}{\varphi}(s)}{\partial t} + \overset{r}{v} \text{grad} \overset{r}{\varphi}(s, T) = 0, \quad (4)$$

де $\overset{r}{\varphi}(s) = C(s) \cdot T = (\overset{r}{\alpha} + \overset{r}{\beta}) \cdot T$, $\overset{r}{\varphi}(s, T) = (\overset{r}{\alpha} f(s, T) + c_1 \rho_1) \cdot T$,
 $\overset{r}{\alpha} = \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1$, $\overset{r}{\beta} = \rho_1 c_1 + (\sigma^{-1} - 1) \rho_3 c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (4) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (2) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою

для використання розроблених в роботах [2, 4, 9] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатофазної фільтрації.

Для відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу $T(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{A_2 B_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{B_1 A_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{A_4 C} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{D B_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{A_1 B_3} = 0, \\ T \Big|_{A_1 A_2} = T^0, \quad T \Big|_{L^*} = T^*. \quad (5)$$

Метод комплексного аналізу. Аналогічно до [2, 3], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу) полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup \bar{L}_1$:

$$\bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi \Big|_{A_1 A_2} = \varphi_0, \\ \psi \Big|_{A_1 D} = 0, \quad \psi \Big|_{A_2 A_3} = Q_1, \quad \psi \Big|_{A_4 C} = Q_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s \Big|_{L^*} = s_*, \quad s \Big|_{A_1 A_2} = s_0, \quad s \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \right), \quad T \Big|_{L^*} = T^*, \quad T \Big|_{A_1 A_2} = T_0, \quad T \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (8)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_\omega^1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}$,
 $G_\omega^2 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\}$ $\bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{B_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}$,
 $Q_1 = \oint_{A_1 A_2} -v_y dx + v_x dy$, $Q_2 - Q_1 = \oint_{L_\omega} -v_y dx + v_x dy$ – невідомі витрати, а Q_2 –
сумарна витрата на експлуатаційній свердловині.

Обернуто до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (9)$$

$$x(\varphi_0, \psi) = 0, \quad 0 \leq y(\varphi_0, \psi) \leq h, \quad \psi \in [0, Q_1],$$

$$y_-(\varphi, Q_1) = h, \quad 0 \leq x_-(\varphi, Q_1) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_{B_1}],$$

$$x(\varphi, 0) = d, \quad 0 \leq y(\varphi, 0) \leq a, \quad \varphi \in [\varphi_{B_3}, \varphi^*],$$

$$x(\varphi, Q_2) = d, \quad a + 2r \leq y(\varphi, Q_2) \leq h - b - 2r, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*],$$

$$x_+(\varphi, Q_1) = d, \quad h - b \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi_{B_1}],$$

$$y(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq x(\varphi, 0) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_{B_3}],$$

$$x(\varphi_*, \psi) = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y(\varphi_*, \psi) = r \cdot (\sin(\theta) - 1) + h - b,$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \quad \psi \in [Q_1, Q_2],$$

$$x(\varphi^*, \psi) = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y(\varphi^*, \psi) = r \cdot (\sin(\theta) + 1) + a,$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \quad \psi \in [0, Q_2], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (11)$$

Використавши підхід запропонований в [2, 8] задачі для відшукування насиченості та температури (7)–(8) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [Q_1, Q_2],$$

$$s(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi), t) = s_0, \quad \psi \in [0, Q_1],$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \mathcal{S}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), \quad \psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = - \frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\mathcal{P}x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\mathcal{S}x s_* + \mathcal{B} \mathcal{A} \cdot T_*, \quad \psi \in [Q_1, Q_2],$$

$$\mathcal{P}x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi), t) = (\mathcal{S}x s_0 + \mathcal{B} \mathcal{A} \cdot T_0, \quad \psi \in [0, Q_1],$$

$$\mathcal{P}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = (\mathcal{S}x \mathcal{S}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \mathcal{B} \mathcal{A} \cdot \mathcal{P}x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi),$$

$$\psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (15)$$

де рівняння (12) та (14) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Алгоритм розв'язування відповідної крайової задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних представимо у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури (розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри);

перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (12) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (14) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму [2, 3] при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму.

Алгоритм числового розв'язання задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли

(φ_i, ψ_j) якої визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_{B_1} - \varphi_*) / (n_1 + 1), \\ \varphi_{B_1} + (i - n_1 - 1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{B_1}) / (n_2 + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^1 = j \cdot \Delta\psi_1, \quad j = \overline{0, m_1}, \Delta\psi_1 = Q_1 / m_1, (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\psi_j^2 = j \cdot \Delta\psi_2, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1}, \Delta\psi_2 = (Q_2 - Q_1) / m_2,$$

$$n = n_1 + n_2 + 1, \quad m = m_1 + m_2 + 1, \quad m_1, m_2, n_1, n_2 \in N. \quad \text{Рівняння} \quad (11)$$

апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [10] наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де} \quad a_e = \frac{(\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) (k_{i,j} + k_{i-1,j})}{4k_{i,j} k_{i-1,j} \Delta\varphi_+}, \quad a_n = \frac{(\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) k_{i,j} k_{i,j+1}}{\Delta\psi_+ (k_{i,j} + k_{i,j+1})},$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad a_w = \frac{(\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) (k_{i,j} + k_{i+1,j})}{4k_{i,j} k_{i+1,j} \Delta\varphi_-},$$

$$a_s = \frac{(\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) k_{i,j} k_{i,j-1}}{\Delta\psi_- (k_{i,j} + k_{i,j-1})}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w. \quad \text{Вибір} \quad \text{величин}$$

$\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{B_1}$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$.

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} x_{0,j} &= 0, \quad 0 \leq y_{0,j} \leq h, \quad j = \overline{0, m_1}, \\ y_{i, m_1} &= h, \quad 0 \leq x_{i, m_1} \leq d, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ x_{i, 0} &= d, \quad 0 \leq y_{i, 0} \leq a, \quad i = \overline{n_1 + 1, n}, \\ x_{i, m} &= d, \quad a + 2r \leq y_{i, m} \leq h - b - 2r, \quad i = \overline{0, n}, \\ x_{i, m_1 + 1} &= d, \quad h - b \leq y_{i, m_1 + 1} \leq h, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ y_{i, 0} &= 0, \quad 0 \leq x_{i, 0} \leq d, \quad i = \overline{0, n_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут, як і в [2, 9], комплексну спряженість функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) \cdot (x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) \cdot (x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \cdot (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (18)$$

Невідомі витрати Q_g ($g = \overline{1, 2}$) та значення потенціалу φ_{B_1} в точці розгалуження ліній течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{B_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^1, \quad Q_g = m_g \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{де } \gamma_i^g \text{ одержуємо на}$$

підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\overline{m}}^{n_1, \overline{m}-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g (n_1 + 1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\overline{m}}^{n, \overline{m}-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{\overline{k}_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad \overline{m}_g = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \quad \overline{m}_g = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1. \quad (19)$$

Рівняння (12) та (14) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [2] наступним чином:

$$\overline{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \overline{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} (f(s_{i,j}, T_{i,j}) - f(s_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (20)$$

$$\overline{p}_{i,j} = p_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \overline{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} (p_{i,j}(s_{i,j}, T_{i,j}) - p_{i,j}(s_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (21)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1 + 1}$, для $l = 1$, $i = \overline{n_1 + 2, n}$, для $l = 2$; τ – крок по часу, $p_{i,j}(s_{i,j}, T_{i,j}) = (\alpha f(s_{i,j}, T_{i,j}) + c_1 \rho_1) \cdot T_{i,j}$, $\overline{p}_{i,j} = (\alpha \overline{s}_{i,j} + \beta \overline{q}) \cdot T_{i,j}$, $\overline{p}_{i,j}^0 = (\alpha \overline{s}_{i,j} + \beta \overline{q}) \cdot T_{i,j}^0$; $s_{i,j}$, $\overline{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (шукаємо як і в роботі [2]). Граничну та початкову умови для насиченості та температури в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s^0(x_{i,j}, y_{i,j}),$$

$$\overline{p}_{0,j} = (\alpha s_* + \beta \overline{q}) \cdot T_*, \quad \overline{p}(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = (\alpha \overline{p} x_{i,j}, y_{i,j}) + \beta \overline{q} \cdot T^0(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_ω та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат

граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (17)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ знаходимо за формулами (19) наближення величин γ_i^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (16) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [2-4, 9], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g, φ_{B_i} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $v_{i,j}$ та поле насиченості $s_{i,j}$ і температури $T_{i,j}^0$ з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), знаходимо розподіл насиченості $\mathcal{S}_{i,j}$ у пласті на даному часовому етапі, згідно з (20), та, використовуючи (21), розраховуємо поле температури $T_{i,j}^0$, після чого перераховуємо поле швидкості і потенціалу.

Висновок. У роботі розвинуто методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатofазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу. На основі методів квазіконформних відображень

та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат. Цей алгоритм є підґрунтям для розв'язання більш складної задачі, а саме: задачі оцінки динаміки зміни зон прогріву пласта паром, коли мають місце фазові переходи породжені охолодженням та конденсацією пару.

4.2. Математичне моделювання термодинамічних ефектів у присвердловинній зоні газового пласта за умов гідравлічного розриву

У сучасних умовах недостатність ресурсної бази та низький рівень власного видобутку природного газу в Україні потребують ефективної розробки і дорозробки газових родовищ у складних геологічних умовах з низькопроникними колекторами, в тому числі сланцевих осадових породах.

Особливості будови сланцевих порід, низька проникність та умови знаходження газу вимагають врахування закономірностей його відтоку із систем тріщин і мікротріщин до свердловин. Цей процес, в результаті перетворення виконуваної газом роботи при переході із тріщин в мікротріщини і навпаки, супроводжується тепловиділенням і призводить до нерівноважного розширення газу. Окрім термодинамічних ефектів, спричинених таким рухом, доцільно також враховувати нелінійні ефекти у присвердловинних зонах пласта, породжених перевищенням величиною градієнта тиску свого деякого критичного значення [1]. Значний інтерес для теорії і практики розробки газових родовищ зі слабо структурованими та низькопроникними осадовими породами становить також дослідження зазначених ефектів за умов існування тріщин гідравлічного розриву пласта (ГРП).

У даній роботі на основі використання ідей числового методу квазіконформного відображення [2] та процедури поетапної фіксації характеристик середовища і процесу узагальнено запропоновану в [1] методологію математичного моделювання фільтраційно-масообмінних процесів у присвердловинній зоні з урахуванням термодинамічних ефектів на випадок існування тріщин ГРП, коли процес витіснення описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі з критичним градієнтом.

