

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО-
ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ
ФІЛЬТРАЦІЯ-КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ

МОНОГРАФІЯ

Рівне
ТзОВ фірма «Ассоль»
2014

УДК 517.95:519.63:532.5

ББК 22.161.68

Б 80

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Рівненського державного гуманітарного університету
(протокол № 2 від 26 вересня 2014 р.)*

Відповідальний редактор:

Р. М. Кушнір, д.ф.-м.н., проф., член-кореспондент НАНУ, директор Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Рецензенти:

Є. О. Севостьянов, д.ф.-м.н., старший науковий співробітник Інституту прикладної математики і механіки НАН України (м. Донецьк);

О. Ю. Чернуха, д.т.н., старший науковий співробітник, завідувач відділом математичного моделювання нерівноважних процесів Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів);

А. П. Власюк, д.т.н., проф., завідувач кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. академіка Степана Дем'янчука (м. Рівне);

А. О. Сяський, д.т.н., проф., професор кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Бомба А. Я.

Б 80 **Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: [монографія] / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне : ТЗОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.**

ISBN 978-966-87-84-11-8

Монографія присвячена математичному моделюванню просторових сингулярно-збурених процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у водонасичених недеформівних пористих середовищах. У роботі розроблено ефективну методику розв’язання сингулярно-збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними для модельних складної геометрії одно- і двозв’язних областей, обмежених еквіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. Розроблену методику у монографії узагальнено на випадки дослідження просторових процесів розповсюдження забруднюючих речовин у водонасичених недеформівних пористих середовищах із врахуванням багатокомпонентності забруднюючих речовин та багат шаровості середовища. Орієнтована на спеціалістів з математичного моделювання та обчислювальних методів, аспірантів, дипломників, студентів старших курсів, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

УДК 517.95:519.63:532.5

ББК 22.161.68

Б 80

© Бомба А. Я., Климюк Ю. Є., 2014

© Рівненський державний

гуманітарний університет, 2014

ISBN 978-966-87-84-11-8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ВОДОНОСНИХ СИСТЕМАХ	9
1.1. Характеристика водоносної системи та умов геофільтрації	10
1.2. Механізми міграції, характеристика міграційних процесів	14
1.3. Процеси фізико-хімічних перетворень речовини в підземних водах	21
1.4. Математичне моделювання процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у пористих середовищах	25
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	35
2.1. Просторові аналоги крайових задач на конформні і квазіконформні відображення для одношарових модельних областей, числові методи їх розв’язування (прогнозування просторових ідеальних та квазіідеальних полів)	36
2.1.1. Постановка модельних задач на знаходження просторових аналогів конформних і квазіконформних відображень	36
2.1.2. Алгоритм числового розв’язання задачі на знаходження просторового аналогу конформного відображення криволінійного паралелепіпеда на відповідний прямокутний	42
2.1.3. Модифікація алгоритму для випадку параметричного задання поверхонь криволінійного паралелепіпеда	48
2.1.4. Алгоритм числового розв’язання задачі на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення криволінійного паралелепіпеда на відповідний прямокутний	54
2.1.5. Модифікація алгоритмів для випадку одношарових двозв’язних областей, обмежених двома екіпотенціальними або квазіекіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії	61
2.1.6. Узагальнення алгоритмів для випадку одношарових двозв’язних областей, обмежених двома екіпотенціальними або квазіекіпотенціальними поверхнями	65

2.1.7. Постановка задачі і реалізація алгоритму її числового розв'язання для випадку однозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії	68
2.1.8. Побудова полів швидкостей у ізотропних пористих середовищах – одно- та двозв'язних модельних областях, обмежених еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії	70
2.1.9. Побудова квазіідеальних полів швидкостей у анізотропних пористих середовищах	82
2.1.10. Результати числової реалізації розроблених алгоритмів	93
2.2. Розв'язування просторових аналогів крайових задач на кусково-конформні відображення для багат шарових кусково-однорідних модельних областей	104
2.2.1. Постановка задачі і алгоритм її числового розв'язання для випадку двошарових кусково-однорідних однозв'язних областей	104
2.2.2. Реалізація алгоритму числового розв'язування у випадку двошарових кусково-однорідних двозв'язних областей	111
2.2.3. Прогнозування просторових процесів фільтрації рідин у багат шарових кусково-однорідних однозв'язних пористих середовищах	114
2.2.4. Прогнозування просторових процесів фільтрації рідин у багат шарових кусково-однорідних двозв'язних пористих середовищах ...	124
2.2.5. Тестові приклади	127
РОЗДІЛ 3. ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ПРОЦЕСИ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ .	136
3.1. Прогнозування просторових процесів поширення забруднюючих речовин у одношарових пористих середовищах	137
3.1.1. Математичне моделювання просторових процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах, що описуються сингулярно-збуреними задачами конвективної дифузії	137
3.1.2. Просторові нелінійні сингулярно-збурені крайові задачі із врахуванням сумарного зворотного впливу величин концентрацій забруднюючої речовини на коефіцієнт дифузії	152

3.1.3. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових нелінійних сингулярно-збурених крайових задач типу конвективної дифузії при многочленній залежності коефіцієнта дифузії від величин концентрацій	157
3.1.4. Математичне моделювання просторових нелінійних процесів конвективної дифузії із запізненням	160
3.1.5. Побудова числово-асимптотичного наближення розв'язків просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії для двозв'язних областей фільтрації	167
3.1.6. Дослідження просторових процесів поширення багатоконпонентних забруднюючих речовин фільтраційною течією у пористих середовищах	173
3.1.7. Просторові сингулярно-збурені крайові задачі в анізотропних середовищах	182
3.1.8. Результати числових експериментів	185
3.2. Математичне моделювання процесів масопереносу забруднюючих речовин у кусково-однорідних пористих середовищах	189
3.2.1. Просторові сингулярно-збурені процеси конвективної дифузії у двошарових кусково-однорідних пористих середовищах	189
3.2.2. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії для двозв'язних кусково-однорідних областей фільтрації	212
3.2.3. Дослідження просторових процесів поширення багатоконпонентних забруднюючих речовин фільтраційною течією у двошарових кусково-однорідних пористих середовищах	220
3.2.4. Просторові сингулярно-збурені процеси конвективної дифузії у багатошарових кусково-однорідних пористих середовищах	232
3.2.5. Результати числових експериментів прогнозування процесів масопереносу забруднюючих речовин у кусково-однорідних пористих середовищах	253
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	256

ПЕРЕДМОВА

Як показує практика, погіршення якості підземних вод, зокрема, ґрунтових, вносить свій суттєвий вплив на загальний стан поверхневих вод, а, отже, й на стан навколишнього середовища та на здоров'я самих людей. Тому вживання заходів щодо запобігання попаданню забруднюючих речовин у підземні води й ґрунтові потоки є останнім часом предметом досліджень багатьох вітчизняних та закордонних вчених.

Важливе місце в цих дослідженнях займають методи математичного моделювання, які дають змогу отримати відповіді на чимало запитань. На сьогоднішній день при дослідженні процесів міграції забруднюючих речовин у водовмісних пористих середовищах актуальною проблемою є врахування у повній мірі всіх найбільш вагомих внутрішніх взаємовпливів між їх складовими, чимало з яких носять просторовий характер. Для цього необхідно якомога детальніше розглядати внутрішню природу цих процесів і виявляти у такий спосіб усі фізичні аспекти взаємодій та всю гамму функціональних зв'язків між основними елементами і визначальними параметрами системи. При цьому виникає чимало труднощів, пов'язаних із врахуванням повздовжніх і поперечних викривленостей області, в якій шукається розв'язок, складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач.

Монографія присвячена математичному моделюванню просторових сингулярно-збурених процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у водонасичених недеформівних пористих середовищах у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними. У роботі розроблено ефективну методику розв'язання просторових сингулярно-збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія” для модельних складної геометрії одно- і двозв'язних областей, обмежених екіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, яка полягає у наступному: поетапній фіксації характеристик і складових процесу та середовища; розв'язанні задач фільтрації з використанням просторових аналогів конфор-

мних або квазіконформних відображень області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу на фізичну область (що включає побудову гідродинамічної сітки, поля швидкостей, обчислення величин різних перетоків тощо); переході у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелювання обчислень; розв'язанні задач конвективної дифузії з використанням числово-асимптотичних методів.

Розроблену методику у монографії узагальнено на випадки дослідження просторових процесів розповсюдження забруднюючих речовин у водонасичених недеформівних пористих середовищах із врахуванням: багатоконпонентності забруднюючих речовин; анізотропних властивостей середовища, коли коефіцієнти фільтрації і дифузії є тензорами; багат шаровості середовища, коли кожен шар характеризується власними коефіцієнтами фільтрації, дифузії і пористості.

Для кращого сприйняття матеріалу у першому розділі проведено огляд літературних джерел стосовно математичного моделювання міграційних процесів речовин у водовмісних пористих середовищах та методів розв'язування відповідних крайових задач.

У другому розділі монографії сформульовані просторові аналоги обернених крайових задач теорії фільтрації на конформні, квазіконформні і кусково-конформні відображення та наведено числові алгоритми їх розв'язування, які дозволяють автоматично вирішувати проблему вибору вузлів розрахункових гідродинамічних сіток для одношарових одно- і дво- зв'язних модельних областей, обмежених екіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, та дво- або багат шарових одно- зв'язних модельних областей, обмежених екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії і розділеними відповідно однією або кількома заданими екіпотенціальними поверхнями на дві або кілька підобластей, кожна з яких характеризується власними коефіцієнтами фільтрації і активної пористості. У розділі отримано формули для обчислення фільтраційної витрати,

різного роду перетоків, побудови ідеальних та квазіідеальних фільтраційних полів тощо.

У третьому розділі розвинуто ефективний числово-асимптотичний метод розв'язування просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії у випадку переважання конвективних процесів над дифузійними для одношарових одно- і двозв'язних модельних областей, обмежених еквіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, при сталому коефіцієнті дифузії, урахуванні многочленної та інтегральної залежностей величин коефіцієнта дифузії від величин шуканої концентрації забруднюючої речовини, а також врахуванні запізнення в часі. Отримано розв'язки сформульованих задач при заданні різного характеру конвективно-дифузійного підведення і відведення забруднюючої речовини, як наявності, так і відсутності бічних джерел забруднення. Водночас розвинуто числово-асимптотичний метод розв'язування просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії з розривними коефіцієнтами для кусково-однорідних модельних областей, а саме: отримано нового типу поправки в асимптотичних розкладах розв'язків, що характеризують механізм конвективно-дифузійного перерозподілу концентрацій в околах ділянок розділу шарів.

Відповідну методику узагальнено на випадок урахування багатокомпонентності забруднюючої речовини з урахуванням масообмінних процесів між компонентами системи.

Комплексними дослідженнями показано, що запропоновані просторові математичні моделі для дослідження процесів міграції забруднюючих речовин у водонасичених недеформівних пористих середовищах і алгоритми розв'язання відповідних просторових сингулярно-збурених крайових задач є ефективними для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію такого параметра процесу масопереносу як час забруднення досліджуваних ділянок області у випадках переважання конвективних складових відповідного процесу над дифузійними, що спостерігається в переважній більшості практичних досліджень.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ВОДОНОСНИХ СИСТЕМАХ

На сучасному етапі розвитку суспільства як ніколи гостро перед людством постала величезна кількість проблем. Найактуальніші з них – екологічні проблеми, що існують на всіх континентах. Вони потребують негайного вирішення та спільних зусиль усіх держав і народів світу [154]. Їх причина криється в інтенсивному розвитку науки і техніки, що спричинила виникнення великої кількості різноманітних виробництв, де використовуються найсучасніші технології. Складність технологічних процесів привела до виникнення ситуацій, які почали завдати непоправної шкоди навколишньому середовищу. Тому першочерговою задачею сучасності стало запобігання екологічним негараздам та зменшення наслідків, до яких може призвести або вже призвела їх поява. Зокрема, однією з найактуальніших проблем є захист родючих ґрунтів та підземних вод від забруднень.

Усі ґрунтові води знаходяться в безперервному русі, який підпорядковується силі тяжіння та проявляється у вигляді потоків, що циркулюють по сполучених порах або тріщинах. При цьому природні фільтраційні потоки здатні переносити як наявні, так і потрапляючі у них забруднення на великі відстані, у результаті чого утворюються великі ореоли забруднень. Саме тому вивчення можливих джерел та шляхів попадання забруднень в ґрунтові води, а також збереження якості води в підземних потоках, є останнім часом предметом досліджень багатьох вітчизняних та закордонних вчених, серед яких: С. Ф. Авер'янов, Ф. М. Бочевер, М. М. Верігін, М. М. Гіроль, В. І. Лаврик, І. І. Ляшко, Г. Є. Мистецький, В. М. Ніколаєвський, С. М. Нумеров, О. Я. Олійник, Г. Є. Орадовська, А. М. Патрашев, В. Л. Поляков, Ж. Фрід, Б. С. Шержуков та інші [2, 25, 26, 39–41, 48, 50, 54, 64, 65, 89, 96–98, 106, 113, 120, 121, 123–125, 128, 129, 166, 171, 178].

Отже, прояви сучасного розвитку суспільства та необхідність нейтралізації їх впливу на стан навколишнього середовища ставлять перед

наукою нові, з кожним роком все більш складні задачі з розробки, прогнозування та контролю якості водних ресурсів. Так, у моделях необхідно враховувати все у більш повній мірі найбільш вагомими внутрішні взаємовпливи між основними елементами і визначальними параметрами системи, які раніше ігнорувалися або були несуттєвими. Тому цей розділ присвячено огляду літературних джерел, що стосуються дослідження та математичного моделювання міграційних процесів у водоносних системах.

1.1. Характеристика водоносної системи та умов геофільтрації

Як зазначено у [143], підземні води представляють собою розчини, які містять, в залежності від геохімічної обстановки, практично всі елементи періодичної таблиці Менделєєва в кількості, що обумовлюється хімічною активністю водовміщуючих та водотривких порід, умовами водообміну тощо. Звідси, міграція підземних вод представляє собою комплекс складних процесів (до яких слід відносити також обмінні процеси з водовміщуючими породами) переміщення розчинених, колоїдних та завислих речовин у малорухливому водному середовищі або з потоком підземних вод. Переміщення і трансформацію (обмін і перетворення) компонентів підземних вод, що призводять до зміни їх складу, називають гідрохімічною міграцією або міграцією підземних вод. Під міграцією слід розуміти не рух всієї маси води, що ототожнюється з фільтрацією, а взаємне переміщення окремих компонентів підземних вод (хімічних, механічних, біологічних), що визначають їх склад і властивості.

О. Є. Ферсман в свій час писав, що міграція елементів є основним і найбільш важливим предметом геохімічних досліджень, оскільки являє собою всю сукупність явищ природи, їх різноманіття та своєрідність. Під міграцією він розумів комплекс процесів, що ведуть до просторового перерозподілу хімічних елементів із зміною їх концентрації на даній ділянці середовища та накопиченням або розсіюванням на інших, суміжних ділянках.

Міграція хімічних елементів у природних водах визначається як властивостями самих елементів (розчинність, здатність утворювати сполуки

з іншими елементами і утворювати йони, асоціації йонів, комплекси та т. ін.), так і електрохімічними та термодинамічними параметрами природних систем або середовища міграції (окислювально-відновний потенціал, температура, тиск та ін.). Зміна цих параметрів у регіональному плані відбувається внаслідок збільшення з глибиною температури і тиску та розшаруванням підземної гідросфери на зони різного гідродинамічного режиму, що в значній мірі обумовлює характер геохімічного середовища.

За характером гетерогенності водоносної системи та рівнями протікання міграційного процесу виділяються:

а) відносно однорідні гомогенні системи з однорівневим протіканням міграційного процесу (однорідні піщані або глинисті комплекси, порівняно рівномірно тріщинуваті скельні породи);

б) гетерогенні системи з дворівневим протіканням міграційного процесу (впорядковано-шаруваті комплекси піщано-глинистих порід, комплекси тріщинуватих напівскельних порід при наявності окремих зон подрібнення, різко підвищеної тріщинуватості тощо);

в) гетерогенні системи з багаторівневим протіканням міграційного процесу (комплекси піщано-глинистих порід неупорядкованої будови, комплекси тріщинувато-пористих порід, ускладнені окремими зонами подрібнення, різко підвищеної тріщинуватості тощо).

Мігрантами в підземних водах є розчинені або колоїдні, суспензієподібні або емульговані тверді, рідкі і газоподібні речовини. Елементарною формою міграції розчинених речовин у воді є не вільні йони, а комплексні сполуки. Під комплексними розуміють відносно стабільні електронейтральні або заряджені сполуки, які утворені йоном металу (центральний йон) і одним чи декількома йонами або електронейтральними молекулами (лігандами). Ліганди поділяють на монодентатні і полідентатні.

Вільні йони металів гідратують у воді, утворюючи аквакомплекси, які знову слугують вихідною формою для утворення інших типів комплексів. До суспензій відносять, крім мінеральних частинок, також мікроорганізми. Емульгованими мігрантами є нерозчинні у воді частинки рідин, такі як нафта і мінеральні олії.

Характер розміщення джерел забруднення відносно водоносного горизонту (або схематизованої області фільтрації) визначає граничні умови, шлях та час пересування забруднень до водоносного горизонту або водозабору. Джерела забруднення можна поділити на такі що:

- а) розміщені на поверхні;
- б) розміщені нижче водоносного горизонту – під водотривом (високомінералізовані, некондиційні води);
- в) розміщені на границі і пов'язані з водним об'єктом (річка, канал), який може, в залежності від метеорологічних або техногенних умов, періодично виступати в ролі джерела живлення і ділянки розвантаження підземних вод.

За типологічними ознаками виділяють джерела:

- а) локальні – точкові (свердловина),
- б) лінійні (канал, річка),
- в) площинні (шламосховище, підземний басейн розсолів, солевідвал).

За ступенем гідродинамічного впливу на підземні води (залежно від викликаних змін в структурі початкового потоку) джерела поділяються на:

- а) гідродинамічно активні;
- б) гідродинамічно пасивні.

Гідродинамічний зв'язок джерела з підземними водами (для поверхневих джерел, а також для підземних – техногенного походження) або з виробками, що осушуються (для підземних джерел природного походження), може бути: а) досконалим і б) недосконалим – за ступенем і/або характером розкриття.

Режими дії джерела забруднення в часі поділяються на:

- а) безперервні;
- б) дискретні (циклічні);
- в) умовно миттєві.

Характеристика забруднюючих компонентів (розчинів) включає опис їх фізичних і хімічних властивостей і показників біологічної активності. Виділяють:

- а) стоки, які за фізичними властивостями слабо відрізняються від пластових вод;

б) стоки, що мають помітні відмінності в щільності і/або в'язкості від аналогічних показників пластових вод.

Оскільки серед токсичних речовин до складу промстоків можуть входити також патогенні мікроорганізми, то виділяють особливу групу бактеріально забруднених стічних вод.

Найбільший інтерес представляють наступні системи міграції, виділені за різними ознаками умов міграції забруднень (за В. А. Мироненком, 1988):

1) за характером джерела забруднення – поверхневі джерела промстоків та підземні басейни некондиційних вод природного та техногенного походження;

2) за характером структури міграційного потоку – ореоли розтікання та області інфільтрації забруднень;

3) за характером мігруючих забруднень – трасери, фізично нейтральні стоки, важкі або легкі стоки.

Поверхневі джерела переважно носять техногенний характер, мають досить чіткі планові границі, розташовані на безпечній віддалі від техногенних контурів розвантаження підземних вод, яка суттєво перевищує потужність водоносного комплексу. Це визначає розвиток забруднення в умовах планової фільтрації (міграції). Склад води таких джерел суттєво відрізняється від вихідного складу підземних вод. Їх дія дуже залежить від захисних властивостей природних покривних або техногенних відкладів і переважно обмежується порівняно невеликими глибинами проникнення основної маси забруднень.

Міграція з підземних басейнів природних некондиційних (високомінералізованих) вод обумовлюється головним чином техногенними чинниками – водовідбором та його інтенсивністю. Підземні джерела некондиційних вод техногенного характеру подібні до поверхневих джерел, але, як правило, наближені до контурів техногенного розвантаження.

Для поверхневих джерел виділяють два характерних види ореолів забруднення – ореоли розтікання і ореоли розсіювання. Перші супроводжуються підпорядкованим розвитком планової поперечної дисперсії, характерні для гідродинамічно активних джерел забруднення (басейнів промстоків), інтенсивність фільтрації з яких помітно переважає

розрахункові витрати природного потоку. У розвитку ореолів другого виду, які характерні для гідродинамічно пасивних джерел (сильно екрановані басейни, проммайданчики, сухі відвали та ін.), інтенсивність інфільтрації з них помітно поступається розрахунковим витратам природного потоку, а поперечна дисперсія відіграє головну роль. Крім цих видів площинних областей міграції, окремо можна виділити області низхідної інфільтрації, що безпосередньо прилягають до джерела поширення забруднюючих речовин.

За наявності некондиційних вод у нижніх добре проникних шарах водоносного комплексу, що експлуатуються недосконало за ступенем розкриття свердловинами (виробками), міграція носить переважно профільний субвертикальний характер. Можливе також пружне віджимання некондиційних вод з підстилаючих слабопроникних товщ і/або перетікання через них розчинів із суміжних горизонтів. За таких умов в експлуатаційному комплексі зберігається переважно плановий характер міграції підземних вод змішаного складу.

1.2. Механізми міграції, характеристика міграційних процесів

При дослідженні міграційних проблем доцільно розрізняти мікроскопічний, макроскопічний і регіональний рівні вивчення міграційних процесів.

З точки зору можливих фізико-механічних перетворень і процесів взаємодії забруднюючих компонентів (розчинів) з підземними водами та з гірськими породами, мігранти поділяються на:

- а) трасери – нейтральні в фізичному і хімічному відношенні,
- б) фізично нейтральні стоки – схильні до фізико-хімічних або/і мікробіологічних перетворень і взаємодій, але не здатні спричинити суттєву зміну вихідної щільності та в'язкості підземних вод,
- в) важкі та легкі стоки – ті, що через високу концентрацію компонентів суттєво впливають на щільність та в'язкість підземних вод.

За переважаючими механізмами міграції (в гетерогенній системі, в різних її елементах можуть домінувати різні механізми міграції) виділяють:

- а) молекулярно-дифузійний,
- б) конвективний,
- в) дисперсійно-конвективний перенос.

Дифузія виникає під дією різниці хімічних потенціалів розчину, тобто за наявності градієнту концентрації. Молекулярно-дифузійні процеси, що включають у себе баро-, термо-, само- і концентраційну дифузію властиві гідрогеодинамічно пасивним середовищам, які відповідають умовам відсутнього або досить ускладненого водообміну. Серед перерахованих видів найбільш значимою є концентраційна дифузія, що протікає в розчині або на границі твердої й рідкої фаз і обумовлена різницею концентрацій окремих елементів та їхніх сполук. У результаті відбувається вирівнювання концентрації розчиненої речовини у водному середовищі.

У системі з градієнтом концентрації речовини C'_x у напрямку x дифузійний потік J визначається першим законом Фіка:

$$J = -D \cdot C'_x,$$

а швидкість зміни концентрації речовини в даній точці, зумовлена дифузією, визначається другим законом Фіка:

$$C'_t = D \cdot C''_{xx},$$

де D – коефіцієнт дифузії (знак «—» вказує на напрямок потоку від більших концентрацій до менших), t – час. У глинистих породах на дифузію може накладатися осмос.

На відміну від вільного розчину при дифузії в пористому середовищі середній шлях, що проходить молекула, дуже відрізняється від прямої. Тоді

$$D = \frac{D_M \cdot S}{c},$$

де D_M – коефіцієнт молекулярної дифузії; S – пористість; c – звивистість, значення якої знаходиться в межах 1,21...1,57.

Конвективне перенесення речовини в розчиненому, рідше колоїдному стані або у вигляді дрібних частинок, відбувається при інфільтрації атмосферних опадів або з латеральними потоками безнапірних та напірних вод і характерне для ґрунтів із промивним режимом, пористих та тріщинуватих середовищ. Так як поровий простір осадових гірських порід –

складна нерегулярна система сполучених міжзернистих порожнин, то у ній важко виділити окремі порові канали. Його будова ускладнюється значною неоднорідністю порід, їх шаруватістю, наявністю тектонічних і стратиграфічних порушень (розривів однорідності породи). Тому його розглядають як систему з великим числом однорідних елементів, слабо зв'язаних між собою. Зі статистичної фізики відомо, що такі системи можуть бути описані як деякі суцільні середовища, властивості яких не виражаються через властивості складових елементів, а є усередненими характеристиками досить великих об'ємів середовища.

Макроскопічний фільтраційний потік проявляється як сукупність безлічі окремих мікрорухів у неупорядкованій системі порових каналів. Зі зростанням числа таких мікрорухів починають проявлятися статистичні закономірності, характерні для руху в цілому, але не для одного порового каналу або декількох каналів. Це дозволяє в якості вихідного допущення прийняти, що пористе середовище і природні рідини, що його насичують, утворюють суцільне середовище, тобто заповнюють будь-який виділений елементарний об'єм неперервно. Це накладає певні обмеження на поняття «елементарного об'єму» порового простору, під яким розуміють такий фізично нескінченно малий об'єм, у якому міститься велика кількість пор і зерен, так що він достатньо великий у порівнянні з розмірами пор і зерен породи. Для такого елементарного об'єму вводяться локальні усереднені характеристики системи «рідина-пористе середовище». Якщо об'єм пор при заданому напорі не змінюється, то таке пористе середовище вважається недеформівним. Якщо не враховувати силову взаємодію між твердим скелетом і прилягаючими до нього частками рідини, то пористе середовище можна розглядати як границі області, у якій рухається рідина. У такому випадку властивості пористого середовища можна описати деякими середніми геометричними характеристиками. Найважливіша з них – коефіцієнт пористості (або просто пористість), який визначається для деякого елемента пористого середовища як відношення об'єму, зайнятого порами в цьому елементі, до його загального об'єму. Якщо властивості цих елементів різні, то вводять поняття локальної пористості. Ще розрізняють повну й активну пористості. При визначенні останньої враховуються лише

з'єднані між собою пори, які можуть бути заповнені рідиною ззовні. При вивченні процесів фільтрації важлива саме активна пористість.

Істотний внесок у розвиток уявлень про структуру порового простору й вплив властивостей пористого середовища на рух у ньому рідини вніс Ч. Сліхтер. Ним запропоновані фіктивна й ідеальна моделі пористого середовища, досліджені такі важливі фільтраційні характеристики пористого середовища, як проникність і пористість [10].

Основну роль у перенесенні речовини у водообмінних системах відіграє її механічне перенесення потоком води, що фільтрується крізь породу. До важливих характеристик фільтраційної течії належать швидкість фільтрації v і дійсна середня швидкість руху рідини вздовж порового каналу u . При цьому вважається, що швидкість фільтрації v неперервно розподілена за об'ємом і є меншою від середньої швидкості дійсного руху u на величину коефіцієнта активної пористості S_a :

$$u = \frac{v}{S_a}.$$

Механічне перенесення під дією гідравлічного градієнту є основною формою міграції компонентів у водоносних пластах. У фізично однорідних рідинах таке перенесення протікає спільно з фільтраційним потоком із його середньою дійсною швидкістю, тобто інтенсивність і траєкторії переміщення розчиненої речовини при конвекції визначаються полем швидкостей фільтрації і активною пористістю (тріщинуватістю). Лінійний закон фільтрації Дарсі зв'язує витрату фільтраційного потоку з втратою гідродинамічного напору [196, 199]. Головним вважається ламінарний режим течії з лінійним зв'язком між швидкістю фільтрації і напірним градієнтом потоку. Це є відкриттям французького гідрогеолога А. Дарсі (Darcy, 1856), який на основі фізичного моделювання вивів такі формули:

$$Q = k \cdot w \cdot I, \quad I = \frac{\Delta H}{L}, \quad v = \frac{Q}{w}, \quad v = k \cdot I,$$

де Q – витрата потоку через поперечний переріз w , м³/доб; k – коефіцієнт фільтрації, який залежить від структури порового та тріщинного простору і властивостей води, яка рухається у цьому просторі, м/доб; I – градієнт

напору, відношення втрат напору до довжини шляху фільтрації L ; v – швидкість фільтрації, м/доб.

Перші теоретичні дослідження фільтрації, основані на цьому законі, були розпочаті Ж. Дюпюї, а більш складні задачі були розглянуті Ф. Форхгеймером [136]. М. Є. Жуковським вперше сформульовані конкретні задачі теорії фільтрації, виведені диференціальні рівняння руху та розв'язаний ряд задач притоку рідини до свердловини [55]. Такі задачі зустрічаються при дослідженні фільтрації води через водоносні пористі середовища, під греблями, припливі ґрунтової води до свердловин і колодязів і ін., де відома форма області течії і є непроникними покрівля й підшва.

Закон Дарсі має широку область застосування. Верхня його границя пов'язана з проявами сил енергії при великих швидкостях і турбулентності потоку. Нижня границя – це явище початкового градієнту у слабопроникних породах.

У загальній формі основний закон фільтрації А. Дарсі і Ф. Форхгеймер запропонували у виді двох складових:

$$I = a \cdot v + b \cdot v^2 = \frac{v}{k}(1 + a \cdot v), \quad a = \frac{1}{k}, \quad b = \frac{a}{k},$$

де k – коефіцієнт фільтрації за ламінарним режимом, м/доб; a – коефіцієнт нелінійної фільтрації. Ця формула враховує нелінійність потоку.

Якщо швидкість фільтрації дуже мала, з'являються сили взаємодії між частинками породи і молекулами води. Основний закон фільтрації в таких умовах записується так:

$$v = k \cdot \left(I - \frac{4}{3} \cdot I_0 \right),$$

де I_0 – початковий градієнт, величина, яка враховує сили молекулярного тяжіння.

Конвекція у тріщинуватих породах протікає набагато інтенсивніше, ніж в пористих. Забруднюючі речовини можуть мігрувати у вигляді водорозчинних сполук і твердих частинок, що переносяться з потоком води механічно. Так, частинки розміром 0,5-20 мкм здатні переміщуватися через

пори ґрунту з потоком вільної (гравітаційної) вологи, а частинки меншого розміру – при переміщенні плівкової вологи.

Наприклад, для стронцію-90 переважає механізм конвективного переносу в розчині, а з видів дифузії – концентраційна дифузія в розчині. Для цезію, що легко поглинається твердою фазою ґрунту, характерна дифузія в подвійному дифузійному шарі. Частка участі поглинених іонів ^{137}Cs у загальному дифузійному потоці в дерново-підзолистому легкосуглинистому ґрунті становить близько 95%; а дифузія ^{90}Sr у поглиненому стані в тому ж ґрунті – 1-8%.

Вимушена конвекція (фільтрація) відіграє головну роль у перенесенні розчиненої речовини разом з розчинником у верхніх гідрогеодинамічних зонах артезіанських басейнів, що характеризуються високою проникністю порід, гідравлічними градієнтами й швидкостями руху підземних вод.

Гравітаційна конвекція обумовлена різницею в щільності між вихідними пластовими і техногенними розчинами. На межі розділу мінералізованих і прісних вод проявляється додаткова вертикальна складова швидкості фільтрації. При поршньовому витісненні прісної води мінералізованим розчином щільніша (гравітаційна) конвекція сприяє деформації фронту витіснення: відбувається більш швидке переміщення важкої рідини по підшві пласта і уповільнення переміщення границі розділу поблизу покрівлі – фронт приймає похиле положення (для легких стоків ситуація має зворотний характер).

Повздовжня гідродисперсія (механічна дифузія) потоку речовини виникає внаслідок хаотичного розподілу швидкостей руху окремих струменів рідини в порах і тріщинах. Вона, як і дифузія, призводить до утворення на фронті розділу перехідної зони з поступово зростаючою концентрацією. Цей процес характеризується коефіцієнтом гідродисперсії D_v , який в загальному випадку є лінійною функцією швидкості фільтрації:

$$D_v = d \cdot v,$$

де d – константа повздовжньої мікродисперсії, яка відображає геометрію неупорядкованого порового або тріщинного простору гірських порід; значення її корелюють із розміром елементарних складових фільтруючої

породи. В добре проникних і відносно однорідних пористих середовищах звичайно нехтують дифузійним перенесенням і гідродисперсією на фоні домінуючої конвекції; в глинистих породах – навпаки. В тріщинуватих породах, в залежності від характеру розмірів окремих блоків породи, параметр d змінюється в значно більш широких межах – від кількох десятків сантиметрів до десятків метрів.

Процес підпорядковується закону Фіка, але ефективний коефіцієнт дифузії D замінюють сумарним коефіцієнтом мікродисперсії \bar{D} :

$$\bar{D} = D + D_v,$$

де d – структурний параметр (константа повздовжньої мікродисперсії), який має розмірність довжини і відповідає приблизно розміру однієї шпарини (приблизно $3 \dots 7 \cdot 10^{-4}$ м для пісків і $1,6 \dots 3 \cdot 10^{-3}$ для супісків). Враховувати мікродисперсію слід тоді, коли $d \cdot v$ стає співставним з коефіцієнтом дифузії, тобто при $v > 10^{-2}$ м/добу.

Поперечна дисперсія виникає за наявності концентраційного градієнту в напрямках, ортогональних основному перенесенню. Вона може відігравати провідну роль при масоперенесенні в яких завгодно водоносних комплексах. Вона є важливим чинником формування об'ємних ореолів розсіювання, а також забезпечує обмін речовиною між окремими елементами фільтруючого середовища, що розрізняються за інтенсивністю транзитного перенесення (наприклад, в гетерогенних шаруватих пластах). Експериментальні дані свідчать про наявність залежності близької до лінійної між коефіцієнтом поперечної мікродисперсії і швидкістю фільтрації v , однак константа поперечної мікродисперсії приблизно в 10-20 разів нижча за значення d .

Якщо конвективно-дисперсійне перенесення відбувається в середовищах, гомогенних за ємнісними і фільтраційними властивостями, де дисперсійно-дифузійний обмін речовиною протікає на одному елементарному мікрорівні (що визначається геометрією пор або тріщин), то в цілому процес можна назвати мікродисперсією у фільтраційному потоці.

Слід зауважити, що при дослідженні міграції речовин, які можуть сорбуватись породою, їх фронт буде відставати від фронту водного потоку. Для врахування сорбції (концентрування речовини із розчину на поверхні

мінеральних агрегатів) вводиться поняття ефективної пористості S_e , яка дещо більша за активну, оскільки враховує загальну місткість породи по відношенню до речовини.

Характеристика міграційного потоку включає уявлення:

- а) про топологію області міграції в плані і в розрізі (в тому числі про глибину залягання);
- б) про ступені розсіювання речовини в межах ореолу забруднення (ореоли розтікання або ореоли розсіювання);
- в) про вимірність міграційного потоку (одновимірний, двовимірний в плані, двовимірний в розрізі, тривимірний);
- г) про умови на границях області міграції (умови першого, другого та третього роду);
- д) про характер мінливості міграційного потоку у часі (стаціонарний та нестаціонарний потоки).

1.3. Процеси фізико-хімічних перетворень речовини в підземних водах

Міграція супроводжується процесами фізико-хімічного перетворення речовини у водоносних пластах. Ці процеси здатні не тільки контролювати загальну інтенсивність міграції, вони обумовлюють глибоку метаморфізацію початкового складу розчинів. При цьому виділяються процеси міжфазової взаємодії, що реалізуються на границі розділу рідини і мінерального скелету, та внутрішньо фазові процеси (реакції), що протікають в об'ємі порової рідини. До перших відносяться сорбція, йонний обмін, осадження (розчинення), вилуговування, до других – реакції комплексоутворення, деструкції, радіоактивного розпаду та деякі інші.

З процесів міжфазової взаємодії розглядаються поняття сорбції (адсорбції) та йонообмінні процеси, які тісно пов'язані між собою.

Поглинаюча властивість дисперсних порід обумовлюється наявністю адсорбційних сил, пов'язаних з електричним зарядом поверхні частинок. Частинки завдяки цьому захоплюють йони і молекули води та речовин із

розчину або з повітря, що оточують частинки. Поверхня частинки має від'ємний заряд і на ній сорбуються катіони, або молекули з явно вираженою дипольною будовою, саме молекули води. Зміна складу катіонів, що сорбовані частинкою, носить обмінний характер. Частина катіонів витісняється з адсорбційного шару і переходить у розчин, а на їх місце приходять інші. Система, що включає частинку і адсорбційний шар називається поглинаючим або обмінним комплексом, а процеси, що відбуваються при контакті частинки з розчином – катіонним обміном. Здатність катіонів до обміну зростає із зменшенням їх валентності.

Але поглинання здійснюється не лише зовнішньою поверхнею, тобто шляхом адсорбції, якась частина катіонів вилучається з розчину шляхом абсорбції. Останній процес значною мірою забезпечується колоїдами водонасиченої зони ґрунту, для яких характерна наявність внутрішньої поверхні міжпакетних проміжків.

Між йонами розчину і поглинаючого комплексу встановлюється рівновага, яка визначається ізотермою сорбції. Для описання сорбції в загальному вигляді використовують ізотерму Ленгмюра, яка визначає вміст катіонів в поглинаючому комплексі ґрунту C_r в залежності від їх концентрацій в поровому розчині C_p :

$$C_r = \frac{K \cdot C_p}{1 + b \cdot C_p},$$

де K і b – емпіричні константи. Якщо для певного діапазону концентрацій приймати $b=0$ (ізотерма Генрі), то параметр K набуває значення коефіцієнту розподілу:

$$K_p = \frac{C_r}{C_p}.$$

За формою графіків залежності C_r від C_p виділяють два основних типи ізотерм: лінійна та нелінійна. Сорбція із малоконцентрованих розчинів звичайно підпорядковується лінійній ізотермі Генрі.