Розглянемо модельну задачу дослідження впливу тріщин ГРП на термодинамічні характеристики присвердловинної зони G_z пласта (рис. 1) із урахуванням дроселювання газу через мікротріщини сланцевої породи. Для математичної постановки задачі фільтрації газу через пористе середовище запишемо рівняння нерозривності у вигляді [1–3]

$$\operatorname{div} \left(\frac{\rho(p, T) k(x, y) \chi(I, I_{kr})}{\mu(p, T)} \operatorname{grad} p \right) = 0, \quad (1)$$

за відповідних умов на контурах пласта $p|_{L_*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$ ($p_* > p^*$) і умовах неперервності потоку та тиску на границях тріщин ГРП.

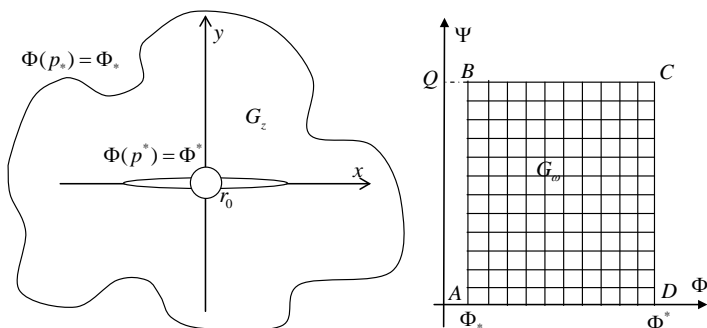


Рис. 1. Схема пласта з тріщиною ГРП (а) та відповідна область комплексного потенціалу (b)

Тут $I = I(x, y) = |\text{grad } p(x, y)| = \sqrt{(\partial p / \partial x)^2 + (\partial p / \partial y)^2}$ – величина градієнта тиску p ; $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – контур живлення та контур свердловини відповідно; $\rho = \rho(p, T)$, $\mu = \mu(p, T)$ – густина і в'язкість газу; T – температура; $k(x, y)$ – коефіцієнт абсолютної проникності середовища

$$k(x, y) = \begin{cases} k_\alpha, & (x, y) \in D_\alpha, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_\alpha D_\alpha; \end{cases}$$

D_α – ділянка пласта, що відповідає α -ій тріщині із проникністю k_α ($\alpha \in N$). Коефіцієнт χ характеризує залежність проникності осадової породи від величини градієнта тиску в ускладнених геологічних умовах фільтрації (для яких k/μ мала величина) і визначається таким співвідношенням

$$\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{ї } \delta \text{è } I > I_{kr}; \\ 1, & \text{ї } \delta \text{è } I \leq I_{kr}, \end{cases} \quad (2)$$

де F – задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Аналогічно [1, 4], нехтуючи теплопровідністю та адіабатичним ефектом, знаходимо температурне поле як розв'язок наступного диференціального рівняння

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y)(\text{grad } T(x, y, t) + \varepsilon \text{ grad } p(x, y)) = 0 \quad (3)$$

за відповідних початкових $T(x, y, 0) = T_0(x, y)$ і граничних $T(x, y, t)|_{L^*} = T_*$ умов. Тут ε – коефіцієнт Джоуля – Томсона;

$u(x, y, t) = -\frac{k\chi(I, I_{kr})\rho c}{\mu c_f} \text{grad } p$ – швидкість конвективного переносу тепла

в пласті; c, c_f – питомі теплоємності газу та насиченого ним пласта відповідно. Відзначимо, що всі наведені в роботі величини вимірюються в системі погоджених одиниць СІ.

Для побудови розв'язку задачі введемо потенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [5]

$$\Phi(p) = \Phi_* + \int_p^{p_*} \frac{\rho(\beta\Phi T)}{\mu(\beta\Phi T)} d\beta\Phi$$

та перепишемо відносно нього задачу (1) з урахуванням (2):

$$\begin{cases} \text{div}(k(x, y)\chi(\beta\Phi I_{kr}) \text{grad } \Phi) = 0, & v = \frac{k(x, y)\chi(\beta\Phi I_{kr})}{\beta\Phi} \text{grad } \Phi, \\ \Phi|_{L^*} = \Phi(p_*) = \Phi_*, & \Phi|_{L^*} = \Phi(p^*) = \Phi^*, & [\Phi]|_{\partial D_\alpha} = 0, & [v_n]|_{\partial D_\alpha} = 0, \end{cases}$$

(4)

де $\beta\Phi = \rho(p(\Phi))$, $\beta\Phi = \frac{\mu}{\beta\Phi} \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$,

$\Phi_* < \Phi^*$; $[\cdot]|_{\partial D_\alpha}$ – стрибок відповідної функції на ∂D_α .

При цьому задача теплопровідності (3) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y) \left(\text{grad } T(x, y, t) - \frac{\varepsilon\mu}{\beta\Phi} \text{grad } \Phi(x, y) \right) = 0, \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y), & T(x, y, t)|_{L^*} = T_*, \end{cases}$$

(5)

$$\text{де } u(x, y) = \frac{k(x, y) \chi(\mathcal{I}_{kr}^0) c}{c_f} \text{grad } \Phi(x, y).$$

Для розв'язання сформульованої задачі (4) і (5) використаємо числові методи комплексного аналізу, для цього, аналогічно до [2], введемо функцію течії Ψ , комплексно спряжену до Φ та здійснимо умовний переріз L області G_z вздовж лінії течії [2, 3]. При цьому задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ області $G_z \setminus L$ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу G_ω :

$$\begin{cases} \frac{k(x, y) \chi(\mathcal{I}_{kr}^0) \partial \Phi}{\beta \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{k(x, y) \chi(\mathcal{I}_{kr}^0) \partial \Phi}{\beta \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \Phi|_{L_-} = \Phi_*, \quad \Phi|_{L_+} = \Phi^*, \quad [\Phi]_{\partial D_\lambda} = 0, \quad [v_n]_{\partial D_\lambda} = 0, \quad \Psi|_{L_-} = 0, \quad \Psi|_{L_+} = Q; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y) \left(\text{grad } T(x, y, t) - \frac{\varepsilon \mu}{\beta \Phi} \text{grad } \Phi(x, y) \right) = 0, \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad T(x, y, t)|_{L_-} = T_*, \end{cases} \quad (7)$$

де L_- , L_+ – нижній та верхній береги розрізу L , $G_\omega = \{\omega : \Phi_* < \Phi < \Phi^*, 0 < \Psi < Q\}$, $Q = \oint_{L_-} v_y dx + v_x dy$ – невідомий дебіт свердловини.

Обернуто до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\Phi, \Psi) + iy(\Phi, \Psi)$ області G_ω на $G_z \setminus L$, а також, як наслідок,

рівняння для дійсної $x = x(\Phi, \Psi)$ і уявної $y = y(\Phi, \Psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\frac{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)}{\beta(\Phi)} \frac{\partial y}{\partial \Psi} = \frac{\partial x}{\partial \Phi}, \quad \frac{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)}{\beta(\Phi)} \frac{\partial x}{\partial \Psi} = -\frac{\partial y}{\partial \Phi}, \quad (8)$$

$$f_*(x(\Phi_*, \Psi), y(\Phi_*, \Psi)) = 0, \quad f^*(x(\Phi^*, \Psi), y(\Phi^*, \Psi)) = 0, \quad 0 \leq \Psi \leq Q, \quad (9)$$

$$x(\Phi, 0) = x(\Phi, Q), \quad y(\Phi, 0) = y(\Phi, Q), \quad \Phi_* \leq \Phi \leq \Phi^*, \quad (10)$$

$$\left[\frac{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)}{\beta(\Phi) J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \Psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \Psi} \right)^2} \cos(\underline{v}, \underline{n}) \right]_{\partial D_\alpha} = 0,$$

$$[x(\Phi, \Psi)]_{\partial D_\alpha} = [y(\Phi, \Psi)]_{\partial D_\alpha} = 0,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)}{\beta(\Phi)} \frac{\partial x}{\partial \Psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\beta(\Phi)}{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)} \frac{\partial x}{\partial \Phi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)}{\beta(\Phi)} \frac{\partial y}{\partial \Psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\beta(\Phi)}{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)} \frac{\partial y}{\partial \Phi} \right) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Використавши відповідні формули переходу [2], умови (8) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості, задачу для температури (7) перепишемо так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{c(\beta(\Phi)v)^2}{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)c_f} \frac{\partial T}{\partial \Phi} = \frac{c\mu\beta(\Phi)v^2}{k \chi(\mathcal{I}_{kr}^0)c_f},$$

$$T(x(\Phi_*, \Psi), y(\Phi_*, \Psi), t) = T_*, \quad 0 \leq \Psi \leq Q,$$

$$T(x(\Phi, \Psi), y(\Phi, \Psi), 0) = T_0(x(\Phi, \Psi), y(\Phi, \Psi)), \quad \Phi_* \leq \Phi \leq \Phi^*, \quad 0 \leq \Psi \leq Q, \quad (14)$$

де рівняння (13) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку із вузлами (Φ_i, Ψ_j) :

$$\Phi_i = \Phi_* + i \Delta\Phi, \quad \Psi_j = j \Delta\Psi,$$

де $\Delta\Phi = (\Phi^* - \Phi_*)/n$, $\Delta\Psi = Q/m$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $n, m \in N$. Рівняння (12) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [2] наступним чином:

$$\begin{cases} x_{i,j} = (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} = (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j}) / a_p, \end{cases}$$

$$(15)$$

де $x_{i,j} = x(\Phi_i, \Psi_j)$, $y_{i,j} = y(\Phi_i, \Psi_j)$, $a_p = a_n + a_s + a_e + a_w$,

$$a_n = \frac{2\Delta\Phi \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j} \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j+1}}{\left(\left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j} + \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j+1} \right) \Delta\Psi},$$

$$a_s = \frac{2\Delta\Phi \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j} \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j-1}}{\left(\left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j} + \left(\frac{k\chi(\mathcal{Y}; I_{kr})}{\mathcal{P}(\Phi)} \right)_{i,j-1} \right) \Delta\Psi},$$

$$a_e = \frac{2\Delta\Phi \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i,j} \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i-1,j}}{\left(\left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i,j} + \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i-1,j} \right) \Delta\Psi},$$

$$a_w = \frac{2\Delta\Phi \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i,j} \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i+1,j}}{\left(\left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i,j} + \left(\frac{k\chi(\mathcal{I}_{kr}^{\circ})}{\mathcal{I}(\Phi)} \right)_{i+1,j} \right) \Delta\Psi}.$$

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}. \end{cases}$$

(16)