У випадку, коли швидкість сорбційного процесу лімітується швидкістю дифузійної або, стосовно умов фільтрації у водоносних пластах,

конвективно-дифузійної міграції речовини, рівняння кінетики звичайно виражають у наступній формі [26]:

$$N'_t = J \cdot (C_p - K_p \cdot N),$$

де N – кількість сорбованої речовини (практично дорівнює C_r); C_p – поточна концентрація розчину; J і K_p – кінетичні коефіцієнти: J – коефіцієнт (константа) швидкості сорбції; K_p – коефіцієнт розподілу речовини в рівноважних умовах.

Останнє рівняння є досить прийнятним для прогнозів руху різних видів забруднень в підземних водах. Воно застосовується також для опису обернених процесів – десорбції та інших процесів вилучення речовини із сорбованого стану та збагачення ним розчину, опису кінетичної стадії як сорбційних, так і обмінних процесів, яка передуює початку рівноважного стану в системі.

Йонообмінні процеси, що активізуються при зміні фізико-хімічної обстановки у водоносних горизонтах, захоплюють звичайно катіонний склад системи «розчин–порода» і сприяють глибокій трансформації якісного складу розчину. При цьому загальна концентрація елементів може залишатись незмінною. Йонообмінні процеси впливають перш за все на макройонний склад.

Для розвитку міграційних процесів в підземних водах особливе значення має ізоморфізм мінералів, – коли окремі структурні елементи решітки, заміщуючись, утворюють основу для формування ємності йонного обміну породи.

Розчинність твердих речовин при постійних температурі та тиску є величина постійна в даному розчиннику і визначається добутком розчинності, що представляє собою добуток молярних концентрацій йонів даної речовини в насиченому розчині. Правило добутку розчинності справедливе лише для слабозчинних речовин. Воно дозволяє розрахувати концентрацію одного з йонів слабозчинної солі по відомій концентрації іншого йону.

У відповідності до закону діючих мас, розчинність речовини ($AB \leftrightarrow A + B$) регулюється константою рівноваги:

$$K = \frac{[A^+][B^-]}{[AB]},$$

де $[A^+][B^-] = \text{const} = L$ – функція температури і тиску. Чим менша L , тим менш розчинна речовина.

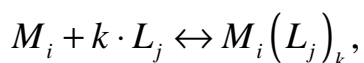
Рівноважний стан частіше за все доцільно апроксимувати ізотермою йонного обміну, що відображає співвідношення між концентраціями однойменних компонентів на породі (в складі її обмінного комплексу) і в розчині.

Найважливішим інтегральним параметром, що описує особливості міграції того або іншого забруднювача в геологічному середовищі, є фактор затримки. Феномен затримки мігранта являє собою уповільнення швидкості руху розчиненої речовини відносно швидкості розчинника, яке виникає при русі рідини в пористому середовищі. Головною причиною уповільнення є взаємодія речовини (трасера) із середовищем, через яке відбувається фільтрація розчину. Інтенсивність цієї взаємодії визначається фізичними (наприклад, сумарна площа поверхні частинок, обумовлена ступенем роздробленості або консолідованості породи) і хімічними властивостями трасера та середовища. Найбільш типовим видом взаємодії можна вважати йонний обмін між трасером і ґрунтовим йонообмінним комплексом.

За деяких термодинамічних умов та літологічного складу породи можлива незворотна сорбція трасера геологічним середовищем. У природі цей феномен реалізується у вигляді різноманітних геохімічних бар'єрів, де за рахунок випадання з розчинів концентруються ті або інші хімічні елементи, що утворюють іноді навіть родовища промислового значення.

Комплексоутворення відображає формування в природних розчинах, поряд із дисоційованими йонами, асоціаціями йонів і молекул (в тому числі органічних) різного ступеню складності, які називаються комплексними сполуками. До таких перед усе відносяться стійкі заряджені або електронейтральні утворення, які складаються з йону металу і йону, групи йонів або електронейтральних молекул (лігандів). Найпростіші реакції

комплексоутворення неорганічних сполук протікають шляхом послідовного приєднання до центральних йонів лігандів (при одночасно протікаючих обернених реакціях дисоціації проміжних сполук) за схемою:



де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, m+l}$, m і l – відповідно кількість йонів комплексоутворювачів і лігандів).

Деструкція хімічних сполук – це різні фізико-хімічні перетворення, які виражаються у послідовному розпаді (розкладі) нестійких водорозчинних компонентів розчину. Вона може протікати спонтанно (наприклад, радіоактивний розклад) або обумовлюватись впливом зовнішніх чинників (наприклад, окиснення, гідроліз, біологічний розклад). Загальний підхід до описання деструкції базується на використанні рівнянь формальної кінетики для не оберненого процесу. Наприклад, для спонтанного розпаду компоненти справедлива лінійна залежність між інтенсивністю розпаду та її залишковою концентрацією в рідкій фазі.

1.4. Математичне моделювання процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у пористих середовищах

Перші теоретичні дослідження стосовно моделювання переважно одновимірних процесів масопереносу речовин у пористих середовищах базуються на доробках С. Ф. Авер'янова, І. Г. Богуського, Е. А. Бондарєва, Ф. Н. Бочевера, М. М. Веригіна, А. В. Ликова, Л. Лукнер, Г. Л. Молтянера, В. Н. Ніколаєвського, С. Н. Нумерова, О. Я. Олійника, А. Є. Орадовської, А. Н. Патрашева, В. І. Пеньковського, В. Л. Полякова, Л. М. Рекса, В. С. Саркіяна, Ж. Фрида, А. С. Хабірова, М. П. Чиркіна, Б. С. Шержукова, Д. Ф. Шульгіна, В. М. Шестакова та інших вчених [2, 25, 26, 39–41, 101, 104, 115, 120, 121, 123–125, 128, 129, 131, 142, 171, 178–180, 183].

Процеси міграції речовини у водонасичених пористих середовищах при її малих концентраціях у розчині (до 10 г/л) і незначних змінах температури можна описати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \mathbf{v} = 0; \\ (\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div} (D_j \cdot \text{grad } C_j) - \mathbf{r} \cdot \text{grad } C_j + \sum_{k=1}^m f_{k,j}^*(C_k, C_j) - \\ - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^*(C_j, C_k) - \mathcal{F}_j(C_j, U_j) + \mathcal{F}_j(U_j, C_j), \\ (\sigma \cdot U_j)'_t = \sum_{k=1}^m f_{k,j}^{**}(U_k, U_j) - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^{**}(U_j, U_k) + \mathcal{F}_j(C_j, U_j) - \mathcal{F}_j(U_j, C_j), \\ j = \overline{1, m}, m \in N, \end{array} \right.$$

де φ і \mathbf{v} – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, z, U_j)$ – коефіцієнт (тензор) фільтрації, C_j і U_j – відповідно масові концентрації j -тої компоненти речовини у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища у точці (x, y, z) в момент часу t ($j = \overline{1, m}$), $D_j = D_j(x, y, z, C_j)$ – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії (гетеродифузії) j -тої компоненти речовини у водному потоці ($j = \overline{1, m}$), $\sigma = \sigma(x, y, z, U_j)$ – активна (рідше ефективна) пористість середовища, $f_{j,k}^*(C_j, C_k)$ і $f_{j,k}^{**}(U_j, U_k)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища ($j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}$), $\mathcal{F}_j(C_j, U_j)$ і $\mathcal{F}_j(U_j, C_j)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкості протікання відповідно сорбційних і десорбційних процесів j -тої компоненти речовини ($j = \overline{1, m}$).

Фільтраційні процеси, як правило, протікають в обмежених областях. На границі S фільтраційної області або на її частині задаються крайові умови, найбільш прості і широко поширені із яких умови:

а) $\varphi|_S = \Phi = \text{const}$ – на ділянках границі S , які є входами і (або) виходами фільтраційної течії;

б) $\Phi_{\mathbf{n}}'|_S = 0$ – на водонепроникних ділянках границі S області фільтрації, де \mathbf{n} – нормаль до границі.

На межах розділів сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності потенціалів і швидкостей:

$$\varphi|_{S_-} = \varphi|_{S_+}, \quad v|_{S_-} = v|_{S_+}.$$

При постановці задач конвективної дифузії на вході S_* фільтраційної течії, зазвичай, граничними умовами задаються:

а) $C_j|_{S_*} = c_{j*}$ ($j = \overline{1, m}$) – закон надходження і розподілу величин концентрацій компонент розчиненої у воді речовини,

б) $D_j \cdot C'_{jn} - v_n \cdot (C_j - c_{j*})|_{S_*} = 0$ ($j = \overline{1, m}$) – умови Данквертса, які враховують як конвективний, так і дифузійний механізми підведення компонент речовини.

На водонепроникних ділянках границі $S^{\%}$ області фільтрації при врахуванні або відсутності додаткових джерел надходження величин концентрацій компонент розчиненої у воді речовини виконуються відповідно умови:

$$C_j|_{S^{\%}} = c_{j*} \text{ або } C'_{jn}|_{S^{\%}} = 0 \quad (j = \overline{1, m}),$$

а на ділянці виходу фільтраційного потоку S^* можна приймати наступні граничні умови:

а) $C_j|_{S^*} = c_j^*$ ($j = \overline{1, m}$) – закон розподілу величин концентрацій компонент розчиненої у воді речовини;

б) $D_j \cdot C'_{jn} - v_n \cdot (C_j - c_j^*)|_{S^*} = 0$ ($j = \overline{1, m}$) – умови Данквертса, якщо не спостерігається інтенсивного відводу на виході фільтраційного потоку;

в) $C'_{jn}|_{S^*} = 0$ ($j = \overline{1, m}$) – умови, що враховують лише конвективний перенос через границю, у випадку інтенсивного відводу на виході фільтраційного потоку.

На межі розділу сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності концентрацій і потоків компонент речовини:

$$C_{jS^*_-} = C_{jS^*_+}, \quad D_{j*} \cdot C'_{jn} - v_n \cdot C_j|_{S^*_-} = D_j \cdot C'_{jn} - v_n \cdot C_j|_{S^*_+},$$

$$U_{jS^*_-} = U_{jS^*_+}, \quad S_* \cdot (C_j + U_j)_{S^*_-} = S^* \cdot (C_j + U_j)_{S^*_+} \quad (j = \overline{1, m}),$$

де D_{j*}, D_j^* – коефіцієнти конвективної дифузії j -ої компоненти речовини у сусідніх шарах ($j = \overline{1, m}$), v_n – нормальна складова швидкості на межі розділу, σ_*, σ^* – коефіцієнти пористості у сусідніх шарах.

Початкові умови мають вигляд:

$$C_j(M, t) = c_{j,0}, U_j(M, t) = u_{j,0},$$

де $c_{j,0}, u_{j,0}$ – відповідно задані функції розподілу концентрації j -тої компоненти речовини у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища у точці (x, y, z) в момент часу t до настання процесу забруднення або промивання пористого середовища ($j = \overline{1, m}$), M – довільна точка області фільтрації.

Одним із ефективних шляхів розв’язання відповідних задач у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними при плоско-вертикальній, осесиметричній і плановій фільтрації водних розчинів у пористих середовищах – модельних областях, обмежених екіпотенціальними або квазіекіпотенціальними лініями та лініями течії, є: поетапна фіксація характеристик і складових процесу та середовища; розв’язання задач фільтрації з використанням конформних або квазіконформних відображень області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу на фізичну область; перехід у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелювання обчислень; розв’язання регулярно і сингулярно-збурених задач типу “конвекція–дифузія–масообмін” з використанням числово-асимптотичних методів.

При розв’язуванні плоских крайових задач усталеної фільтрації для модельних областей, обмежених екіпотенціальними лініями та лініями течії, широко використовується метод конформних відображень, що, зокрема, автоматично дозволяє вирішити проблему вибору вузлів при побудові розрахункової сітки, обчислити поле швидкостей і величини різних перетоків тощо. Сам цей метод в 1922 році був запропонований і теоретично

обґрунтований М. М. Павловським [127]. Його використовували та розвивали далі у своїх роботах В. І. Аравін, В. М. Булавацький, М. М. Веригін, Л. І. Волковиський, В. С. Істоміна, М. І. Кочина, М. А. Лаврентьєв, В. І. Лаврик, С. М. Нумеров, П. Я. Полубаринова-Кочина, В. В. Скопецький та інші [6, 7, 10, 30, 41, 47, 63, 95, 97, 140, 149].

Перші дослідження плоскопаралельної фільтрації рідини в анізотропних середовищах були проведені Р. Дахлером [195] і Ф. Шаффернаком [208]. Для розв'язування двовимірних стаціонарних задач фільтрації в анізотропних пористих середовищах успішно використовується метод квазіконформних відображень. При цьому розв'язування задач фільтрації в найбільш повному обсязі зводиться до побудови гідродинамічної сітки руху, складеної із квазіеквіпотенціальних ліній та ліній течії, обчислення поля швидкостей та величин різного роду перетоків тощо [16, 98, 109]. Швидкість фільтрації в кожній точці сітки руху фільтраційної течії визначається із закону Дарсі, а напрямок співпадає з напрямком дотичної до лінії течії у цій точці. Зокрема, у [109] розроблено підхід до розв'язування досить широкого класу крайових задач, що описують процеси фільтрації ґрунтових вод у пористих середовищах – модельних криволінійних чотирикутниках та плоских багатозв'язних областях шляхом числової побудови конформних і квазіконформних відображень даних областей (із розрізами) на параметричні прямокутники, побудовано алгоритми їх числової реалізації і наведено приклади розрахунків таких сіток в конкретних областях.

Числові методи побудови ортогональних сіток зустрічаються і в роботах ряду зарубіжних авторів при розв'язанні різного роду задач математичної фізики [185, 188]. Зокрема, у [51, 93, 144] динамічні сітки будуються з використанням методу скінчених елементів.

Суттєвий вклад в розвиток теорії фільтрації і числових методів розв'язування її задач внесли також С. Ф. Авер'янов, Г. І. Баренблатт, Р. М. Барсегян, Я. Бер, Н. М. Герсєванов, А. Я. Глущенко, Г. В. Голубєв, О. В. Голубєва, Б. Б. Девісон, В. С. Дейнека, Д. Заславські, В. М. Ентов, В. І. Іванов, М. Б. Ільїнський, С. Ірмей, А. Р. Касімов, І. А. Кібель, Р. Коллінз, С. В. Коппенфель, Н. Є. Кочина, Г. Ламб, Л. С. Лейбензон, Л. Г. Лойцянский,

І. І. Ляшко, Л. М. Мілн-Томсон, В. Н. Монахов, М. Т. Нужин, В. Ф. Півень, Г. М. Положий, Х. Рауз, Н. В. Розе, О. А. Самарський, О. Б. Стеля, Г. Ф. Требін, Г. Г. Тумашев, П. Ф. Фільчаков, І. А. Чарний, Р. Р. Чугаєв, А. Е. Шейдеггер, Ф. Штальман, Н. Д. Якімов та інші [2–5, 8–12, 49, 52, 53, 59, 61, 84, 87, 88, 91, 100, 102, 110, 111, 122, 134, 135, 139, 141, 145, 147–149, 154, 160, 161, 168–170, 172, 173, 176, 177, 186, 189–191, 201–207, 210–213].

Використавши перехід до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах разом з аналітичними та аналітико-числовими методами, В. І. Лаврик та його учні [96–98] отримали точні або наближені аналітичні розв'язки типових двовимірних задач масопереносу при плоско-вертикальній, плановій, усталеній або квазіусталеній фільтрації, що виникають при дослідженні процесів забруднення (або засолення) ґрунтових вод. Використання зазначеної методики дозволило А. Я. Бомбі, А. П. Власюку та їх учням [5, 6, 39, 118] вирішити ряд двовимірних нелінійних сингулярно-збурених крайових задач масопереносу в неоднорідних анізотропних пористих середовищах. Розробці різних методів числового та числово-аналітичного розв'язання такого типу одно- і двовимірних задач волого- і солепереносу, розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі та суміжних їм процесам присвячені роботи В. М. Булавацького, Я. Й. Бурака, Б. В. Гери, М. М. Гіроля, О. Ю. Грищенко, В. М. Еміха, М. З. Згуровського, В. С. Кремеза, В. І. Лаврика, І. І. Ляшка, С. І. Ляшка, П. М. Мартинюк, Г. Є. Мистецького, Д. М. Мінца, Г. І. Ніколадзе, О. Я. Олійника, Я. Д. П'яни-ла, М. Р. Петрика, Я. Г. Савули, О. А. Самарського, В. М. Сівака, В. В. Скопечького, І. В. Сергієнка, Є. Я. Чаплі, О. Ю. Чернухи, Ю. М. Шехтмана та інших [31, 48, 54, 56, 83, 90, 93, 94, 97, 106, 107, 112, 116, 119, 124–126, 130, 132, 133, 137, 138, 146, 151, 174, 175, 181, 184, 209]. Зокрема, у [27–29, 36, 43–46] розв'язки знаходяться з використанням методів скінчених елементів та базисних функцій.

Для розв'язування сингулярно-збурених задач масопереносу у пористих середовищах у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними ефективним є метод асимптотичного наближення розв'язку. Слід відзначити метод, запропонований М. І. Вишиком і

Л. А. Люстерником [42, 105, 162, 163], значущою особливістю якого є ідейна простота, “охоплення” основних і другорядних явищ (складових частин процесу) та чутливе реагування на них, застосування до широкого кола задач. В основі цього методу лежить дві ідеї: ідея регулярного перетворення, яка йде ще від Прандтала, а також ідея примежових поправок. Модифікуючи цей метод (шляхом введення примежових функцій та розробки спеціальної процедури згладження), А. Б. Васильєва і В. Ф. Бутузов отримали асимптотику розв’язків сингулярно-збурених задач типу “реакція-дифузія-перенесення” для типових канонічних областей [32, 37]. У випадку недостатньої узгодженості граничних умов А. П. Власюком побудовані відповідні реброві та кутові функції. Н. О. Нікіфорович поширила запропоновану методику на випадки дослідження процесів масопереносу з урахуванням масообміну.

Взагалі під асимптотичними методами розуміють методи, що описують поведінку функцій, коли деякі з параметрів, від яких вони залежать, прямують до певної границі (скінченої або нескінченої). Вони є дуже ефективними при розв’язуванні великого кола рівнянь, які описують ті чи інші фізичні процеси. Крім того, асимптотичний підхід дозволяє здійснити декомпозицію складних систем, що дає можливість розуміння ієрархічних зв’язків між різними фізичними процесами.

Стрімкий розвиток асимптотичних методів розпочався у математичному аналізі в XVIII ст. завдяки працям Лагранжа, Лапласа, Леверр’є, які заклали міцний фундамент теорії збурення [114, 117]. Асимптотичними розвиненнями за незалежною змінною розв’язків для звичайних диференціальних рівнянь займались Е. Айнс, А. Ердей, Е. Коддінгтон, Е. Камке, Н. Левінсон, О. М. Ляпунов, О. Перрон, А. Пуанкаре, Пуассон, І. М. Рапопорт, Ф. Трикомі, Ж. Хорн, І. З. Штокало та інші [57]. Зокрема, в останній третині XIX століття А. Пуанкаре й О. М. Ляпунов, розвиваючи одну з модифікацій методів теорії збурень – метод малого параметра, одержали строгі результати щодо збіжності асимптотичного розкладу, що не припускає поділу змінних на швидкі і повільні та застосовний лише до відшукування періодичних режимів (питання про те, які значення малого параметра забезпечують збіжність розкладу, при

цьому залишалось відкритим). У той же час Пуанкаре вперше зрозумів, що розклади по малих параметрах не обов'язково повинні збігатися, оскільки вони можуть являти собою об'єкти особливої природи – асимптотичні ряди. Незважаючи на розбіжність, такі ряди в деякому сенсі досить непогано наближають шукані функції. Тим самим, вперше в математиці виникла ситуація, коли абсолютна точність недосяжна навіть у принципі: для кожної конкретної системи малий параметр має цілком визначене, кінцеве значення.

Всесвітньо відомі вчені Г. Біркгофф, М. М. Боголюбов, А. Б. Васильєва, М. Й. Вішик, В. М. Волосов, І. С. Градштейн, А. М. Ільїн, Е. Т. Копсон, М. М. Красовський, С. Г. Крейн, М. М. Крилов, І. Ж. Ліувілль, С. О. Ломов, Л. А. Люстернік, О. М. Ляпунов, І. Г. Малкін, Ю. О. Митропольський, П. Нуайон, А. Пуанкаре, В. Пугачов, В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркін, Х. Террітін, С.Ф. Фещенко, М. І. Шкіль, Л. Шлезінгер, І. З. Штокало, К. Штурм та інші присвятили свої праці знаходженню асимптотичних розв'язків за параметром для звичайних диференціальних рівнянь (див., напр., [13, 35, 60, 85, 86, 103, 105]). Особливе місце посіла теорія сингулярних збурень, початок якій поклав А. М. Тихонов [158, 159], яка займається дослідженням асимптотичних наближень розв'язків рівнянь із малими параметрами при старших похідних при прямуванні малих параметрів до нуля. Наприкінці 40-х – початку 50-х років Андрієм Миколайовичем були отримані основні результати цієї теорії – доведені теореми про граничний перехід. Дослідження були продовжені ученицею А. М. Тихонова – А. Б. Васильєвою, яка розробила метод, що дозволяє для широкого класу сингулярно збурених задач будувати рівномірні асимптотичні наближення розв'язків. Нині цей метод відомий широкому колу фахівців як метод Васильєвої. Метод примежових функцій А. Б. Васильєвої одержав подальший розвиток і узагальнення стосовно широкого класу крайових і початково-крайових задач для сингулярно-збурених рівнянь із частинними похідними в працях її учня В. Ф. Бутузова. Розвинутий ним метод кутових примежових функцій дозволяє будувати рівномірні асимптотичні розклади розв'язків у тих випадках, коли границя області не є гладкою, а містить кутові точки або ребра. Істотний розвиток методи теорії сингулярних збурень одержали в роботах А. В. Нестерова й Н. Н. Нефьодова [33, 38, 194]. А. В. Нестеров при

досліджені так званих бісингулярних задач, характерною рисою яких є порушення гладкості членів асимптотики, якщо їх визначати по стандартному методу, розробив новий підхід – метод неповного розкладу по малому параметру, що дозволяє будувати асимптотичні наближення розв'язків цих задач. Н. Н. Нефьодовим та їхніми учнями на основі методу Васильєвої розроблена асимптотична теорія контрастних структур, тобто розв'язків із внутрішніми перехідними шарами, що знаходить широкі застосування в різних прикладних задачах.

Асимптотичні розвинення розв'язків для звичайних диференціальних рівнянь одночасно за незалежною змінною і параметром розглядалась у працях М. В. Федорюка, Б. Ван-дер-Поля, І. З. Штокала та інших (див., напр., [164]). Вивченню стійкості, обмеженості, порядку росту розв'язків звичайних диференціальних рівнянь на скінченому і нескінченому інтервалі присвячено чимало робіт, які беруть свій початок від праць О. М. Ляпунова і А. Пуанкаре [108].

Також досліджували асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними такі вчені, як Д. Аронсон, Н. С. Бахвалов, Л. Бобісуд, В. Вазов, М. Вішик, Р. С. Ефендієв, Є. Жидков, Є. Ісакова, С. Каменомостська, М. В. Келдиш, І. Копачек, Р. Курант, О. Ладиженська, Н. Левінсон, Л. Люстернік, Л. Г. Магнарадзе, В. О. Митропольский, Н. А. Павлюк, Б. Панайоті, Я. А. Ройтберг, В. Г. Сушко, В. Тржицинський, С. Ф. Фещенко, А. Н. Філатов, М. І. Фрейдлін, Л. Чезарі, Т. Цуцунава, З. Г. Шефтель, В. Штернберг, Су. Юй-чен та багато інших [34, 62, 92, 156, 157, 165, 167, 182, 187, 192, 193, 197, 198, 200].

У працях В. М. Азбелєва, Р. Беллмана, Л. Е. Ельсгольца, М. М. Красовського, К. Кука, Д. І. Мартинюка, Ю. О. Митропольського, А. Д. Мишкіса, Г. П. Пелюха, В. П. Рубаника, А. М. Самойленка, В. І. Фодчука, Дж. Хейла та інших (див., наприклад, [58]) проведено дослідження диференціальних рівнянь із запізненням в часі. Серед різноманітних методів дослідження розв'язків таких рівнянь та алгоритмів їх побудови значний розвиток отримали асимптотичні методи Крилова–Боголюбова–Митропольського, метод малого параметра та метод усереднення, які були вже розвинені для звичайних диференціальних рівнянь.

Необхідність дослідження процесів масопереносу при більш складній геометрії області фільтрації, наявності в ній повздовжньої та поперечної (вертикальної і горизонтальної) викривленостей, привела до необхідності поширення цієї загально визнаної методики із площини на простір, а саме: відшукування спеціальних типів просторових аналогів крайових задач на конформні та квазіконформні відображення, які є математичними моделями ідеальних і квазіідеальних фільтраційних процесів у пористих середовищах – одно- та двозв'язних модельних областях, обмежених екви- або квазіеквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, розробки числових методів побудови їх розв'язків та розвитку числово-асимптотичних методів розв'язування відповідних просторових нелінійних сингулярно-збурених задач конвективної дифузії, зокрема, за умов масообміну. Зокрема, дослідженням просторових процесів фільтрації у пористих середовищах займався Х. Рауз [141]. Ним запропоновано узагальнення на простір умов типу Коші–Рімана.

Проведений вище аналіз результатів досліджень свідчить про те, що практика сьогодні, як ніколи, вимагає побудови все більш повних, точних і адекватних моделей, що описують явища і процеси природи, та відповідного до них моделюючого апарату, який дозволить додатково враховувати ряд важливих властивостей досліджуваного явища або процесу. Досить часто врахування різних додаткових факторів і взаємовпливів приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і неефективних математичних моделей. Але у ряді випадків при дослідженні таких процесів вдається врахувати нові фактори і складні взаємодії між ними шляхом збурення вже добре вивчених класичною теорією сингулярних збурень вихідних фільтраційних фонів. Ця методика дозволяє в легший і точніший спосіб досліджувати аспекти просторовості при розгляді процесів масопереносу у пористих середовищах.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

При розв'язуванні задач, що описують процеси фільтрації рідин у пористих середовищах – модельних областях, обмежених екви- або квазіеквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, широко використовуються методи конформних та квазіконформних відображень, які, крім автоматичного вирішення проблеми вибору вузлів при побудові гідродинамічної сітки руху, обчислення поля швидкостей і різного роду величин перетоків тощо, ще й спрощують дослідження процесів масопереносу забруднюючих (розчинних) речовин у фільтраційній течії (за рахунок заміни криволінійної вихідної області канонічною областю комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, відносно якої суттєво спрощується запис відповідних рівнянь та крайових умов).

З метою більш точного врахування різних перетоків і взаємовпливів, для яких просторовість відіграє значущу роль (зміна характеристик середовища і процесу з глибиною та у часі, складна геометрія області, поперечна і повздожня викривленості області), у цьому розділі побудовано просторові аналоги конформних відображень у випадку однорідних ізотропних середовищ, квазіконформних – у випадках однорідних анізотропних (ортотропних) середовищ. Для їх розв'язання розроблені відповідні числові алгоритми. Перевірку точності отриманих розв'язків проведено шляхом їх співставлення із заздалегідь відомими розв'язками. Комп'ютерну збіжність та коректність розроблених алгоритмів апробовано шляхом проведення числових розрахунків гідродинамічних сіток руху у просторових криволінійних паралелепіпедах, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, однозв'язних модельних областях, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та поверхнею течії, двозв'язних модельних областях, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та двома поверхнями течії

або лише двома еквіпотенціальними поверхнями, із розрізами на відповідні прямокутні паралелепіпеди, при різних значеннях параметрів розбиття області комплексного потенціалу. Відмітимо, що для цих областей характерними є поперечна (вертикальна і горизонтальна) та повздожня викривленості.

Відповідну методику узагальнено на випадки кусково-однорідних ізотропних пористих середовищ. Для цього побудовано просторові аналоги кусково-конформних відображень при умові, що поверхні розділу є еквіпотенціальними поверхнями. Комп'ютерну збіжність та коректність відповідних розроблених алгоритмів апробовано шляхом проведення числових розрахунків гідродинамічних сіток руху у дво- і тришарових модельних областях.

2.1. Просторові аналоги крайових задач на конформні і квазіконформні відображення для одношарових модельних областей, числові методи їх розв'язування (прогнозування просторових ідеальних та квазіідеальних полів)

2.1.1. Постановка модельних задач на знаходження просторових аналогів конформних і квазіконформних відображень

Розглянемо спочатку моделювання стаціонарного процесу руху нестискуваної рідини у недеформівному одношаровому однорідному пористому середовищі на прикладі модельної області – криволінійного паралелепіпеда $G_z^1 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($z = (x, y, z)$), обмеженого еквіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 2.1 а). Якщо вважати середовище ізотропним, то коефіцієнт фільтрації k буде сталою величиною, а відповідні поверхні області G_z^1 ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер U випадку, коли середовище

вважається анізотропним, коефіцієнт фільтрації є симетричним тензором $\kappa = (\kappa_{r_1, r_2})_{3 \times 3}$, де κ_{r_1, r_2} – деякі додатні дійсні числа ($r_1, r_2 = \overline{1, 3}$), а відповідні поверхні області G_z^1 є квазіортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер („приреброві кути” на стільки відрізняються від прямих, наскільки в їх околах анізотропія „відхиляє” вектор швидкості від градієнта напору). При цьому відповідна фільтраційна задача описується рівняннями:

$$\dot{\mathbf{v}} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.1)$$

з крайовими умовами на границі:

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (2.4)$$

де φ і $\dot{\mathbf{v}}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал (квазіпотенціал) і вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, $|\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), φ_* і φ^* , v_* – довільні дійсні додатні числа, \mathbf{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні [18, 19].

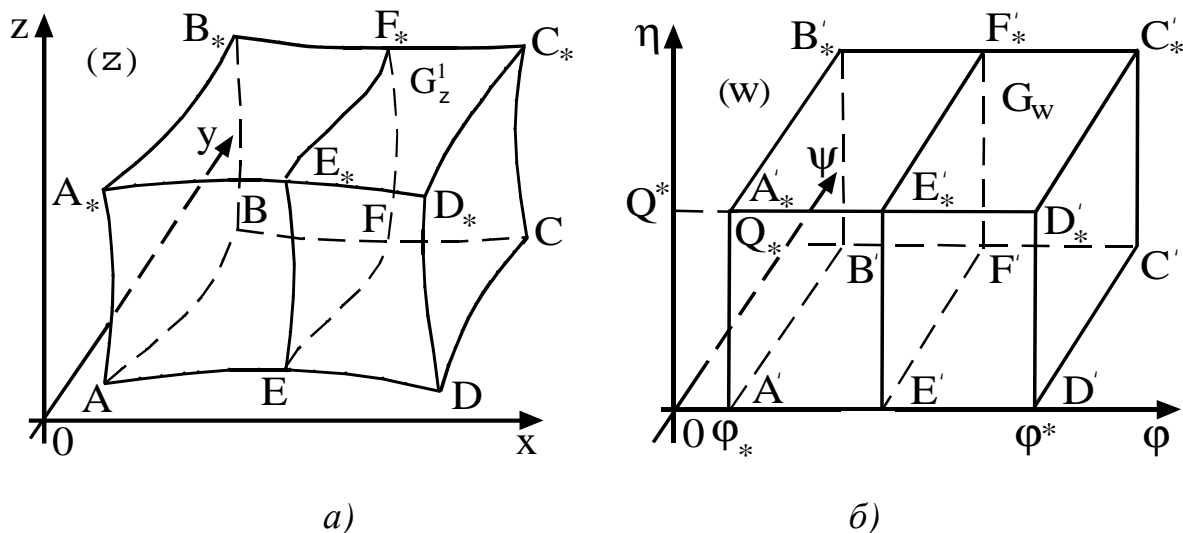


Рис. 2.1. Просторова фізична область G_z^1 (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу (квазіпотенціалу) G_w (б)

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторо-
во комплексно (квазікомплексно) спряжених із функцією $\phi(x, y, z)$) таких,
що [141]:

$$\kappa \cdot \text{grad } \phi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta \quad (2.5)$$

і заміною граничних умов (2.3), (2.4) на умови:

$$\psi|_{ADD_*A_*} = 0, \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \eta|_{ABCD} = 0, \eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*, \quad (2.6)$$

задача (2.1) – (2.4) замінюється більш загальною прямою задачею на знахо-
дження просторового аналогу конформного (квазіконформного) відображен-
ня області G_z^1 на відповідну область комплексного потенціалу (квазіпотенці-

алу) $G_w = \{w = (\phi, \psi, \eta) : \phi_* < \phi < \phi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ (рис. 2.1 б), де Q_* ,

Q^* – невідомі параметри, $Q_* \cdot Q^* = Q = \int_{EFF_*E_*} \frac{\partial \phi}{\partial s} ds$ – кількість рідини, що про-

ходить через деяку екіпотенціальну (квазіеквіпотенціальну) поверхню
 EFF_*E_* області G_z^1 (повна фільтраційна витрата).

Просторовий аналог крайової задачі на конформне відображення кри-
волінійного паралелепіпеда G_z^1 на прямокутний паралелепіпед G_w описується
системою рівнянь:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \phi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \\ \kappa \cdot \phi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \phi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x \end{cases} \quad (2.7)$$

з крайовими умовами (2.2), (2.6) і умовами ортогональності в околах ділянок
границі області G_z^1 :

$$\begin{cases} \text{grad } f_1(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_1(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in ABB_*A_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_2(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_2(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in CDD_*C_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_3(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_3(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in ADD_*A_*, \\
\begin{cases} \text{grad } f_4(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_4(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in BCC_*B_*, \\
\begin{cases} \text{grad } f_5(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_5(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in ABCD, \\
\begin{cases} \text{grad } f_6(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_6(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in A_*B_*C_*D_*, \quad (2.8)
\end{cases}$$

а просторовий аналог відповідної крайової задачі на квазіконформне відображення – системою рівнянь:

$$\begin{cases} \kappa_{1,1} \cdot \varphi'_x + \kappa_{1,2} \cdot \varphi'_y + \kappa_{1,3} \cdot \varphi'_z = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \\ \kappa_{2,1} \cdot \varphi'_x + \kappa_{2,2} \cdot \varphi'_y + \kappa_{2,3} \cdot \varphi'_z = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa_{3,1} \cdot \varphi'_x + \kappa_{3,2} \cdot \varphi'_y + \kappa_{3,3} \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x \end{cases} \quad (2.9)$$

з крайовими умовами (2.2) – (2.4), (2.6).

З метою забезпечення гладкості квазіконформного відображення у кутових точках і на ребрах $M = \{A, B, C, D, A_*, B_*, C_*, D_*, AB, CD, AD, BC, A_*B_*, C_*D_*, A_*D_*, B_*C_*, AA_*, BB_*, CC_*, DD_*\}$ області G_Z^1 на відповідні функції $f_r(x, y, z)$ ($r = \overline{1,6}$) накладаємо умови:

$$\Theta_M + \mathcal{O}_M = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{де } \cos \Theta_M = \frac{f'_{r_1 x}(M) \cdot f'_{r_2 x}(M) + f'_{r_1 y}(M) \cdot f'_{r_2 y}(M) + f'_{r_1 z}(M) \cdot f'_{r_2 z}(M)}{\sqrt{f'^2_{r_1 x}(M) + f'^2_{r_1 y}(M) + f'^2_{r_1 z}(M)} \cdot \sqrt{f'^2_{r_2 x}(M) + f'^2_{r_2 y}(M) + f'^2_{r_2 z}(M)}},$$

$$\cos \mathcal{O}_M = \left(\kappa_{1,1} \cdot f'^2_{r_2 x}(M) + \kappa_{2,2} \cdot f'^2_{r_2 y}(M) + \kappa_{3,3} \cdot f'^2_{r_2 z}(M) + (\kappa_{1,2} + \kappa_{2,1}) \cdot f'_{r_2 x}(M) \times \right. \\ \left. \times f'_{r_2 y}(M) + (\kappa_{1,3} + \kappa_{3,1}) \cdot f'_{r_2 x}(M) \cdot f'_{r_2 z}(M) + (\kappa_{2,3} + \kappa_{3,2}) \cdot f'_{r_2 y}(M) \cdot f'_{r_2 z}(M) \right) / \\ \left(\sqrt{f'^2_{r_2 x}(M) + f'^2_{r_2 y}(M) + f'^2_{r_2 z}(M)} \cdot \sqrt{\sum_{r_1=1}^3 \left(\kappa_{r_1,1} \cdot f'_{r_2 x}(M) + \kappa_{r_1,2} \cdot f'_{r_2 y}(M) + \kappa_{r_1,3} \cdot f'_{r_2 z}(M) \right)^2} \right),$$

$r_1 = \overline{3,6}$ при $r_2 = 1, 2$, $r_1 = 1, 2, 5, 6$ при $r_2 = 3, 4$ та $r_1 = \overline{1,4}$ при $r_2 = 5, 6$.

Врахувавши при цьому, що косинус кута \mathcal{O} відхилення вектора швидкості $\dot{\mathbf{v}}$ від градієнту квазікомплексного потенціалу Φ у довільній точці $\mathbf{z} = (x, y, z)$ обчислюється за формулою $\cos \mathcal{O} = \left(\kappa_{1,1} \cdot \Phi_x'^2 + \kappa_{2,2} \cdot \Phi_y'^2 + \kappa_{3,3} \cdot \Phi_z'^2 + (\kappa_{1,2} + \kappa_{2,1}) \cdot \Phi_x' \cdot \Phi_y' + (\kappa_{1,3} + \kappa_{3,1}) \cdot \Phi_x' \cdot \Phi_z' + (\kappa_{2,3} + \kappa_{3,2}) \cdot \Phi_y' \cdot \Phi_z' \right) / \left(\sqrt{\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 + \Phi_z'^2} \times \sqrt{\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot \Phi_x' + \kappa_{r,2} \cdot \Phi_y' + \kappa_{r,3} \cdot \Phi_z')^2} \right)$, умови квазіортогональності в околах

ділянок границі області G_z^1 отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} \text{grad } f_1(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_1}, \\ \text{grad } f_1(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_1}, \end{cases} (x, y, z) \in ABB_*A_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_2(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_2}, \\ \text{grad } f_2(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_2}, \end{cases} (x, y, z) \in CDD_*C_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_3(x, y, z) \cdot \text{grad } \Phi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_3}, \\ \text{grad } f_3(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_3}, \end{cases} (x, y, z) \in ADD_*A_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_4(x, y, z) \cdot \text{grad } \Phi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_4}, \\ \text{grad } f_4(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_4}, \end{cases} (x, y, z) \in BCC_*B_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_5(x, y, z) \cdot \text{grad } \Phi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_5}, \\ \text{grad } f_5(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_5}, \end{cases} (x, y, z) \in ABCD,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_6(x, y, z) \cdot \text{grad } \Phi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_6}, \\ \text{grad } f_6(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{O}_6}, \end{cases} (x, y, z) \in A_*B_*C_*D_*, \quad (2.10)$$

де $\cos \mathcal{O}_{r_2} = \left(\kappa_{1,1} \cdot f_{r_2 x}'^2 + \kappa_{2,2} \cdot f_{r_2 y}'^2 + \kappa_{3,3} \cdot f_{r_2 z}'^2 + (\kappa_{1,2} + \kappa_{2,1}) \cdot f_{r_2 x}' \cdot f_{r_2 y}' + (\kappa_{1,3} + \kappa_{3,1}) \cdot f_{r_2 x}' \cdot f_{r_2 z}' + (\kappa_{2,3} + \kappa_{3,2}) \cdot f_{r_2 y}' \cdot f_{r_2 z}' \right) / \left(\sqrt{f_{r_2 x}'^2 + f_{r_2 y}'^2 + f_{r_2 z}'^2} \times \sqrt{\sum_{\bar{r}_1=1}^3 (\kappa_{\bar{r}_1,1} \cdot f_{r_2 x}' + \kappa_{\bar{r}_1,2} \cdot f_{r_2 y}' + \kappa_{\bar{r}_1,3} \cdot f_{r_2 z}')^2} \right)$ ($r_2 = \overline{1, 6}$).

Одержану в результаті розв'язання задачі (2.7), (2.2), (2.6), (2.8) ((2.9), (2.2), (2.6), (2.10)) функцію $w = w(z) = w(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \eta(x, y, z))$, як і у випадку плоскої теорії потенціальних полів [68, 143, 156], назовемо комплексним потенціалом (квазіпотенціалом), а обернену їй функцію $z = z(w) = z(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta))$ – характеристичною функцією течії.

Обернена до (2.7), (2.2), (2.6), (2.8) задача на знаходження просторового аналогу конформного відображення $G_w \rightarrow G_z^1$ (при невідомих значеннях параметрів Q_* , Q^*) має вигляд:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), \\ y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), \\ z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta), \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_2(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_3(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\ f_4(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) = 0, \\ f_5(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_6(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} &0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*, \\ &\varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \eta < Q^*, \\ &\varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} f'_{rx} \cdot x'_\psi + f'_{ry} \cdot y'_\psi + f'_{rz} \cdot z'_\psi = 0, \\ f'_{rx} \cdot x'_\eta + f'_{ry} \cdot y'_\eta + f'_{rz} \cdot z'_\eta = 0 \\ f'_{rx} \cdot x'_\varphi + f'_{ry} \cdot y'_\varphi + f'_{rz} \cdot z'_\varphi = 0, \\ f'_{rx} \cdot x'_\eta + f'_{ry} \cdot y'_\eta + f'_{rz} \cdot z'_\eta = 0 \\ f'_{rx} \cdot x'_\varphi + f'_{ry} \cdot y'_\varphi + f'_{rz} \cdot z'_\varphi = 0, \\ f'_{rx} \cdot x'_\psi + f'_{ry} \cdot y'_\psi + f'_{rz} \cdot z'_\psi = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &(r=1,2), \\ &(r=3,4), \\ &(r=5,6), \end{aligned} \quad (2.13)$$

а обернена до (2.9), (2.2), (2.6), (2.10) задача на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення $G_w \rightarrow G_z^1$ запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa_{1,1} \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta) + \kappa_{1,2} \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta) + \kappa_{1,3} \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta), \\ y'_\varphi = \kappa_{2,1} \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta) + \kappa_{2,2} \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta) + \kappa_{2,3} \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta), \\ z'_\varphi = \kappa_{3,1} \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta) + \kappa_{3,2} \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta) + \kappa_{3,3} \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta) \end{cases} \quad (2.14)$$

з крайовими умовами на границі (2.12) та умовами квазіортогональності в околах ділянок границі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\psi + f'_{r_2 y} \cdot y'_\psi + f'_{r_2 z} \cdot z'_\psi}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\psi + y'^2_\psi + z'^2_\psi}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \\ \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\eta + f'_{r_2 y} \cdot y'_\eta + f'_{r_2 z} \cdot z'_\eta}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\eta + y'^2_\eta + z'^2_\eta}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \\ \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\varphi + f'_{r_2 y} \cdot y'_\varphi + f'_{r_2 z} \cdot z'_\varphi}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \\ \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\eta + f'_{r_2 y} \cdot y'_\eta + f'_{r_2 z} \cdot z'_\eta}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\eta + y'^2_\eta + z'^2_\eta}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \\ \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\varphi + f'_{r_2 y} \cdot y'_\varphi + f'_{r_2 z} \cdot z'_\varphi}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \\ \frac{f'_{r_2 x} \cdot x'_\psi + f'_{r_2 y} \cdot y'_\psi + f'_{r_2 z} \cdot z'_\psi}{\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \cdot \sqrt{x'^2_\psi + y'^2_\psi + z'^2_\psi}} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{r_2}}, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

де $\cos \mathfrak{G}_{r_2} = (\kappa_{1,1} \cdot f'^2_{r_2 x} + \kappa_{2,2} \cdot f'^2_{r_2 y} + \kappa_{3,3} \cdot f'^2_{r_2 z} + (\kappa_{1,2} + \kappa_{2,1}) \cdot f'_{r_2 x} \cdot f'_{r_2 y} +$
 $+ (\kappa_{1,3} + \kappa_{3,1}) \cdot f'_{r_2 x} \cdot f'_{r_2 z} + (\kappa_{2,3} + \kappa_{3,2}) \cdot f'_{r_2 y} \cdot f'_{r_2 z}) / \left(\sqrt{f'^2_{r_2 x} + f'^2_{r_2 y} + f'^2_{r_2 z}} \times \right.$
 $\left. \times \sqrt{\sum_{\eta=1}^3 (\kappa_{\eta,1} \cdot f'_{r_2 x} + \kappa_{\eta,2} \cdot f'_{r_2 y} + \kappa_{\eta,3} \cdot f'_{r_2 z})^2} \right) (r_2 = \overline{1,6}).$

2.1.2. Алгоритм числового розв'язання задачі на знаходження просторового аналогу конформного відображення криволінійного паралелепіпеда на відповідний прямокутний

Наведемо алгоритм числового розв'язання оберненої задачі (2.11) – (2.13) на знаходження просторового аналогу конформного відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійний паралелепіпед G_z^1 при відповідності вершин за умов гладкості і ортогональності між собою в куті-

вих точках та вздовж ребер обмежуючих його граней [82]. Для цього в області G_w побудуємо рівномірну ортогональну сітку $G_w^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)\}$: $\varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i$, $i = \overline{0, n+1}$; $\psi_j = \Delta\psi \cdot j$, $j = \overline{0, m+1}$; $\eta_k = \Delta\eta \cdot k$, $k = \overline{0, l+1}$; $\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n+1}$, $\Delta\psi = \frac{Q_*}{m+1}$, $\Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}$, $\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta}$, $n, m, l \in N$ (рис. 2.1 б) і запишемо різницеві аналоги рівнянь системи (2.11) у рівномірній сітковій області G_w^γ :

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}. \quad (2.17)$$

Через $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ сітки у G_z^1 .

Крайові умови (2.12), які визначають граничні поверхні фізичної області G_z^1 , апроксимуємо точковими рівняннями:

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f_2(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f_3(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) = 0, f_4(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\ f_5(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f_6(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ i=0, n+1, j=0, m+1, k=0, l+1, \end{cases} \quad (2.18)$$

а умови (2.13) ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області – такими рівняннями:

$$\begin{aligned} & f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j+1,k} - x_{0,j,k}) + f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\ & \times (y_{0,j+1,k} - y_{0,j,k}) + f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j+1,k} - z_{0,j,k}) = 0, \\ & f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k}) + f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\ & \times (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k}) + f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k}) = 0, \\ & f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j,k}) + f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\ & \times (y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j,k}) + f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j,k}) = 0, \\ & f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k}) + f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\ & \times (y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k}) + f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k}) = 0, \\ & f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k}) + f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \times \\ & \times (y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k}) + f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k}) = 0, \\ & f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (x_{i+1,0,k} - x_{i,0,k}) + f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \times \\ & \times (y_{i+1,0,k} - y_{i,0,k}) + f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (z_{i+1,0,k} - z_{i,0,k}) = 0, \\ & f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k}) + f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \times \\ & \times (y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k}) + f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k}) = 0, \\ & f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (x_{i+1,m+1,k} - x_{i,m+1,k}) + f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \times \\ & \times (y_{i+1,m+1,k} - y_{i,m+1,k}) + f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (z_{i+1,m+1,k} - z_{i,m+1,k}) = 0, \\ & f'_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i,j+1,0} - x_{i,j,0}) + f'_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (y_{i,j+1,0} - y_{i,j,0}) + f'_{5z} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i,j+1,0} - z_{i,j,0}) = 0, \\
& f'_{5x} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i+1,j,0} - x_{i,j,0}) + f'_{5y} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \\
& \times (y_{i+1,j,0} - y_{i,j,0}) + f'_{5z} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i+1,j,0} - z_{i,j,0}) = 0, \\
& f'_{6x} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f'_{6y} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
& \times (y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f'_{6z} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j,l+1}) = 0, \\
& f'_{6x} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i+1,j,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f'_{6y} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
& \times (y_{i+1,j,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f'_{6z} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i+1,j,l+1} - z_{i,j,l+1}) = 0, \\
& i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

які в більшості випадків зручно замінити на наступні (простіші):

$$\begin{aligned}
& \frac{f'_{1x} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} = \frac{f'_{1y} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{1z} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\
& \frac{f'_{2x} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2y} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2z} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\
& \frac{f'_{3x} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} = \frac{f'_{3y} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{f'_{3z} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}, \\
& \frac{f'_{4x} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{x_{i,m,k} - x_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4y} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{y_{i,m,k} - y_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4z} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{z_{i,m,k} - z_{i,m+1,k}}, \\
& \frac{f'_{5x} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} = \frac{f'_{5y} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{5z} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\
& \frac{f'_{6x} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6y} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6z} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\
& i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Інваріант відображення γ криволінійного паралелепіпеда G_z^1 є невідомим (оскільки невідома витрата Q) і визначається в процесі розрахунку. Формулу для наближеного знаходження даної величини одержимо на підставі

умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів двох областей:

$$\gamma = \frac{\kappa}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4 \left(\sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \right) / \\ & / \left(\left(\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \times \right. \\ & \times \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & \left. \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Фільтраційну витрату Q і параметри Q_* , Q^* знаходимо за формулами:

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{\gamma} \cdot (m+1) \cdot (l+1), \quad (2.22)$$

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q}{\%}}, \quad Q^* = \sqrt{\% \cdot Q}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
\text{де } \% &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \%_{i,j,k}, \\
\%_{i,j,k} &= \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
&+ \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
&+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\
&+ \left. \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right) / \\
&\left(\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
&+ \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
&+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\
&+ \left. \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right).
\end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (2.16) – (2.23) знаходимо шляхом поетапної параметризації величини γ , координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області G_Z^γ . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_Z^γ (n , m та l), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)})$, $(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)})$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)})$, $(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, l+1}$, $(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)})$, $(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (так, щоб виконувались рівності (2.12)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$), за формулою (2.21) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$ інваріанта відображення γ . Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)})$ проводимо послідовно

за формулами (2.16) при парному кроці ітерації і (2.17) при непарному кроці на основі значень з попереднього кроку g ($g = 0, 1, \mathbf{K}$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (2.18), (2.19) або з (2.18), (2.20), величини γ за формулою (2.21), параметра Q за формулою (2.22) (при потребі параметрів Q_* і Q^* за формулами (2.23)) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і фільтраційної витрати відносно кроку ітерації відповідно:

$$\begin{aligned} & \max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(|x_{i,j,k}^{(g+1)} - x_{i,j,k}^{(g)}|, |y_{i,j,k}^{(g+1)} - y_{i,j,k}^{(g)}|, \right. \\ & \left. |z_{i,j,k}^{(g+1)} - z_{i,j,k}^{(g)}| \right) < \varepsilon, |Q^{(g+1)} - Q^{(g)}| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Якщо умови (2.24) не виконуються, то знову повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т. д. У протилежному випадку для отриманих вузлів сітки обчислюємо нев'язку рівнянь системи (2.11)

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \text{ де } \delta_1 = \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \kappa \cdot \gamma \cdot ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times \right. \right. \\ & \times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \left. \right), \delta_2 = \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \kappa \cdot \gamma \cdot ((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right) \right), \delta_3 = \\ &= \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \gamma \cdot ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right) \right). \end{aligned}$$

Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки та розв'язуємо задачу заново.

2.1.3. Модифікація алгоритму для випадку параметричного задання поверхонь криволінійного паралелепіпеда

Модифікуємо алгоритм, описаний у п. 2.1.2, для безпосереднього застосування його до розв'язання фільтраційної задачі (2.1) – (2.4) для однорі-

дних ізотропних пористих середовищ – модельних областей, що мають форму криволінійних паралелепіпедів $G_z^1 = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, у випадку, коли поверхні задаються параметрично: $ABB_*A_* = \{z: x = x_1(\alpha_1, \beta_1), y = y_1(\alpha_1, \beta_1), z = z_1(\alpha_1, \beta_1), \alpha_1^* \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^{**}, \beta_1^* \leq \beta_1 \leq \beta_1^{**}\}$, $CDD_*C_* = \{z: x = x_2(\alpha_2, \beta_2), y = y_2(\alpha_2, \beta_2), z = z_2(\alpha_2, \beta_2), \alpha_2^* \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^{**}, \beta_2^* \leq \beta_2 \leq \beta_2^{**}\}$, $BCC_*B_* = \{z: x = x_3(\alpha_3, \beta_3), y = y_3(\alpha_3, \beta_3), z = z_3(\alpha_3, \beta_3), \alpha_3^* \leq \alpha_3 \leq \alpha_3^{**}, \beta_3^* \leq \beta_3 \leq \beta_3^{**}\}$, $ADD_*A_* = \{z: x = x_4(\alpha_4, \beta_4), y = y_4(\alpha_4, \beta_4), z = z_4(\alpha_4, \beta_4), \alpha_4^* \leq \alpha_4 \leq \alpha_4^{**}, \beta_4^* \leq \beta_4 \leq \beta_4^{**}\}$, $ABCD = \{z: x = x_5(\alpha_5, \beta_5), y = y_5(\alpha_5, \beta_5), z = z_5(\alpha_5, \beta_5), \alpha_5^* \leq \alpha_5 \leq \alpha_5^{**}, \beta_5^* \leq \beta_5 \leq \beta_5^{**}\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: x = x_6(\alpha_6, \beta_6), y = y_6(\alpha_6, \beta_6), z = z_6(\alpha_6, \beta_6), \alpha_6^* \leq \alpha_6 \leq \alpha_6^{**}, \beta_6^* \leq \beta_6 \leq \beta_6^{**}\}$ [152].

Аналогічно п. 2.1.2, ввівши пару функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\phi = \phi(x, y, z)$), для яких виконується умова (2.5), і замінивши крайові умови (2.3), (2.4) на умови (2.6), задачу (2.1) – (2.4) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_w (рис. 2.1 б), що описується системою рівнянь (2.7) з крайовими умовами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x, y, z) \Big|_{ABB_*A_*} = \phi(x_1(\alpha_1, \beta_1), y_1(\alpha_1, \beta_1), z_1(\alpha_1, \beta_1)) = \phi(\alpha_1, \beta_1) = \phi_*, \\ \phi(x, y, z) \Big|_{CDD_*C_*} = \phi(x_2(\alpha_2, \beta_2), y_2(\alpha_2, \beta_2), z_2(\alpha_2, \beta_2)) = \phi(\alpha_2, \beta_2) = \phi^*, \\ \psi(x, y, z) \Big|_{ADD_*A_*} = \psi(x_3(\alpha_3, \beta_3), y_3(\alpha_3, \beta_3), z_3(\alpha_3, \beta_3)) = \psi(\alpha_3, \beta_3) = 0, \\ \psi(x, y, z) \Big|_{BCC_*B_*} = \psi(x_4(\alpha_4, \beta_4), y_4(\alpha_4, \beta_4), z_4(\alpha_4, \beta_4)) = \psi(\alpha_4, \beta_4) = Q_*, \\ \eta(x, y, z) \Big|_{ABCD} = \eta(x_5(\alpha_5, \beta_5), y_5(\alpha_5, \beta_5), z_5(\alpha_5, \beta_5)) = \eta(\alpha_5, \beta_5) = 0, \\ \eta(x, y, z) \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = \eta(x_6(\alpha_6, \beta_6), y_6(\alpha_6, \beta_6), z_6(\alpha_6, \beta_6)) = \eta(\alpha_6, \beta_6) = Q^*, \\ (x, y, z) \in G_z, \quad \alpha_r^* \leq \alpha_r \leq \alpha_r^{**}, \quad \beta_r^* \leq \beta_r \leq \beta_r^{**} \quad (r = \overline{1, 6}) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

та умовами ортогональності в околі ділянок границі області G_z^1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{rx} \cdot \psi'_x + y'_{ry} \cdot \psi'_y + z'_{rz} \cdot \psi'_z = 0, \\ x'_{rx} \cdot \eta'_x + y'_{ry} \cdot \eta'_y + z'_{rz} \cdot \eta'_z = 0 \\ x'_{rx} \cdot \phi'_x + y'_{ry} \cdot \phi'_y + z'_{rz} \cdot \phi'_z = 0, \\ x'_{rx} \cdot \eta'_x + y'_{ry} \cdot \eta'_y + z'_{rz} \cdot \eta'_z = 0 \\ x'_{rx} \cdot \phi'_x + y'_{ry} \cdot \phi'_y + z'_{rz} \cdot \phi'_z = 0, \\ x'_{rx} \cdot \psi'_x + y'_{ry} \cdot \psi'_y + z'_{rz} \cdot \psi'_z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (r=1,2), \\ \\ (r=3,4), \\ \\ (r=5,6). \end{array} \quad (2.26)$$

Відповідний просторовий аналог оберненої до (2.1), (2.25), (2.26) крайової задачі на конформне відображення $z = z(w)$ області G_w на G_z^1 при невідомих значеннях величин Q_* , Q^* , Q опишеться системою (2.11) з наступними крайовими умовами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\varphi_*, \psi, \eta) = x_1(\alpha_1, \beta_1), \quad y(\varphi_*, \psi, \eta) = y_1(\alpha_1, \beta_1), \quad z(\varphi_*, \psi, \eta) = z_1(\alpha_1, \beta_1), \\ x(\varphi^*, \psi, \eta) = x_2(\alpha_2, \beta_2), \quad y(\varphi^*, \psi, \eta) = y_2(\alpha_2, \beta_2), \quad z(\varphi^*, \psi, \eta) = z_2(\alpha_2, \beta_2), \\ x(\varphi, 0, \eta) = x_3(\alpha_3, \beta_3), \quad y(\varphi, 0, \eta) = y_3(\alpha_3, \beta_3), \quad z(\varphi, 0, \eta) = z_3(\alpha_3, \beta_3), \\ x(\varphi, Q_*, \eta) = x_4(\alpha_4, \beta_4), \quad y(\varphi, Q_*, \eta) = y_4(\alpha_4, \beta_4), \quad z(\varphi, Q_*, \eta) = z_4(\alpha_4, \beta_4), \\ x(\varphi, \psi, 0) = x_5(\alpha_5, \beta_5), \quad y(\varphi, \psi, 0) = y_5(\alpha_5, \beta_5), \quad z(\varphi, \psi, 0) = z_5(\alpha_5, \beta_5), \\ x(\varphi, \psi, Q^*) = x_6(\alpha_6, \beta_6), \quad y(\varphi, \psi, Q^*) = y_6(\alpha_6, \beta_6), \quad z(\varphi, \psi, Q^*) = z_6(\alpha_6, \beta_6), \\ (\varphi, \psi, \eta) \in G_w, \quad \alpha_r^* \leq \alpha_r \leq \alpha_r^{**}, \quad \beta_r^* \leq \beta_r \leq \beta_r^{**} \quad (r=1,6) \end{array} \right. \quad (2.27)$$

і умовами ортогональності в околах ділянок границі області G_z^1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{rx} \cdot x'_\psi + y'_{ry} \cdot y'_\psi + z'_{rz} \cdot z'_\psi = 0, \\ x'_{rx} \cdot x'_\eta + y'_{ry} \cdot y'_\eta + z'_{rz} \cdot z'_\eta = 0 \\ x'_{rx} \cdot x'_\phi + y'_{ry} \cdot y'_\phi + z'_{rz} \cdot z'_\phi = 0, \\ x'_{rx} \cdot x'_\eta + y'_{ry} \cdot y'_\eta + z'_{rz} \cdot z'_\eta = 0 \\ x'_{rx} \cdot x'_\phi + y'_{ry} \cdot y'_\phi + z'_{rz} \cdot z'_\phi = 0, \\ x'_{rx} \cdot x'_\psi + y'_{ry} \cdot y'_\psi + z'_{rz} \cdot z'_\psi = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (r=1,2), \\ \\ (r=3,4), \\ \\ (r=5,6). \end{array} \quad (2.28)$$

Далі, аналогічно п. 2.1.2, в області G_w вводимо рівномірну ортогональну сітку G_w^γ і вводимо позначення, які будуть використані пізніше:

$$\begin{aligned} x_{i,j,k} &= x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \\ \alpha_{r,j} &= \alpha_r(\psi_j), \quad \beta_{r,k} = \beta_r(\eta_k) \quad (r=1,2, \quad j=\overline{0, m+1}, \quad k=\overline{0, l+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{r,i} &= \alpha_r(\varphi_i), \beta_{r,k} = \beta_r(\eta_k) \quad (r = \overline{3,4}, i = \overline{0,n+1}, k = \overline{0,l+1}), \\ \alpha_{r,i} &= \alpha_r(\varphi_i), \beta_{r,j} = \beta_r(\psi_j) \quad (r = \overline{5,6}, i = \overline{0,n+1}, j = \overline{0,m+1}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z^1 (при відповідності вершин) різницеві аналоги рівнянь (2.11) у рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми матимуть вигляд (2.16) і (2.17), крайові умови (2.27), які визначають область G_z , із врахуванням введених позначень (2.29) запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{0,j,k} &= x(\varphi_*, \psi_j, \eta_k) = x_1(\alpha_1(\psi_j), \beta_1(\eta_k)) = x_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}), \\ y_{0,j,k} &= y(\varphi_*, \psi_j, \eta_k) = y_1(\alpha_1(\psi_j), \beta_1(\eta_k)) = y_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}), \\ z_{0,j,k} &= z(\varphi_*, \psi_j, \eta_k) = z_1(\alpha_1(\psi_j), \beta_1(\eta_k)) = z_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}), \\ x_{n+1,j,k} &= x(\varphi^*, \psi_j, \eta_k) = x_2(\alpha_2(\psi_j), \beta_2(\eta_k)) = x_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}), \\ y_{n+1,j,k} &= y(\varphi^*, \psi_j, \eta_k) = y_2(\alpha_2(\psi_j), \beta_2(\eta_k)) = y_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}), \\ z_{n+1,j,k} &= z(\varphi^*, \psi_j, \eta_k) = z_2(\alpha_2(\psi_j), \beta_2(\eta_k)) = z_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}), \\ x_{i,0,k} &= x(\varphi_i, 0, \eta_k) = x_3(\alpha_3(\varphi_i), \beta_3(\eta_k)) = x_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}), \\ y_{i,0,k} &= y(\varphi_i, 0, \eta_k) = y_3(\alpha_3(\varphi_i), \beta_3(\eta_k)) = y_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}), \\ z_{i,0,k} &= z(\varphi_i, 0, \eta_k) = z_3(\alpha_3(\varphi_i), \beta_3(\eta_k)) = z_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}), \\ x_{i,m+1,k} &= x(\varphi_i, Q_*, \eta_k) = x_4(\alpha_4(\varphi_i), \beta_4(\eta_k)) = x_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}), \\ y_{i,m+1,k} &= y(\varphi_i, Q_*, \eta_k) = y_4(\alpha_4(\varphi_i), \beta_4(\eta_k)) = y_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}), \\ z_{i,m+1,k} &= z(\varphi_i, Q_*, \eta_k) = z_4(\alpha_4(\varphi_i), \beta_4(\eta_k)) = z_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}), \\ x_{i,j,0} &= x(\varphi_i, \psi_j, 0) = x_5(\alpha_5(\varphi_i), \beta_5(\psi_j)) = x_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}), \\ y_{i,j,0} &= y(\varphi_i, \psi_j, 0) = y_5(\alpha_5(\varphi_i), \beta_5(\psi_j)) = y_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}), \\ z_{i,j,0} &= z(\varphi_i, \psi_j, 0) = z_5(\alpha_5(\varphi_i), \beta_5(\psi_j)) = z_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}), \\ x_{i,j,l+1} &= x(\varphi_i, \psi_j, Q^*) = x_6(\alpha_6(\varphi_i), \beta_6(\psi_j)) = x_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}), \\ y_{i,j,l+1} &= y(\varphi_i, \psi_j, Q^*) = y_6(\alpha_6(\varphi_i), \beta_6(\psi_j)) = y_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}), \\ z_{i,j,l+1} &= z(\varphi_i, \psi_j, Q^*) = z_6(\alpha_6(\varphi_i), \beta_6(\psi_j)) = z_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}), \\ i &= \overline{0,n+1}, \quad j = \overline{0,m+1}, \quad k = \overline{0,l+1}, \end{aligned} \right. \quad (2.30)$$

а умови (2.28) апроксимуємо такими рівняннями:

$$\begin{aligned}
& \left(x_{1,j,k} - x_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \cdot \left(x_{0,j+1,k} - x_{0,j,k} \right) + \left(y_{1,j,k} - y_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{0,j+1,k} - y_{0,j,k} \right) + \left(z_{1,j,k} - z_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \cdot \left(z_{0,j+1,k} - z_{0,j,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{1,j,k} - x_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \cdot \left(x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k} \right) + \left(y_{1,j,k} - y_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k} \right) + \left(z_{1,j,k} - z_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}) \right) \cdot \left(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{n,j,k} - x_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \cdot \left(x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j,k} \right) + \left(y_{n,j,k} - y_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j,k} \right) + \left(z_{n,j,k} - z_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \cdot \left(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{n,j,k} - x_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \cdot \left(x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k} \right) + \left(y_{n,j,k} - y_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k} \right) + \left(z_{n,j,k} - z_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}) \right) \cdot \left(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,1,k} - x_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \cdot \left(x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k} \right) + \left(y_{i,1,k} - y_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k} \right) + \left(z_{i,1,k} - z_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \cdot \left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,1,k} - x_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \cdot \left(x_{i+1,0,k} - x_{i,0,k} \right) + \left(y_{i,1,k} - y_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i+1,0,k} - y_{i,0,k} \right) + \left(z_{i,1,k} - z_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}) \right) \cdot \left(z_{i+1,0,k} - z_{i,0,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,m,k} - x_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \cdot \left(x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k} \right) + \left(y_{i,m,k} - y_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k} \right) + \left(z_{i,m,k} - z_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \cdot \left(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,m,k} - x_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \cdot \left(x_{i+1,m+1,k} - x_{i,m+1,k} \right) + \left(y_{i,m,k} - y_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i+1,m+1,k} - y_{i,m+1,k} \right) + \left(z_{i,m,k} - z_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}) \right) \cdot \left(z_{i+1,m+1,k} - z_{i,m+1,k} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,j,1} - x_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \cdot \left(x_{i,j+1,0} - x_{i,j,0} \right) + \left(y_{i,j,1} - y_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i,j+1,0} - y_{i,j,0} \right) + \left(z_{i,j,1} - z_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \cdot \left(z_{i,j+1,0} - z_{i,j,0} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,j,1} - x_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \cdot \left(x_{i+1,j,0} - x_{i,j,0} \right) + \left(y_{i,j,1} - y_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i+1,j,0} - y_{i,j,0} \right) + \left(z_{i,j,1} - z_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}) \right) \cdot \left(z_{i+1,j,0} - z_{i,j,0} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x_{i,j,l} - x_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \cdot \left(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j,l+1} \right) + \left(y_{i,j,l} - y_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j,l+1} \right) + \left(z_{i,j,l} - z_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \cdot \left(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j,l+1} \right) = 0, \\
& \left(x_{i,j,l} - x_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \cdot \left(x_{i+1,j,l+1} - x_{i,j,l+1} \right) + \left(y_{i,j,l} - y_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \times \\
& \times \left(y_{i+1,j,l+1} - y_{i,j,l+1} \right) + \left(z_{i,j,l} - z_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}) \right) \cdot \left(z_{i+1,j,l+1} - z_{i,j,l+1} \right) = 0, \\
& i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

які, аналогічно до п. 2.1.2, в більшості випадків зручно замінити на наступні:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{1,j,k} - x_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{y_{1,j,k} - y_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{z_{1,j,k} - z_1(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\
\frac{x_{n,j,k} - x_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} &= \frac{y_{n,j,k} - y_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{z_{n,j,k} - z_2(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\
\frac{x_{i,1,k} - x_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{y_{i,1,k} - y_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{z_{i,1,k} - z_3(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}, \\
\frac{x_{i,m,k} - x_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k})}{x_{i,m,k} - x_{i,m+1,k}} &= \frac{y_{i,m,k} - y_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k})}{y_{i,m,k} - y_{i,m+1,k}} = \frac{z_{i,m,k} - z_4(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k})}{z_{i,m,k} - z_{i,m+1,k}}, \\
\frac{x_{i,j,1} - x_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{y_{i,j,1} - y_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{z_{i,j,1} - z_5(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\
\frac{x_{i,j,l} - x_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} &= \frac{y_{i,j,l} - y_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{z_{i,j,l} - z_6(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\
i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Інваріант відображення γ визначається в процесі розрахунку аналогічно до п. 2.1.2 за формулою (2.21), невідому витрату Q знаходимо за формулою (2.22). При потребі знаходимо і величини Q_* , Q^* за формулами (2.23). Умовами стабілізації координат вузлів сітки і величини Q відносно кроку ітерації є умови (2.24).

Розв'язок різницевої задачі (2.16), (2.17), (2.30) – (2.32), (2.21) – (2.24) знаходимо шляхом поетапної параметризації інваріанту відображення γ (або

значення витрати Q), координат граничних та внутрішніх вузлів шуканої гідродинамічної сітки G_z^γ за алгоритмом, який детальніше описаний в п. 2.1.2.

2.1.4. Алгоритм числового розв'язання задачі на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення криволінійного паралелепіпеда на відповідний прямокутний

Аналогічно п. 2.1.2 в області G_w вводимо рівномірну ортогональну сітку G_w^γ [79].

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z^1 (при відповідності вершин) запишемо різницевий аналог системи (2.14) у рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{1,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{1,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{1,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \right), \\
 y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{2,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{2,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{2,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \right), \\
 z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{3,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{3,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{3,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},
 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{1,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{1,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{1,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - \right. \\
\left. - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \Big), \\
y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{2,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{2,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{2,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - \right. \\
\left. - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \Big), \\
z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \left(\mathbf{K}_{3,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - \right. \right. \\
\left. \left. - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \mathbf{K}_{3,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \mathbf{K}_{3,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - \right. \\
\left. - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \Big), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
\end{array} \right. \quad (2.34)$$

Крайові умови (2.12), які визначають фізичну область G_z^1 , апроксимують рівняннями (2.18), а умови (2.15), що забезпечують квазіортогональність сітки, записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями:

$$\begin{aligned}
& f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j+1,k} - x_{0,j,k}) + f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\
& \times (y_{0,j+1,k} - y_{0,j,k}) + f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j+1,k} - z_{0,j,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) + f'^2_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) + f'^2_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{0,j+1,k} - x_{0,j,k})^2 + (y_{0,j+1,k} - y_{0,j,k})^2 + (z_{0,j+1,k} - z_{0,j,k})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{G}_{1,0,j,k}}, \\
& f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k}) + f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\
& \times (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k}) + f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) + f'^2_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) + f'^2_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{(x_{0,j,k+1}-x_{0,j,k})^2 + (y_{0,j,k+1}-y_{0,j,k})^2 + (z_{0,j,k+1}-z_{0,j,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{1,0,j,k}}, \\
& f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j+1,k}-x_{n+1,j,k}) + f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,j+1,k}-y_{n+1,j,k}) + f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j+1,k}-z_{n+1,j,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) + f'^2_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) + f'^2_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{n+1,j+1,k}-x_{n+1,j,k})^2 + (y_{n+1,j+1,k}-y_{n+1,j,k})^2 + (z_{n+1,j+1,k}-z_{n+1,j,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{2,n+1,j,k}}, \\
& f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j,k+1}-x_{n+1,j,k}) + f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,j,k+1}-y_{n+1,j,k}) + f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j,k+1}-z_{n+1,j,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) + f'^2_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) + f'^2_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{n+1,j,k+1}-x_{n+1,j,k})^2 + (y_{n+1,j,k+1}-y_{n+1,j,k})^2 + (z_{n+1,j,k+1}-z_{n+1,j,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{2,n+1,j,k}}, \\
& f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (x_{i,0,k+1}-x_{i,0,k}) + f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \times \\
& \times (y_{i,0,k+1}-y_{i,0,k}) + f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (z_{i,0,k+1}-z_{i,0,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) + f'^2_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) + f'^2_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i,0,k+1}-x_{i,0,k})^2 + (y_{i,0,k+1}-y_{i,0,k})^2 + (z_{i,0,k+1}-z_{i,0,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{3,i,0,k}}, \\
& f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (x_{i+1,0,k}-x_{i,0,k}) + f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \times \\
& \times (y_{i+1,0,k}-y_{i,0,k}) + f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) \cdot (z_{i+1,0,k}-z_{i,0,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) + f'^2_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) + f'^2_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i+1,0,k}-x_{i,0,k})^2 + (y_{i+1,0,k}-y_{i,0,k})^2 + (z_{i+1,0,k}-z_{i,0,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{3,i,0,k}}, \\
& f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (x_{i,m+1,k+1}-x_{i,m+1,k}) + f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \times \\
& \times (y_{i,m+1,k+1}-y_{i,m+1,k}) + f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (z_{i,m+1,k+1}-z_{i,m+1,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) + f'^2_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) + f'^2_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i,m+1,k+1}-x_{i,m+1,k})^2 + (y_{i,m+1,k+1}-y_{i,m+1,k})^2 + (z_{i,m+1,k+1}-z_{i,m+1,k})^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2 \mathcal{G}_{4,i,m+1,k}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (x_{i+1,m+1,k} - x_{i,m+1,k}) + f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \times \\
& \times (y_{i+1,m+1,k} - y_{i,m+1,k}) + f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) \cdot (z_{i+1,m+1,k} - z_{i,m+1,k}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) + f'^2_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) + f'^2_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i+1,m+1,k} - x_{i,m+1,k})^2 + (y_{i+1,m+1,k} - y_{i,m+1,k})^2 + (z_{i+1,m+1,k} - z_{i,m+1,k})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{4,i,m+1,k}}, \\
& f'_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i,j+1,0} - x_{i,j,0}) + f'_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \\
& \times (y_{i,j+1,0} - y_{i,j,0}) + f'_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i,j+1,0} - z_{i,j,0}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) + f'^2_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) + f'^2_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i,j+1,0} - x_{i,j,0})^2 + (y_{i,j+1,0} - y_{i,j,0})^2 + (z_{i,j+1,0} - z_{i,j,0})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{5,i,j,0}}, \\
& f'_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i+1,j,0} - x_{i,j,0}) + f'_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \\
& \times (y_{i+1,j,0} - y_{i,j,0}) + f'_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i+1,j,0} - z_{i,j,0}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) + f'^2_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) + f'^2_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i+1,j,0} - x_{i,j,0})^2 + (y_{i+1,j,0} - y_{i,j,0})^2 + (z_{i+1,j,0} - z_{i,j,0})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{5,i,j,0}}, \\
& f'_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f'_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
& \times (y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f'_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j,l+1}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) + f'^2_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) + f'^2_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j,l+1})^2 + (y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j,l+1})^2 + (z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j,l+1})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{6,i,j,l+1}}, \\
& f'_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i+1,j,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f'_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
& \times (y_{i+1,j,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f'_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i+1,j,l+1} - z_{i,j,l+1}) = \\
& = \sqrt{f'^2_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) + f'^2_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) + f'^2_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{i+1,j,l+1} - x_{i,j,l+1})^2 + (y_{i+1,j,l+1} - y_{i,j,l+1})^2 + (z_{i+1,j,l+1} - z_{i,j,l+1})^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \mathfrak{G}_{6,i,j,l+1}}, \\
& \cos \mathfrak{G}_{r_2,i,j,k} = \left(\mathfrak{K}_{1,1} \cdot f'^2_{r_2x}(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) + \mathfrak{K}_{2,2} \cdot f'^2_{r_2y}(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbf{K}_{3,3} \cdot f_{r_2 z}^{\prime 2}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+\left(\mathbf{K}_{1,2}+\mathbf{K}_{2,1}\right) \cdot f_{r_2 x}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right) \times \\
& \times f_{r_2 y}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+\left(\mathbf{K}_{1,3}+\mathbf{K}_{3,1}\right) \cdot f_{r_2 x}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right) \cdot f_{r_2 z}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+ \\
& +\left(\mathbf{K}_{2,3}+\mathbf{K}_{3,2}\right) \cdot f_{r_2 y}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right) \cdot f_{r_2 z}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right) / \\
& / \left(\sqrt{f_{r_2 x}^{\prime 2}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+f_{r_2 y}^{\prime 2}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+f_{r_2 z}^{\prime 2}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)} \times \right. \\
& \left. \times \sqrt{\sum_{\eta=1}^3\left(\mathbf{K}_{\eta, 1} \cdot f_{r_2 x}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+\mathbf{K}_{\eta, 2} \cdot f_{r_2 y}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)+\mathbf{K}_{\eta, 3} \cdot f_{r_2 z}^{\prime}\left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\right)\right)^2}\right) \\
& r_2=\overline{1,6}, i=\overline{0, n+1}, j=\overline{0, m+1}, k=\overline{0, l+1} .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Таким чином, маємо нелінійну задачу, де на відміну від п. 2.1.2 у сіткової області G_z^Y фігурують малі криволінійні паралелепіеди замість прямокутних.