Тут, як і в [2,3], комплексну спряженість функцій $x_{i,j} = x(\Phi_i, \Psi_j)$, $y_{i,j} = y(\Phi_i, \Psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області $G_z \setminus L$. Їх різницеві аналоги мають вигляд:

$$\begin{cases} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \\ (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, & j = \overline{0, m}. \end{cases}$$

(17)

Невідомий дебіт Q шукаємо в процесі ітерацій за формулою

$$Q = m\Delta\Psi, \quad \text{де} \quad \Delta\Psi = \frac{\Delta\Phi}{\gamma},$$

а γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності у малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i=0, j=0}^{n-1, m-1} \left(\frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}} \right) \left(\frac{\beta \phi \Phi}{k \chi (\rho I_{kr})} \right)_{i+1/2, j+1/2}, \quad (18)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$$

Рівняння (13) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [2] наступним чином:

$$\hat{T}_{i,j} = T_{i,j} - \left(\frac{c (\beta \phi \Phi) v^2}{k \chi (\rho I_{kr}) c_f} \right)_{i,j} \frac{(T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta \Phi} + \left(\frac{c \mu \beta \phi \Phi v^2}{k \chi (\rho I_{kr}) c_f} \right)_{i,j}, \quad (19)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$; τ – крок по часу, $T_{i,j}$, $\hat{T}_{i,j}$ – температура у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (шукаємо як і в роботі [2]). Граничну та початкову умови для температури в сітковій області запишемо так:

$$T_{0,j} = T_*, \quad j = \overline{1, m},$$

$$T(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = T_0(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n , m області G_ω (підбираються аналогічно як і в роботах [2,3]) та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (16)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$) знаходимо за формулами (19) наближення величини γ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (15) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [2], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови

ортогональності, та знаходимо наближені значення величин Q , χ , $\chi(\%I_{kr})$. Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є стабілізація: витрати Q ($|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon_1$), граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $v_{i,j}$ і поле температур $T_{i,j}$ з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), знаходимо розподіл температури у пласті на даному часовому етапі згідно з (19), після чого перераховуємо поле швидкостей і потенціалу.

Описаний алгоритм числового розв'язку поставленої задачі реалізовано у вигляді комп'ютерної програми для ІВМ РС/АТ. На рис. 2 показано гідродинамічну сітку з $\Phi = idem$ та $\Psi = idem$ у площинах xOy і розподіли градієнту потенціалу в круговому пласті з тріщиною ГРП (a) за умови, що тріщина моделюється областю $D_1 = \{(x, y) : x^2/50 + y^2/0.2 \leq 1\}$ із коефіцієнтом проникності $k_1 = 1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, та без неї (b) при вхідних даних із роботи [1]. У випадку не врахування ГРП отримані числові результати добре узгоджуються із результатами в [1].

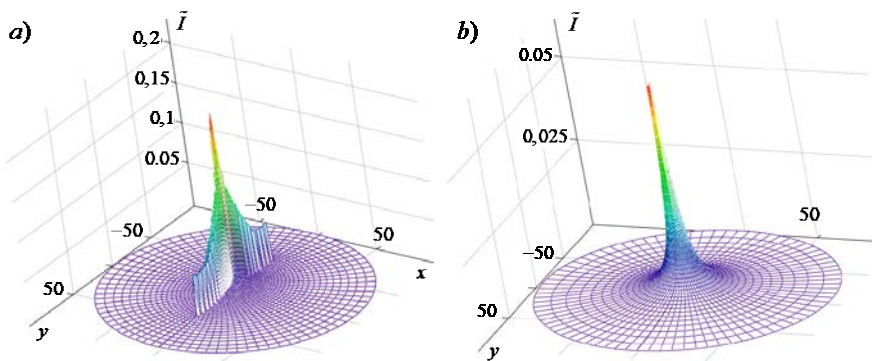


Рис. 2. Розподіл градієнту потенціалу в круговому пласті з тріщиною ГРП (a) та без неї (b)

Висновок

З використанням ідей числового методу квазіконформного відображення та процедури поетапної фіксації характеристик середовища і процесу запропоновано методологію математичного моделювання фільтраційно-масообмінних процесів у присвердловинній зоні пласта за умов існування в ній тріщин ГРП та урахування впливу термодинамічних ефектів, що виникають внаслідок дроселювання газу через мікротріщини сланцевої породи, коли процес витіснення описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі з критичним градієнтом тиску. Розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач на побудову гідродинамічної сітки, відшукування полів температури, фільтраційних характеристик тощо.

РОЗДІЛ 5

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У ВАЖКОПРОНИКНИХ ОСАДОВИХ ПОРОДАХ

У розділі встановлено особливості протікання процесу витіснення нафти із важкопроникних (зокрема, сланцевих) осадових порід з використанням дії енергії зарядів вибухових речовин та тріщин гідравлічного розриву пласта. На основі модифікованого закону Дарсі, шляхом введення критичного значення градієнта тиску та з використанням ідей методів комплексного аналізу, розроблено алгоритми числового наближення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач у горизонтальних і просторово-викривлених пластах.

5.1 Один метод комплексного аналізу розв'язування задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах

У роботах [1-3] запропоновано методіку розв'язання задач нестационарної багатофазної фільтрації, що базується на ідеях методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища та процесу у випадку, коли фільтрація є плоскопаралельною (пласти є досить тонкими і мають постійну товщину). Проте у природних умовах досить часто доводиться мати справу з просторово викривленими пластами змінної потужності, де окрім складності пов'язаної з проектуванням розстановки свердловин та дослідженням їх взаємодії, виникає також необхідність врахування перетоків між пропластками і величин відбору з кожного із них.

У цій роботі розширено розроблену методику дослідження фільтраційних процесів та побудовано підхід до розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення [1–3]. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат (ξ, η, ζ) , відносно якої отримано усереднені по координаті ζ рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

Загальна постановка задачі. Розглядається задача математичного моделювання процесу фільтрації (витіснення нафти підшвенною водою), породженого перепадом тиску $\Delta P = P_* - P^*$ на досконалих по ступеню і характеру розкриття пласта $G_i = A_* B_* C_* D_* A^* B^* C^* D^*$ експлуатаційних свердловинах L_i^* ($i = \overline{1, n^*}$) та контурі живлення $L_* = A_* A^* B_* B^* \cup B_* B^* C_* C^* \cup C_* C^* D_* D^* \cup D_* D^* A_* A^*$ (див., рис. 1 а). Відповідні закон руху та рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, z) = -p(x, y, z) + \gamma \kappa$ ($p(x, y, z)$ – тиск в точці (x, y, z) , $\gamma \kappa$ – деяке характерне його значення), згідно з [4] представимо у вигляді:

$$\vec{v} = \frac{\kappa \rho(x, y, z)}{\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa \rho(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa \rho(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa \rho(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

де k^i – коефіцієнт проникності ґрунту, v , μ – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості відповідно.

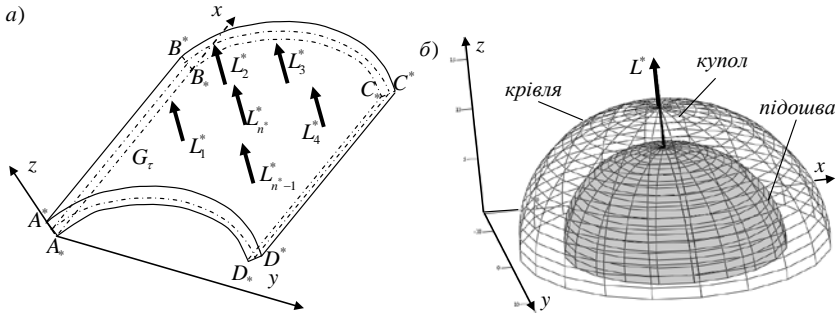


Рис. 1 – Пласт G_r (а), сферичний пласт (б)

При розв'язанні рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов виникають певні труднощі, в першу чергу, пов'язані з тривимірністю задачі та складністю геометрії пласта, одним із методів подолання яких є заміна дійсної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху. До таких схем варто віднести запропоновану в роботах [5–8] схему апроксимації реальної тривимірної фільтраційної течії течією по стаціонарних поверхнях струму, яка ґрунтується на ідеях переходу до криволінійних (ортогональних) координат ξ , η , ζ , у яких підшва $A_*B_*C_*D_*$ та кривля $A^*B^*C^*D^*$ пласта повинні співпадати з координатними поверхнями одного із трьох сімейств, наприклад, $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\xi = \xi_2 = const$, а закон Дарсі та рівняння нерозривності течії відносно цих координат мають вигляд:

$$\mathbf{r} = (v_\xi, v_\eta) = \left(\frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu H_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu H_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \quad (1)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_\eta)}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0. \quad (2)$$

Тут $k(\xi, \eta, \zeta) = k_x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)$ – коефіцієнт проникності ґрунту, $H_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}$, $H_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2}$, $H_\zeta = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2}$ – параметри Ламе, $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ – задані неперервно-диференційовані функції, що пов'язують фізичні декартові координати з введеними криволінійними (ξ, η, ζ) . Для спрощення викладок основної методики математичного моделювання фільтраційних процесів в просторово викривлених пластах розглядатимемо випадок сферичного пласта, що розробляється експлуатаційною свердловиною L^* , розташованою в його куполі (див., рис. 1 б), тоді мають місце наступні співвідношення: $H_\eta = R \left(1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi$, $H_\zeta = h$, $H_\xi = R \left(1 + \frac{\zeta h}{R} \right)$, $x(\xi, \eta, \zeta) = R \left(1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi \cos \eta$, $y(\xi, \eta, \zeta) = R \left(1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi \sin \eta$, $z(\xi, \eta, \zeta) = R \left(1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \cos \xi$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$, $0 \leq \xi \leq \pi$, $0 \leq \zeta \leq 1$, де R , h – відповідно радіус підшови та потужність пласта.

Підставляючи (1) в (2) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка при відповідних крайових умовах описує процес фільтрації (витіснення) у сферичному просторово викривленому пласті:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad (4)$$

$$\text{де } T(\xi, \eta) = \bar{k}(\xi, \eta) \sin \xi, \quad P(\xi, \eta) = \frac{\sin \xi}{\bar{k}(\xi, \eta)}, \quad \bar{k}(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k(\xi, \eta, \zeta) d\zeta;$$

$f_*(\xi, \eta) = 0, \quad f^*(\xi, \eta) = 0$ – рівняння проекцій свердловини та контуру живлення на координатну площину (ξ, η) відповідно, що визначають двозв'язну область G_z .