Формулу для наближеного знаходження інваріанта відображення γ одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіедів двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma & =\frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i, j, k=0}^{n, m, l} \gamma_{i, j, k}, \\
\gamma_{i, j, k} & =4\left(\sqrt{\left(x_{i+1, j, k}-x_{i, j, k}\right)^2+\left(y_{i+1, j, k}-y_{i, j, k}\right)^2+\left(z_{i+1, j, k}-z_{i, j, k}\right)^2}+\right. \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1, j+1, k}-x_{i, j+1, k}\right)^2+\left(y_{i+1, j+1, k}-y_{i, j+1, k}\right)^2+\left(z_{i+1, j+1, k}-z_{i, j+1, k}\right)^2}+ \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1, j, k+1}-x_{i, j, k+1}\right)^2+\left(y_{i+1, j, k+1}-y_{i, j, k+1}\right)^2+\left(z_{i+1, j, k+1}-z_{i, j, k+1}\right)^2}+ \\
& \left. +\sqrt{\left(x_{i+1, j+1, k+1}-x_{i, j+1, k+1}\right)^2+\left(y_{i+1, j+1, k+1}-y_{i, j+1, k+1}\right)^2+\left(z_{i+1, j+1, k+1}-z_{i, j+1, k+1}\right)^2}\right) / \\
& / \left(\sum_{r=1}^3\left(\mathbf{K}_{r, 1} \cdot\left(\left(y_{i, j+1, k}-y_{i, j, k}\right)\left(z_{i, j, k+1}-z_{i, j, k}\right)-\left(y_{i, j, k+1}-y_{i, j, k}\right)\left(z_{i, j+1, k}-z_{i, j, k}\right)\right)\right)+\right. \\
& +\mathbf{K}_{r, 2} \cdot\left(\left(x_{i, j, k+1}-x_{i, j, k}\right)\left(z_{i, j+1, k}-z_{i, j, k}\right)-\left(x_{i, j+1, k}-x_{i, j, k}\right)\left(z_{i, j, k+1}-z_{i, j, k}\right)\right)+ \\
& \left. +\mathbf{K}_{r, 3} \cdot\left(\left(x_{i, j+1, k}-x_{i, j, k}\right)\left(y_{i, j, k+1}-y_{i, j, k}\right)-\left(x_{i, j, k+1}-x_{i, j, k}\right)\left(y_{i, j+1, k}-y_{i, j, k}\right)\right)\right)^{0.5}+
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}) - (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}) \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k}) - \right. \\
& - \left. (x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}) \right) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}) \times \right. \\
& + \left. \left. (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}) - (x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}) (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}) \right) \right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}) \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}) (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1}) - \right. \\
& - \left. (x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) \right) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}) \times \right. \\
& \times \left. \left. (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}) (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}) \right) \right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}) (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}) - (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}) \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1}) - \right. \\
& - \left. (x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}) \right) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1}) \times \right. \\
& \times \left. \left. (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}) - (x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}) (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}) \right) \right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k}) - (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}) \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}) - \right. \\
& - \left. (x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k}) (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k}) \right) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k}) \times \right. \\
& \times \left. \left. (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}) - (x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) \right) \right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}) (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}) - (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}) \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}) (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}\right)\left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}\right) + \kappa_{r,3} \cdot \left(\left(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}\right) \times \right. \\
& \times \left. \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}\right) - \left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}\right)\left(y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}\right)\right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left(\left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}\right)\left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k}\right) - \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}\right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1}\right)\right) + \kappa_{r,2} \cdot \left(\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}\right)\left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1}\right) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}\right)\left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k}\right)\right) + \kappa_{r,3} \cdot \left(\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}\right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}\right) - \left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}\right)\left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}\right)\right)\right)^{0.5} + \\
& + \sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left(\left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}\right)\left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}\right) - \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}\right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1}\right)\right) + \kappa_{r,2} \cdot \left(\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}\right)\left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1}\right) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}\right)\left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}\right)\right) + \kappa_{r,3} \cdot \left(\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1}\right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}\right) - \left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}\right)\left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}\right)\right)\right)^{0.5} \Bigg).
\end{aligned}$$

Фільтраційну витрату знаходимо за формулою:

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma}. \quad (2.37)$$

Формули для знаходження величин Q_* , Q^* знаходяться аналогічно.

Розв'язок різницевої задачі (2.33), (2.34), (2.18), (2.35) – (2.37) знаходимо шляхом поетапної параметризації інваріанту відображення γ (або значення витрати Q), координат граничних та внутрішніх вузлів шуканої гідродинамічної сітки G_z^γ за алгоритмом, який детальніше описаний в п. 2.1.2.

Після знаходження координат вузлів сітки обчислюємо нев'язку рівнянь системи (2.14) $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$, де $\delta_1 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left| \left(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k} \right) - \frac{1}{2} \cdot \gamma \times \right.$

$$\times \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left(\left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k} \right) \left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k} \right) - \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k} \right) \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k} \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_{r,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) \right) + \kappa_{r,3} \times \\
& \times \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) \right) \Big)^{0.5} \Bigg), \delta_2 = \\
& = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1}} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}) \right) + \kappa_{r,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) \right) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) \right) \right) \right)^{0.5} \Bigg), \delta_3 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1}} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) \times \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}) \right) + \kappa_{r,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})(z_{i,j+1,k} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - z_{i,j,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}) \right) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}) \right) \right) \right)^{0.5} \Bigg). \text{ Якщо точність отриманого розв'язку}
\end{aligned}$$

нас не задовольняє, то аналогічно п. 2.1.2 збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^γ та розв'язуємо задачу заново.

2.1.5. Модифікація алгоритмів для випадку одношарових двозв'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії

Наведені у п. 2.1.2, 2.1.4 алгоритми можна застосувати і для побудови гідродинамічних сіток у двозв'язних криволінійних областях [81]. Так, для випадку деякої області G_z^2 , обмеженої двома екіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями $S_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $S^{**} = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, які є гладкими і ортогональними (квазіортогональними) між собою вздовж ліній

перетину (рис. 2.2), крайові умови (2.2) – (2.4) фільтраційної задачі (2.1) – (2.4) матимуть вигляд:

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0. \quad (2.38)$$

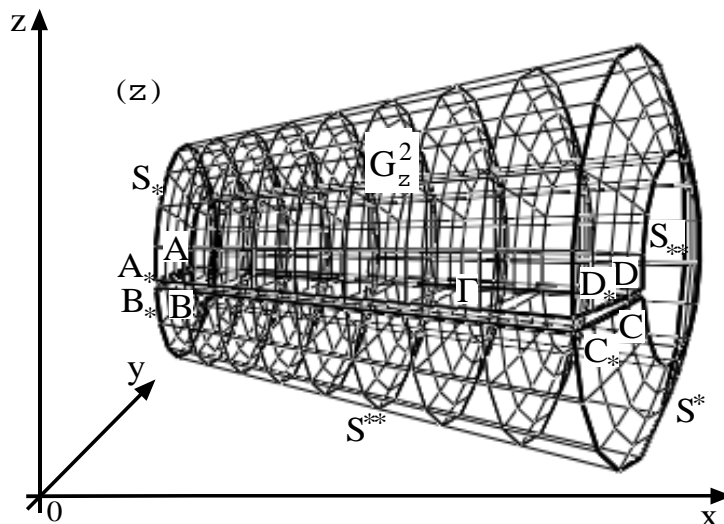


Рис. 2.2. Просторова фізична область G_z^2 з розрізом Γ

Шляхом фіксації на поверхні S_* деякої лінії течії $AD = BC$ ($A = B \in S_* \cap S_{**}$, $C = D \in S^* \cap S_{**}$) та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу, $A_* = B_* \in S_* \cap S^{**}$, $D_* = C_* \in S^* \cap S^{**}$) розв'язання задачі (2.1), (2.38) зводиться з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу Γ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0 \quad (2.39)$$

до відшукування розв'язку фільтраційної задачі (2.1), (2.2) – (2.4) для однозв'язної області $G_z^2 \setminus \Gamma$ – криволінійного паралелепіпеда $ABCD_*B_*C_*D_*$, обмеженого двома екіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, $ADD_*A_* =$

$= BCC_*B_* = \{z: \overset{J}{f}(x, y, z) = 0\}$, які є гладкими і ортогональними (квазіортогональними) між собою в кутових точках та вздовж ребер (рис. 2.2), та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов:

$$\varphi|_{ADD_*A_*} = \varphi|_{BCC_*B_*}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{ADD_*A_*} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{BCC_*B_*}. \quad (2.40)$$

Аналогічно п. 2.1.1, шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно (квазікомплексно) спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$), для яких виконується умова (2.5), і замінивши крайові умови (2.3), (2.4) на умови (2.6), задача (2.1) – (2.4) замінюється більш загальною прямою крайовою задачею на побудову просторового аналогу конформного (квазіконформного) відображення однозв’язної області $G_z^2 \setminus \Gamma$ на прямокутний паралелепіпед G_w (рис. 2.1 б).

Покажемо, яким чином наведені у п. 2.1.2, 2.1.4 алгоритми можна застосувати для розв’язування таких задач [80]. Обернена крайова задача на знаходження просторового аналогу конформного (квазіконформного) відображення $G_w \rightarrow G_z^2 \setminus \Gamma$ (при невідомих значеннях параметрів Q_* , Q^*) та наступного “склеювання” берегів розрізу Γ описується при відомій функції $\overset{J}{f}(x, y, z)$, яка визначає розріз, системою рівнянь (2.11) (у випадку квазіконформного – (2.14)) з умовами:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ \overset{J}{f}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\ \overset{J}{f}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) = 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x'_\psi, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y'_\psi, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z'_\psi, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_* \end{array} \quad (2.41)$$

та відповідними умовами з (2.13), що забезпечують ортогональність ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (у випадку квазіконформного відображення – з (2.15), що забезпечують квазіортогональність ліній течії та квазіеквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області), де $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_3(x, y, z) = f_4(x, y, z) = \overset{\cdot}{f}(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$.

При невідомій функції $\overset{\cdot}{f}(x, y, z)$ умови (2.41) запишуться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \\ z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x'_\psi, \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y'_\psi, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z'_\psi, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*. \end{array} \quad (2.42)$$

Тоді, аналогічно п. 2.1.2 і 2.1.4, в області G_w будемо рівномірну ортогональну сітку G_w^γ . Ліво- і правосторонні різницеві аналоги рівнянь (2.9) у рівномірній сітковій області (при відповідності кутових точок) матимуть вигляд (2.16), (2.17) (у випадку квазіконформного відображення (2.33), (2.34)), умови (2.41) і (2.42), які визначають фізичну область G_z^2 , апроксимуємо точково-різницевиими рівняннями:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f_{**}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f^{**}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ f(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) = 0, f(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f_{**}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f^{**}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, i=\overline{0,n+1}, j=\overline{0,m+1}, k=\overline{0,l+1} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

відповідно, а умови (2.13), що забезпечують ортогональність сітки, записуються відповідними числово-аналітичними різницевиими рівняннями з (2.19) або (2.20) (у випадку квазіконформного відображення – умови (2.15), що забезпечують квазіортогональність сітки, запишуться відповідними рівняннями з (2.35)), де $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$.

Формули для наближеного знаходження інваріанта відображення γ і фільтраційної витрати у випадку конформного відображення мають вигляд (2.21) і (2.22) відповідно (у випадку квазіконформного – (2.36) і (2.37)).

Розв'язки відповідних різницевиих задач знаходимо шляхом поетапної параметризації інваріанту відображення γ криволінійного паралелепіпеда G_z^2 / Γ , координат граничних та внутрішніх вузлів шуканої гідродинамічної сітки G_z^γ за наведеними у п. 2.1.2 і 2.1.4 алгоритмами.

2.1.6. Узагальнення алгоритмів для випадку одношарових двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними поверхнями

Для випадку двозв'язної криволінійної області G_z^3 [72], обмеженої двома замкнутими гладкими поверхнями: $S_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ – внутрішня, $S^* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$ – зовнішня (рис. 2.3), крайові умови (2.2) – (2.4) фільт-

раційної задачі (2.1) – (2.4) матимуть вигляд:

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*.$$

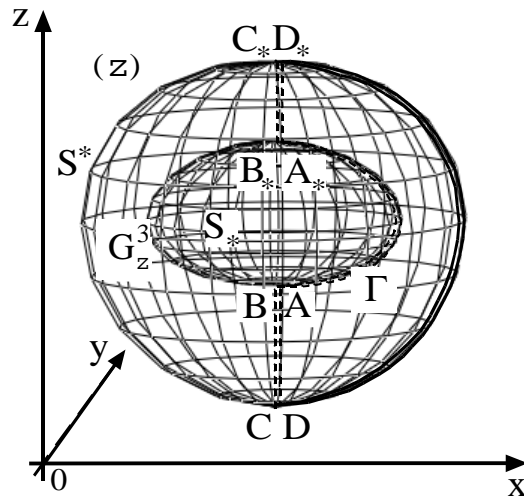


Рис. 2.3. Просторова фізична область G_z^3 з розрізом Γ

Аналогічно до попереднього, шляхом фіксації на внутрішньому контурі S_* деякої точки A та виконання умовного розрізу Γ вздовж відповідних поверхонь течії (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно дальній та ближній береги розрізу), фільтраційну задачу зведено до розв’язування більш загальної прямої крайової задачі на побудову просторового аналогу конформного (квазіконформного) відображення однозв’язної області $G_z^3 \setminus \Gamma$ на прямокутний паралелепіпед G_w (рис. 2.1 б).

Для випадку відшукування гідродинамічної сітки руху рідини у ізотропному (анізотропному) водонасиченому пористому середовищі просторовий аналог оберненої крайової задачі на конформне (квазіконформне) відображення $G_w \rightarrow G_z^3 \setminus \Gamma$ при невідомих значеннях параметрів Q_* , Q^* і повної фільтраційної витрати Q та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ складається із системи (2.11) (у випадку квазіконформного відображення (2.14)), умов:

$$\left\{ \begin{array}{l}
f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\
f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\
x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), \quad y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \\
z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \\
\lim_{\psi \rightarrow 0+0} x'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x'_\psi, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y'_\psi, \\
\lim_{\psi \rightarrow 0+0} z'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z'_\psi, \\
x(\varphi, \psi, 0) = x(\varphi, \psi, Q^*), \quad y(\varphi, \psi, 0) = y(\varphi, \psi, Q^*), \\
z(\varphi, \psi, 0) = z(\varphi, \psi, Q^*), \\
\lim_{\eta \rightarrow 0+0} x'_\eta = \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} x'_\eta, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0+0} y'_\eta = \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} y'_\eta, \\
\lim_{\eta \rightarrow 0+0} z'_\eta = \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} z'_\eta.
\end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
0 < \psi < Q_*, \quad 0 < \eta < Q^*, \\
\varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \eta < Q^*, \quad (2.45) \\
\varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q_*
\end{array}$$

та відповідних умов з (2.13), що забезпечують ортогональність ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (у випадку квазіконформного відображення – з (2.15), що забезпечують квазіортогональність ліній течії та квазіеквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області), де $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$ [78].

Далі, аналогічно п. 2.1.2 і 2.1.4, в області G_w будемо рівномірну ортогональну сітку G_w^γ . Як і в п. 2.1.5, ліво- і правосторонні різницеві аналоги рівнянь (2.9) у рівномірній сітковій області (при відповідності кутових точок) матимуть вигляд (2.16), (2.17) (у випадку квазіконформного відображення (2.33), (2.34)), а умови (2.45), які визначають фізичну область G_z^3 , апроксимуємо точково-різницевиими рівняннями:

$$\left\{ \begin{array}{l}
f_*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, \quad f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
f_{**}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, \quad f^{**}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
x_{i,j,0} = x_{i,j,l+1}, \quad y_{i,j,0} = y_{i,j,l+1}, \quad z_{i,j,0} = z_{i,j,l+1}, \quad x_{i,j,1} - x_{i,j,0} = \\
= x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l}, \quad y_{i,j,1} - y_{i,j,0} = y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l}, \quad z_{i,j,1} - z_{i,j,0} = \\
= z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}, \quad x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, \quad y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, \quad z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\
x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, \quad y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\
z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
\end{array} \right.$$

а умови (2.13), що забезпечують ортогональність сітки, записуються відповідними числово-аналітичними різницевиими рівняннями з (2.19) або (2.20) (у випадку квазіконформного відображення – умови (2.15), що забезпечують квазіортогональність сітки, запишуться відповідними рівняннями з (2.35)), де $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$.

Формули для наближеного знаходження інваріанта відображення γ і фільтраційної витрати у випадку конформного відображення, як і п. 2.1.5, мають вигляд (2.21) і (2.22) відповідно (у випадку квазіконформного – (2.36) і (2.37)).

Розв'язки відповідних різницевих задач знаходимо шляхом поетапної параметризації інваріанту відображення γ криволінійного паралелепіпеда G_z^3 / Γ , координат граничних та внутрішніх вузлів шуканої гідродинамічної сітки G_z^γ за наведеними у п. 2.1.2 і 2.1.4 алгоритмами.

Зауважимо також, що запропонована методика поширюється і на розв'язання такого роду задач у областях більш складної геометрії, багатозв'язних областях, врахування залежності коефіцієнта фільтрації від зміни концентрації розчинної речовини в кожній точці області фільтрації внаслідок її взаємодії із скелетом пористого середовища, зміни градієнта напору з часом $\kappa = \kappa(x, y, z, U(x, y, z, t - \tau), \text{grad}\phi)$ [16, 109, 118].

2.1.7. Постановка задачі і реалізація алгоритму її числового розв'язання для випадку однозв'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії

Наведені у п. 2.1.2 і 2.1.4 алгоритми поширено на випадки моделювання ідеальних і квазіідеальних течій у модельних однозв'язних криволінійних областях G_z^4 [77], обмежених гладкими, ортогональними (квазіортогональними) між собою по лініях перетину, двома екіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями $S_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ і поверхнею течії $S^{**} = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$ (рис. 2.4). При цьому крайові умови (2.2) – (2.4) фільтраційної задачі (2.1) – (2.4) матимуть вигляд:

$$\phi|_{S_*} = \phi_*, \quad \phi|_{S^*} = \phi^*, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S^{**}} = 0. \quad (2.46)$$

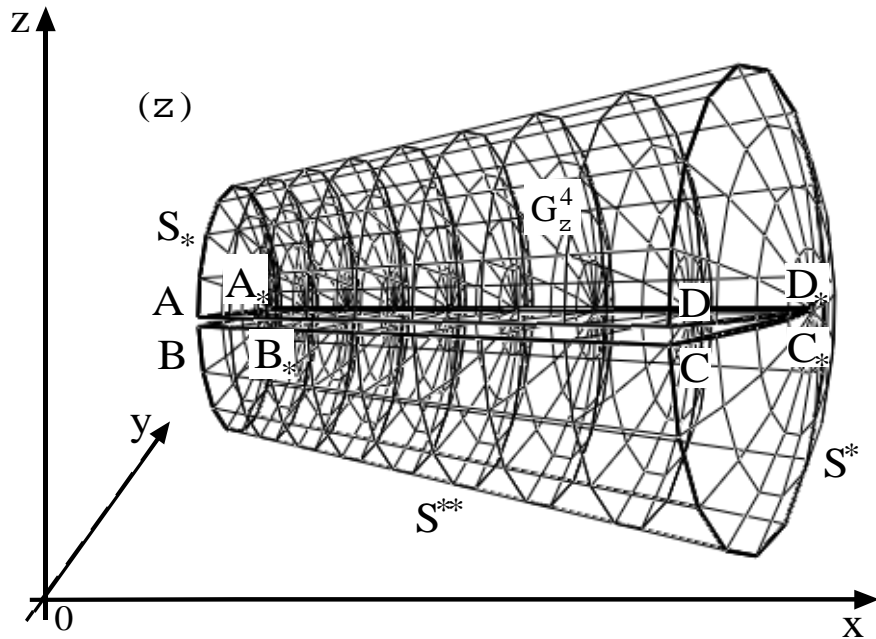


Рис. 2.4. Просторова фізична область G_z^4 з розрізом

Вибравши довільну точку $A = B \in S_* \cap S^{**}$, проводимо деякий умовний розріз $\Gamma_* \in S_*$, що сполучає дану точку із деякою точкою $A_* = B_* \in S_*$. Через точку $A_* = B_*$ проводимо деякий умовний розріз $\Gamma_{0*} \in S_*$ (у певному сенсі впоперек розрізу Γ_*). Дані два розрізи породжують двох типів поверхні течії S_0 і S^0 . Через Γ^* і Γ_0^* позначимо відповідні образи розрізів Γ_* і Γ_{0*} в S^* (а саме $\Gamma^* = S_0 \cap S^*$, $\Gamma_0^* = S^0 \cap S^*$), а через $C, D, C_*, D_* \in S^*$ відповідні B, A, B_*, A_* точки. Це дозволяє задачу (2.1), (2.46), аналогічно до п. 2.1.5, 2.1.6, замінити більш загальною задачею на побудову просторового аналога конформного (квазіконформного) відображення однозв'язної області $G_z^4 \setminus (S_0 \cup S^0)$ (“сильно” криволінійного паралелепіпеда $ABCD A_* B_* C_* D_*$) на відповідну область комплексного потенціалу (квазіпотенціалу) G_w (рис. 2.1 б).

Відповідна обернена крайова задача на знаходження просторового аналогу квазіконформного (конформного) відображення $G_w \rightarrow G_z^4 \setminus (S_0 \cup S_0^0)$ (при невідомих значеннях параметрів Q_*, Q^*) та наступного “склеювання” берегів умовного розрізу Γ описується системою рівнянь (2.11) (або (2.14) у випадку конформного відображення) з крайовими умовами:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \\ z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x'_\psi, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y'_\psi, \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z'_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z'_\psi, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \eta < Q^*, \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_* \end{array}$$

та умовами, що забезпечують квазіортогональність ліній течії та квазіеквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (у випадку конформного відображення умови ортогональності в околах ділянок границі області G_z), які отримуються аналогічно до п. 2.1.5. Розв'язок відповідної різницевої задачі знаходимо аналогічно до п. 2.1.5.

Вище запропоновано один із варіантів побудови двох сімейств поверхонь течії, які в перерізі породжують всеможливі лінії течії – траєкторії руху частинок. Безумовно, що існує нескінченна кількість інших варіантів, зокрема, можна, виходячи лише із одного розрізу Γ_* , що породжує один із класів таких поверхонь течії, іншу сім'ю – породжувати деякими майже замкненими лініями, що “огортають” точку $A_* = B_*$.

2.1.8. Побудова полів швидкостей у ізотропних пористих середовищах – одно- та двозв'язних модельних областях, обмежених еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії

Наведемо спочатку комплекс формул для знаходження величин швидкостей у випадку однорідного ізотропного середовища [82]. Для одержаних вузлів гідродинамічної сітки, знайдених для області G_z^1 за описаним у п. 2.1.2 алгоритмом, на основі рівняння руху з (2.1) величини швидкості знаходимо за такими різницевими формулами:

– у внутрішніх вузлах сітки області G_z^1 :

$$v_{i,j,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.47)$$

$$v_{x_{i,j,k}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y_{i,j,k}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z_{i,j,k}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right),$$

$$\begin{aligned} J_{i,j,k} = & (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \times \\ & \times (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \times \\ & \times (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\ & - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}); \end{aligned}$$

– у внутрішніх вузлах граней ABB_*A_* , CDD_*C_* , ADD_*A_* , BCC_*B_* , $ABCD$ та $A_*B_*C_*D_*$ відповідно:

$$v_{0,j,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{0,j,k}}^2 + v_{y_{0,j,k}}^2 + v_{z_{0,j,k}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.48)$$

$$v_{x_{0,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) - (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y_{0,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z_{0,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) - (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k}) \right),$$

$$\begin{aligned} J_{0,j,k} = & (x_{1,j,k} - x_{0,j,k})(y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) + (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(y_{1,j,k} - y_{0,j,k}) \times \\ & \times (z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) + (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1}) \times \\ & \times (y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - (x_{1,j,k} - x_{0,j,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) - \\ & - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{1,j,k} - y_{0,j,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}); \end{aligned}$$

$$v_{n+1,j,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,j,k}}^2 + v_{y_{n+1,j,k}}^2 + v_{z_{n+1,j,k}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.49)$$

$$v_{x_{n+1,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}} \left((y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) - (y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}), v_{y_{n+1,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}} \left((x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) - \right. \\
& \left. - (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) \right), v_{z_{n+1,j,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}} \left((x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}) \times \right. \\
& \times (y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1}) - (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k}) \Big), J_{n+1,j,k} = (x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) + (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k}) \times \\
& \times (z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) + (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k})(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) - \\
& - (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) - (x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k})(y_{n+1,j,k+1} - \\
& - y_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) - (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k})(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}); \\
& v_{i,0,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,0,k}}^2 + v_{y_{i,0,k}}^2 + v_{z_{i,0,k}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,0,k}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}} \left((y_{i,1,k} - y_{i,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}) - (y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) \right), \\
v_{y_{i,0,k}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}} \left((x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) - (x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}) \right), v_{z_{i,0,k}} = \\
&= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}} \left((x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1}) - (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) \right), J_{i,0,k} = \\
&= (x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k})(y_{i,1,k} - y_{i,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}) + (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k}) \times \\
& \times (z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) + (x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k}) - (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}) \times \\
& \times (y_{i,1,k} - y_{i,0,k})(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k}) - (x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) - \\
& - (x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}); \\
& v_{i,m+1,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,m+1,k}}^2 + v_{y_{i,m+1,k}}^2 + v_{z_{i,m+1,k}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{2.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,m+1,k}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,k}} \left((y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) - (y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}) \times \right. \\
& \times (z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) \Big), v_{y_{i,m+1,k}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,k}} \left((x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) - (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}) \times \right. \\
& \times (z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) \Big), v_{z_{i,m+1,k}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,k}} \left((x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) \right), J_{i,0,k} = (x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k})(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) + (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) + \\
& + (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1})(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1}) \times \\
& \times (y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k})(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) - (x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}) \times \\
& \times (z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) - (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}); \\
& v_{i,j,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,j,0}}^2 + v_{y_{i,j,0}}^2 + v_{z_{i,j,0}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,j,0}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,0}} \left((y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) - (y_{i,j,1} - y_{i,j,0})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) \right), \\
v_{y_{i,j,0}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,0}} \left((x_{i,j,1} - x_{i,j,0})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) - (x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) \right), \quad v_{z_{i,j,0}} = \\
&= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,0}} \left((x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(y_{i,j,1} - y_{i,j,0}) - (x_{i,j,1} - x_{i,j,0})(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0}) \right), \quad J_{i,j,0} = \\
&= (x_{i+1,j,0} - x_{i-1,j,0})(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) + (x_{i,j,1} - x_{i,j,0})(y_{i+1,j,0} - y_{i-1,j,0}) \times \\
&\times (z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) + (x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(y_{i,j,1} - y_{i,j,0})(z_{i+1,j,0} - z_{i-1,j,0}) - (x_{i,j,1} - x_{i,j,0}) \times \\
&\times (y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})(z_{i+1,j,0} - z_{i-1,j,0}) - (x_{i+1,j,0} - x_{i-1,j,0})(y_{i,j,1} - y_{i,j,0})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) - \\
&- (x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(y_{i+1,j,0} - y_{i-1,j,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,0}); \\
& v_{i,j,l+1} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,j,l+1}}^2 + v_{y_{i,j,l+1}}^2 + v_{z_{i,j,l+1}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,j,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,l+1}} \left((y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}) - (y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l})(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) \right), \\
v_{y_{i,j,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,l+1}} \left((x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l})(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) - (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}) \right), \\
v_{z_{i,j,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,l+1}} \left((x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l}) - (x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l})(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1}) \right), \\
J_{i,j,l+1} &= (x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1})(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}) + (x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l}) \times \\
&\times (y_{i+1,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1})(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) + (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l})(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1}) - \\
&- (x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l})(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1})(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1}) - (x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1})(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l}) \times \\
&\times (z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) - (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(y_{i+1,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l});
\end{aligned}$$

– у внутрішніх вузлах ребер AB , CD , BC , AD , A_*B_* , C_*D_* , B_*C_* , A_*D_* , AA_* , BB_* , CC_* , DD_* :

$$v_{0,j,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{0,j,0}}^2 + v_{y_{0,j,0}}^2 + v_{z_{0,j,0}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} v_{x_{0,j,0}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,0}} \left((y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) - (y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) \right), \\ v_{y_{0,j,0}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,0}} \left((x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) - (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) \right), \quad v_{z_{0,j,0}} = \\ &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,0}} \left((x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0}) - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0}) \right), \quad J_{0,j,0} = \\ &= (x_{1,j,0} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) + (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{1,j,0} - y_{0,j,0}) \times \\ &\times (z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) + (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0}) \times \\ &\times (y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - (x_{1,j,0} - x_{0,j,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) - \\ &- (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{1,j,0} - y_{0,j,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}); \\ v_{n+1,j,0} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,j,0}}^2 + v_{y_{n+1,j,0}}^2 + v_{z_{n+1,j,0}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{x_{n+1,j,0}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,j,0}} \left((y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) - (y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0}) \times \right. \\ &\times (z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) \left. \right), \quad v_{y_{n+1,j,0}} = \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,j,0}} \left((x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - \right. \\ &- (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,j,0}} = \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,j,0}} \left((x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0}) \times \right. \\ &\times (y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0}) - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0}) \left. \right), \quad J_{n+1,j,0} = (x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0}) \times \\ &\times (y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) + (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) + \\ &+ (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0}) - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0}) \times \\ &\times (z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0}) - (x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0}) \times \\ &\times (y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}); \end{aligned}$$

$$v_{i,m+1,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,m+1,0}}^2 + v_{y_{i,m+1,0}}^2 + v_{z_{i,m+1,0}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} v_{x_{i,m+1,0}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,m+1,0}} \left((y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) - (y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) \right), \\ v_{y_{i,m+1,0}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,m+1,0}} \left((x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z_{i,m+1,0}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,m+1,0}} \left((x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) \right), \\
J_{i,m+1,0} &= (x_{i+1,m+1,0} - x_{i-1,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m+1,0}) + (x_{i,m+1,0} - x_{i,m+1,0}) \times \\
&\times (y_{i+1,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) + (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i+1,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) - \\
&- (x_{i,m+1,0} - x_{i,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i+1,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) - (x_{i+1,m+1,0} - x_{i-1,m+1,0}) \times \\
&\times (y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i+1,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m+1,0}); \\
v_{i,0,0} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,0,0}}^2 + v_{y_{i,0,0}}^2 + v_{z_{i,0,0}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,0,0}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,0,0}} \left((y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) - (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) \right), \quad v_{y_{i,0,0}} = \\
&= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,0,0}} \left((x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) \right), \quad v_{z_{i,0,0}} = 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,0,0}} \times \\
&\times \left((x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0}) - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) \right), \quad J_{i,0,0} = (x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0}) \times \\
&\times (y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) + (x_{i,1,0} - x_{i,0,0}) \times \\
&\times (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - z_{i-1,0,0}) - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - z_{i-1,0,0}) - (x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0}) \times \\
&\times (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}); \\
v_{0,j,l+1} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{0,j,l+1}}^2 + v_{y_{0,j,l+1}}^2 + v_{z_{0,j,l+1}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{0,j,l+1}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,l+1}} \left((y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) - (y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) \right), \\
v_{y_{0,j,l+1}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,l+1}} \left((x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) \right), \\
v_{z_{0,j,l+1}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,j,l+1}} \left((x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) - (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) \right), \\
J_{0,j,l+1} &= (x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l}) \times \\
&\times (y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) + (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - \\
&- (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - (x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) \times \\
&\times (z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}); \\
v_{n+1,j,l+1} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,j,l+1}}^2 + v_{y_{n+1,j,l+1}}^2 + v_{z_{n+1,j,l+1}}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{n+1,j,l+1}} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} \left((y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) - (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l}) \right) \times \\
&\times (z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}), \quad v_{y_{n+1,j,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} \left((x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - \right. \\
&- (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,j,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} \left((x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1}) \times \right. \\
&\times (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l}) - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1}) \left. \right), \quad J_{n+1,j,l+1} = \\
&= (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) + (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l}) \times \\
&\times (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) + (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l}) \times \\
&\times (z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) - \\
&- (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1}) \times \\
&\times (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}); \\
v_{i,m+1,l+1} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,m+1,l+1}}^2 + v_{y_{i,m+1,l+1}}^2 + v_{z_{i,m+1,l+1}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{i,m+1,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) - (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l}) \right) \times \\
&\times (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}), \quad v_{y_{i,m+1,l+1}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - \right. \\
&- (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) \left. \right), \quad v_{z_{i,m+1,l+1}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l}) \times \right. \\
&\times (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l}) \left. \right), \quad J_{i,m+1,l+1} = (x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1}) \times \\
&\times (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) + (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i+1,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1}) \times \\
&\times (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) + (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - \\
&- (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - (x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1}) \times \\
&\times (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i+1,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1}) \times \\
&\times (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}); \\
v_{i,0,l+1} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,0,l+1}}^2 + v_{y_{i,0,l+1}}^2 + v_{z_{i,0,l+1}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$v_{x_{i,0,l+1}} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,l+1}} \left((y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) - (y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) \right),$$

$$\begin{aligned}
v_{y_{i,0,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,0,l+1}} \left((x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) \right), \\
v_{z_{i,0,l+1}} &= 2 \frac{\Delta\phi}{J_{i,0,l+1}} \left((x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l}) - (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1}) \right), \\
J_{i,0,l+1} &= (x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) + (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l}) \times \\
&\times (y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) + (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - \\
&- (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - (x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l}) \times \\
&\times (z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}); \\
v_{0,0,k} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{0,0,k}}^2 + v_{y_{0,0,k}}^2 + v_{z_{0,0,k}}^2}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{2.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{0,0,k}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,0,k}} \left((y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) - (y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) \right), \\
v_{y_{0,0,k}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,0,k}} \left((x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) \right), \\
v_{z_{0,0,k}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,0,k}} \left((x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1}) - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k}) \right), \\
J_{0,0,k} &= (x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) + (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k}) \times \\
&\times (z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) + (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1}) \times \\
&\times (y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - (x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - \\
&- (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}); \\
v_{0,m+1,k} &= \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{0,m+1,k}}^2 + v_{y_{0,m+1,k}}^2 + v_{z_{0,m+1,k}}^2}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{2.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{0,m+1,k}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,k}} \left((y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) - (y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1}) \times \right. \\
&\times (z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) \left. \right), \quad v_{y_{0,m+1,k}} = \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,k}} \left((x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - \right. \\
&- (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) \left. \right), \quad v_{z_{0,m+1,k}} = \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,k}} \left((x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k}) \times \right. \\
&\times (y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1}) - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) \left. \right), \quad J_{0,m+1,k} = (x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k}) \times \\
&\times (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) + (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) + (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - \\
& - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - (x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k}) \times \\
& \times (y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}); \\
& v_{n+1,m+1,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,m+1,k}}^2 + v_{y_{n+1,m+1,k}}^2 + v_{z_{n+1,m+1,k}}^2}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{n+1,m+1,k}} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) - (y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) \left. \right), \quad v_{y_{n+1,m+1,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - \right. \\
& - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,m+1,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k}) \times \right. \\
& \times (y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1}) - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) \left. \right), \quad J_{n+1,m+1,k} = \\
& = (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) + (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1}) \times \\
& \times (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) + (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1}) \times \\
& \times (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - \\
& - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}); \\
& v_{n+1,0,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,0,k}}^2 + v_{y_{n+1,0,k}}^2 + v_{z_{n+1,0,k}}^2}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{n+1,0,k}} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) - (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) \left. \right), \quad v_{y_{n+1,0,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - \right. \\
& - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,0,k}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k}) \times \right. \\
& \times (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1}) - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) \left. \right), \quad J_{n+1,0,k} = (x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) + (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k}) \times \\
& \times (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) + (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - \\
& - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - (x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k}) \times
\end{aligned}$$

$$\times (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1});$$

– у вершинах $A, B, C, D, A_*, B_*, C_*$ та D_* :

$$v_{0,0,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x0,0,0}^2 + v_{y0,0,0}^2 + v_{z0,0,0}^2}, \quad (2.66)$$

$$v_{x0,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \left((y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) - (y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) \right), \quad v_{y0,0,0} =$$

$$= \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \left((x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) \right), \quad v_{z0,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \times$$

$$\times \left((x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0}) - (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0}) \right), \quad J_{0,0,0} = (x_{1,0,0} - x_{0,0,0}) \times$$