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$T(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad P(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (5)$$

при виконанні яких рівняння (3) перетворюється на тотожність. Система (5) визначає деяку функцію $\omega = \omega(z) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$, яка при виконанні умов:

$$\varphi \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \varphi \Big|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{L_-} = 0, \quad \psi \Big|_{L_+} = Q \quad (6)$$

здійснює квазіконформне відображення [1] фізичної області зміни координат (ξ, η) G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$, де Q – невідома фільтраційна витрата, L_-, L_+ – береги умовного розрізу області G_z вздовж деякої лінії $\eta = \text{const}$.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (5)-(6) на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z отримаємо у вигляді:

$$T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad P(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (7)$$

$$\begin{cases} f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, \\ f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, \\ \xi(\varphi, 0) = \xi(\varphi, Q), \\ \eta(\varphi, 0) = \eta(\varphi, Q), \end{cases} \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (8)$$

зокрема, як наслідок (7), маємо:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(P^{-1}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T^{-1}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (9)$$

$$P(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \partial G_\omega. \quad (10)$$

Різницевий аналог задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:

$\varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}$ при $i = \overline{0, n}$; $\psi_j = j\Delta\psi$, $\Delta\psi = \frac{Q}{m}$, $j = \overline{0, m}$, де $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття цієї області.

Рівняння (9) у внутрішності сіткової області G_ω , крайові умови (8) з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умовами ортогональності) (10) апроксимуємо так:

$$\eta_{i,j} = \frac{\gamma^2 (T_{i,j+0.5} \eta_{i,j+1} + T_{i,j-0.5} \eta_{i,j-1}) + P_{i+0.5,j} \eta_{i+1,j} + P_{i-0.5,j} \eta_{i-1,j}}{\gamma^2 (T_{i,j+0.5} + T_{i,j-0.5}) + P_{i+0.5,j} + P_{i-0.5,j}}, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$\xi_{i,j} = \frac{\gamma^2 (P_{i,j+0.5}^{-1} \xi_{i,j+1} + P_{i,j-0.5}^{-1} \xi_{i,j-1}) + T_{i+0.5,j}^{-1} \xi_{i+1,j} + T_{i-0.5,j}^{-1} \xi_{i-1,j}}{\gamma^2 (P_{i,j+0.5}^{-1} + P_{i,j-0.5}^{-1}) + T_{i+0.5,j}^{-1} + T_{i-0.5,j}^{-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, \quad f^*(\xi_{n,j}, \eta_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ \xi_{i,0} = \xi_{i,m}, \quad \eta_{i,0} = \eta_{i,m}, \quad i = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$T_{n,j} (\eta_{n,j} - \eta_{n-1,j}) (\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) + P_{n,j} (\xi_{n,j} - \xi_{n-1,j}) (\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
T_{0,j}(\eta_{1,j} - \eta_{0,j})(\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) + P_{0,j}(\xi_{1,j} - \xi_{0,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \\
T_{i,m}(\eta_{i+1,m} - \eta_{i-1,m})(\eta_{i,m} - \eta_{i,m-1}) + P_{i,m}(\xi_{i+1,m} - \xi_{i-1,m})(\xi_{i,m} - \xi_{i,m-1}) &= 0, \\
T_{i,0}(\eta_{i+1,0} - \eta_{i-1,0})(\eta_{i,1} - \eta_{i,0}) + P_{i,0}(\xi_{i+1,0} - \xi_{i-1,0})(\xi_{i,1} - \xi_{i,0}) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\text{де} \quad T_{i,j \pm 0.5} = \frac{T_{i,j \pm 1} + T_{i,j}}{2}, \quad P_{i,j \pm 0.5} = \frac{P_{i,j \pm 1} + P_{i,j}}{2}, \quad P_{i \pm 0.5,j} = \frac{P_{i \pm 1,j} + P_{i,j}}{2},$$

$$T_{i \pm 0.5,j} = \frac{T_{i \pm 1,j} + T_{i,j}}{2}, \quad T_{i,j} = \bar{k}_{i,j} \sin \xi_{i,j}, \quad P_{i,j} = \frac{\sin \xi_{i,j}}{\bar{k}_{i,j}}, \quad \bar{k}_{i,j} = \bar{k}(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}),$$

$\eta_{i,j} = \eta(\varphi_i, \psi_j)$, $\xi_{i,j} = \xi(\varphi_i, \psi_j)$, $\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}$ - квазіконформний інваріант.

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1, m-1} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \sqrt{(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j})^2 + (\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j})^2}, \\
\beta_{i,j} &= \sqrt{T_{i,j}^2 (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j})^2 + P_{i,j}^2 (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})^2}.
\end{aligned}$$

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (7) – (10) різницевою задачею в загальному випадку побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності, а саме: задавши геометричну конфігурацію сферичного пласта та ввівши криволінійні координати (за наведеними вище формулами) переходимо до області зміни координат (ξ, η) G_z .

Після цього задаємо кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m), параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 . Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (12), та наближення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки i , використовуючи (14), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати $Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}$. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів

$(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$ за формулами (11) (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (13). Використовуючи значення квазіконформного інваріанту (14), знаходимо нове наближення величини Q . Якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(\xi_{i,j}^{(k)} - \xi_{i,j}^{(k-1)})^2 + (\eta_{i,j}^{(k)} - \eta_{i,j}^{(k-1)})^2}$ – зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію. Якщо $S > \varepsilon_2$, то переходимо до уточнення вузлів. Значення швидкості у вузлах гідродинамічної сітки знаходимо аналогічно [1–7].

Висновки. Розроблено метод розв’язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема,

розробленого числового методу квазіконформного відображення. Варто відзначити, що розроблена методика дозволяє встановити час прориву підшвенних вод до експлуатаційних свердловин та час повного обводнення пласта.

У перспективі дослідження – узагальнення запропонованої методології на випадки просторових пластів, які розробляються серією експлуатаційних та нагнітальних свердловин, розташованих певним регулярним чином, за умов існування в присвердловинних ділянках тріщин гідророзриву.

5.2 Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-викривлених пластах

У попередніх параграфах модифіковано методи комплексного аналізу, на випадок моделювання нелінійних процесів витіснення в горизонтальних нафтових важкопроникних середовищах за умов збурень фільтраційної течії тріщинами ГРП скінченної проникності. У даному параграфі узагальнено їх на випадок розв'язання крайових задач однофазної фільтрації у просторово-викривлених пластах [20-21, 147, 148].

Розглянемо процес однофазної ізотермічної фільтрації у просторово-викривленому пласті G_τ ($\tau = (x, y, z)$) обмеженої потужності, за умов збурення течії тріщинами ГРП скінченної проникності (рис. 4.7 а). Введемо апроксимацію тривимірної фільтраційної течії рухом по стаціонарних поверхнях струму в криволінійній (ортогональній) системі координат (ξ, η, ζ) таким чином, щоб рівняння непроникних підшви L_1 та кривлі L_2 пласта можна було записати у вигляді: $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\zeta = \zeta_2 = const$, відповідно. Як у [19] задамо неперервно-диференційовані функції: $x = X(\xi, \eta, \zeta)$, $y = Y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = Z(\xi, \eta, \zeta)$, що пов'язують її із

ортогональною (декартовою) системою координат, тоді рівняння решти поверхонь, обмежуючих фільтраційну область, представимо наступним чином: $A^*A_*B_*B^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f_*(\xi, \eta) = 0\}$ – контур нагнітальної свердловини, $D^*D_*C_*C^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f^*(\xi, \eta) = 0\}$ – контур експлуатаційної свердловини, $\underline{A^*A_*B_*B^*} = \{(\xi, \eta, \zeta) : f(\xi, \eta) = 0\}$ – зовнішня непроникна стінка.

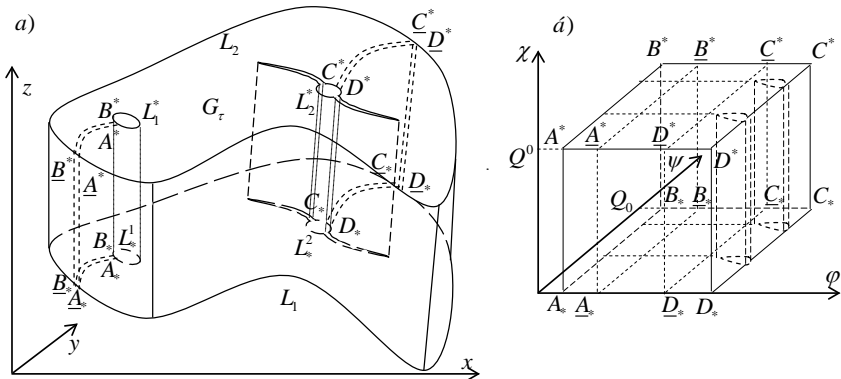


Рис. 4.7. Просторово-викривлений пласт (а) та відповідна область комплексного потенціалу (б)

Вважатимемо, що рух флюїду здійснюється по двовимірній поверхні $G_z = \xi + i\eta$ при $\zeta = const$. На основі міркувань, закладених у [19], спеціальним чином модифікований закон Дарсі (відносно критичного значення градієнту тиску) та рівняння нерозривності течії матимуть вигляд:

$$\dot{v} = -k\chi(I, I_{kr})\text{grad } p, \quad \text{div} \rho \dot{v} = 0,$$

за відповідних умов на контурах свердловин: $p|_{L_*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$

($p_* > p^*$) та зовнішньому непроникному контури $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_L = 0$. Тут

$I = I(\xi, \eta) = |\text{grad } p(\xi, \eta)| = \sqrt{p_\xi^2 + p_\eta^2}$ – величина градієнта тиску p ;

$\rho = \rho(p)$ – густина нафти; $k = k(\xi, \eta) = \begin{cases} k_l, & (\xi, \eta) \in G_Z^l, l = 1, 2, 3 \dots \\ k_0, & (\xi, \eta) \in G_Z \setminus \bigcup_l G_Z^l \end{cases}$ –

коефіцієнт абсолютної проникності середовища, де G_Z^l – ділянки пласта,

яку охоплює l -та тріщина; $\chi = \chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{ї } \delta \text{è } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{ї } \delta \text{è } I \leq I_{kr}, \end{cases}$

– коефіцієнт, що характеризує залежність проникності осадової породи від величини градієнта тиску, де F – задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [12]: $\varphi(p) = \varphi_* + k \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$ та перепишемо відносно нього рівняння (4.24) з відповідними крайовими умовами:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\chi(I_{kr})}{\rho(\varphi)} \text{grad } \varphi, \quad \text{div}(\chi(I_{kr}) \text{grad } \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = 0, \quad \varphi \Big|_{L_*} = \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^*, \quad (\varphi_* < \varphi^*),$$

$$(4.26)$$

$$[\varphi] \Big|_{\partial G_Z^l} = 0, \quad [v_n] \Big|_{\partial G_Z^l} = 0,$$

де $\rho(\varphi) = \rho(p(\varphi))$, $\chi = \frac{1}{k \rho(\varphi)} \sqrt{\varphi_\xi^2 + \varphi_\eta^2}$,

$[\bullet] \Big|_{\partial G_Z^l}$ – стрибок відповідної функції на контурі ∂G_Z^l .