$$\times (y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) + (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) + (x_{0,1,0} - x_{0,0,0}) \times$$

$$\times (y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) - (x_{1,0,0} - x_{0,0,0}) \times$$

$$\times (y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0});$$

$$v_{0,m+1,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x0,m+1,0}^2 + v_{y0,m+1,0}^2 + v_{z0,m+1,0}^2}, \quad (2.67)$$

$$v_{x0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) - (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) \right),$$

$$v_{y0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) \right),$$

$$v_{z0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) - (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) \right),$$

$$J_{0,m+1,0} = (x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) + (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0}) \times$$

$$\times (y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) + (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) -$$

$$- (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) - (x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) \times$$

$$\times (z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0});$$

$$v_{n+1,m+1,0} = \kappa \cdot \sqrt{v_{xn+1,m+1,0}^2 + v_{yn+1,m+1,0}^2 + v_{zn+1,m+1,0}^2}, \quad (2.68)$$

$$v_{xn+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} \left((y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) - (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) \right) \times$$

$$\times (z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}), \quad v_{yn+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} \left((x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) -$$

$$- (x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) \right), \quad v_{zn+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} \left((x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0} \right) - \left(x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0} \right) \left(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0} \right) \Big), J_{n+1,m+1,0} = \\
& = \left(x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0} \right) \left(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0} \right) \left(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0} \right) + \left(x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0} \right) \times \\
& \times \left(y_{n+1,m+1,0} - y_{n,m+1,0} \right) \left(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0} \right) + \left(x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0} \right) \left(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0} \right) \times \\
& \times \left(z_{n+1,m+1,0} - z_{n,m+1,0} \right) - \left(x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0} \right) \left(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0} \right) \left(z_{n+1,m+1,0} - z_{n,m+1,0} \right) - \\
& - \left(x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0} \right) \left(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0} \right) \left(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0} \right) - \left(x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0} \right) \times \\
& \times \left(y_{n+1,m+1,0} - y_{n,m+1,0} \right) \left(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0} \right);
\end{aligned}$$

$$v_{n+1,0,0} = \mathbf{K} \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,0,0}}^2 + v_{y_{n+1,0,0}}^2 + v_{z_{n+1,0,0}}^2}, \quad (2.69)$$

$$v_{x_{n+1,0,0}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left(\left(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0} \right) - \left(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0} \right) \right),$$

$$v_{y_{n+1,0,0}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left(\left(x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0} \right) - \left(x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0} \right) \right),$$

$$v_{z_{n+1,0,0}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left(\left(x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0} \right) \left(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0} \right) - \left(x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0} \right) \left(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
J_{n+1,0,0} & = \left(x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0} \right) \left(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0} \right) + \left(x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0} \right) \times \\
& \times \left(y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0} \right) \left(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0} \right) + \left(x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0} \right) \left(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0} \right) - \\
& - \left(x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0} \right) \left(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0} \right) - \left(x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0} \right) \left(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0} \right) \times \\
& \times \left(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0} \right) - \left(x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0} \right) \left(y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0} \right) \left(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0} \right);
\end{aligned}$$

$$v_{0,0,l+1} = \mathbf{K} \cdot \sqrt{v_{x_{0,0,l+1}}^2 + v_{y_{0,0,l+1}}^2 + v_{z_{0,0,l+1}}^2}, \quad (2.70)$$

$$v_{x_{0,0,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left(\left(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \left(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l} \right) - \left(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l} \right) \left(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) \right),$$

$$v_{y_{0,0,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left(\left(x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l} \right) \left(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) - \left(x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l} \right) \right),$$

$$v_{z_{0,0,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left(\left(x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l} \right) - \left(x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l} \right) \left(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
J_{0,0,l+1} & = \left(x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \left(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l} \right) + \left(x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l} \right) \left(y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \times \\
& \times \left(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) + \left(x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l} \right) \left(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) - \left(x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l} \right) \times \\
& \times \left(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \left(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) - \left(x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l} \right) \left(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1} \right) - \\
& - \left(x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1} \right) \left(y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1} \right) \left(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l} \right);
\end{aligned}$$

$$v_{0,m+1,l+1} = \mathbf{K} \cdot \sqrt{v_{x_{0,m+1,l+1}}^2 + v_{y_{0,m+1,l+1}}^2 + v_{z_{0,m+1,l+1}}^2}, \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} v_{x_{0,m+1,l+1}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) - (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l}) \right. \\ &\times (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) \left. \right), \quad v_{y_{0,m+1,l+1}} = \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) \right. \\ &- (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) \left. \right), \quad v_{z_{0,m+1,l+1}} = \frac{\Delta\phi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1}) \right. \\ &\times (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l}) - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) \left. \right), \quad J_{0,m+1,l+1} = (x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1}) \times \\ &\times (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1}) \times \\ &\times (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) - \\ &- (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) - (x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1}) \times \\ &\times (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1}) \times \\ &\times (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}); \end{aligned}$$

$$v_{n+1,m+1,l+1} = \mathbf{K} \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,m+1,l+1}}^2 + v_{y_{n+1,m+1,l+1}}^2 + v_{z_{n+1,m+1,l+1}}^2}, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} v_{x_{n+1,m+1,l+1}} &= \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,m+1,l+1}} \left((y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) \right. \\ &\times (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1}) \left. \right), \quad v_{y_{n+1,m+1,l+1}} = \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,m+1,l+1}} \left((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1}) \right. \\ &- (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,m+1,l+1}} = \frac{\Delta\phi}{J_{n+1,m+1,l+1}} \left((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1}) \right. \\ &\times (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1}) \left. \right), \quad J_{n+1,m+1,l+1} = \\ &= (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l}) \times \\ &\times (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1}) + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) \times \\ &\times (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1}) - \\ &- (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1})(x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1}) \times \\ &\times (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}); \end{aligned}$$

$$v_{n+1,0,l+1} = \mathbf{K} \cdot \sqrt{v_{x_{n+1,0,l+1}}^2 + v_{y_{n+1,0,l+1}}^2 + v_{z_{n+1,0,l+1}}^2}, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
v_{x_{n+1,0,l+1}} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}} \left((y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) - (y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l}) \times \right. \\
&\times (z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) \left. \right), \quad v_{y_{n+1,0,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}} \left((x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) - \right. \\
&- (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) \left. \right), \quad v_{z_{n+1,0,l+1}} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}} \left((x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1}) \times \right. \\
&\times (y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l}) - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1}) \left. \right), \quad J_{n+1,0,l+1} = (x_{n+1,0,l+1} - x_{n,0,l+1}) \times \\
&\times (y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) + (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1}) \times \\
&\times (z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) + (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1}) - \\
&- (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1}) - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n,0,l+1}) \times \\
&\times (y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) - (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1}) \times \\
&\times (z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}).
\end{aligned}$$

У випадку двозв'язної модельної області G_z^3 для одержаних координат вузлів динамічної сітки величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки знаходимо за формулою (2.47), у внутрішніх і граничних вузлах граней S_* , S^* , S_{**} , S^{**} – (2.48), (2.49), (2.52) – (2.55), (2.58), (2.59), у внутрішніх вузлах розрізу Γ як середнє значення величин, обрахованих за формулами (2.50), (2.51), у граничних вузлах розрізу Γ як середнє значення величин, обрахованих за формулами: (2.66), (2.67) для вершини A (B), (2.68), (2.69) – D (C), (2.70), (2.71) – A_* (B_*), (2.72), (2.73) – D_* (C_*), (2.56), (2.57) для лінії AD (BC), (2.60), (2.61) – A_*D_* (B_*C_*), (2.62), (2.63) – AA_* (BB_*), (2.64), (2.65) – DD_* (CC_*). Формули для обчислення величин швидкості у вузлах гідродинамічних сіток, отриманих для випадків модельних областей G_z^3 і G_z^4 , отримуються аналогічно.

2.1.9. Побудова квазіідеальних полів швидкостей у анізотропних пористих середовищах

Наведемо тепер комплекс формул для знаходження величин швидкостей у випадку однорідного анізотропного середовища [79]. Для одержаних

вузлів гідродинамічної сітки, знайдених для області G_z^1 за описаним у п. 2.1.4 алгоритмом, на основі рівняння руху з (2.1) величини швидкості знаходимо за такими різницевиими формулами:

$$\begin{aligned}
& \text{– у внутрішніх вузлах сітки } G_z^\gamma \text{ відповідно: } v_{i,j,k} = 2 \cdot \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{i,j+1,k} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_{i,j-1,k} \right) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + \kappa_{r,2} \cdot \left((x_{i,j,k+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - x_{i,j,k-1} \right) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - x_{i,j-1,k} \right) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) \right)^2 \right)^{0.5} / \left((x_{i+1,j,k} - \right. \\
& \left. - x_{i-1,j,k} \right) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \times \\
& \times (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - \\
& - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \times \\
& \times (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \Big), \quad i = \overline{1, n}, \\
& j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{– у внутрішніх вузлах граней } ABB_*A_*, CDD_*C_*, ADD_*A_*, BCC_*B_*, \\
& ABCD \text{ та } A_*B_*C_*D_* \text{ гідродинамічної сітки } G_z^\gamma: v_{0,j,k} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{0,j+1,k} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_{0,j-1,k} \right) (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) - (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) (z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) \right) + \kappa_{r,2} \cdot \left((x_{0,j,k+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - x_{0,j,k-1} \right) (z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k}) (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) \right) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{0,j+1,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - x_{0,j-1,k} \right) (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) - (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1}) (y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k}) \right) \right)^2 \right)^{0.5} / \left((x_{1,j,k} - \right. \\
& \left. - x_{0,j,k} \right) (y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k}) (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) + (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1}) (y_{1,j,k} - y_{0,j,k}) \times \\
& \times (z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) + (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k}) (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) (z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - (x_{0,j,k+1} - \\
& - x_{0,j,k-1}) (y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k}) (z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - (x_{1,j,k} - x_{0,j,k}) (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) (z_{0,j+1,k} - \\
& - z_{0,j-1,k}) - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k}) (y_{1,j,k} - y_{0,j,k}) (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) \Big), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},
\end{aligned}$$

$$v_{n+1,j,k} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k}) (z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) - (y_{n+1,j,k+1} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -y_{n+1,j,k-1} \left(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k} \right) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1}) \left(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k} \right) - \right. \\
& \left. - (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}) \left(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1} \right) \right) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}) \left(y_{n+1,j,k+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - y_{n+1,j,k-1} \right) - (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1}) \left(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k} \right) \right) \Big)^{0.5} / \left((x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k}) \times \right. \\
& \times \left(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k} \right) \left(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1} \right) + (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1}) \left(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k} \right) \times \\
& \times \left(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k} \right) + (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}) \left(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1} \right) \left(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k} \right) - \\
& - (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1}) \left(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k} \right) \left(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k} \right) - (x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k}) \times \\
& \times \left(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1} \right) \left(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k} \right) - (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}) \left(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k} \right) \times \\
& \times \left(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1} \right) \Big), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad v_{i,0,k} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1} \right) - (y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1}) \left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k} \right) \Big) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}) \times \right. \\
& \times \left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k} \right) - (x_{i,1,k} - x_{i,0,k}) \left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1} \right) \Big) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i,1,k} - x_{i,0,k}) \left(y_{i,0,k+1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - y_{i,0,k-1} \right) - (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}) \left(y_{i,1,k} - y_{i,0,k} \right) \right) \Big)^{0.5} / \left((x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k}) \left(y_{i,1,k} - y_{i,0,k} \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1} \right) + (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}) \left(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k} \right) \left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k} \right) + (x_{i,1,k} - x_{i,0,k}) \times \\
& \times \left(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1} \right) \left(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k} \right) - (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}) \left(y_{i,1,k} - y_{i,0,k} \right) \left(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k} \right) - \\
& - (x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k}) \left(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1} \right) \left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k} \right) - (x_{i,1,k} - x_{i,0,k}) \left(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k} \right) \times \\
& \times \left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1} \right) \Big), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \quad v_{i,m+1,k} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1} \right) - (y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}) \left(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k} \right) \Big) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{i,m+1,k+1} - \right. \\
& \left. - x_{i,m+1,k-1}) \left(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k} \right) - (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}) \left(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1} \right) \Big) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{i,m+1,k} - \right. \\
& \left. - x_{i,m,k}) \left(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1} \right) - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1}) \left(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k} \right) \right) \Big)^{0.5} / \\
& / \left((x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k}) \left(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k} \right) \left(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1} \right) + (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1}) \times \right. \\
& \times \left(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k} \right) \left(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k} \right) + (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}) \left(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1} \right) \times \\
& \times \left(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k} \right) - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1}) \left(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k} \right) \left(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k}\right)\left(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}\right)\left(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}\right) - \left(x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}\right) \times \\
& \times \left(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k}\right)\left(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,l}, \quad v_{i,j,0} = \Delta\varphi \times \\
& \times \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left(\left(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) - \left(y_{i,j,1} - y_{i,j,0} \right) \left(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0} \right) \right) + \right. \right. \\
& + \kappa_{r,2} \cdot \left(\left(x_{i,j,1} - x_{i,j,0} \right) \left(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0} \right) - \left(x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) \right) + \kappa_{r,3} \times \\
& \times \left. \left. \left(\left(x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0} \right) \left(y_{i,j,1} - y_{i,j,0} \right) - \left(x_{i,j,1} - x_{i,j,0} \right) \left(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0} \right) \right) \right)^2 \right)^{0.5} / \\
& / \left(\left(x_{i+1,j,0} - x_{i-1,j,0} \right) \left(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) + \left(x_{i,j,1} - x_{i,j,0} \right) \left(y_{i+1,j,0} - y_{i-1,j,0} \right) \times \right. \\
& \times \left(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0} \right) + \left(x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0} \right) \left(y_{i,j,1} - y_{i,j,0} \right) \left(z_{i+1,j,0} - z_{i-1,j,0} \right) - \left(x_{i,j,1} - x_{i,j,0} \right) \times \\
& \times \left(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i+1,j,0} - z_{i-1,j,0} \right) - \left(x_{i+1,j,0} - x_{i-1,j,0} \right) \left(y_{i,j,1} - y_{i,j,0} \right) \left(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0} \right) - \\
& - \left. \left(x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0} \right) \left(y_{i+1,j,0} - y_{i-1,j,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) \right), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad v_{i,j,l+1} = \Delta\varphi \times \\
& \times \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left(\left(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) - \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l} \right) \left(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l} \right) \right) + \right. \right. \\
& + \kappa_{r,2} \cdot \left(\left(x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l} \right) \left(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1} \right) - \left(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) \right) + \\
& + \kappa_{r,3} \left. \left. \left(\left(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1} \right) \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l} \right) - \left(x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l} \right) \left(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \right) \right)^2 \right)^{0.5} / \\
& / \left(\left(x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1} \right) \left(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) + \left(x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l} \right) \left(y_{i+1,j,l+1} - \right. \right. \\
& - \left. y_{i-1,j,l+1} \right) \left(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1} \right) + \left(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1} \right) \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l} \right) \left(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1} \right) - \\
& - \left(x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l} \right) \left(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1} \right) - \left(x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1} \right) \left(y_{i,j,l+1} - \right. \\
& - \left. y_{i,j,l} \right) \left(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1} \right) - \left(x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1} \right) \left(y_{i+1,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) \right), \\
& i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m};
\end{aligned}$$

– у внутрішніх вузлах ребер AB , CD , BC , AD , A_*B_* , C_*D_* , B_*C_* , A_*D_* , AA_* , BB_* , CC_* , DD_* динамічної сітки G_z^γ відповідно $v_{0,j,0} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \times \right. \right.$
 $\times \left(\left(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) - \left(y_{0,j,1} - y_{0,j,0} \right) \left(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0} \right) \right) + \kappa_{r,2} \cdot \left(\left(x_{0,j,1} - \right. \right.$
 $\left. \left. - x_{0,j,0} \right) \left(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0} \right) - \left(x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) \right) + \kappa_{r,3} \cdot \left(\left(x_{0,j+1,0} - \right. \right.$

$$\begin{aligned}
& -x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0}) - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0}))^2)^{0.5} / ((x_{1,j,0} - x_{0,j,0}) \times \\
& \times (y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) + (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{1,j,0} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) + \\
& + (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0}) \times \\
& \times (z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - (x_{1,j,0} - x_{0,j,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) - (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0}) \times \\
& \times (y_{1,j,0} - y_{0,j,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0})), \quad j = \overline{1, m}, \quad v_{n+1,j,0} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{n+1,j+1,0} - \right. \\
& - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) - (y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0})) + \kappa_{r,2} \times \\
& \times ((x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0})) + \\
& + \kappa_{r,3} \cdot ((x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0}) - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - \\
& - y_{n+1,j-1,0}))^2)^{0.5} / ((x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) + \\
& + (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) + (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0}) \times \\
& \times (y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0}) - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,0} - \\
& - z_{n,j,0}) - (x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0}) \times \\
& \times (y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0})), \quad j = \overline{1, m}, \quad v_{i,m+1,0} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{i,m+1,0} - \right. \\
& - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) - (y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{i,m+1,1} - \\
& - x_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0})) + (\kappa_{r,3} \cdot (x_{i,m+1,0} - \\
& - x_{i,m,0})(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0}) - (x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}))^2)^{0.5} / ((x_{i+1,m+1,0} - \\
& - x_{i-1,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + (x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(y_{i+1,m+1,0} - \\
& - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) + (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i+1,m+1,0} - \\
& - z_{i-1,m+1,0}) - (x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i+1,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) - (x_{i+1,m+1,0} - \\
& - x_{i-1,m+1,0})(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i+1,m+1,0} - \\
& - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0})), \quad i = \overline{1, n}, \quad v_{i,0,0} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) - (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0})) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot ((x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - \\
& - (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0})) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot ((x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0}) - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0}) \times \\
& \times (y_{i,1,0} - y_{i,0,0})) \Big)^{0.5} / ((x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + (x_{i,0,1} - \\
& - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) + (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - \\
& - z_{i-1,0,0}) - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - z_{i-1,0,0}) - (x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0}) \times \\
& \times (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0})), \quad i = \overline{1, n}, \\
v_{0,j,l+1} &= \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\mathbf{K}_{r,1} \cdot ((y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) - (y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) \times \\
& \times (z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1})) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot ((x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - (x_{0,j+1,l+1} - \\
& - x_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l})) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot ((x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) - \\
& - (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})) \Big)^{0.5} / ((x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j+1,l+1} - \\
& - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) + \\
& + (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l}) \times \\
& \times (y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - (x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) \times \\
& \times (z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}), \\
j = \overline{1, m}, \quad v_{n+1,j,l+1} &= \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\mathbf{K}_{r,1} \cdot ((y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) - \\
& - (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1})) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot ((x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l}) \times \\
& \times (z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l})) + \mathbf{K}_{r,2} \times \\
& \times ((x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l}) - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j+1,l+1} - \\
& - y_{n+1,j-1,l+1})) \Big)^{0.5} / ((x_{n+1,j,l+1} - x_{n,j,l+1})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - \\
& - z_{n+1,j,l}) + (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) + \\
& + (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1}) - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1}) - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n,j,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - \\
& - y_{n+1,j,l}) (z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1}) \times \\
& \times (z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}), \quad j = \overline{1, m}, \quad v_{i,m+1,l+1} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1}) \times \right. \\
& \times (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) - (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{i,m+1,l+1} - \\
& - x_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l})) + \\
& + \kappa_{r,3} \cdot ((x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i,m+1,l+1} - \\
& - y_{i,m,l+1})) \left. \right)^{0.5} / ((x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) + \\
& + (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i+1,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) + (x_{i,m+1,l+1} - \\
& - x_{i,m,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l}) \times \\
& \times (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - (x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1}) \times \\
& \times (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(y_{i+1,m+1,l+1} - \\
& - y_{i-1,m+1,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}), \quad i = \overline{1, n}, \quad v_{i,0,l+1} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{i,1,l+1} - \\
& - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) - (y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l}) \times \right. \\
& \times (z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1}) \times \\
& \times (y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l}) - (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})) \left. \right)^{0.5} / ((x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1}) \times \\
& \times (y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) + (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,1,l+1} - \\
& - z_{i,0,l+1}) + (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l}) \times \\
& \times (y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - (x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l}) \times \\
& \times (z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}), \quad i = \overline{1, n}, \\
& v_{0,0,k} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) - (y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1}) \times \right. \\
& \times (z_{0,1,k} - z_{0,0,k})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - (x_{0,1,k} - x_{0,0,k}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) + \mathbf{\kappa}_{r,3} \cdot \left((x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1}) - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1}) \right. \\
& \times \left. (y_{0,1,k} - y_{0,0,k}) \right)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) + \right. \\
& + (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) + (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - \\
& - y_{0,0,k-1})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - \\
& - (x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k}) \times \\
& \times (z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}), k = \overline{1, l}, v_{0,m+1,k} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\mathbf{\kappa}_{r,1} \cdot ((y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) \times \right. \\
& \times (z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) - (y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k})) + \mathbf{\kappa}_{r,2} \times \\
& \times ((x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1})) + \\
& + \mathbf{\kappa}_{r,3} \cdot ((x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1}) - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1}) \times \\
& \times (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})) \Big)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - \right. \\
& - z_{0,m+1,k-1}) + (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) + (x_{0,m+1,k} - \\
& - x_{0,m,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1}) \times \\
& \times (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - (x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1}) \times \\
& \times (z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}), \\
& k = \overline{1, l}, v_{n+1,m+1,k} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\mathbf{\kappa}_{r,1} \cdot ((y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) - \right. \\
& - (y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k})) + \mathbf{\kappa}_{r,2} \cdot ((x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1}) \times \\
& \times (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1})) + \\
& + \mathbf{\kappa}_{r,3} \cdot ((x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1}) - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1}) \times \\
& \times (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})) \Big)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{n+1,m+1,k} - x_{n,m+1,k})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) + (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) \times \\
& \times (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) + (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z_{n,m+1,k}) - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n,m+1,k}) - \\
& - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n,m+1,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - (x_{n+1,m+1,k} - \\
& - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}), \quad k = \overline{1, l}, \quad v_{n+1,0,k} = \\
& = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) - (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - \\
& - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1})) + \kappa_{r,3} \cdot ((x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k+1} - \\
& - y_{n+1,0,k-1}) - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})) \left. \right)^{0.5} / ((x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) + (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k}) \times \\
& \times (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) + (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - \\
& - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - (x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k}) \times \\
& \times (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k}) \times \\
& \times (z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1})), \quad k = \overline{1, l};
\end{aligned}$$

– у вершинах $A, B, C, D, A_*, B_*, C_*$ та D_* сітки G_Z^y відповідно $v_{0,0,0} =$

$$\begin{aligned}
& = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) - (y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0})) + \right. \\
& + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0})) + \kappa_{r,3} \times \\
& \times ((x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0}) - (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0})) \left. \right)^{0.5} / ((x_{1,0,0} - \\
& - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) + (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - \\
& - z_{0,0,0}) + (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - \\
& - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) - (x_{1,0,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) - (x_{0,1,0} - \\
& - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0})), \quad v_{0,m+1,0} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) \times \right. \\
& \times (z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) - (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{0,m+1,1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_{0,m+1,0} \Big) (z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0}) (z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) \Big) + \mathbf{K}_{r,3} \times \\
& \times \left((x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0}) (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) - (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0}) (y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) \right)^2 \Big)^{0.5} / \\
& / \left((x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0}) (y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) (z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) + (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0}) \times \right. \\
& \times (y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0}) (z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) + (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0}) (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) \times \\
& \times (z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) - (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0}) (y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) (z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) - \\
& - (x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0}) (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) (z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0}) \times \\
& \times (y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0}) (z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) \Big), v_{n+1,m+1,0} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{n+1,m+1,0} - \right. \right. \right. \\
& - y_{n+1,m,0}) (z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) - (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0}) (z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) \Big) + \\
& + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0}) (z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) - (x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) \Big) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0}) (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0}) - \right. \\
& - (x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0}) (y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0}) \Big) \Big)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0}) \times \right. \\
& \times (y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0}) (z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) + (x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0}) (y_{n+1,m+1,0} - \\
& - y_{n,m+1,0}) (z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) + (x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0}) (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0}) \times \\
& \times (z_{n+1,m+1,0} - z_{n,m+1,0}) - (x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0}) (y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0}) (z_{n+1,m+1,0} - \\
& - z_{n,m+1,0}) - (x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0}) (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0}) (z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) - \\
& - (x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0}) (y_{n+1,m+1,0} - y_{n,m+1,0}) (z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) \Big), v_{n+1,0,0} = \\
& = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\mathbf{K}_{r,1} \cdot \left((y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0}) (z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}) - (y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0}) (z_{n+1,1,0} - \right. \right. \right. \\
& - z_{n+1,0,0}) \Big) + \mathbf{K}_{r,2} \cdot \left((x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0}) (z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) - (x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}) \Big) + \mathbf{K}_{r,3} \cdot \left((x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0}) (y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0}) - (x_{n+1,0,1} - \right. \\
& - x_{n+1,0,0}) (y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0}) \Big) \Big)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0}) (y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0}) (z_{n+1,0,1} - \right. \\
& - z_{n+1,0,0}) + (x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0}) (y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0}) (z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) + (x_{n+1,1,0} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0}) - (x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0}) \times \\
& \times (z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0}) - (x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0})(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) - \\
& - (x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0})(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}), v_{0,0,l+1} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \times \right. \\
& \times ((y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) - (y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1})) + \kappa_{r,2} \times \\
& \times ((x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) - (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l})) + \kappa_{r,3} \times \\
& \times ((x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l}) - (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}))) \left. \right)^{0.5} / \\
& / ((x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{1,0,l+1} - \\
& - y_{0,0,l+1})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) + (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l})(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) - \\
& - (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) - (x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - \\
& - y_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) - (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l})), \\
& v_{0,m+1,l+1} = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) - (y_{0,m+1,l+1} - \\
& - y_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) - \\
& - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l})) + \kappa_{r,3} \cdot ((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - \\
& - y_{0,m+1,l}) - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}))) \right)^{0.5} / ((x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1}) \times \\
& \times (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{1,m+1,l+1} - \\
& - y_{0,m+1,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l}) \times \\
& \times (z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{1,m+1,l+1} - \\
& - z_{0,m+1,l+1}) - (x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) - \\
& - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l})), v_{n+1,m+1,l+1} = \\
& = \Delta\Phi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 (\kappa_{r,1} \cdot ((y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - (y_{n+1,m+1,l+1} - \\
& - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m,l+1})) + \kappa_{r,2} \cdot ((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z_{n+1,m,l+1}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{n+1,m+1,l+1} - \right. \\
& -x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - \\
& \left. -y_{n+1,m,l+1}) \right)^2 \Big)^{0.5} / \left((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \right. \\
& -z_{n+1,m+1,l}) + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
& -z_{n+1,m,l+1}) + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
& -z_{n+1,m+1,l}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
& -z_{n+1,m,l+1}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
& -z_{n+1,m,l+1}) - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - \\
& \left. -z_{n+1,m+1,l}) \right), v_{n+1,0,l+1} = \Delta\varphi \cdot \left(\sum_{r=1}^3 \left(\kappa_{r,1} \cdot \left((y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - \right. \right. \right. \\
& -z_{n+1,0,l}) - (y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) \Big) + \kappa_{r,2} \cdot \left((x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l}) \times \right. \\
& \times (z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) - (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) \Big) + \kappa_{r,3} \cdot \left((x_{n+1,1,l+1} - \right. \\
& \left. -x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l}) - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1}) \right)^2 \Big)^{0.5} / \\
& / \left((x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) + (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l}) \times \right. \\
& \times (y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) + (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - \\
& -y_{n+1,0,l})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - \\
& -z_{n+1,0,l}) - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) - \\
& \left. - (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) \right).
\end{aligned}$$

Формули для обчислення величин швидкості у вузлах гідродинамічних сіток, отриманих для випадків модельних областей G_z^2 , G_z^3 і G_z^4 , отримуються аналогічно.

2.1.10. Результати числової реалізації розроблених алгоритмів

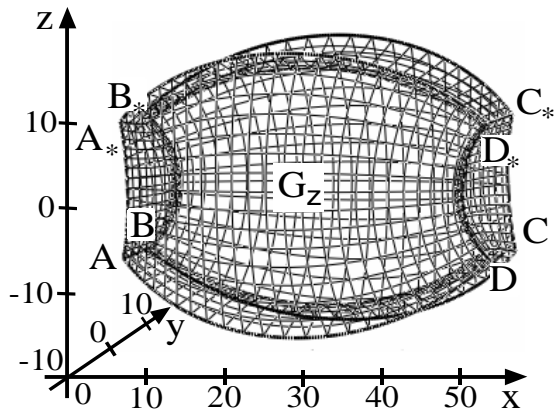
Алгоритми числової реалізації поставлених задач є досить складними, оскільки в них розв'язується кілька систем рівнянь різними числовими мето-

дами і тому при спробі довести їх збіжність (або отримати відповідні умови збіжності) виникають значні труднощі. Це ж стосується і оцінки похибок результатів, які отримуються в результаті розв'язування задач. Оцінити комп'ютерну збіжність і точність алгоритмів можна на тестових прикладах з наперед відомими розв'язками.

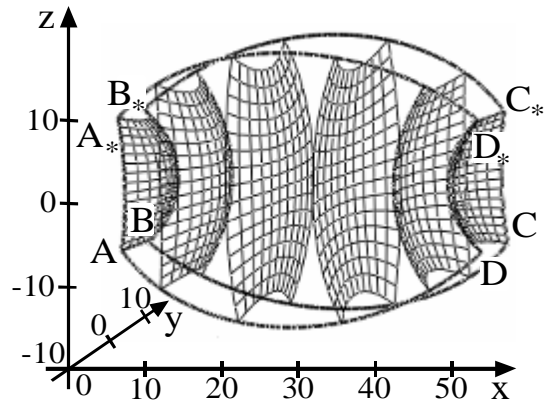
Для перевірки комп'ютерної збіжності і точності роботи алгоритму розв'язання різницевої задачі (2.16) – (2.24) (див. п. 2.1.2) проведено серію числових експериментів для області $G_z^{1,1}$, обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 2.6197848)^2 + y^2 + z^2 - 137.8525137$, $f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 + (x - 52.6197848)^2 - 137.8525137$, $f_3(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y - 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333$, $f_4(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y + 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 25) + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - 833.3333333z^2$ при $\kappa = 1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 3$. Результати розв'язання подані у табл. 2.1 і на рис. 2.5, 2.6, зокрема, на рис. 2.5 а зображено отриману в результаті обчислень динамічну сітку в області $G_z^{1,1}$, на рис. 2.5 б – екіпотенціальні поверхні $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i$ ($i = 0, 8, 16, 26, 34, 42$), на рис. 2.5 в, г – відповідно поверхні течії $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_i$ ($i = 0, 2, 4, 6, 8, 10$) і $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_i$ ($i = 0, 3, 7, 13, 16$).

Табл. 2.1. Результати розв'язання задачі для області $G_z^{1,1}$

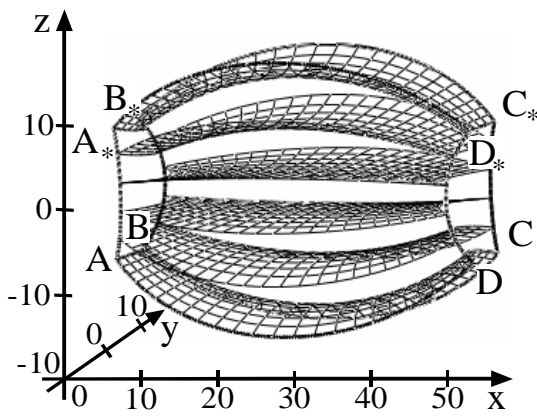
№	n	m	l	e	Q	d
1	41	9	15	0.00001	4.370431	0.026427
2	62	13	23	0.00001	4.379020	0.008746
3	82	17	31	0.00001	4.382182	0.003981
4	103	21	38	0.00001	4.383658	0.002126
5	122	25	46	0.00001	4.384507	0.001285
6	144	30	54	0.00001	4.385098	0.000532
7	164	34	61	0.00001	4.385405	0.000430
8	184	38	69	0.00001	4.385626	0.000382
9	205	42	76	0.00001	4.385782	0.000282
10	225	46	84	0.00001	4.385903	0.000215
11	246	50	91	0.00001	4.385992	0.000167



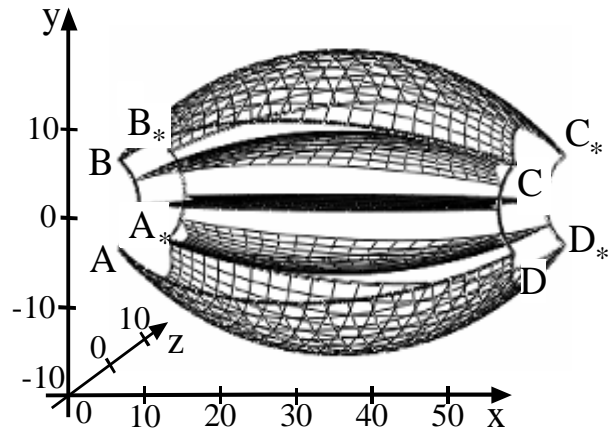
a)



б)

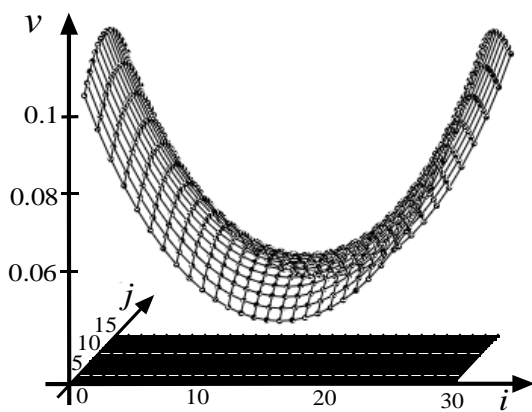


в)

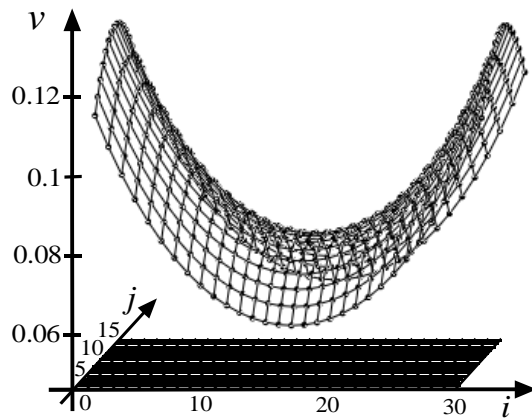


г)

Рис. 2.5. Криволінійна фізична область фільтрації $G_z^{1,1}$ (a) та відповідні їй еквіпотенціальні поверхні (б) і поверхні течії (в, г)



a)



б)

Рис. 2.6. Розподіл величин швидкості фільтрації відповідно вздовж поверхонь течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_0$ (a) і $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_7$ (б) для області $G_z^{1,1}$

Крім того, розраховані за тим самим алгоритмом гідродинамічні сітки відповідно для фізичних областей $G_z^{1,2}$: $f_1(x, y, z) = z$, $f_2(x, y, z) = (x - 25)^2 + y^2 + z^2 - 625$, $f_3(x, y, z) = (x + 60.818461)^2 + y^2 + z^2 - 6739.808207$, $f_4(x, y, z) = (x - 110.818461)^2 + y^2 + z^2 - 6739.808207$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x^2 - 50x + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - 80408.593694z^2$ при $\kappa=1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1.6$, і $G_z^{1,3}$: $f_1(x, y, z) = (x + 0.932868)^2 + y^2 + z^2 - 47.513644$, $f_2(x, y, z) = x - 25$, $f_3(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y - 14.4337577)^2 + z^2 - 833.333333$, $f_4(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y + 14.433757)^2 + z^2 - 833.333333$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 25) + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - 833.333333z^2$ при $\kappa=1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 2$ (рис. 2.7).

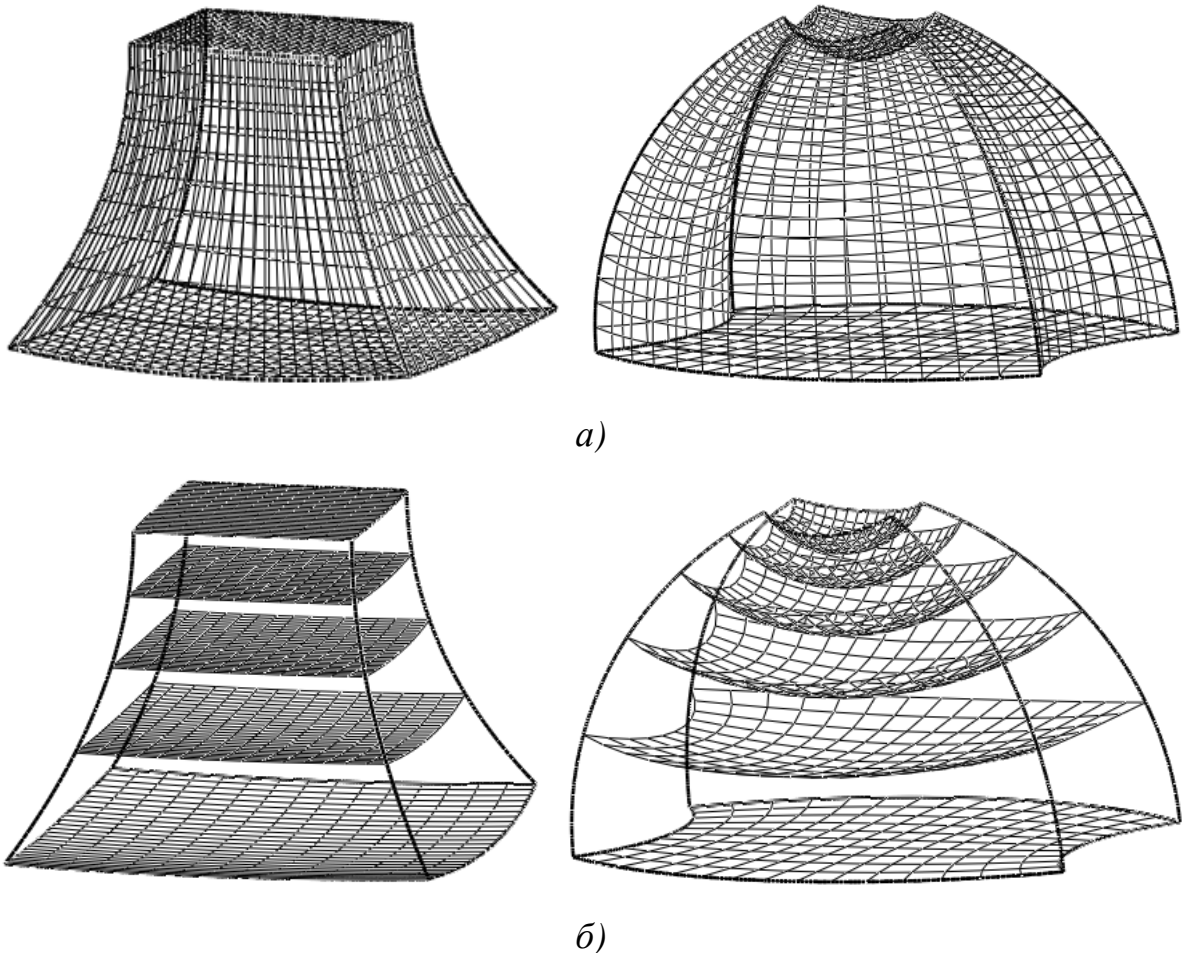
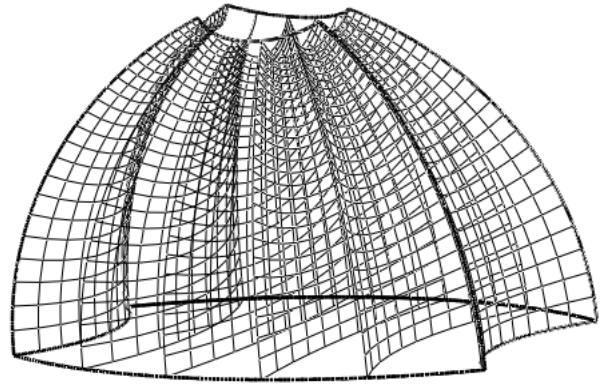
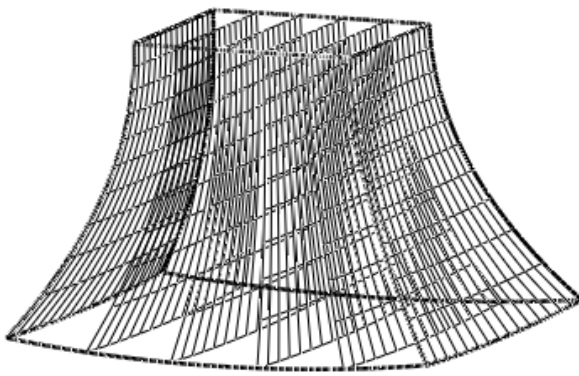
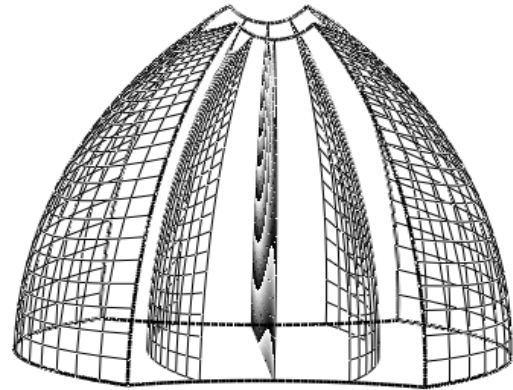
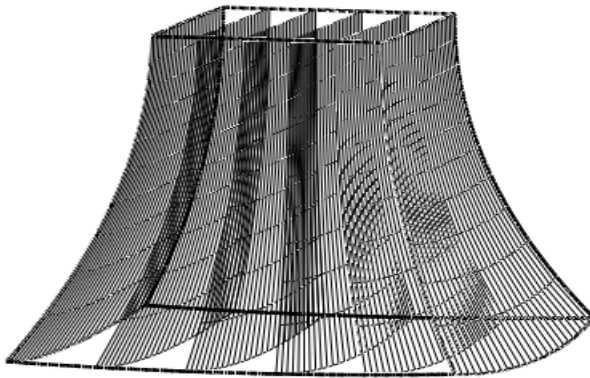


Рис. 2.7. Гідродинамічні сітки руху для фізичних областей $G_z^{1,2}$ і $G_z^{1,3}$ (а) та відповідні їм еквіпотенціальні поверхні (б) і поверхні течії (в, г)



в)



г)

Прод. рис. 2.7.

При моделюванні процесів руху рідин через пористі завантаження – модельні області, обмежені гладкими, ортогональними між собою по лініях перетину, екви- або квазіеквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, розроблені алгоритми дозволяють будувати ідеальні або квазіідеальні фільтраційні поля. Так, для фільтра конусоподібної форми із пористим завантаженням – модельної області $G_z^{4,1}$, обмеженої поверхнями $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, $f^{**}(x, y, z) = 7.5486322 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, при $\kappa = 5.6$ м/добу, $\sigma = 0.3$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 122.2$ (що відповідає середній швидкості руху води через завантаження фільтру $v_{сер} = 10$ м/год), $n = 32$, $m = 46$, $l = 10$, $\varepsilon = 0.00001$ отримано гідродинамічну сітку руху (рис. 2.8), обчислено поле швидкостей (рис. 2.9) і проведено ще розрахунок ряду характеристик, які подано у табл. 2.2, де DQ – абсолютна похибка величини Q (визначалася шляхом порівняння із точним розв'язком, побудованим за допомогою явно заданих функцій потенціалу та течії).

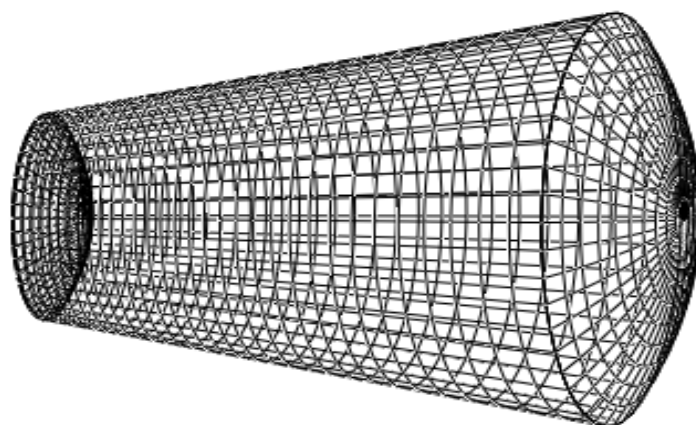


Рис. 2.8. Гідродинамічна сітка для фільтрувальної установки конусоподібної форми із пористим завантаженням

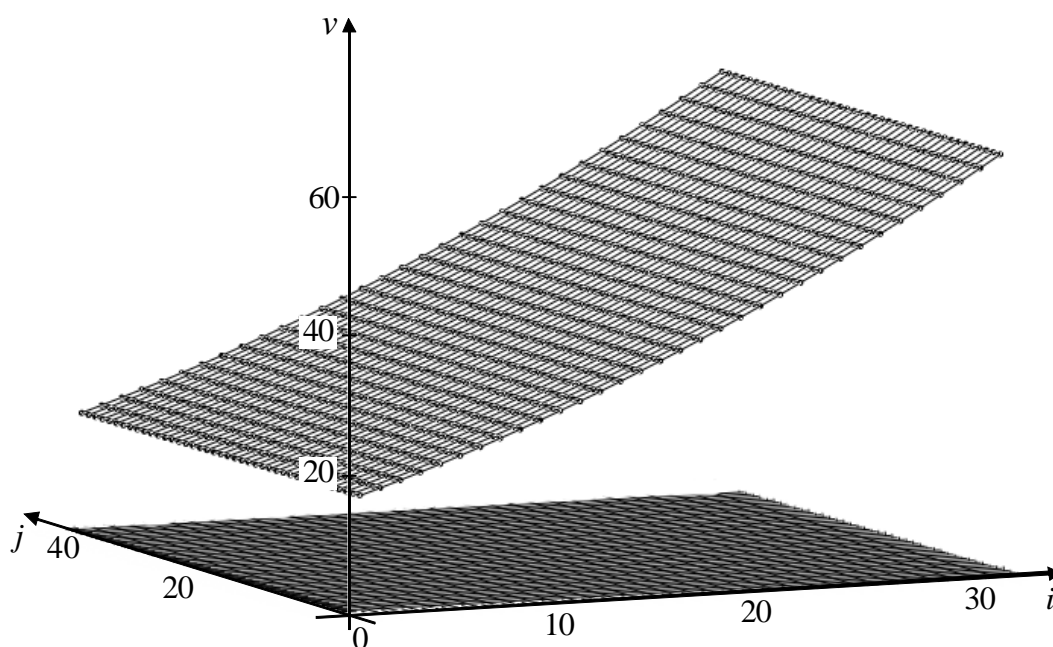


Рис. 2.9. Розподіл величин швидкості фільтрації вздовж поверхонь течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_l$ ($l = \overline{0,16}$) для фільтрувальної установки конусоподібної форми

Табл. 2.2. Результати розрахунку Q , DQ і δ для області $G_z^{4,1}$

№	n	m	l	Q	DQ	δ
1	32	80	16	27.221705	0.282011	0.085410
2	64	160	32	28.802906	0.170995	0.025453
3	96	240	48	29.453940	0.125286	0.012314
4	128	320	64	29.816666	0.099819	0.007315

№	n	m	l	Q	DQ	δ
5	160	400	80	30.050252	0.083420	0.004871
6	192	480	96	30.214203	0.071908	0.003488
7	224	560	112	30.336123	0.063349	0.002628
8	256	640	128	30.430583	0.056716	0.002055
9	288	720	144	30.506085	0.051415	0.001654
10	320	800	160	30.567937	0.047074	0.001361

Аналогічні розрахунки проведено для однорідного пористого середовища – модельної області конусоподібної форми із внутрішнім вирізом $G_z^{2,1}$, обмеженої поверхнями $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, $f_{**}(x, y, z) = 32.163 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, $f^{**}(x, y, z) = 7.548 \cdot x^2 - y^2 - z^2$. У результаті отримано розрахункову динамічну сітку при $\kappa = 5.6$ м/добу, $\sigma = 0.7$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 122.2$ (що відповідає середній швидкості руху рідини через пористе середовище $v_{сер} = 10$ м/добу), $n = 30$, $m = 44$, $l = 6$, $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 2.10), обчислено поле швидкостей і проведено ще розрахунок ряду характеристик, зокрема, повної витрати (див. табл. 2.3).

Табл. 2.3. Результати розрахунку Q , DQ і δ , отриманих при розв'язанні фільтраційної задачі для області $G_z^{2,1}$

№	n	m	l	Q	DQ	δ
1	30	44	6	14.774022	0.059340	0.032057
2	45	66	9	15.047659	0.040127	0.014973
3	60	88	12	15.187468	0.030312	0.008631
4	75	110	15	15.272327	0.024354	0.005604
5	105	154	21	15.370205	0.017481	0.002907
6	135	198	27	15.425012	0.013634	0.001775
7	180	264	36	15.473211	0.010250	0.001006
8	240	352	48	15.509502	0.007701	0.000569

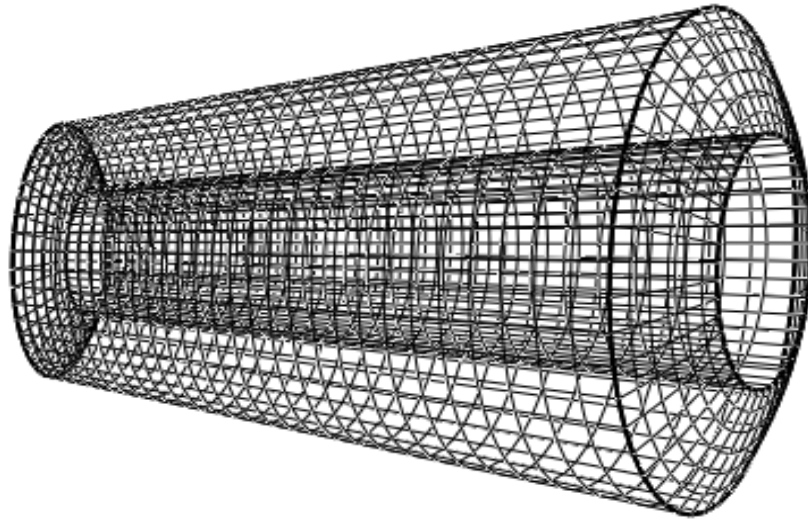


Рис. 2.10. Гідродинамічна сітка для модельної області конусоподібної форми із внутрішнім вирізом

Результати розв'язання різницевої задачі для фізичної області $G_z^{3,2}$ складнішої геометрії: $S_* = \{z : (x + 1.986)^2 + y^2 + z^2 = 395\}$, $S^* = \{z : (x - 3.502)^2 + y^2 + z^2 = 30.121\}$, $S_{**} = \{z : (x^2 - 68x + 256 + y^2 + z^2)^2 + 3600y^2 - 476.9076z^2 = 0\}$, $S^{**} = \{z : (x^2 - 68x + 256 + y^2 + z^2)^2 + 3600y^2 - 111.92833z^2 = 0\}$ при $\kappa = 1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1.2$ подані на рис. 2.11 та у табл. 2.4.

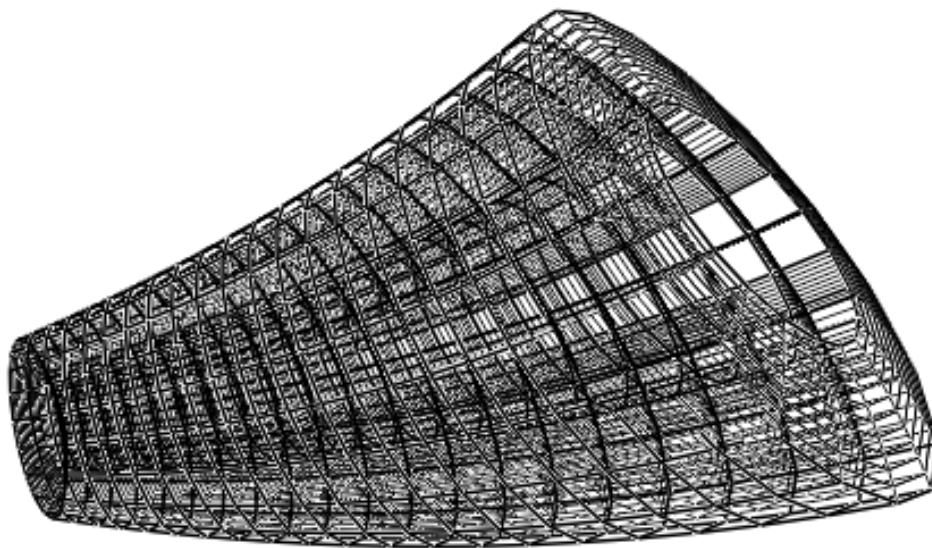


Рис. 2.11. Гідродинамічна сітка, побудована у фізичній області $G_z^{3,2}$

Табл. 2.4. Результати розрахунку Q і δ при різних параметрах n, m, l розбиття області $G_z^{3,2}$ і $\varepsilon = 10^{-5}$

№	n	m	l	Q	δ
1	14	40	5	0.986558	0.317610
2	21	60	8	1.024167	0.142215
3	28	80	10	1.039483	0.085349
4	35	100	13	1.051634	0.054050
5	42	120	15	1.058043	0.038840
6	49	140	18	1.063998	0.028222
7	56	160	20	1.067503	0.022105
8	63	180	23	1.071031	0.017293
9	70	200	25	1.073238	0.014247
10	77	220	28	1.075569	0.011671
11	84	240	30	1.077085	0.009940
12	91	260	33	1.078740	0.008403
13	98	280	35	1.079846	0.007327
14	105	300	38	1.081081	0.006338
15	112	320	40	1.081923	0.005624
16	119	340	43	1.082880	0.004950
17	126	360	45	1.083542	0.004452
18	133	380	48	1.084305	0.003973
19	140	400	50	1.084840	0.003612

Комп'ютерна збіжність та точність алгоритму також перевірялася і на прикладах двозв'язних областей, обмежених двома сферами. Так, для випадку області $G_z^{4,1}$, обмеженої сферами $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$, при $\varphi_* = 0.1$, $\varphi^* = 0.2$, $\kappa = 1$, $n = 30$, $m = 44$, $l = 6$ отримана гідродинамічна сітка, зображена на рис. 2.12 а. Відповідні числові результати розв'язання задачі подані у табл. 2.5.

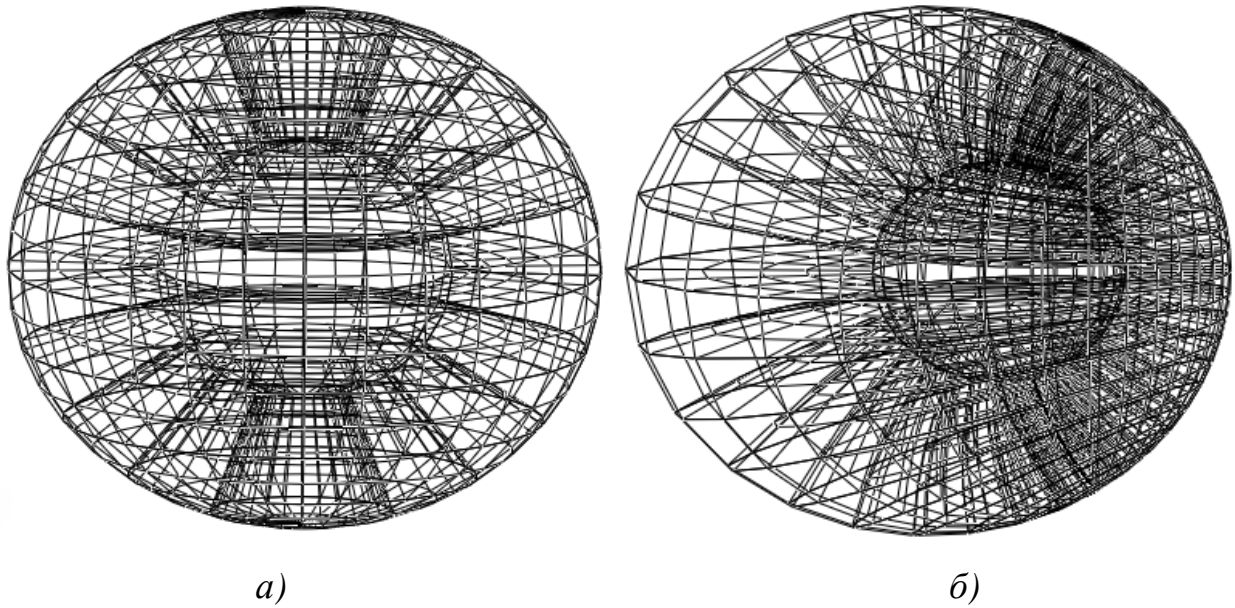


Рис. 2.12. Динамічні сітки у фізичних областях, утворених двома сферами

Табл. 2.5. Результати розрахунку Q і δ різницевої задачі для області $G_z^{4,1}$

№	n	m	l	e	Q	DQ	δ
1	8	60	32	0.00001	19.760776	0.021576	0.033614
2	12	90	48	0.00001	19.748804	0.009595	0.011308
3	16	120	64	0.00001	19.744608	0.005399	0.005097
4	20	150	80	0.00001	19.742665	0.003456	0.002718
5	24	180	96	0.00001	19.741609	0.002400	0.001617
6	28	210	112	0.00001	19.740972	0.001794	0.001039
7	32	240	128	0.00001	19.740559	0.001350	0.000706
8	36	270	144	0.00001	19.740276	0.001067	0.000502
9	40	300	160	0.00001	19.740073	0.000864	0.000369

Результати розв'язання задачі у фізичній області $G_z^{4,2}$ складнішої геометрії: $S_* = \{z : (x + 1.986)^2 + y^2 + z^2 = 395\}$, $S^* = \{z : (x - 3.502)^2 + y^2 + z^2 = 30.121\}$ при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1.2$, $\kappa = 1$, $n = 14$, $m = 40$, $l = 45$ подані у табл. 2.6 та на рис. 2.12 б.

Табл. 2.6. Результати розрахунку Q і δ різницевої задачі для області $G_z^{4,2}$

№	n	m	l	ϵ	Q	δ
1	14	40	45	0.00001	18.939993	0.126117
2	28	80	90	0.00001	19.335158	0.041075
3	42	120	135	0.00001	19.468836	0.021613
4	56	160	180	0.00001	19.536050	0.013163
5	70	200	225	0.00001	19.576499	0.008821
6	84	240	270	0.00001	19.603515	0.006314
7	98	280	315	0.00001	19.622838	0.004738

Розроблені алгоритми дозволяють будувати ідеальні фільтраційні поля для областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і однією поверхнею течії. Так, змодельовано протікання фільтраційного процесу для деякої модельної області $G_z^{2,2}$ (рис. 2.13), обмеженої поверхнями $f_*(x, y, z) = (x + 0.932868)^2 + y^2 + z^2 - 47.5136436$, $f^*(x, y, z) = (x - 50.932868)^2 + y^2 + z^2 - 47.5136436$, $f^{**}(x, y, z) = (x - 25)^2 - (y - 43.3012702)^2 - z^2 - 2500$, при $\kappa = 1$, $\varphi_* = 0.1$, $\varphi^* = 0.2$, $n = 200$, $m = 100$, $l = 70$, $\epsilon = 0.00001$.

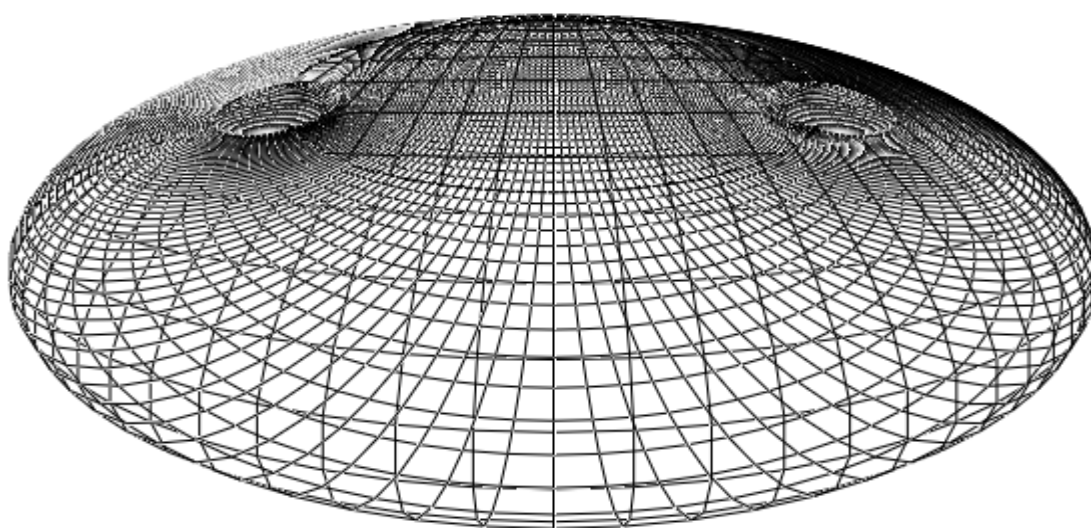


Рис. 2.13. Розрахункова гідродинамічна сітка для прогнозування процесу вилугування корисних речовин із товщі пористого пласта

2.2. Розв'язування просторових аналогів крайових задач на кусково-конформні відображення для багат шарових кусково-однорідних модельних областей

2.2.1. Постановка задачі і алгоритм її числового розв'язання для випадку двошарових кусково-однорідних однозв'язних областей

Нехай маємо деяку двошарову кусково-однорідну область, яка є криво-лінійним паралелепіпедом $G_{\mathbf{z}}^5 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($\mathbf{z} = (x, y, z)$), обмеженим гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathbf{z}: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathbf{z}: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathbf{z}: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathbf{z}: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathbf{z}: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathbf{z}: f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділеним заданою екіпотенціальною поверхнею $EFF_*E_* = \{\mathbf{z}: f_*(x, y, z) = 0\}$ на дві підобласті $G_{\mathbf{z}-}^5 = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{\mathbf{z}+}^5 = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 2.14 а). Для області $G_{\mathbf{z}}^5$ розглянемо модельну задачу, що описується рівняннями (2.1) з умовами узгодженості на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* :

$$\varphi|_{EFF_*E_{*-}} = \varphi|_{EFF_*E_{*+}} = \varphi_*^*, \quad \kappa_1 \cdot \varphi_n'|_{EFF_*E_{*-}} = \kappa_2 \cdot \varphi_n'|_{EFF_*E_{*+}} \quad (2.74)$$

і крайовими умовами (2.2) – (2.4), де φ_*^* – невідоме значення потенціалу на поверхні розділу EFF_*E_* ($\varphi_* < \varphi_*^* < \varphi^*$), κ – коефіцієнт фільтрації, що харак-

теризує область $G_{\mathbf{z}}^5$, $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}-}^5, \\ \kappa_2, & (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}+}^5, \end{cases}$ κ_1, κ_2 – довільні додатні дійсні

числа [73].

Аналогічно п. 2.1.2, шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$), для яких виконується умова (2.5), і заміною крайових умов (2.3), (2.4) на умови (2.6), задача (2.1) – (2.4), (2.74) замінюється більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області $G_{\mathbf{z}}^5$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_{\mathbf{w}} = G_{\mathbf{w}-} \cup G_{\mathbf{w}+}$

(рис. 2.14 б), де $G_{\mathbf{w}-} = \{\mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$,
 $G_{\mathbf{w}+} = \{\mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$, φ_* , Q_* , Q^* ,
 $Q = Q_* \cdot Q^*$ – невідомі величини, що описується системою рівнянь (2.7) з умовами узгодженості на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* (2.74), крайовими умовами (2.2), (2.6) і умовами ортогональності в околах ділянок границі області $G_{\mathbf{z}}^5$, які мають вигляд (2.8).

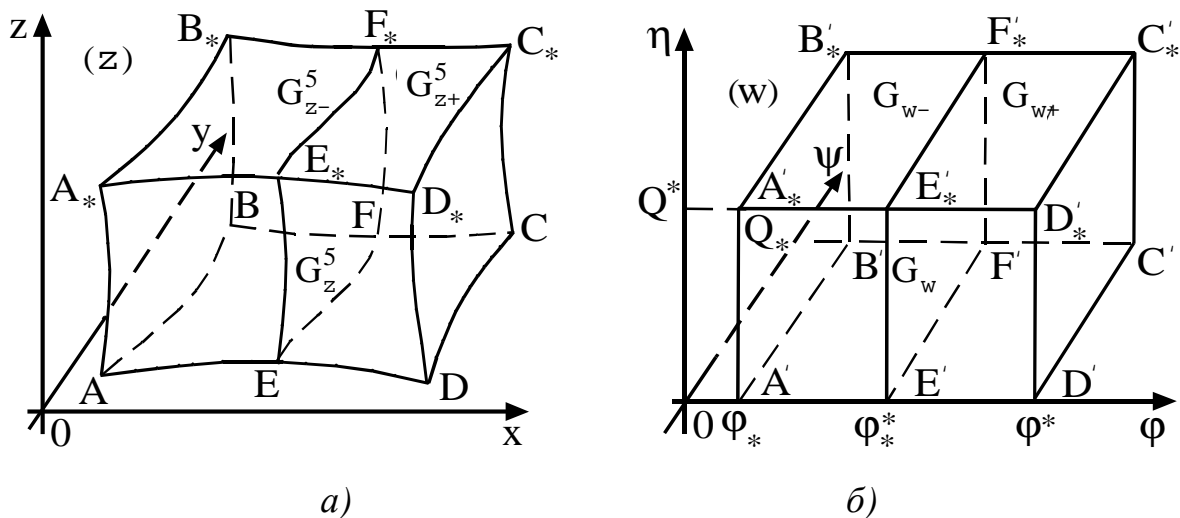


Рис. 2.14. Просторова фізична область $G_{\mathbf{z}}^5$ (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу $G_{\mathbf{w}}$ (б)

Відповідний просторовий аналог оберненої до крайової задачі (2.7), (2.74), (2.2), (2.6), (2.8) на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{w})$ області $G_{\mathbf{w}}$ на $G_{\mathbf{z}}^5$ при невідомих значеннях величин φ_* , Q_* , Q^* , Q буде складатися із системи рівнянь (2.11) з умовами узгодженості на поверхні розділу:

$$\begin{cases} f_1^* \left(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta) \right) = 0, \\ \kappa_1 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*+0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta)} = \\ = \kappa_2 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*-0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_*, \psi, \eta)}, \end{cases} \quad (2.75)$$

крайовими умовами і умовами ортогональності в околах ділянок границі області G_z^5 , які мають вигляд (2.12) і (2.13) відповідно.

Для числового розв'язання отриманої крайової задачі (2.11), (2.75), (2.12), (2.13) в області G_w введемо кусково-рівномірну ортогональну сітку:

$$G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i, i = \overline{0, n_1}, \\ \varphi_*^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1), i = \overline{n_1 + 1, n + 1}; \end{cases} \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, m + 1}; \right.$$

$$\eta_k = \Delta\eta \cdot k, k = \overline{0, l + 1}; \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_*^* - \varphi_*}{n_1}, \Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_*^* - \varphi_*}{n_2 + 1}, \Delta\psi = \frac{Q_*}{m + 1}, \Delta\eta = \frac{Q^*}{l + 1},$$

$$\left. \gamma_s = \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} (s = 1, 2) \right\}, \text{ де } n = n_1 + n_2, m, l \in N - \text{ параметри розбиття області}$$

комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi_s$ ($s = 1, 2$), $\Delta\psi$, $\Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ , ψ та η (рис. 2.14 б). Через $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів сітки у G_z^5 .

Для числової побудови просторового аналогу кусково-конформного відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z^5 (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги рівнянь (2.11) у кусково-рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j,k} &= x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} &= y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} &= z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i &= \overline{1, n_1 - 1}, s = 1, i = \overline{n_1 + 1, n}, s = 2, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \end{aligned} \right. \quad (2.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
\left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1, i = \overline{n_1 + 1, n}, s = 2, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
\end{array} \right. \quad (2.77)$$

Координати вузлів на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_* уточнюємо, використовуючи наступні різницеві рівняння:

$$f_*^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
& \kappa_1 \cdot \Delta \Phi_2 \cdot \sqrt{(x_{n_1+1,j,k} - x_{n_1,j,k})^2 + (y_{n_1+1,j,k} - y_{n_1,j,k})^2 + (z_{n_1+1,j,k} - z_{n_1,j,k})^2} = \\
& = \kappa_2 \cdot \Delta \Phi_1 \cdot \sqrt{(x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k})^2 + (y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k})^2 + (z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k})^2} \quad (2.79)
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
& f_{*x}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j,k} - x_{n_1,j-1,k}) + f_{*y}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \times \\
& \times (y_{n_1,j,k} - y_{n_1,j-1,k}) + f_{*z}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j,k} - z_{n_1,j-1,k}) = 0, \\
& f_{*x}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j,k} - x_{n_1,j,k-1}) + f_{*y}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \times \\
& \times (y_{n_1,j,k} - y_{n_1,j,k-1}) + f_{*z}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j,k} - z_{n_1,j,k-1}) = 0, \\
& j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l} \quad (2.80)
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
& f_{*x}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j+1,k} - x_{n_1,j,k}) + f_{*y}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \times \\
& \times (y_{n_1,j+1,k} - y_{n_1,j,k}) + f_{*z}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j+1,k} - z_{n_1,j,k}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{*x}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right) \cdot \left(x_{n_1,j,k+1} - x_{n_1,j,k} \right) + f_{*y}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right) \times \\
& \times \left(y_{n_1,j,k+1} - y_{n_1,j,k} \right) + f_{*z}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right) \cdot \left(z_{n_1,j,k+1} - z_{n_1,j,k} \right) = 0, \\
& j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

або

$$\begin{aligned}
\frac{f_{*x}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k}} &= \frac{f_{*y}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k}} = \frac{f_{*z}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k}}, \\
j &= \overline{1, m}, k = \overline{1, l}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

і

$$\begin{aligned}
\frac{f_{*x}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1+1,j,k}} &= \frac{f_{*y}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1+1,j,k}} = \frac{f_{*z}^{\prime*} \left(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k} \right)}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1+1,j,k}}, \\
j &= \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Крайові умови, які визначають область $G_{\mathbf{z}}^5$, мають вигляд (2.18), а умови для забезпечення ортогональності сітки записуються числово-аналітичними різницевиими рівняннями (2.19) або (2.20).

Інваріанти відображення γ_s ($s=1,2$) криволінійних паралелепіпедів $G_{\mathbf{z}-}^5$ і $G_{\mathbf{z}+}^5$ є невідомими та визначаються в процесі розрахунку. Формули для наближеного знаходження даних величин одержимо на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів двох областей:

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_1}{n_1(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_2}{(n_2+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_2,m,l} \gamma_{n_1+i,j,k}, \tag{2.84}$$

де $\gamma_{i,j,k}$ такі ж, як і (2.21).

Невідомі величини Φ_{*}^* , Q знаходяться за формулами:

$$\Phi_{*}^* = \frac{n_1 \cdot \gamma_1 \cdot \Phi_{*}^* + (n_2 + 1) \cdot \gamma_2 \cdot \Phi_{*}^*}{n_1 \cdot \gamma_1 + (n_2 + 1) \cdot \gamma_2}, \tag{2.85}$$

$$Q = \Delta\Phi_1 \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_1} \text{ (або } Q = \Delta\Phi_2 \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_2} \text{)}, \tag{2.86}$$

а величини Q_{*}, Q^* за відповідними формулами з (2.21).

Розв'язок отриманої різницевої задачі знаходиться шляхом поетапної параметризації величин γ_s ($s=1,2$), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області G_z^γ . А саме, задавши параметри n_1 , n_2 , m та l розбиття сіткової області G_w^γ , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку цієї задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+1,j,k}^{(0)}, y_{n_1+1,j,k}^{(0)}, z_{n_1+1,j,k}^{(0)}\right)$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{n_1+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2}$, $j = \overline{1, m}$ і вузлів поверхні розділу підобластей $\left(x_{n_1,j,k}^{(0)}, y_{n_1,j,k}^{(0)}, z_{n_1,j,k}^{(0)}\right)$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$ (так, щоб виконувались рівності відповідно (2.18) і (2.78)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів підобластей $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ і $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(0)}, y_{n_1+i,j,k}^{(0)}, z_{n_1+i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, за формулами (2.82) знаходяться початкові наближення $\gamma_s^{(0)} = \gamma_s \left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ інваріантів відображення γ_s ($s=1,2$). Уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ і $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(g)}, y_{n_1+i,j,k}^{(g)}, z_{n_1+i,j,k}^{(g)}\right)$, $i = \overline{1, n_2}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ проводиться на основі почергового розв'язання систем (2.76) і (2.77) із використанням значень з попереднього кроку ітерації g ($g=0,1,\mathbf{K}$ – номер кроку ітерації). Далі підправляються координати вузлів поверхні розділу підобластей на основі рівнянь (2.78), (2.79) та почергового використання (2.80) або (2.82) і (2.81) або (2.83), координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (2.18) і (2.19) або (2.20). Потім знаходяться нові наближення γ_s ($s=1,2$) за формулами (2.84), величин φ_*^* , Q – за фор-

мулами (2.85), (2.86) (при потребі Q_* і Q^* – за відповідними формулами з (2.23)) та перевіряються умови стабілізації координат вузлів сітки і величин Φ_* , Q відносно кроку ітерації відповідно:

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(s+1)} - x_{i,j,k}^{(s)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(s+1)} - y_{i,j,k}^{(s)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(s+1)} - z_{i,j,k}^{(s)} \right| \right) < \varepsilon, \left| \Phi_*^{(s+1)} - \Phi_*^{(s)} \right| < \varepsilon, \left| Q^{(s+1)} - Q^{(s)} \right| < \varepsilon. \quad (2.87)$$

Якщо умови (2.87) не виконуються, то необхідно повернутися до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів динамічної сітки обчислюється нев'язка системи рівнянь (2.11):

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \text{ де } \delta_1 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \right),$$

$$\delta_2 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot ((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right),$$

$$\delta_3 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right),$$

$$s = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, & i = n_1 + 1, n. \end{cases}$$

Якщо точність отриманого розв'язку є незадовільною, то необхідно збільшити кількість вузлів розбиття сітки G_z^γ та розв'язати задачу заново.