Границя розділу R , двох різнокольорових рідин визначається наступним рівнянням з відповідними умовами [24-26]:

$$\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nu \cdot \text{grad} \zeta = 0, \quad \zeta_{L_0} = 1, \quad \zeta(\xi, \eta, t_0) = 0, \quad (4.28)$$

де σ – коефіцієнти пористості ґрунту.

Згідно з [37] задачу (4.25)-(4.28), в криволінійній системі координат (ξ, η, ζ) , запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta) &= \left(\frac{\chi(\mathcal{V}^0 I_{kr})}{\mathcal{P}(\varphi) H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\chi(\mathcal{V}^0 I_{kr})}{\mathcal{P}(\varphi) H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \\ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 \chi(\mathcal{V}^0 I_{kr}) \varphi_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 \chi(\mathcal{V}^0 I_{kr}) \varphi_\eta)}{\partial \eta} \right) d\zeta &= 0, \\ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(H_2 H_3 v_\xi \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_\eta \zeta)}{\partial \eta} \right) d\zeta &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{f(\xi, \eta)=0} &= 0, \quad \varphi \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad [\varphi] \Big|_{\partial G_\zeta^2} = 0, \\ [\nu_n] \Big|_{\partial G_\zeta^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\zeta \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \zeta_*, \quad \zeta \Big|_{t=0} = \mathcal{P}(\xi, \eta, \zeta),$$

де $H_1 = \sqrt{X_\xi^2 + Y_\xi^2 + Z_\xi^2}$, $H_2 = \sqrt{X_\eta^2 + Y_\eta^2 + Z_\eta^2}$, $H_3 = \sqrt{X_\zeta^2 + Y_\zeta^2 + Z_\zeta^2}$ – параметри Ламе.

Як у [19], підставляючи (4.29) у (4.30)-(4.31) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка при відповідних крайових та початкових умовах описує процес витіснення у просторово-викривленому пласті змінної товщини:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad U_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_5 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{де } U_1(\xi, \eta) &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\mathcal{Y}^0 I_{kr}) H_2 H_3 d\zeta, \quad U_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\mathcal{Y}^0 I_{kr}) H_1 H_3 d\zeta, \quad U_3(\xi, \eta) = \\ &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma H_1 H_2 H_3 d\zeta, \quad U_4(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta \chi(\mathcal{Y}^0 I_{kr}) H_2 H_3}{\mathcal{P}(\varphi) H_1} d\zeta, \quad U_5(\xi, \eta) = \\ &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta \chi(\mathcal{Y}^0 I_{kr}) H_1 H_3}{\mathcal{P}(\varphi) H_2} d\zeta \end{aligned}$$

– характеристичні коефіцієнти, що відповідають за

збереження інформації про геометрію та фільтраційні властивості пласта.

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_Z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (\xi_0^*, \eta_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (\xi_*^0, \eta_*^0) \in L$ та точками $A = B = (\xi_*, \eta_*) \in L_*$, $C = D = (\xi^*, \eta^*) \in L^*$, система (4.34) визначатиме деяку функцію $\omega = \omega(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$, яка при виконанні умов:

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} &= \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{AD} = 0, \quad \psi \Big|_{BC} = Q_0 \\ \nu(\xi_0^*, \eta_0^*) &= 0, \quad \nu(\xi_*^0, \eta_*^0) = 0 \end{aligned}$$

здійснює квазіконформне відображення фізичної області $G_Z^0 = G_Z \setminus (\tilde{A}_* \cup \tilde{A}^*)$ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0\}$, де Q_0 – невідома фільтраційна витрата.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (4.34)-(4.35) на квазіконформне відображення $\zeta = \zeta(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_Z отримаємо у вигляді:

$$, U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, (\varphi, \psi) \in G_\omega$$

$$f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, 0 \leq \psi \leq Q_0,$$

$$f(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0, f(\xi(\varphi, Q_0), \eta(\varphi, Q_0)) = 0, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\xi(\varphi, 0) = \xi(\varphi, Q), \eta(\varphi, 0) = \eta(\varphi, Q), \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*,$$

$$\left[\xi(\varphi, \psi) \right] \Big|_{\partial G_\omega^1} = \left[\eta(\varphi, \psi) \right] \Big|_{\partial G_\omega^2} = 0,$$

$$\left[\frac{\chi(\mathcal{P}_0 I_{kr})}{\mathcal{P}(\varphi) J} \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\underline{U}, \underline{n}) \right] \Big|_{\partial G_\omega^2} = 0,$$

$$v(\xi(\underline{\varphi}, \psi), \eta(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, v(\xi(\bar{\varphi}, \psi), \eta(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, 0 \leq \psi \leq Q_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_1} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = 0, \frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Використавши відповідні формули переходу,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad J = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \text{умови}$$

(4.36) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості

$$v_\xi = \frac{\chi(\mathcal{P}_0 I_{kr})}{J(\varphi, \psi) \mathcal{P}(\varphi) H_1} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}, \quad v_\eta = -\frac{\chi(\mathcal{P}_0 I_{kr})}{J(\varphi, \psi) \mathcal{P}(\varphi) H_2} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \quad \text{задачу для насиченості}$$

запишемо так:

$$U_3 J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) - U_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_3}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + U_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_2}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \right) = 0,$$

$$\zeta(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi), 0) = \mathfrak{B} \xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi),$$

$$\zeta(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi), \zeta(\varphi_*, \psi), t) = \zeta_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*.$$

Для запису різницевого аналогу задачі (4.36)–(4.43) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_l, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_l = \begin{cases} \varphi_* + i \Delta \varphi_l, \quad i \in \overline{0, n_1}, \quad \Delta \varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad l = 1, \\ \overline{\varphi} + (i - n_1 - 1) \Delta \varphi_l, \quad i \in \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad \Delta \varphi_l = \frac{\overline{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad l = 2, \\ \overline{\varphi} + (i - n_1 - n_2) \Delta \varphi_l, \quad i \in \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, \quad \Delta \varphi_l = \frac{\varphi^* - \overline{\varphi}}{n_3 + 1}, \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, \quad l = 3, \end{cases}$$

$$\psi_j = j \Delta \psi, \quad \Delta \psi = Q_0 / m, \quad j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta \varphi_l, \Delta \psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу двох середовищ з різними його значеннями, рівняння (4.41) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [199]. Метод скінченних

об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\mathcal{P}_{i,j+1/2}^0, I_{kr})(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})}{\beta\mathcal{K}\varphi_{i,j+1/2}} H_2 - \frac{\chi(\mathcal{P}_{i,j-1/2}^0, I_{kr})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})}{\beta\mathcal{K}\varphi_{i,j-1/2}} H_2 \right) + \\ & + \frac{\beta\mathcal{K}\varphi_{i+1/2,j}}{\chi(\mathcal{P}_{i+1/2,j}^0, I_{kr})} (\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}) - \frac{\beta\mathcal{K}\varphi_{i+1/2,j}}{\chi(\mathcal{P}_{i+1/2,j}^0, I_{kr})} (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) = 0, \\ & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\mathcal{P}_{i,j+1/2}^0, I_{kr})(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j})}{\beta\mathcal{K}\varphi_{i,j+1/2}} H_1 - \frac{\chi(\mathcal{P}_{i,j-1/2}^0, I_{kr})(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})}{\beta\mathcal{K}\varphi_{i,j-1/2}} H_1 \right) + \\ & + \frac{\beta\mathcal{K}\varphi_{i+1/2,j}}{\chi(\mathcal{P}_{i+1/2,j}^0, I_{kr})} (\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}) - \frac{\beta\mathcal{K}\varphi_{i-1/2,j}}{\chi(\mathcal{P}_{i-1/2,j}^0, I_{kr})} (\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}) = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & f_*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, f^*(\xi_{n,j}, \eta_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ & f(\xi_{i,0}, \eta_{i,0}) = 0, f(\xi_{i,m}, \eta_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2} \\ & \xi_{i,0} = \xi_{i,m}, \eta_{i,0} = \eta_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1 \cup n_1 + n_2, n}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (4\xi_{1,j} - 3\xi_{0,j} - \xi_{2,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) + (4\eta_{1,j} - 3\eta_{0,j} - \eta_{2,j}) \times \\ & \times (\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) = 0, (3\xi_{n,j} + \xi_{n-2,j} - 4\xi_{n-1,j})(\xi_{n,j+1} - \xi_{n,j-1}) + \\ & + (3\eta_{n,j} + \eta_{n-2,j} - 4\eta_{n-1,j})(\eta_{n,j+1} - \eta_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \right.$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \varphi_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j})}{2},$

$$\varphi_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j})}{2}, \quad \mathcal{P}_{i,j\pm 1/2}^0 = \frac{(\mathcal{P}_{i,j\pm 1}^0 + \mathcal{P}_{i,j}^0)}{2}, \quad \mathcal{P}_{i\pm 1/2,j}^0 = \frac{(\mathcal{P}_{i\pm 1,j}^0 + \mathcal{P}_{i,j}^0)}{2},$$

$$\mathcal{P}_{i,j}^0 = \frac{\mu \cdot \beta_{i,j}}{k \cdot J_{i,j} \cdot \beta\mathcal{K}(\varphi_{i,j}) \cdot \Delta\psi}.$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу $\underline{\varphi}$ та $\overline{\varphi}$ в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку

за формулами: $Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \beta\varphi_*^*}{1 + \beta\mathcal{P}^*}, \quad \overline{\varphi} = \frac{\varphi_*^* + \beta\varphi_*}{1 + \beta\mathcal{P}^0},$ де

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \delta\alpha = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\beta\alpha = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}. \text{ Величини квазіконформних інваріантів } \gamma_1$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\text{де } \gamma_{i,j} = \frac{\beta\alpha \varphi_{i+1/2, j+1/2}}{\chi(\beta\alpha_{i+1/2, j+1/2}, I_{kr})} \cdot \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{(\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j})}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Алгоритм наближеного розв'язку різницевого аналогу задачі (4.36)–(4.43) побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_1 , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [8], для аналітичного обґрунтування його збіжності. На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L , L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1 , n_2 , n_3 та m) та параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (4.46), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи

(4.48), знаходимо початкове наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_1^{(0)}$

та невідомих величин $Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}$,

$\underline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi_* + \delta\varphi^*}{1 + \delta\epsilon}$, $\overline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \beta\varphi_*}{1 + \beta\epsilon}$, де $\delta\epsilon = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}$,

$\beta\epsilon = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}$. Проводимо уточнення координат внутрішніх

вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (4.45)

відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього

процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій).

Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана

(4.47). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (4.48),

знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ϵ_1 , то повертаємося до уточнення вузлів.

Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення

вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ϵ_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку

оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого

відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1 , δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь

$$(4.34): \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\gamma\epsilon, I_{kr})}{\beta\epsilon\varphi_{i,j}} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\rho_{i,j}^0, I_{kr})}{\rho_{i,j}} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

Відзначимо, що розроблена методика дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової систем при спеціальних умовах впливу на неї, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин, зокрема, встановити положення точок «призупинки», в околі яких виникають зони малих швидкостей і, як наслідок, імовірність утворення так званих застійних зон, значення об'єму відбору нафти за час витіснення та її залишок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
2. Акульшин А.И. Прогнозирование разработки нефтяных месторождений / А.И. Акульшин. – М. : Недра, 1988. – 239 с.
3. Алишаев М.Г. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / М.Г. Алишаев, М.Д. Розенберг, Е.В. Теслюк. – М. : Недра, 1985. – 271 с.
4. Аметов И.М. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей / И.М. Аметов, Ю.Н. Байдилов, Л.М. Рузин и др. – М.: Недра. 1985. – 240 с.
5. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.
6. Астафьев В.И. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта / В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 128 – 132.
7. Ахмадишин Р.З. Особенности добычи высоковязкой нефти из малодебитных скважин / Р.З. Ахмадишин // Тр. БашНИПИнефть. – 1989. – Вып.80. – С. 95-104.
8. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1984. – 303 с.
9. Барсегян Р. М. Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах / Р. М. Барсегян. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1977. – 303 с.
10. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. И. Кочина, М. В. Максимов. – М. : Недра, 1993. – 416 с.

11. Басниев К.С. Нефтегазовая гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
12. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриенко, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2006. – 488 с.
13. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков – М. : Наука, 1987. – 451с.
14. Бойко В. С. Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений : учеб. по спец. "Разраб. и эксплуатация нефт. и газовых месторождений" / В С. Бойко. – М. : Недра, 1990. – 426 с.
15. Бойко В.С. Підземна гідрогазомеханіка: Підручник / В.С. Бойко, Р.В. Бойко. – Львів: Априорі, 2005. – 452 с.
16. Бомба А.Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двов'язних деформівних середовищах / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3–10.
17. Бомба А.Я. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький, В.В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2003. – Вип.1. – С. 126–135.
18. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
19. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу: монографія / А. Я. Бомба,

- С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
20. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: [монографія] / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне: ТЗОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.
 21. Бомба А. Я. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів / А. Я. Бомба, А. Я. Теробус // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2010. – Вип. 4. – С. 31-40.
 22. Бомба А. Я. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А. Я. Бомба, В. В. Скопецкий, С. В. Ярощак // Международный научно-технический журнал <Проблемы управления и информатики>. – 2010.– № 4. – С. 64–72.
 23. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення у деформівних середовищах / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. - Вип. 2. - С. 91–96.
 24. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34–40.
 25. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №2.– С. 3–13.
 26. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень

дослідження двофазної фільтрації в елементах заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Труды межд. школ-семинаров МДОЗМФ, вып. 8, изд. Орловского госуд. ун-та. – г. Орел, – 2010 – С. 20–28.

27. Бомба А. Я. Численный метод квазиконформных отображений решения одного класса нелинейных краевых задач двухфазной фильтрации / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы восьмой всероссийской конференции. – Казань : Казанский федеральный университет. – 2010. – С. 139–149.
28. Бомба А. Я. Застосування квазіконформних відображень до математичного моделювання процесів вибуху / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 33 – 43.
29. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40) С. 32 – 36.
30. Бомба А. Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, – 2012. – Вип.6. – С. 11 – 26.
31. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 9 (18). – Рівне : РДГУ,

2012. – С. 22 – 33.

32. Бомба А. Я. Метод комплексного анализа исследования двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидравлического разрыва / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Электронное моделирование. – 2013. – Т. 35, № 2. – С. 25–34.
33. Бомба А. Я. Один підхід до ідентифікації фільтраційно-емкісних параметрів нафтогазового пласта / А. Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ : ДДГУ, – 2013. – № 1(28). – С. 31–35.
34. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу дослідження процесу багатофазної фільтрації у випадку площадного заводнення за умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 10 (19). – Рівне : РДГУ, 2013. – С. 6 – 20.
35. Бомба А. Я. Комплексний аналіз поведінки системи «свердловини-тріщини-пласт» в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», 2013 – № 54 (1027) – С. 4 – 15.
36. Бомба А. Я. Математичне моделювання впливу тріщин гідравлічного розриву на інтенсифікацію відтоку газу з сланцевих осадових порід / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. АСУ», вип.10. – Харків: ХНУ, 2013. – № 1089. – С. 31 – 38.
37. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-маловикривлених пластах за умов впливу тріщин гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. - Вип.

20. – С. 36-49.

38. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах за умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Труды Международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2014)» - Харків: ХНУ ім. Каразіна, 2014. – с. 37-40.
39. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм з урахуванням ефекту гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Міжнародний науково-технічний журнал “Системні дослідження та інформаційні технології”. – Київ: НТУУ «КПІ», 2015р. – №1 – С.130-140.
40. Бомба А.Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах за умов гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // XVII Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – Львів, 2011. – С. 23.
41. Бомба А.Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // V Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Кам’янець-Подільський, 2012. – С. 19-20.
42. Бомба А. Я. Автоматизація методу квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин ГРП / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук // II Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів «Сучасні комп’ютерні

інформаційні технології» - Тернопіль : ТНЕУ, 2012. – С. 15.

43. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу математичного моделювання нелінійних процесів двофазної фільтрації з урахуванням впливу тріщин гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Міжнародна наукова конференція "Обчислювальна та прикладна математика" – Київ, 2012 р. – С. 38.
44. Бомба А.Я. Комп'ютерне моделювання нелінійних процесів витіснення у нафтогазових пластах / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // II Науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» – Львів, 2012. – С. 10-11.
45. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу при дослідженні та оптимізації параметрів нелінійних процесів витіснення нафти та газу з осадових порід / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» – Рівне, 2013. – С. 36.
46. Бомба А. Я. Числові методи комплексного аналізу моделювання нелінійних процесів витіснення нафти та газу із складно структурованих осадових порід / А. Я. Бомба, О. М. Гладка, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // 9 Міжнародна науково-практична конференція “Нафта і газ України – 2013” – Яремче: Українська нафтогазова академія, 2013. – С. 74 – 75.
47. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу дослідження двофазної фільтрації в горизонтальному однорідному пласті за умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Усеукраїнської наукової конференції «Математичне моделювання та математична фізика» – Кременчук: КНУ ім. М. Остроградського, 2013. – С. 42.
48. Бомба А.Я. Моделювання процесу неізотермічної фільтрації із

урахуванням впливу тріщин гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» – Рівне, 2015. – С. 35.

49. Брусиловский А. И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа / А.И. Брусиловский. – М.: Грааль, 2002. – 575 с.
50. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький // К.: Наук. Думка. – 2005. – 282 с.
51. Булыгин В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта / В.Я. Булыгин. –М.: Недра, 1978. – 230 с.
52. Булыгин Д. В., Булыгин В. Я. Геология и имитация разработки залежей нефти / Д.В. Булыгин, В.Я.Булыгин. – М.:Недра, 1996. – 382 с.
53. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
54. Вабищевич П.Н. Численное моделирование/ П.Н. Вабищевич. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 152 с.
55. Васильев В.И. Численное моделирование двухфазного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей / В.И. Васильев, Т.С. Тимофеева // Ученые записки ЯГУ. Сер. математика, физика. юбил. вып. – 1994. С. 51–62.
56. Васильев В.И. Численное решение задачи Баклея-Лeverетта / В.И. Васильев, Т.С. Тимофеева // Математические заметки ЯГУ. – Т.2, №1. – 1995. С. 110–119.
57. Винников В. А. Гидромеханика / В. А. Винников, Г. Г. Каркашадзе. – М.: Издательство Московского государственного университета, 2003. – 302 с.
58. Власов О.Е. О моделировании действия взрыва / О.Е. Власов,

- С.А. Смирнов // Взрывное дело. – М.: Недра, 1966. – Вып. 59. – С. 109-117.
59. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – К. : 1991. – 56 с. – (Препринт АН Украины. Ин-т математики, 91.57).
60. Габриелов Л.В. Анализ работы установок для подъема высоковязких нефтей при термических методах воздействия на пласт / Л.В. Габриелов // Тематич.научн.-технич.обзор: Сер. Нефтепромысловое дело. – М.: ВНИИОЭНГ,1988. – С.33.
61. Гайдуков Л.А. Влияние околоскважинных зон на продуктивность газовых скважин / Л.А. Гайдуков, Н.Н. Михайлов // Газовая промышленность. – 2008. – №6. – С. 31–33.
62. Газизов А.Ш. Повышение эффективности разработки нефтяных месторождений на основе ограничения движения вод в пластах / А.Ш. Газизов, А.А. Газизов. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 285 с.
63. Герольд С.П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин / С.П. Герольд. – М.-Л.: Нефтеиздат, 1932. – 256с.
64. Гимаев М. М. О решении оптимальных задач двухфазной фильтрации / М. М. Гимаев, Ф. М. Мухаметзянов, Ю. А. Теплов // Исслед. по подземн. гидромех. – Изд-во Казанского ун-та: Казань, 1979. – №3 – С. 21–35.
65. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. – М. : Высш. шк., 1972. – 368 с.
66. Гуревич А.Е. Давление пластовых флюидов / А.Е.Гуревич, М.С.Крайчик, Н.Б.Батыгина, А.И.Тимурзиев и др. – С.-Пб.: Наука. - 1987. – 218 с.