Для одержаних координат вузлів розрахункової гідродинамічної сітки на основі рівняння руху (2.1) величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки G_z^γ знаходимо за формулами:

$$v_{i,j,k} = \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}, \quad (2.88)$$

$$\text{де } v_{x_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \Phi_s}{J_{i,j,k}} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \Phi_s}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z i, j, k} = 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \varphi_s}{J_{i, j, k}} \left((x_{i, j+1, k} - x_{i, j-1, k})(y_{i, j, k+1} - y_{i, j, k-1}) - (x_{i, j, k+1} - x_{i, j, k-1})(y_{i, j+1, k} - y_{i, j-1, k}) \right),$$

$$J_{i, j, k} = (x_{i+1, j, k} - x_{i-1, j, k})(y_{i, j+1, k} - y_{i, j-1, k})(z_{i, j, k+1} - z_{i, j, k-1}) + (x_{i, j, k+1} - x_{i, j, k-1})(y_{i+1, j, k} - y_{i-1, j, k})(z_{i, j+1, k} - z_{i, j-1, k}) + (x_{i, j+1, k} - x_{i, j-1, k})(y_{i, j, k+1} - y_{i, j, k-1})(z_{i+1, j, k} - z_{i-1, j, k}) - (x_{i, j, k+1} - x_{i, j, k-1})(y_{i+1, j, k} - y_{i-1, j, k})(z_{i, j+1, k} - z_{i, j-1, k}) - (x_{i+1, j, k} - x_{i-1, j, k})(y_{i, j, k+1} - y_{i, j, k-1})(z_{i, j+1, k} - z_{i, j-1, k}) - (x_{i+1, j, k} - x_{i-1, j, k})(y_{i, j, k+1} - y_{i, j, k-1})(z_{i+1, j, k} - z_{i-1, j, k}) - (x_{i+1, j, k} - x_{i-1, j, k})(y_{i+1, j, k} - y_{i-1, j, k})(z_{i, j+1, k} - z_{i, j-1, k}) \quad (i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad s = 1; \quad i = \overline{n_1 + 1, n}, \quad s = 2; \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}).$$

Формули для знаходження величин швидкостей на поверхні розділу підобластей G_{z-}^5 і G_{z+}^5 і у граничних вузлах отримуються аналогічно п. 2.1.8.

2.2.2. Реалізація алгоритму числового розв'язування у випадку двошарових кусково-однорідних двозв'язних областей

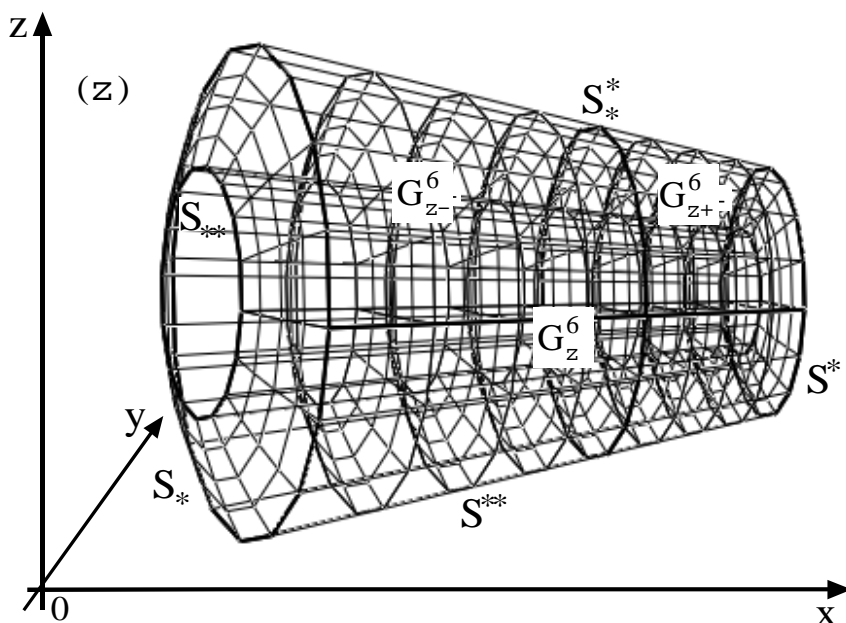


Рис. 2.15. Просторова фізична область G_z^6

Нехай маємо деяку двошарову кусково-однорідну двозв'язну криволінійну область G_z^6 ($z=(x, y, z)$), обмежену двома екіпотенціальними гладкими поверхнями $S_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $S^{**} = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$ та розділену зада-

ною екіпотенціальною поверхнею $S_*^* = \{z: f_*^*(x, y, z) = 0\}$ на дві підобласті G_{z-}^6 і G_{z+}^6 (рис. 2.15). Для області G_{z-}^6 модельна задача, яка описує процес фільтрації рідини у відповідному двошаровому кусково-однорідному пористому середовищі, описується рівняннями (2.1) з умовами узгодженості на екіпотенціальній поверхні S_*^* :

$$\varphi \Big|_{S_{*-}^*} = \varphi \Big|_{S_{*+}^*} = \varphi_*^*, \quad \kappa_1 \cdot \varphi_n' \Big|_{S_{*-}^*} = \kappa_2 \cdot \varphi_n' \Big|_{S_{*+}^*} \quad (2.89)$$

та крайовими умовами (2.38) [70].

Шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (2.1), (2.89), (2.38) зводиться до розв'язування в однозв'язній області $G_{z-}^6 \setminus \Gamma$ – криволінійному паралелепіпеді $ABCD_*B_*C_*D_*$, обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z: \overset{\cdot}{f}(x, y, z) = 0\}$ і розділеному деякою заданою екіпотенціальною поверхнею $EFF_*E_* = \{z: f_*^*(x, y, z) = 0\}$ на дві підобласті $G_{z-}^6 \setminus \Gamma_- = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{z+}^6 \setminus \Gamma_+ = EFCDE_*F_*C_*D_*$ ($\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$, $\Gamma_- = AEE_*A_*BFF_*B_*$, $\Gamma_+ = EDD_*E_*FCC_*F_*$), які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (рис. 2.16), з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу Γ (2.39), задачі (2.1), (2.74) (2.2) – (2.4) та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов (2.40).

Тоді, аналогічно п. 2.2.1, ввівши функції $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжені із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$), для яких виконується умова (2.5), і заміною крайових умов (2.3), (2.4) на умови (2.6), задачу (2.1), (2.74), (2.2) – (2.4) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_{z-}^6 \setminus \Gamma$ на відповідну область комплексного потенціалу G_w (рис. 2.14 б).

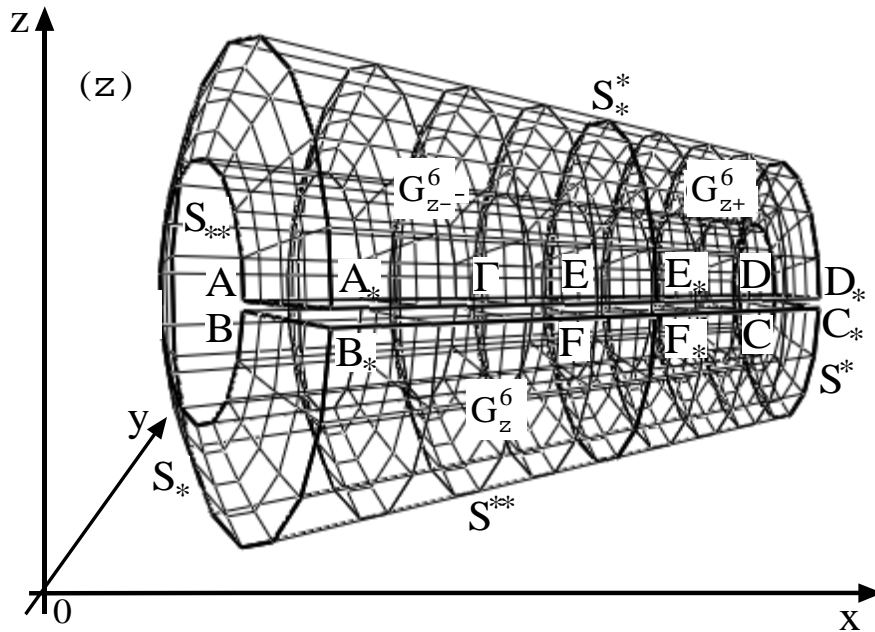


Рис. 2.16. Просторова фізична область G_z^6 з розрізом Γ

Покажемо, яким чином модифікується алгоритм, наведений у п. 2.2.1, для розв'язування відповідної оберненої задачі. Обернена задача на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $G_w \rightarrow G_z^6 \setminus \Gamma$ (при невідомих значеннях параметрів ϕ^* , Q_* , Q^*) описується системою рівнянь (2.11) з умовами узгодженості на поверхні розділу (2.74), крайовими умовами (2.41) у випадку, коли функція $f'(x, y, z)$, яка визначає розріз Γ , є наперед відомою, або (2.42), якщо функція $f'(x, y, z)$ є невідомою, та відповідними умовами з (2.13), що забезпечують ортогональність ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, де, як і в п. 2.1.5, $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_3(x, y, z) = f_4(x, y, z) = f'(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$. Для отримання області G_z^6 необхідно виконати “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов (2.40).

Для розв'язання цих задач запишемо їх різницеві аналоги. Для цього в області G_w , аналогічно п. 2.2.1, будемо кусково-рівномірну ортогональну сітку G_w^γ . Лівосторонні різницеві аналоги рівнянь (2.12) у рівномір-

ній сітковій області (при відповідності кутових точок) матимуть вигляд (2.76), (2.77). Координати вузлів на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* уточнюємо, використовуючи різницеві рівняння (2.78), (2.79) та (2.80) і (2.81) або (2.82) і (2.83). Крайові умови (2.41) і (2.42), які визначають фізичну область $G_z^6 \setminus \Gamma$, з умовами “склеювання” (2.40) апроксимуються точково-різницевиими рівняннями (2.43) і (2.44) відповідно, а умови (2.13), що забезпечують ортогональність сітки, записуються відповідними числово-аналітичними різницевиими рівняннями з (2.19) або (2.20), де, як і в п. 2.1.5, $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$.

Формули для наближеного знаходження інваріантів відображення γ_s ($s = 1, 2$) мають вигляд (2.84). Невідомі величини φ_*^* , Q знаходяться за формулами (2.85) і (2.86), а величини Q_* , Q^* за формулами з (2.23).

Розв’язок відповідної різницевої задачі знаходимо аналогічно до п. 2.2.1. Для одержаних вузлів розрахункової гідродинамічної сітки величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки G_z^y знаходимо за формулами (2.88), а формули для знаходження величин швидкостей на поверхні розділу і у граничних вузлах отримуються аналогічно п. 2.1.8.

2.2.3. Прогнозування просторових процесів фільтрації рідин у багат шарових кусково-однорідних однозв’язних пористих середовищах

Для багат шарової кусково-однорідної однозв’язної області, яка є криволінійним паралелепіпедом $G_z^7 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($\mathbf{z} = (x, y, z)$), обмеженим гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathbf{z}: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathbf{z}: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathbf{z}: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathbf{z}: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathbf{z}: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathbf{z}: f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділеним деякими екіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{\mathbf{z}: f_{*s}(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на p підобластей $G_z^{7,1} = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$, $G_z^{7,s} =$

$$= E_{s-1} F_{s-1} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad G_z^{7,p} = E_{p-1} F_{p-1} C D E_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_*$$

(рис. 2.17 а), розглянемо модельну задачу, що описується рівняннями (2.1),

умовами узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$):

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} &= \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*, \\ \kappa_s \cdot \varphi_n' \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} &= \kappa_{s+1} \cdot \varphi_n' \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{aligned} \quad (2.90)$$

та крайовими умовами (2.2) – (2.4), де φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$) – невідомі значення

потенціалу на відповідних поверхнях розділу $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$),

$0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* < \varphi^* < \infty$, κ – коефіцієнт, що характеризує об-

ласть G_z^7 , $\kappa = \kappa_s = const$ при $(x, y, z) \in G_z^{7,s}$ ($s = \overline{1, p}$) [74].

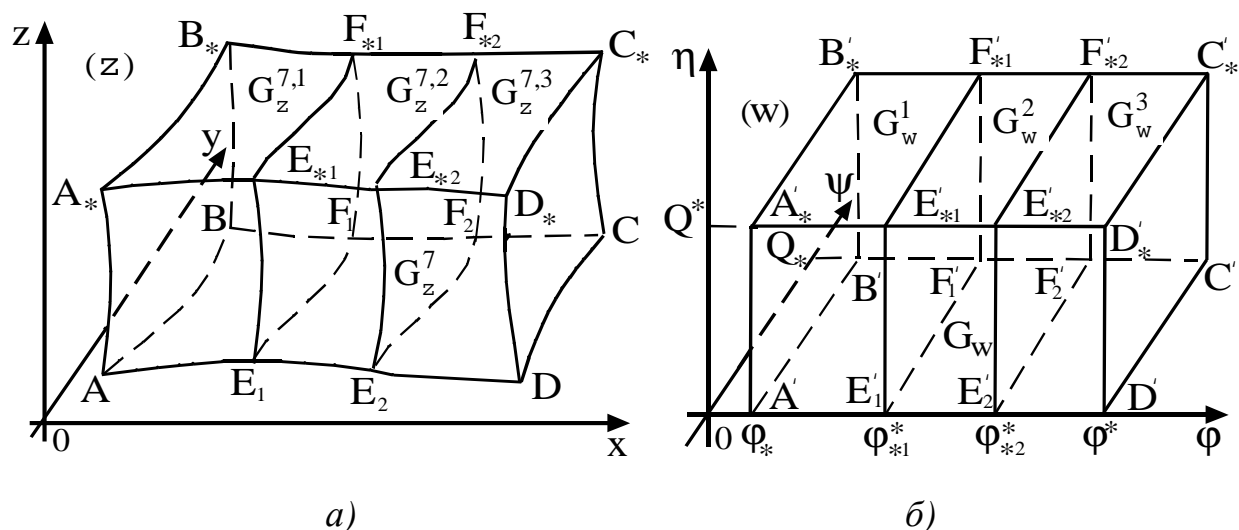


Рис. 2.17. Просторова фізична область G_z^7 (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б) при $p = 3$

Аналогічно п. 2.1.2, 2.2.1, шляхом заміни крайових умов (2.3), (2.4) на умови (2.6), задача (2.1), (2.90), (2.2) – (2.4) замінюється більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області G_z^7 на відповідну область комплексного потенціалу

$$G_w = G_w^1 \cup G_w^2 \cup \dots \cup G_w^p \quad (\text{рис. 2.17 б}), \quad \text{де } G_w^1 = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{*1}^*,$$

$0 \leq \psi \leq Q_*$, $0 \leq \eta \leq Q^*$, $G_w^2 = \{\mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*1}^* \leq \varphi \leq \varphi_{*2}^*, 0 \leq \psi \leq Q_*,$
 $0 \leq \eta \leq Q^*\}$, ..., $G_w^p = \{\mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(p-1)}^* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$,
 φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* – невідомі параметри, що описується системою рівнянь (2.7) з умовами узгодженості на екіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) (2.90), крайовими умовами (2.2), (2.6) і умовами ортогональності в околах ділянок границі області G_z^7 , які мають вигляд (2.8).

Відповідний просторовий аналог оберненої до крайової задачі (2.7), (2.90), (2.2), (2.6), (2.8) на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{w})$ області G_w на G_z^7 при невідомих значеннях величин φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* , Q буде складатися із системи рівнянь (2.12) з умовами узгодженості на поверхнях розділу:

$$\begin{cases} f_{*s}^* \left(x(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \right) = 0, \\ \kappa_s \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} = \\ = \kappa_{s+1} \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{cases} \quad (2.91)$$

крайовими умовами (2.10) і умовами ортогональності в околах ділянок границі області G_z^7 (2.13).

Для числового розв'язання отриманої крайової задачі (2.12), (2.91), (2.10), (2.13) запишемо її різницевий аналог. Для цього, аналогічно п. 2.2.1, в

області G_w введемо кусково-рівномірну ортогональну сітку $G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) \right\}$:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i, i = \overline{0, n_1}, \\ \varphi_{*1}^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1), i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ \varphi_{*s}^* + \Delta\varphi_{s+1} \cdot \left(i - \sum_{r=1}^j n_r \right), i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r}, s = \overline{2, p-2}, \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, m+1}; \\ \varphi_{*(p-1)}^* + \Delta\varphi_p \cdot \left(i - \sum_{r=1}^{p-1} n_r \right), i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n+1}; \end{cases}$$

$$\eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l+1}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_{*1}^* - \varphi_{*1}}{n_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_{*2}^* - \varphi_{*1}^*}{n_2}, \quad \Delta\varphi_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi_{*s-1}^*}{n_s}$$

$$(s = \overline{3, p-1}), \quad \Delta\varphi_p = \frac{\varphi^* - \varphi_{*p-1}^*}{n_p + 1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q^*}{m+1}, \quad \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}, \quad \gamma_s = \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} (s = \overline{1, p}) \left. \vphantom{\frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta}} \right\},$$

де $n = \sum_{r=1}^p n_r$, $m, l \in N$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi_s$ ($s = \overline{1, p}$), $\Delta\psi$, $\Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ , ψ та η

(рис. 2.17 б).

Для числової побудови просторового аналогу кусково-конформного відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z^7 (при відповідності вершин) запишемо різницеві рівняння (2.11) у кусково-рівномірній сітковій області G_w^Y через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad s = 1; \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \quad s = 2; \\ i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1}, \quad s = \overline{3, p-1}; \\ i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n}; \quad s = p, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (2.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
\left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
\left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; \\
i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1}, s = \overline{3, p-1}; \\
i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n}; s = p, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
\end{array} \right. \quad (2.93)$$

Координати вузлів на еквіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) уточнюємо, використовуючи наступні різницеві рівняння:

$$f_{*s}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) = 0, \quad r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}), \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}
& \kappa_s \cdot \Delta \Phi_{s+1} \cdot \sqrt{(x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k})^2 + (y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k})^2 + (z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k})^2} = \\
& = \kappa_{s+1} \cdot \Delta \Phi_s \cdot \sqrt{(x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k})^2 + (y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k})^2 + (z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k})^2},
\end{aligned}$$

$$r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}) \quad (2.95)$$

та

$$\begin{aligned}
& f_{*s x}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k} - x_{r,j-1,k}) + f_{*s y}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
& \times (y_{r,j,k} - y_{r,j-1,k}) + f_{*s z}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k} - z_{r,j-1,k}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{*s x}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k} - x_{r,j,k-1}) + f_{*s y}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
& \times (y_{r,j,k} - y_{r,j,k-1}) + f_{*s z}^*(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k} - z_{r,j,k-1}) = 0,
\end{aligned}$$

$$r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}) \quad (2.96)$$

i

$$\begin{aligned}
& f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j+1,k} - x_{r,j,k}) + f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
& \times (y_{r,j+1,k} - y_{r,j,k}) + f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j+1,k} - z_{r,j,k}) = 0, \\
& f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k+1} - x_{r,j,k}) + f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
& \times (y_{r,j,k+1} - y_{r,j,k}) + f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k+1} - z_{r,j,k}) = 0, \\
& r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}) \quad (2.97)
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& \frac{f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k}}, \\
& r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}) \quad (2.98)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
& \frac{f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k}} = \frac{f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k}} = \frac{f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k}}, \\
& r = \sum_{q=1}^s n_q \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}). \quad (2.99)
\end{aligned}$$

Крайові умови, які визначають область $G_{\mathbf{z}}^7$, мають вигляд (2.18), а умови для забезпечення ортогональності сітки записуються числово-аналітичними різницевиими рівняннями (2.19) або (2.20).

Інваріанти відображення γ_s ($s = \overline{1, p}$) є невідомими величинами і визначаються в процесі розрахунку. Формули для їх наближеного знаходження одержимо на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів підобластей $G_{\mathbf{z}}^{7,s}$ ($s = \overline{1, p}$):

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_1}{n_1(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad (2.100)$$

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_2}{n_2(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_2-1,m,l} \gamma_{n_1+i,j,k}, \quad (2.101)$$

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{n_s(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_s-1,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \overline{\sum_{q=1}^{s-1} n_q} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (2.102)$$

$$\gamma_p = \frac{\kappa_p}{(n_p+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_p,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad (2.103)$$

де $\gamma_{i,j,k}$ такі ж, як і (2.21).

Невідомі величини Φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$) знаходимо за формулами:

$$\Phi_{*1}^* = \frac{n_1 \cdot \gamma_1 \cdot \Phi^* + \left(\sum_{r=2}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \Phi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (2.104)$$

$$\Phi_{*2}^* = \frac{\sum_{r=1}^2 (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \Phi^* + \left(\sum_{r=3}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \Phi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (2.105)$$

$$\Phi_{*s}^* = \frac{\sum_{r=1}^s (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \Phi^* + \left(\sum_{r=s+1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \Phi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad s = \overline{3, p-1}, \quad (2.106)$$

$$\Phi_{*p}^* = \frac{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \Phi^* + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \cdot \Phi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (2.107)$$

повну фільтраційну витрату Q за однією з формул:

$$Q = \Delta \Phi_s \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_s}, \quad s = \overline{1, p}, \quad (2.108)$$

а величини Q_* , Q^* відповідно за формулами (2.23).

Розв'язок різницевої задачі (2.92) – (2.99), (2.18) – (2.20), (2.100) – (2.108), (2.23) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин γ_s ($s = \overline{1, p}$), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихі-

дній області G_Z^Y . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_W^Y (n_1, n_2, \dots, n_p, m та l), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)}\right)$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{n_1+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q$, $i = \overline{1, n_s-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $s = \overline{3, p-1}$, $\left(x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q$, $i = \overline{1, n_p}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\left(x_{n_1+i,j,0}^{(0)}, y_{n_1+i,j,0}^{(0)}, z_{n_1+i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\left(x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q$, $i = \overline{1, n_s-1}$, $j = \overline{1, m}$, $s = \overline{3, p-1}$, $\left(x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q$, $i = \overline{1, n_p}$, $j = \overline{1, m}$ і вузлів поверхонь розділу $\left(x_{r,j,k}^{(0)}, y_{r,j,k}^{(0)}, z_{r,j,k}^{(0)}\right)$, $r = \sum_{q=1}^s n_q$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $s = \overline{1, p-1}$ (так, щоб виконувались рівності відповідно (2.18), (2.94)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів всіх підобластей $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(0)}, y_{n_1+i,j,k}^{(0)}, z_{n_1+i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$,

$$\left(x_{r+i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)}\right), \quad r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad i = \overline{1, n_s - 1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad s = \overline{3, p - 1},$$

$$\left(x_{r+i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)}\right), \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad i = \overline{1, n_p}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad \text{за формулами}$$

$$(2.100) - (2.103) \text{ знаходимо початкові наближення } \gamma_s^{(0)} = \gamma_s \left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$$

інваріантів відображення γ_s ($s = \overline{1, p}$). Уточнення координат внутрішніх вуз-

$$\text{лів } \left(x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)}\right), \quad i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad \left(x_{n_1+i,j,k}^{(g)}, y_{n_1+i,j,k}^{(g)}, z_{n_1+i,j,k}^{(g)}\right),$$

$$i = \overline{1, n_2 - 1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad \left(x_{r+i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)}\right), \quad r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad i = \overline{1, n_s - 1},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad s = \overline{3, p - 1}, \quad \left(x_{r+i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)}\right), \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad i = \overline{1, n_p}, \quad j = \overline{1, m},$$

$k = \overline{1, l}$ проводимо на основі почергового розв'язання систем (2.92) і (2.93) із

використанням значень з попереднього кроку ітерації g ($g = 0, 1, \mathbf{K}$ – номер

кроку ітерації). Далі підправляємо координати вузлів поверхонь розділу на

основі рівнянь (2.94), (2.195) та почергового використання (2.96) або (2.98) і

(2.97) або (2.99), а також координати граничних вузлів, розв'язуючи набли-

жено систему рівнянь, сформовану з (2.118) і (2.19) або (2.20). Потім знахо-

димо нові наближення γ_s ($s = \overline{1, p}$) за формулами (2.100) – (2.103), величин

Φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p - 1}$), Q , Q_* і Q^* – за формулами (2.104) – (2.107), (2.23) та пере-

віряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і величин Φ_{*s}^*

($s = \overline{1, p - 1}$), Q відносно кроку ітерації відповідно:

$$\begin{aligned} & \max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(g+1)} - x_{i,j,k}^{(g)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(g+1)} - y_{i,j,k}^{(g)} \right|, \right. \\ & \left. \left| z_{i,j,k}^{(g+1)} - z_{i,j,k}^{(g)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| \Phi_{*1}^{(g+1)} - \Phi_{*1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \quad \left| \Phi_{*2}^{(g+1)} - \Phi_{*2}^{(g)} \right| < \varepsilon, \dots, \\ & \left| \Phi_{*p-1}^{(g+1)} - \Phi_{*p-1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \quad \left| Q^{(g+1)} - Q^{(g)} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Якщо умови (2.109) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів розрахункової гідродинамічної сітки обчислюємо нев'язку рівнянь системи (2.11):

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \quad \text{де } \delta_1 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \right) \right),$$

$$\delta_2 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) \right),$$

$$\delta_3 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{1}{2} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \right) \right),$$

$$s = \begin{cases} 1, i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \\ \dots \\ p, i = \overline{n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1, n}. \end{cases} \quad \text{Якщо точність отриманого розв'язку є неза-}$$

довільною, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^γ та розв'язуємо задачу заново.

Величини швидкостей у внутрішніх вузлах обчислюємо за формулами: $v_{i,j,k} = \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}$ ($i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; \dots; i = \overline{n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1, n}, s = p; j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}$), де $v_{x_{i,j,k}}, v_{y_{i,j,k}}$, і $v_{z_{i,j,k}}$ такі ж, як і в (2.88), а формули для знаходження величин швидкостей на поверхнях розділу і у граничних вузлах аналогічно п. 2.1.8.

2.2.4. Прогнозування просторових процесів фільтрації рідин у багат шарових кусково-однорідних двозв'язних пористих середовищах

Нехай маємо деяку двозв'язну криволінійну область G_z^8 , обмежену двома екіпотенціальними гладкими поверхнями $S_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $S^{**} = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$ та розділену деякими фіксованими екіпотенціальними поверхнями $S_{*1}^* = \{z: f_{*1}^*(x, y, z) = 0\}$, $S_{*2}^* = \{z: f_{*2}^*(x, y, z) = 0\}$, ..., $S_{*(p-1)}^* = \{z: f_{*(p-1)}^*(x, y, z) = 0\}$ на p підобластей $G_z^{8,1}$, $G_z^{8,2}$, ..., $G_z^{8,p}$ (рис. 2.18). Для області G_z^8 розглянемо модельну задачу, яка описує процес фільтрації рідини у відповідному багат шаровому кусково-однорідному пористому середовищі, що описується системою рівнянь (2.1) з крайовими умовами (2.38) та умовами узгодженості на поверхнях розділу:

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{S_{*1-}^*} &= \varphi \Big|_{S_{*1+}^*} = \varphi_{*1}^*, \quad \varphi \Big|_{S_{*2-}^*} = \varphi \Big|_{S_{*2+}^*} = \varphi_{*2}^*, \quad \dots, \\ \varphi \Big|_{S_{*(p-1)-}^*} &= \varphi \Big|_{S_{*(p-1)+}^*} = \varphi_{*(p-1)}^*, \quad \kappa_1 \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*1-}^*} = \kappa_2 \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*1+}^*}, \\ \kappa_2 \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*2-}^*} &= \kappa_3 \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*2+}^*}, \quad \dots, \quad \kappa_{(p-1)} \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*(p-1)-}^*} = \kappa_p \cdot \varphi'_n \Big|_{S_{*(p-1)+}^*}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

де φ_{*1}^* , φ_{*2}^* , ..., $\varphi_{*(p-1)}^*$ – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу S_{*1}^* , S_{*2}^* , ..., $S_{*(p-1)}^*$, $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*(p-1)}^* < \varphi^* < \infty$, κ – кое-

фіцієнт, що характеризує область G_z^8 , $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, (x, y, z) \in G_z^{8,1}, \\ \kappa_2, (x, y, z) \in G_z^{8,2}, \\ \dots \\ \kappa_p, (x, y, z) \in G_z^{8,p}, \end{cases}$ $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p$ –

довільні дійсні додатні числа.

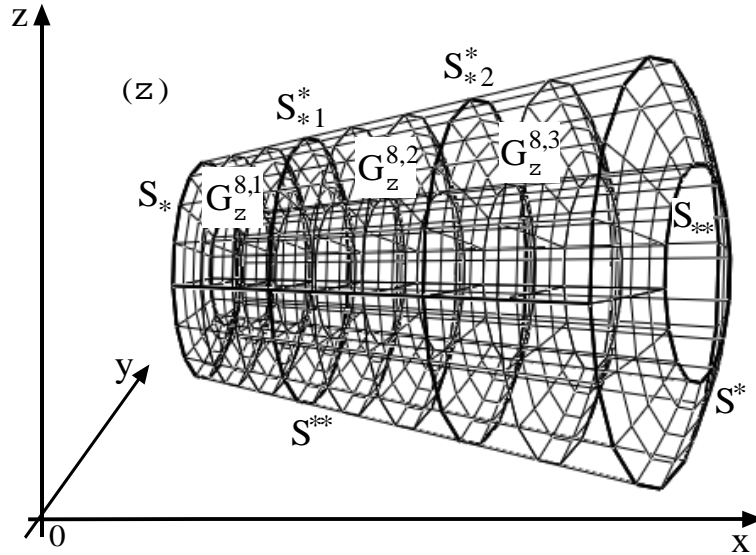


Рис. 2.18. Просторова тришарова кусково-однорідна фізична область G_z^8

Аналогічно п. 2.1.5, 2.2.2, шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (2.1), (2.38), (2.100) зводиться до розв'язування в однозв'язній кусково-однорідній області $G_z^8 \setminus \Gamma$ – криволінійному паралелепіпеді $ABCD A_* B_* C_* D_*$, обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z: f'(x, y, z) = 0\}$ і розділеному деякими фіксованими екіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на p підобластей $G_z^{8,1} \setminus \Gamma^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$, $G_z^{8,s} \setminus \Gamma^s = E_{s-1} F_{s-1} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{2, p-1}$), $G_z^p \setminus \Gamma^p = E_{p-1} F_{p-1} CDE_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_*$ ($\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \dots \cup \Gamma^p$, $\Gamma^1 = AE_1 E_{*1} A_* B F_1 F_{*1} B_*$, $\Gamma^s = E_{s-1} F_{s-1} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{2, p-1}$), $\Gamma^p = E_{p-1} DD_* E_{*(p-1)} F_{p-1} CC_* F_{*(p-1)}$), які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (рис. 2.19), з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу Γ (2.39), задачі, що описується рівняннями (2.1), (2.2) – (2.4) і (2.110), та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ з використанням умов (2.40).

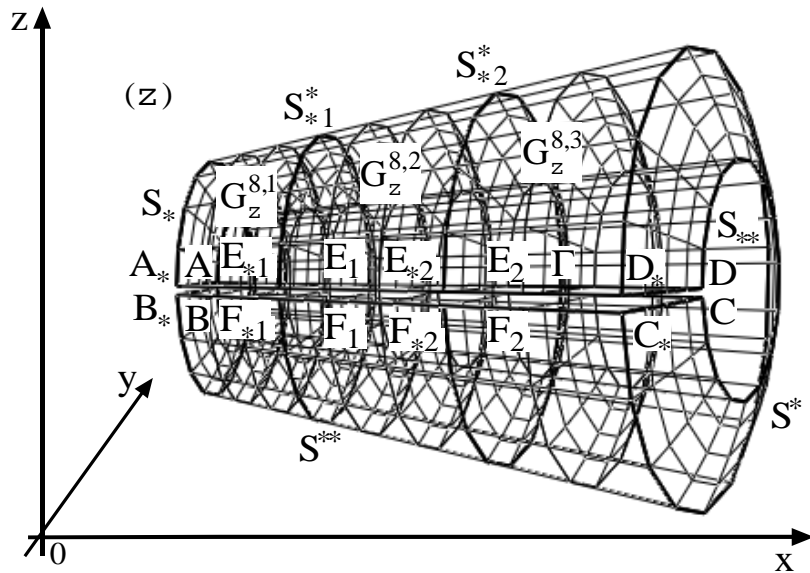


Рис. 2.19. Просторова фізична область G_z^8 з розрізом Γ

Тоді, аналогічно п. 2.1.5, 2.2.2, заміною крайових умов (2.3), (2.4) на умови (2.6), задача (2.1) – (2.4), (2.110) замінюється більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_z^8 \setminus \Gamma$ на відповідну область комплексного потенціалу G_w (рис. 2.14 б).

Обернена задача на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $G_w \rightarrow G_z^8 \setminus \Gamma$ (при невідомих значеннях параметрів φ^* , Q^* , Q^*) описується системою рівнянь (2.11) з умовами узгодженості на поверхні розділу підобластей (2.90), крайовими умовами (2.41) у випадку, коли функція $f(x, y, z)$, яка визначає розріз Γ , є наперед відомою, або (2.42), якщо функція $f(x, y, z)$ є невідомою, та відповідними умовами з (2.13), що забезпечують ортогональність ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, де, як і в п. 2.1.5, 2.2.2, $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_3(x, y, z) = f_4(x, y, z) = f'(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$. Для отримання області G_z^8 необхідно виконати “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов (2.40).

Покажемо, який вигляд матиме алгоритм для розв'язування цієї задачі. Для цього в області G_w будемо кусково-рівномірну ортогональну сітку G_w^y ,

яка є такою ж, як і в п. 2.2.3. Лівосторонні і правосторонні різницеві аналоги рівнянь (2.12) у рівномірній сітковій області (при відповідності кутових точок) матимуть вигляд (2.92), (2.93). Координати вузлів на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* знаходимо, використовуючи різницеві рівняння (2.94), (2.95) та (2.96) і (2.97) або (2.98) і (2.99). Крайові умови (2.41) і (2.42), які визначають фізичну область $G_z^8 \setminus \Gamma$, з умовами “склеювання” (2.40) апроксимуються точково-різницевими рівняннями (2.43) і (2.44) відповідно, а умови (2.13), що забезпечують ортогональність сітки, записуються відповідними числово-аналітичними різницевими рівняннями з (2.19) або (2.20), де, як і в п. 2.1.5, 2.2.2, $f_1(x, y, z) = f_*(x, y, z)$, $f_2(x, y, z) = f^*(x, y, z)$, $f_5(x, y, z) = f_{**}(x, y, z)$, $f_6(x, y, z) = f^{**}(x, y, z)$.

Формули для наближеного знаходження інваріантів відображення γ_s ($s = \overline{1, p}$) мають вигляд (2.100) – (2.103). Невідомі величини ϕ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q знаходяться за формулами (2.104) – (2.107) і (2.108), а величини Q_* , Q^* за формулами з (2.23).

Розв’язок відповідної різницевої задачі знаходимо аналогічно до п. 2.2.3. Для одержаних формули для знаходження величин швидкостей у вузлах розрахункової гідродинамічної сітки G_z^γ отримуються аналогічно п. 2.2.3, 2.1.8.

2.2.5. Тестові приклади

Для перевірки коректної роботи отриманих алгоритмів проведено серію числових експериментів. Так, у випадку області $G_z^{5,1}$, обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 2.6197848)^2 + y^2 + z^2 - 137.8525137$, $f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 + (x - 52.6197848)^2 - 137.8525137$, $f_3(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y - 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333$, $f_4(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y + 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 25) + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - 833.3333333z^2$, при $\phi_* = 0$, $\phi^* = 6$, $f_*(x, y, z) = x - 25$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$ отримано сіткову область, зображену на рис. 2.20. При цьому параметри n_1 , n_2 , m , l вибиралися з умови

найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної. Числові результати розв'язання тестової задачі, що подані у табл. 2.7, свідчать про збіжність запропонованих алгоритмів та можливість їх використання на практиці для отримання розрахункових сіток.

Табл. 2.7. Результати розв'язання задачі для області $G_z^{5,1}$

№	$n_1 = n_2 + 1$	m	l	e	φ_*	Q	d
1	20	9	15	0.00001	1.468396	4.238980	0.026102
2	40	18	30	0.00001	1.483769	4.313756	0.004000
3	80	36	60	0.00001	1.491772	4.350489	0.000561
4	160	72	120	0.00001	1.495857	4.368597	0.000075
5	320	144	240	0.00001	1.497921	4.377573	0.000010

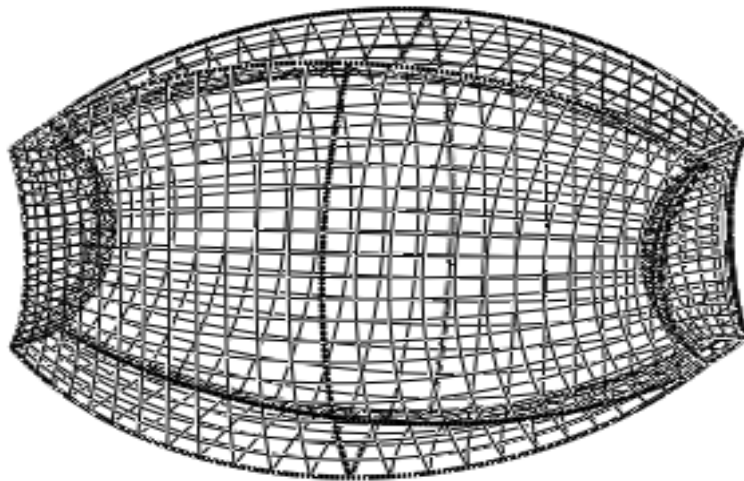
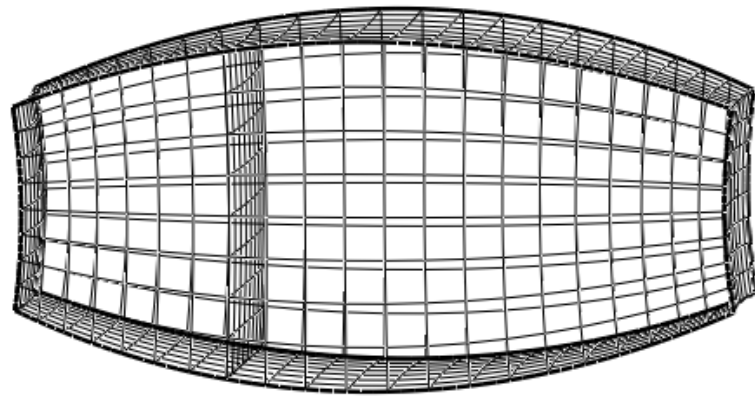


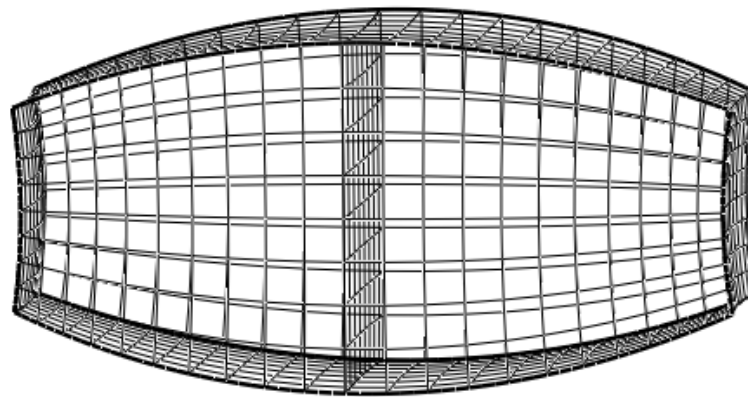
Рис. 2.20. Розрахована сіткова область $G_z^{5,1}$

Крім того, проведено комп'ютерне моделювання процесу фільтрації рідини у двошаровому пористому середовищі, яке характеризується коефіцієнтами фільтрації $\kappa_1 = 0.45$ м/добу, $\kappa_2 = 0.3$ м/добу і активної пористості $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.5$. Так, для модельної області $G_z^{5,2}$, обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_2(x, y, z) = (x - 420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y - 615.536707)^2 + z^2 - 418885.4382$, $f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615.53670744)^2 + z^2 - 418885.4382$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 + 160000y^2 - 932548.33996z^2$,

вибрано три різні положення поверхні розділу EFF_*E_* : $f_{*1}(x, y, z) = (x + 232.79068275)^2 + y^2 + z^2 - 147307.775073$, $f_{*2}(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$, $f_{*3}(x, y, z) = (x - 632.79068275)^2 + y^2 + z^2 - 147307.775073$. При цьому побудовано розрахункові динамічні сітки $G_z^{5,2,1}$ при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 47.4$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = 7$, $n_2 = 13$, $m = 7$, $l = 7$, $G_z^{5,2,2}$ при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 49$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$, $m = 7$, $l = 7$, $G_z^{5,2,3}$ при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 48.7$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = 14$, $n_2 = 6$, $m = 7$, $l = 7$, (рис. 2.21), які отримані в залежності від вибраної поверхні розділу $f_{*j}(x, y, z)$ ($j = \overline{1,3}$) (параметри n_1 , n_2 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Значення φ_* та φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість руху рідини вздовж двошарового пористого середовища $v_{сер}$ становила 1 м/добу.