67. Данилов В.Л. Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения / В.Л. Данилов. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 108 с.
68. Данилов В.Л. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде / В.Л. Данилов, Р.М. Кац. – М. : Недра, 1980. – 264 с.
69. Дейк Л. П. Практический инжиниринг резервуаров / Л. П. Дейк. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 668 с.
70. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий – К. : Наукова думка, 1995. – 262 с.
71. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка, 2001. – 605 с.
72. Ентов В.М. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи / В.М. Ентов, А.Ф. Зазовский. – М. : Недра, 1989. – 232 с.
73. Ентов В.М. Стационарная фильтрация однородной жидкости в элементе разработки нефтяного пласта с трещиной гидроразрыва / В.М. Ентов, В.В. Мурзенко // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – № 1. – С. 104 - 112.
74. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений / Ю.П. Желтов. – М. : Недра, 1986. – 333 с.
75. Журавчак Л. М. Математичне моделювання розподілу пластового тиску з урахуванням фізичної неоднорідності пласта / Л. М. Журавчак , А. Є. Струк // Науковий вісник Івано-Франківського

національного технічного університету нафти і газу. – 2012. – №3. – С. 47-55.

76. Журавчак Л.М. Моделирование распределения давления в горизонтально-неоднородных ограниченных пластах с учетом различных типов граничных условий и количества скважин / Л. М. Журавчак, А. С. Струк // Разведка та розробка нафтових і газових родовищ: Всеукр. наук.-техн. журн. – Івано-Франківськ: Факел. – 2013. – №1. – С. 79-89.
77. Завовский А.Ф. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности / А.Ф. Завовский, Г.Т. Годуа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – № 4 – С. 107-116.
78. Закиров Э.С. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа / Э.С. Закиров, И.С. Закиров, М.Н. Баганова, А.В. Спиридонов. – М. : 2004. – 520 с.
79. Закиров С. Н. Проектирование и разработка газовых месторождений / С. Н. Закиров, Б. Б. Лапук. – М. : Недра, 1974. – 374 с.
80. Закиров С. Н. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа. Часть 2. / С. Н. Закиров, И.М. Индрупский, Э.С. Закиров и др. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 484 с.
81. Зайцев М.В. Фильтрация в техногенно измененных околоскважинных зонах и производительность скважин / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Георесурсы, геоэнергетика, геополитика.– 2010. – Вып. 2(2). – С. 1–20.
82. Зайцев М.В. Влияние околоскважинной зоны на продуктивность скважины / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Нефтяное хозяйство. – 2004, – № 1. – С. 64–66.

83. Иванов В. И. Конформные отображения / В. И. Иванов, В. Ю. Попов. – МГУ, УРСС, 2002. – 167 с.
84. Иванов С. И. Интенсификация притока нефти и газа к скважинам / С. И. Иванов. – М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 2006. – 565 с.
85. Івашенко А.П. Дослідження одномірного фільтраційного потоку в середовищах, що деформуються під дією градієнтів напору / А.П. Івашенко // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ. – Рівне, 1998. – С. 61–65.
86. Ильинский Н.Б. Об одной импульсно-гидродинамической модели взрыва на выброс / Н.Б. Ильинский. – ПМТФ, 1977, – № 2 – С. 115 – 120.
87. Ильинский Н.Б. Краевые задачи теории взрыва / Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев– Казань: Изд-во Казанского университета. – 1986. – 180с.
88. Кадет В.В. Фильтрация флюида в среде содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва / В.В. Кадет, В.И. Силяков // Изв. вузов. Нефть и газ.– 1988. – №5. – С. 54–60.
89. Каневская Р.Д. О проблемах мониторинга месторождений на поздней стадии разработки / Р.Д. Каневская, А.В. Потапова // Нефтяное хозяйство. Раздел «Геология и геолого-разведочные работы» - 2013. - № 4. – С. 218-233.
90. Каневская Р.Д. Опыт моделирования и мониторинга разработки нефтяного месторождения в условиях массового проведения гидроразрыва пласта / Р.Д. Каневская, С.Ю. Жучков // Технологии нефти и газа – 2011. – №4 (75). – С. 41-47.
91. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д. Каневская. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 128

с.

92. Каневская Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта / Р.Д. Каневская. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212

с.

93. Каневская Р. Д. Аналитические решения задач о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва и их использование в численных моделях фильтрации / Р.Д. Каневская // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 1996. – №6. – С. 69–80.

94. Клейдман Д.М. Расчет поля нефтенасыщенности при большом числе скважин / Д. М. Клейдман, Д. В. Шевченко // Матем. моделирование. – 2002. – т. 14. – №9. – С. 19–23.

95. Колдоба А.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной фильтрации / А. В. Колдоба, Е. В. Колдоба // Матем. моделирование. –2011. – т.23. – №1. – С. 65–80.

96. Колдоба А.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной многокомпонентной фильтрации / А.В. Колдоба, Е.В. Колдоба. – М. : Препринт ИПМ, 2008. – № 77. – 28 с.

97. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М. : Мир, 1964. – 350с.

98. Кондрат Р.М. Лабораторні дослідження інтенсифікації роботи свердловин з високов'язкими нафтами застосуванням теплового впливу на пластову продукцію і вуглеводневих розчинів / Р.М. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин, О.Р. Кондрат // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2004. - № 4(13). – С. 30-34.

99. Кондрат Р.М. Фізико-хімічний вплив на високов'язкі нафти з метою підвищення дебітів свердловин і попередження ускладнень у процесі їх експлуатації / Р.М. Кондрат, О.Р. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин //

Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2006. - № 2(14). – С. 49-55.

100. Кондрат Р.М. Удосконалення технології експлуатації свердловини з високов'язкими нафтами / Р.М. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин, О.Р. Кондрат, Л.Р. Смоловик // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2007. - № 1(15). – С. 27-34.
101. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А. Н. Коновалов. – Новосибирск : Наука, СО РАН, 1988. – 168 с.
102. Коновалов А. Н. О некоторых моделях фильтрации многофазных жидкостей / А.Н. Коновалов, В.Н. Монахов // Динамика сплошной среды. – 1976. – Вып.27. – С. 51–65.
103. Крэйг Ф. Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении / Ф. Ф. Крэйг. – М. : Недра, 1974. – 192 с.
104. Кривонос И.В. Расчет дебитов скважин с трещиноватой призабойной зоной пласта / И.В. Кривонос, И.А. Чарный // Нефтяное хозяйство. – 1955. - № 7. – С. 40-47.
105. Кричлоу Б. Г. Современная разработка нефтяных месторождений - проблемы моделирования / Б. Г. Кричлоу. – М. : Недра, 1979. – 305 с.
106. Крылов А. П. Научные основы разработки нефтяных месторождений / А.П. Крылов, М.М. Глоговский, М.Ф. Мирчинк, Н.М. Николаевский, И.А. Чарный. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
107. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. / В. М. Кузнецов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 264.
108. Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736с.
109. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1977. – 407 с.

- 110.Лаврик В. И. Математическое моделирование в гидроэкологических системах / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович – К. : Фитосоционтер, 1998. – 288 с.
- 111.Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В. И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин – К. : Наукова думка, 1990. – 374 с.
- 112.Логинов Б. Г. Гидравлический разрыв пласта / Б. Г. Логинов, В. А. Блажевич. – М.: Недра, 1966. – 148с.
- 113.Лысенко В.Д. Разработка малопродуктивных нефтяных месторождений / В.Д. Лысенко, В.И. Грайфер. – М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 2001. – 526 с.
- 114.Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К. : Наукова думка, 1973. – 264 с.
- 115.Ляшко И.И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И.И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1974. – 200 с.
- 116.Ляшко И. И Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. – К. : Наукова думка, 1977. – 288 с.
- 117.Максимов М.М. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений / М.М. Максимов, Л.П. Рыбицкая. – М. : Недра, 1976. – 264 с.
- 118.Марченко Н.А. Иерархия явно- неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации / Н.А. Марченко, А.Х. Пергамент, С.Б. Попов, В.А. Семилетов, П.Ю Томин. – М.: Препринт ИПМ, 2008. – № 97. – 17 с.
- 119.Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде /

- М. Маскет. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 628 с.
120. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти / М. Маскет. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 606 с.
121. Мирзаджанзаде А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
122. Михайлов В.В. Исследование двухфазной фильтрации в элементах площадного заводнения / В. В. Михайлов, А. Н. Чекалин // Исслед. по подземн. гидромех. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1987. – №9 – С. 115–133.
123. Монахов В.Н. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче / В.Н. Монахов, Б.Т. Жумагулов, Н.В. Зубов, Ш.С. Смагулов. – Алматы : Гылым, 1996. – 166 с.
124. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. / Р.И. Нигматулин – М. : Наука, 1972. – 464 с.
125. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. / Р.И. Нигматулин. – М. : Наука, 1987. – 360 с.
126. Никифоров А. И. Численное решение задачи прослеживания границы раздела двух жидкостей в неоднородном пласте / А. И. Никифоров // Исслед. по подземн. гидромех. – 1979. – Выпуск 3. – С. 63–68.
127. Никифоров А. И. Задача управления движением контура нефтеносности / А. И. Никифоров, В. Д. Чугунов // Исслед. по подземн. гидромех. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. – № 1 – С. 175–184.
128. Никифоров Г.А. Применение метода контрольных объемов для

- решения задач двухфазной фильтрации в переменных "скорость-насыщенность" / Г.А. Никифоров // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2006. – Т. 7. – № 1. – С. 224–228.
129. Николаевский В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 339 с.
130. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
131. Николаевский В.П. Движение углеводородных смесей в пористой среде / В.П. Николаевский, Э.А. Бондарев, М.И. Миркин и др.. – М.: Недра, 1968. – 189 с.
132. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2001.
133. Нифаптов А. В. Современное состояние математического моделирования пластовых систем / А. В. Нифаптов // Обз. инф. Сер.: Разработка газовых и газоконденсатных месторождений. – М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2004. – 80 с.
134. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод. Соб. сочинений в 2 т. / Н. Н. Павловский. –Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 771 с.
135. Пергамент А.Х. Двумерные задачи двухфазной фильтрации / А. Х. Пергамент, С. Б. Попов // Матем. моделирование. – 1998. – т.10. – №2. – С. 48–70.
136. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень – Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,

- Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. – 508 с.
- 137.Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664с.
- 138.П'янило Я.Д. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула, // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. –2006. –Вип. 4. –С. 69–77.
- 139.Радыгин В. М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов / В. М. Радыгин, О. В. Голубева. – М. : Высш. школа, 1983. – 160 с.
- 140.Салимьянов И.Т. Оценка эффективности гидравлического разрыва пласта на основе гидродинамических исследований вертикальных скважин / М. Х. Хайруллин, Р. С. Хисамов, М. Н. Шамсиев, П. Е. Морозов, Е. Р. Батертдинов, И. Т. Салимьянов // Нефтяное хозяйство. – 2009. - №7. – С. 56-59.
- 141.Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616с.
- 142.Сінчук А. М. Комплексне математичне моделювання нелінійних процесів витіснення з урахуванням включень / А. М. Сінчук // Вісник ТНТУ. – 2012. – № 4(68). – С. 209-219.
- 143.Скворцов Э. В. О движении границы раздела двух жидкостей в бесконечном пласте / Э. В. Скворцов // Уч. зап. КГУ. – 1967. – т. 127, кн. 5. – С. 44–48.
- 144.Таранчук В.Б. К анализу застойных зон вязкопластической нефти в пористой среде / В.Б. Таранчук // Численные методы решения задач фильтрации и оптимизации нефтедобычи. –Казань, 1990. – С. 107–113.
- 145.Телков А.П. Гидромеханика пласта применительно к задачам разработки нефтяных и газовых месторождений: учебное пособие. В 2

- ч. Ч. II / А.П. Телков, С.И. Грачёв. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. –352 с.
- 146.Толпаев В. А. Математическая модель линейного упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины / В. А. Толпаев, Д. В. Баско // Нефтепромысловое дело. – М.: ОАО "ВНИИОЭНГ", – 2008. – № 12. – С. 9–13.
- 147.Толпаев В. А. Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины / В. А. Толпаев, В. В. Палиев, Д. В. Баско // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2008. – №2. – С. 43–47.
- 148.Трапезникова М.А. Моделирование процесса нефтедобычи явными и неявными численными методами / М. А. Трапезникова, Н. Г. Чурбанова // Матем. моделирование – 1997. – т.9. –№6. –С. 53–66.
- 149.Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – М. : Мир, 1972. – 440 с.
- 150.Уолш М. Первичные методы разработки месторождений углеводородов / М. Уолш, Л. Лейк. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 672 с.
- 151.Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений / Р.Т. Фазлыев. – М. : Ижевск, ИКИ, НИЦ РХД, 2008. – 256 с.
- 152.Хайруллин М. Х. Гидродинамические методы исследования вертикальных скважин с трещиной гидроразрыва пласта. Монография / М. Х. Хайруллин, Р.С. Хисамов Р.С., М.Н. Шамсиев, Е.Р. Бадертдинова.– М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 84 с.
- 153.Халимов Э. М. Технология повышения нефтеотдачи пластов / Э. М. Халимов, Б. И. Леви, В. И. Дзюба, С. А. Пономарев. – М.: Недра,

1984. – 271 с.

154. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М. : Химия, 1982. – 320 с.
155. Хлапук М.М. Особливості моделювання нелінійних процесів фільтрації із зволожувача в середовище, що деформується / М.М. Хлапук // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ. – Рівне, 1998. – С. 151–157.
156. Холодовский С. Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) / С. Е. Холодовский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. № 7. – С. 1209-1213.
157. Холодовский С. Е. О фильтрации в слоистых средах с пересекающимися трещинами и завесами / С. Е. Холодовский // Докл. РАН. – 1994. – Т. 338. – № 5. – С. 622-624.
158. Чапля Є. Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128с.
159. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
160. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. – М. : Недра, 1965. – 238 с.
161. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. – М. : Недра, 1985. – 288с.
162. Шестерин Д.Е. Математическое моделирование продвижения двумерной границы разноцветных жидкостей в неоднородно-анизотропном грунте / Д.Е. Шестерин // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані

- системы управління». – 2007. – №780. – С. 186–192.
- 163.Шехтман Ю.М. Приток жидкости к горизонтальной трещине при конечной мощности пласта / Ю.М. Шехтман. – Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1961. – С.142-149.
- 164.Экономидес М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике / М. Экономидес, Р. Олини, П. Валько. – Ижевск, Изд-во «ИКИ», 2007. – 234 с.
- 165.Bangerth W. An automatic reservoir framework for the stochastic optimization of well placement / W. Bangerth, H. Klie, V. Matossian // Center for Subsurface Modeling, The University of Texas at Austin. – 2006. – P. 255–269.
- 166.Bittencourt A. C. Reservoir development and design optimization / A. C. Bittencourt, R.N. Home // SPE 38895. – 1997. – P.14.
- 167.Blanco E.R. Hydraulic fracturing requires extensive disciplinary interaction / E.R. Blanco // Oil and Gas J. –1990. – № 12. – P. 112–118.
- 168.Bomba A. Complex mathematical modeling of nonlinear processes of displacement considering inclusions / A. Bomba, A. Sinchuk, S. Yaroshchak // VIII International Conference POROUS MATERIALS. Theory and Experiment (INTERPOR'12) – L'viv, 2012. – С. 21-22.
- 169.Briggs P.J. Development of heavy-oil reserves / P.J. Briggs, R.P. Baron, R.J. Fulleylove, M.S. Wright // J.Petrol.Technjl. – 1988. – Vol.40.numb.2. – P.206 -214.
- 170.Buckley S. Mechanism of fluid displacement in sands / S Buckley, M.C. Leverett // Trans. AIME.– 1942. – V. 146. – P. 107–116.
- 171.Carlson M. Practical Reservoir Simulation / M. Carlson // PennWell. – 2003. – 540 p.
- 172.Chen C.-C. Modeling a fractured well in a composite reservoir / C.-C. Chen, R. Raghavan // SPE Form. Eval.– 1995.– V. 10.– № 4.– P. 241–246.

173. Chu W. A new model for a fractured well in a radial composite reservoir / W. Chu, G.D. Shank // SPE Form. Eval.– 1993. – V. 8.– № 3.– P. 225–233.
174. Cinco-Ley H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods / H. Cinco-Ley // SPE Form. Eval. – 1982. – V. 4.– № 1.– P. 25–33.
175. Currie I. G. Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I. G Currie. – Marcel Dekker, Inc., New York, – 2003. – 525 p.
176. Dahi-Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures, PhD Dissertation, University of Texas at Austin, pp. 216, 2009.
177. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
178. Das D.B. Upscaling Multiphase Flow in Porous Media From Pore to Core and Beyond / D.B. Das, S.M. Hassanizadeh. // Springer. – 2005. – 257 p.
179. Dilts G.A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics II: conservation and boundaries / G. A. Dilts // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – 48(10). – P. 1503 – 1524.
180. Dupuit J. Etudes theoretiques et pratiques sur le mouvement des eaux / Dupuit J. – 1863. – 247 p.
181. Economides M.J. Reservoir Stimulation / M.J. Economides, K.G. Nolte. – Englewood Cliffs: New Jersey. – 1989.– 430 p.
182. Elbel J.L. Considerations for optimum fracture geometry design / J.L. Elbel // SPE Prod. Eng.– 1988.– V. 3.– № 3.– P. 323–327.
183. Geertsma J. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. de Klerk // J. Petrol. Technol. – 1969. – № 12.– P. 1571–1581.

184. Guyaguler B. Optimization of well placement and assessment of uncertainty. A dissertation for the degree of doctor of philosophy / B. Guyaguler. – Stanford University, 2002. – 137 p.
185. Haber S. Boundary Conditions for Darcy's Flow Through Porous Media / S. Haber, R. Mauri // *J. Multiphase Flow.* – 1983. – 9, №5. – P. 561–574.
186. Hoteit H. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures / H. Hoteit, A. Firoozabadi // *Advances in Water Resources.* – 2008. – Volume 31, Issue 1. – P. 56–73.
187. Lacy L.L. Comparison of hydraulic-fracture orientation techniques / L.L. Lacy // *SPE Form. Eval.* – 1987. – V. 2. – № 1. – P. 66–76.
188. Malekzadeh D. Analysis of pressure behaviour of hydraulically fractured vertical wells by the effective hydraulic fracture length concept / D. Malekzadeh, F.U. Khan, J.J. Day // *J. Canad. Petrol. Technol.* – 1996. – V. 35. – № 3. – P. 36–43.
189. Meehan D.N. Optimization of fracture length and well spacing in heterogeneous reservoirs / D.N. Meehan // *SPE Prod. and Fac.* – 1995. – V. 10. – № 2. – P. 82–88.
190. Nield D.A. Convection in porous media / D.A. Nield, A. Bejan. – Springer, 2006. – 653 p.
191. Perkins T.K. The effect of thermoelastic stresses on injection well fracturing / T.K. Perkins, J.A. Gonzalez // *Soc. Petrol. Eng. J.* – 1985. – V. 25. – № 2. – P. 78–87.
192. Perkins T.K. Widths of hydraulic fracturing / T.K. Perkins, L.R. Kern // *J. Petrol. Technol.* – 1961. – № 9. – P. 937–949.
193. Prats M. Effect of vertical fractures on reservoir behavior – incompressible fluid case / M. Prats // *Soc. Petrol. Eng. Journal.* – 1961. – V. 1. – № 2. – P. 105–118.

194. Rappoport L.A. Properties of linear waterfloods / L.A. Rappoport, W.I. Leas // Trans. AIME. – 1953. – Vol.198. – P.139-148.
195. Roupert R. Construction of three-phase data to model multiphase flow in porous media: Comparing an optimization approach to the finite element approach / R. Roupert, G. Schäfer, P. Ackerer // Comptes Rendus Geoscience. – 2010. – Volume 342, Issue 11. – P 855-863.
196. Thompson J.F. Numerical Grid Generation / J.F. Thompson, Z.A. Warsi, C.W. Mastin // Foundation and Applications. – New York: Elsevier, 1985. – 931 p.
197. Vafai K. Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor & Francis Group, 2005. – 747 p.
198. Versteeg H. K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera - Longman Scientific & Technical. New York, 1995. - 267 c.
199. Whitaker. S. Advances in theory of fluid motion in porous media / S. Whitaker // Indust. and Engineering Chemistry. – 1969, №. 12. – p. 14-28.
200. Zaitsev M.V. Effect of residual oil saturation on the flow through a porous medium in the neighborhood of an injection well / M.V. Zaitsev, N.N. Mikhailov // J.Fluid Dynamics. – 2006. – vol.41. – №4 – p.568-573
201. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (CSE) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. - 531 pp.

Наукове видання

*Бомба Андрій Ярославович
Сінчук Алєся Михайлівна
Яроццак Сергій Вікторович*

Назва монографії

Монографія

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку **25.03.2013р.** Формат 60×90 1/16
Папір друкарський №1. Гарнітура Times New Roman. Друк різнографічний.
Ум.-друк.арк. 16,0. Обл.-вид.арк. 16,8.
Тираж 300 прим. Зам. № 2124.

Видавець і виготовлювач
Редакційно-видавничий центр
**Національного університету водного
господарства та природокористування
33028, Рівне, вул.Соборна, 11.**

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції РВ №31 від 26.04.2005р.