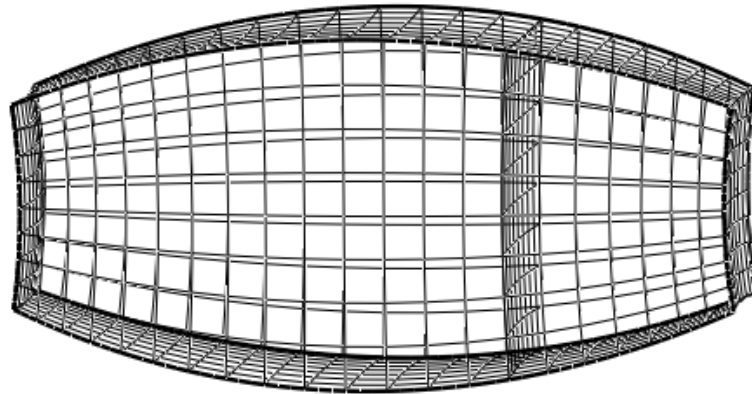


а)



б)

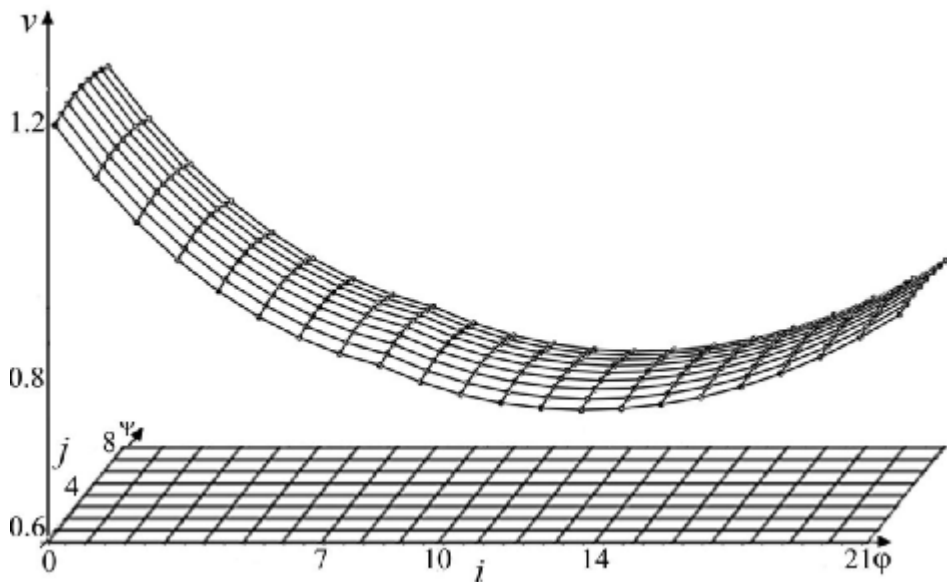
Рис. 2.21. Розраховані сіткові області $G_z^{5,2,1}$ (а), $G_z^{5,2,2}$ (б), $G_z^{5,2,3}$ (в) при різних положеннях поверхні розділу



в)

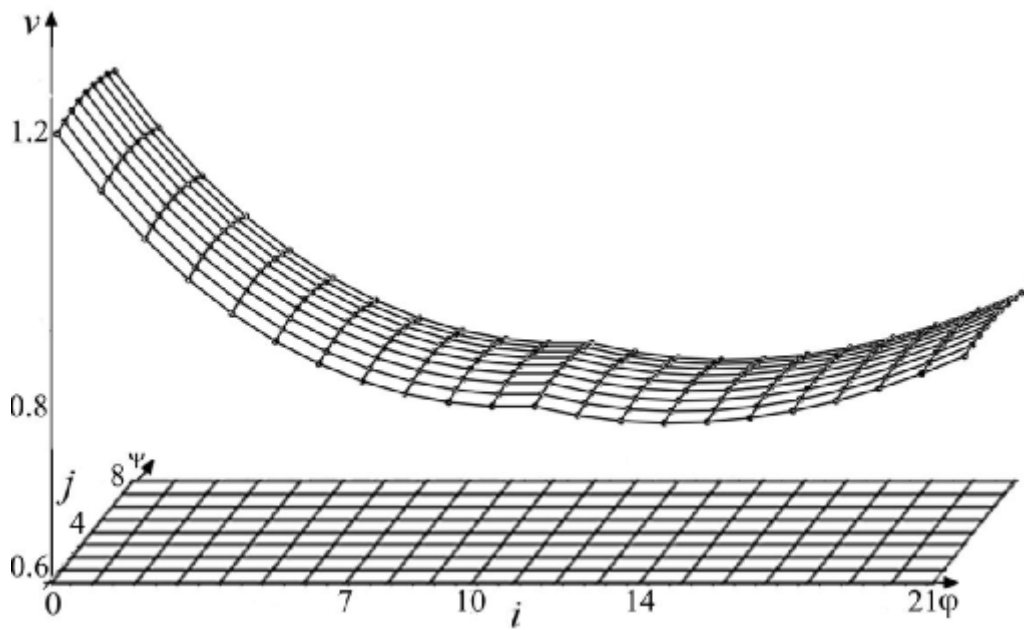
Прод. рис. 2.21

Також для областей $G_z^{5,2,j}$ ($j = \overline{1,3}$) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять: $Q_1 = 2.01 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_2 = 1.83 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_3 = 1.9 \text{ м}^3/\text{добу}$, потенціали на поверхнях розділу: $\phi_{*1}^* = 19.74$, $\phi_{*2}^* = 26.88$, $\phi_{*3}^* = 36.08$, та обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ (рис. 2.22).

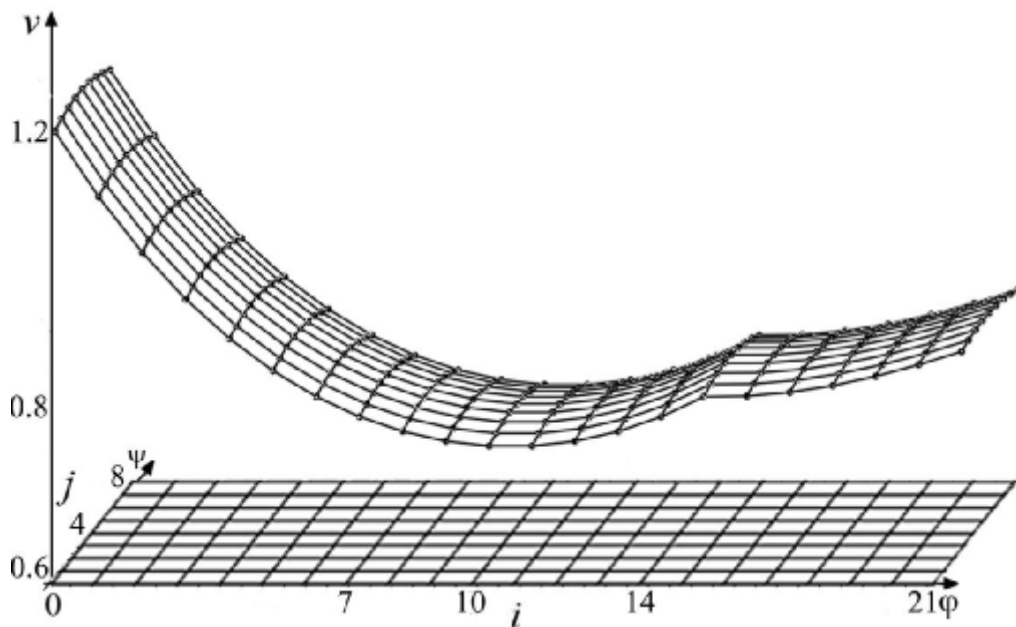


а)

Рис. 2.22. Розподіл величин швидкостей фільтрації вздовж поверхонь течій $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для областей $G_z^{5,2,1}$ (а), $G_z^{5,2,2}$ (б), $G_z^{5,2,3}$ (в)



б)



в)

Прод. рис. 2.22

Отримані алгоритми дозволяють будувати просторові фільтраційні поля для фільтрів із багат шаровими кусково-однорідними пористими завантаженнями. Так, для двошарового фільтру, форму якого описано поверхнями: $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $f_{**}(x, y, z) = 32.1632 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, $f^{**}(x, y, z) = 7.5487 \cdot x^2 - y^2 - z^2$ і поверхнею розділу $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2.25$, побудовано розрахункову гідродинамічну сітку в G_2^6

(рис. 2.23) при $n_1 = n_2 = 16$, $m = 40$, $l = 5$ (параметри n_1 , n_2 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Крім того, при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 4088.6$, $\kappa_1 = 5.6$ м/добу, $\kappa_2 = 8.4$ м/добу, ефективних пористостях завантажень $\sigma_1 = 0.35$ і $\sigma_2 = 0.25$ знайдено фільтраційну витрату $Q = 7.68$ м³/год, величину потенціалу на поверхні розділу $\varphi_*^* = 2453.1$, обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ (рис. 2.24), що відповідають величині середньої швидкості фільтрування води 10 м/год. Нев'язка δ числових розрахунків становить 0.0003.

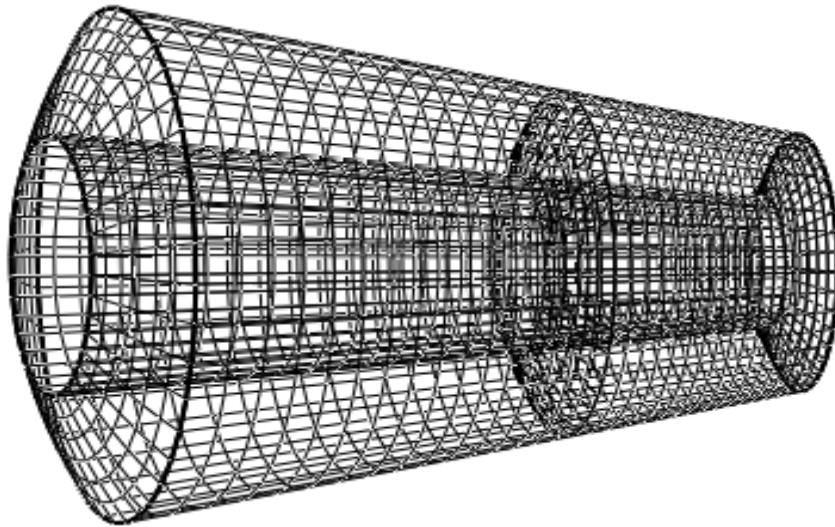


Рис. 2.23. Розрахована сіткова область G_z^6

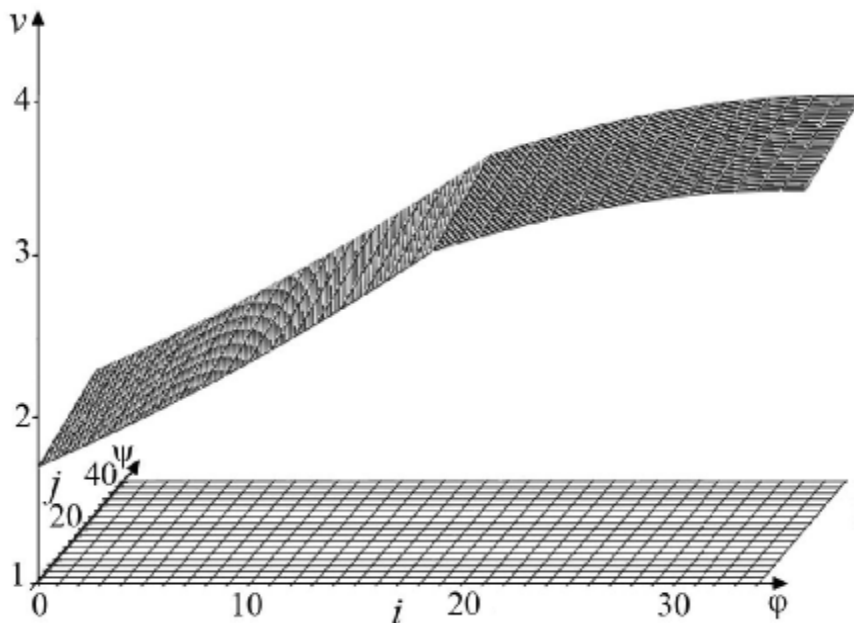


Рис. 2.24. Розподіл величин швидкості фільтрації вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для області G_z^6

Також проведено числовий експеримент побудови просторового фільтраційного поля для фільтра із тришаровим кусково-однорідним пористим завантаженням. Для експерименту взято фільтр, форма якого описується поверхнями: $f_1(x, y, z) = x - 2$, $f_2(x, y, z) = (x - 4.0777343)^2 + y^2 + z^2 - 0.3169799$, $f_3(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438$, $f_4(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x^2 - 4x + y^2 + z^2)^2 + 16y^2 - 93.2548340z^2$, а поверхні розділу: $f_{*1}(x, y, z) = (x - 5.5936395)^2 + y^2 + z^2 - 8.9142448$, $f_{*2}(x, y, z) = (x - 4.3533586)^2 + y^2 + z^2 - 1.5382967$. При цьому побудовано розрахункову гідродинамічну сітку в G_z^7 (рис. 2.25) при $n_1 = 13$, $n_2 = 14$, $n_3 = 13$ ($n = 40$), $m = 16$, $l = 12$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 198.05$, коефіцієнтах фільтрації $\kappa_1 = 5.6$ м/добу, $\kappa_2 = 8.4$ м/добу і $\kappa_3 = 9.8$ м/добу та активних пористостях завантажень $\sigma_1 = 0.45$, $\sigma_2 = 0.35$ і $\sigma_3 = 0.25$ (параметри n_1 , n_2 , n_3 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0.077303$ м³/год., потенціали на поверхнях розділу $\varphi_{*1}^* = 79.78$, $\varphi_{*2}^* = 148.626$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ (рис. 2.26), що відповідають величині середньої швидкості руху води через завантаження криволінійного фільтра 1 м/год. Нев'язка δ числових розрахунків становить 0.001.

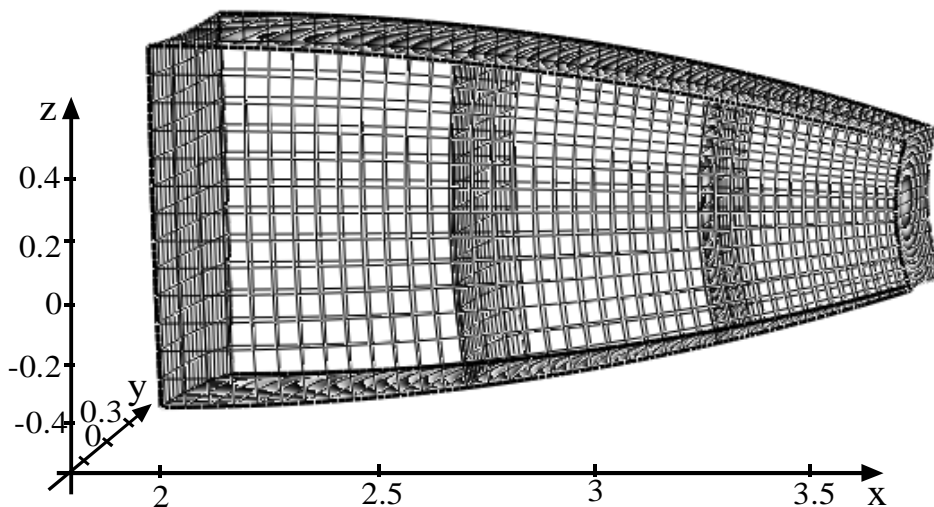


Рис. 2.25. Розрахункова динамічна сітка в G_z^7

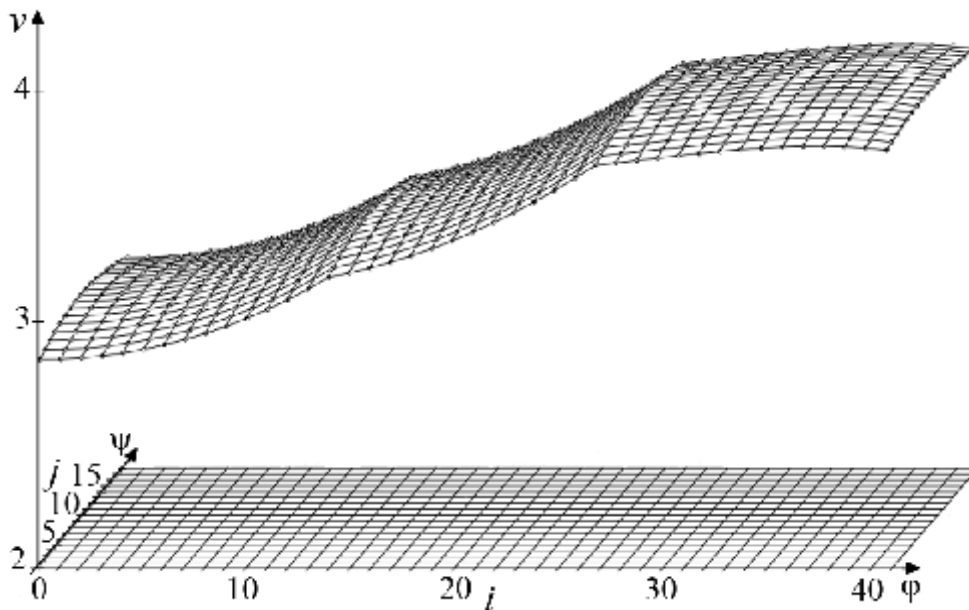


Рис. 2.26. Розподіл величин швидкості фільтрації
вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для області G_z^7

Також здійснена перевірка коректної роботи алгоритму для побудови просторового фільтраційного поля у тришаровому фільтрі із кусково-однорідним пористим завантаженням – двозв’язної модельної області, яку описано поверхнями [153]: $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $f_{**}(x, y, z) = 32.1632 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, $f^{**}(x, y, z) = 7.5487 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, а межі розділу шарів – поверхнями: $f_{*1}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2.25$, $f_{*2}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.44$. При цьому побудовано розрахункову гідродинамічну сітку в області G_z^8 (рис. 2.27) при $n_1 = 11$, $n_2 = 11$, $n_3 = 10$ ($n = 32$), $m = 16$, $l = 12$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 4891$, коефіцієнтах фільтрації $\kappa_1 = 5.6$ м/добу, $\kappa_2 = 8.4$ м/добу і $\kappa_3 = 9.8$ м/добу та активних пористостях завантажень $\sigma_1 = 0.45$, $\sigma_2 = 0.35$ і $\sigma_3 = 0.25$ (параметри n_1 , n_2 , n_3 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0.325$ м³/год, потенціали на поверхнях розділу $\varphi_{*1}^* = 2054.06$, $\varphi_{*2}^* = 3814.8$, обчислено величини швидкості фільтрації (рис. 2.28), що відповідають величині середньої швидкості руху води через кусково-однорідне завантаження тришарового фільтру 10 м/год. Нев’язка δ числових розрахунків становить 0.0003.

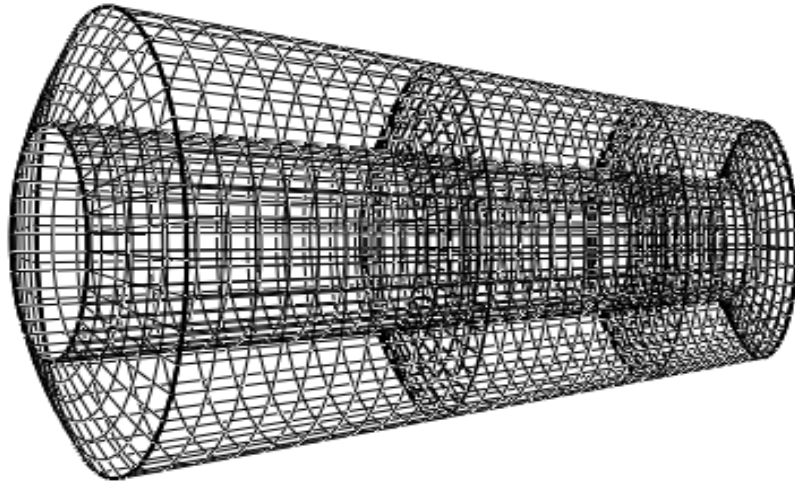


Рис. 2.27. Розрахункова гідродинамічна сітка для області G_z^8

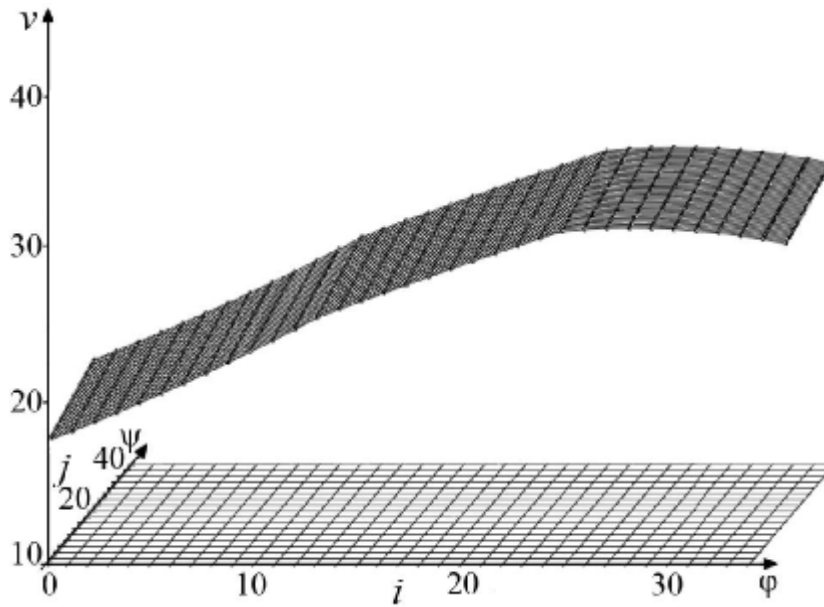


Рис. 2.28. Розподіл величин швидкості фільтрації
вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для області G_z^8

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ПРОЦЕСИ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

При дослідженні просторових процесів розповсюдження забруднюючих (розчинних) речовин у водонасичених пористих середовищах за допомогою математичного моделювання та проведення комп'ютерних експериментів виникає чимало труднощів, пов'язаних не тільки з видом рівнянь у частинних похідних і граничних умов, а й з складною геометрією модельної області, у якій шукається розв'язок. У зв'язку із цим для випадків просторових модельних областей, обмежених екіпотенціальними або квазіекіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, та переважання конвективних складових процесу над дифузійними у рівняннях конвективної дифузії й граничних умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних координат комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, що, як відомо, має вигляд багатогранника із гранями, паралельними площинам, утвореними осями прямокутної системи координат. Для отримання розв'язків відповідних просторових сингулярно-збурених задач ефективним є використання асимптотичного методу з побудовою відповідних примежових поправок.

У цьому розділі поширено на простір математичні моделі процесів конвективної дифузії в одно- і двозв'язних областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями [17]. При цьому у модельних задачах враховано: нерівномірний і змінний в часі розподіл концентрації розчиненої у фільтраційному потоці речовини; крім повздовжньої, ще й поперечну (вертикальну і горизонтальну) дифузійні складові; умови конвективного або конвективно-дифузійного підведення і відведення забруднюючої речовини; як наявність, так і відсутність додаткових джерел на водонепроникних ділянках фільтраційної області.

Розроблену методику поширено на випадки дослідження просторових процесів розповсюдження забруднюючих речовин у водонасичених недеформівних пористих середовищах із врахуванням: багатокomпонентності забруднюючої речовини; багатозв'язності відповідних модельних областей; анізотропних властивостей середовища, коли коефіцієнти фільтрації і дифузії є тензорами; багат шаровості середовища, коли кожен шар характеризується власними коефіцієнтами фільтрації, дифузії і пористості.

3.1. Прогнозування просторових процесів поширення забруднюючих речовин у одношарових пористих середовищах

3.1.1. Математичне моделювання просторових процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах, що описуються сингулярно-збуреними задачами типу конвективної дифузії

Змоделюємо процес поширення забруднюючої речовини у однорідному водонасиченому недеформівному пористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді $G_z^1 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (рис. 2.1 а). При цьому для області $G_z^1 \times (0, \infty)$ відповідна просторова модельна задача складатиметься з рівнянь (2.1), які описують процес фільтрації рідини у відповідній області, та наступного рівняння, що описує механізми міграції забруднюючої речовини у відповідному пористому середовищі [14]:

$$\operatorname{div} (D \cdot \operatorname{grad} C) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} C = \sigma \cdot C_t' . \quad (3.1)$$

Крайовими умовами для фільтраційної задачі є (2.2) – (2.4), а для задачі конвективної дифузії крайовою умовою на ділянці входу ABB_*A_* фільтраційної течії задається розподіл величин концентрації:

$$C \Big|_{ABB_*A_*} = c_*(M, t) \quad (3.2)$$

або умова Данквертса, що враховує як конвективний, так і дифузійний механізми підведення речовини:

$$D \cdot C_n^t - v_{*n} \cdot (C - c_*(M, t)) \Big|_{ABB_*A_*} = 0, \quad (3.3)$$

на ділянці виходу CDD_*C_* – розподіл величин її концентрації:

$$C \Big|_{CDD_*C_*} = c^*(M, t) \quad (3.4)$$

або умова (за наявності інтенсивного відводу речовини):

$$C_n^t \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad (3.5)$$

або умова Данквертса, що враховує як конвективний, так і дифузійний механізми відведення речовини:

$$D \cdot C_n^t - v_n^* \cdot (C - c^*(M, t)) \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad (3.6)$$

на водонепроникних (інколи, з метою спрощення дослідження – на умовних водонепроникних) ділянках ADD_*A_* , BCC_*B_* , $ABCD$ і $A_*B_*C_*D_*$ фільтраційної області відповідно умови наявності або відсутності додаткових джерел:

$$C \Big|_{ADD_*A_*} = c_{**}(M, t) \quad (3.7)$$

або

$$C_n^t \Big|_{ADD_*A_*} = 0, \quad (3.8)$$

$$C \Big|_{BCC_*B_*} = c^{**}(M, t) \quad (3.9)$$

або

$$C_n^t \Big|_{BCC_*B_*} = 0, \quad (3.10)$$

$$C \Big|_{ABCD} = c_{***}(M, t) \quad (3.11)$$

або

$$C_n^t \Big|_{ABCD} = 0, \quad (3.12)$$

$$C \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{***}(M, t) \quad (3.13)$$

або

$$C_n^t \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = 0. \quad (3.14)$$

Крім того, задається початкова умова розподілу величин концентрації забруднюючої речовини у модельній області:

$$C|_{t=0} = c_0^0(x, y, z). \quad (3.15)$$

Тут $C = C(x, y, z, t)$ – концентрація забруднюючої речовини у фільтраційній течії в точці (x, y, z) у момент часу t , D – коефіцієнт дифузії, $D = \varepsilon \cdot d_0$, d_0 – довільне дійсне додатне число, ε – малий параметр, $\varepsilon > 0$, σ – коефіцієнт активної пористості, $0 < \sigma < 1$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_{***}(M, t)$, $c^{***}(M, t)$, $c_0^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області $G_z^1 \times (0, \infty)$ [15, 17, 98], M – довільна точка відповідної поверхні, v_{*n} і v_n^* – нормальні складові швидкості на поверхнях ABB_*A_* і CDD_*C_* .

Припустивши, що задача (2.1) – (2.4) є розв’язаною (див. п. 2.1.2), зокрема, знайдено параметри Q , Q_* , Q^* , обчислено поле швидкостей \dot{v} і ряд інших величин, та, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2) – (3.15), отримано відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\mathcal{D}_\varphi \left(\frac{\mathcal{D}_\varphi^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_\psi + b_{2,2} \cdot c'_\eta \right) - \frac{\mathcal{D}_\varphi^2}{\kappa} \cdot c'_\varphi = \sigma \cdot c'_t, \quad (3.16)$$

$$c(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \mathcal{D}_\varphi(\psi, \eta, t) \quad (3.17)$$

або

$$\mathcal{D}_\varphi \cdot c'_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \mathcal{D}_\varphi(\psi, \eta, t)) = 0, \quad (3.18)$$

$$c(\varphi^*, \psi, \eta, t) = \mathcal{D}_\varphi^*(\psi, \eta, t) \quad (3.19)$$

або

$$c'_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \quad (3.20)$$

або

$$\mathcal{D}_\varphi \cdot c'_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \mathcal{D}_\varphi^*(\psi, \eta, t)) = 0, \quad (3.21)$$

$$c(\varphi, 0, \eta, t) = \mathcal{C}_{\varphi}^0(\varphi, \eta, t) \quad (3.22)$$

або

$$c'_{\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = 0, \quad (3.23)$$

$$c(\varphi, Q_*, \eta, t) = \mathcal{C}_{\varphi}^{**}(\varphi, \eta, t) \quad (3.24)$$

або

$$c'_{\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = 0, \quad (3.25)$$

$$c(\varphi, \psi, 0, t) = \mathcal{C}_{\varphi\psi}^0(\varphi, \psi, t) \quad (3.26)$$

або

$$c'_{\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = 0, \quad (3.27)$$

$$c(\varphi, \psi, Q^*, t) = \mathcal{C}_{\varphi\psi}^{***}(\varphi, \psi, t) \quad (3.28)$$

або

$$c'_{\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \quad (3.29)$$

$$c(\varphi, \psi, \eta, 0) = \mathcal{C}_{\varphi\psi}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (3.30)$$

де

$$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi}^0(\varphi, \eta, t) = c_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi}^*(\varphi, \eta, t) = c^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta), t)$$

$$\mathcal{C}_{\varphi}^{**}(\varphi, \eta, t) = c_{**}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi}^{***}(\varphi, \eta, t) = c^{***}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi\psi}^0(\varphi, \psi, t) = c_{***}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi\psi}^{***}(\varphi, \psi, t) = c^{***}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*), t),$$

$$\mathcal{C}_{\varphi\psi}^0(\varphi, \psi, \eta) = c_0^0(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varphi, \psi, \eta) = v(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2, \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2,$$

$$b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \quad b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}''$$

або

$$\begin{aligned}
b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{1}{I^2} \left((y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta)^2 + (x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi)^2 + (x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta)^2 \right), \\
b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{1}{I^2} \left((y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi)^2 + (x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi)^2 + (x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi)^2 \right), \\
b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta}{I} \right) \cdot \frac{y'_\psi \cdot z'_\eta - y'_\eta \cdot z'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta}{I} \right) \times \\
&\times \frac{y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta}{I} \right) \cdot \frac{y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\eta \cdot z'_\psi - x'_\psi \cdot z'_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta}{I} \right) \cdot \frac{x'_\psi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta}{I} \right) \cdot \frac{x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi}{I}, \\
b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{y'_\psi \cdot z'_\eta - y'_\eta \cdot z'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{y'_\eta \cdot z'_\varphi - y'_\varphi \cdot z'_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{y'_\varphi \cdot z'_\psi - y'_\psi \cdot z'_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} \right) \cdot \frac{x'_\varphi \cdot z'_\eta - x'_\eta \cdot z'_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\psi \cdot z'_\varphi - x'_\varphi \cdot z'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{x'_\psi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi}{I} \right) \times \\
&\times \frac{x'_\eta \cdot y'_\varphi - x'_\varphi \cdot y'_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{x'_\varphi \cdot y'_\psi - x'_\psi \cdot y'_\varphi}{I},
\end{aligned}$$

I – якобіан відповідного перетворення, $\mathcal{D}\Phi = \varepsilon \cdot d_0$.

Асимптотичне наближення розв'язку c задачі (3.16) – (3.30) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді ряду:

$$\begin{aligned}
c &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot P_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \dot{P}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \ddot{P}_i + \\
&+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \dot{\dot{P}}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \ddot{\dot{P}}_i + R_{n+1}, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

де $c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотичного ряду,
 $P_i = P_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$
(поправки на виході фільтраційної течії), $\dot{P}_i = \dot{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\dot{P}_i = \dot{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$,
 $\dot{P}_i = \dot{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\dot{P}_i = \dot{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового
шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних
гранях модельної області), $\varphi_0 = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\psi_0 = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\psi_0 = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\eta_0 = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$,
 $\eta_0 = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),
 $R_{n+1} = R_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишковий член.

У результаті підстановки (3.31) в (3.16) – (3.30) і виконання стандартної
процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε за умови
(3.17) на ділянці входу для знаходження головної частини c_0 асимптотичного
наближення розв'язку і поправок c_i ($i = \overline{1, n}$) одержимо задачу:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c'_{0\varphi} + \sigma \cdot c'_{0t} = 0; \\ c_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c'_{i\varphi} + \sigma \cdot c'_{it} = g_i; \\ c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\text{де } g_i = g_i(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(i-1)\eta} \right)$$

($i = \overline{1, n}$).

У результаті їх розв'язання матимемо:

$$c_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \vartheta_0^0(\psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \vartheta_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\varphi, \psi, \eta, f(\varphi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{\mathfrak{V}^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi, & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_i(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \psi, \eta) = \kappa \cdot \sigma \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathfrak{V}^2(\varphi, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідними частинками шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in AB B_* A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^1$ вздовж відповідної лінії течії, f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $\mathfrak{V}^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а κ і σ – додатньо-визначені сталі).

При умові, що на ділянці входу задана умова (3.18), для знаходження головної частини c_0 розв'язку отримаємо задачу (3.32), а для знаходження поправок c_i ($i = \overline{1, n}$) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\mathfrak{V}^2}{\kappa} \cdot c'_{i\varphi} + \sigma \cdot c'_{it} = g_i; c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ d_0 \cdot c'_{(i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (3.34)$$

У результаті розв'язання цих задач матимемо:

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_i(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_i(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $h_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\varphi, \psi, \eta, f(\varphi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{\mathfrak{V}^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + d_0 \cdot c'_{(i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t)$

($i = \overline{1, n}$).

Для знаходження примежових поправок P_i ($i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ у випадку відсутності інтенсивного відводу рідини (крайова умова (3.19)) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0'' + \kappa \cdot P_0' = 0; \\ P_0(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P_0(0, \psi, \eta, t) = \mathcal{P}^*(\psi, \eta, t) - c_0(\phi^*, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_i'' + \kappa \cdot P_i' = q_i; \\ P_i(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P_i(0, \psi, \eta, t) = -c_i(\phi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_{(n+1)}'' + \kappa \cdot P_{(n+1)}' = q_{n+1}; \\ P_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P_{n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{де } q_i = q_i(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{\kappa^2}{\mathcal{P}^2(\phi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P_{(i-1)t}' - \sum_{k=1}^i \left(d_0 \cdot \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P_{(i-k)\phi\psi}'' + \frac{V_k}{\kappa} \cdot P_{(i-k)\phi}' \right) - \right. \\ \left. - I(i, 2) \cdot d_0 \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P_{(i-2-k)\psi\psi}'' + B_{2,1,k} \cdot P_{(i-2-k)\psi}' + B_{1,2,k} \cdot P_{(i-2-k)\eta\eta}'' + B_{2,2,k} \cdot P_{(i-2-k)\eta}' \right) \right)$$

$(i = \overline{1, n+1})$, V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -тих степенях ε у

розкладі відповідних функцій $\mathcal{P}^2(\phi^* - \varepsilon\phi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\phi^* - \varepsilon\phi, \psi, \eta)$,

$b_{1,2}(\phi^* - \varepsilon\phi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\phi^* - \varepsilon\phi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\phi^* - \varepsilon\phi, \psi, \eta)$ у ряд Тейлора в околі

$$\phi = \phi^*, I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$$

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$P_0(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_0}{\kappa} \cdot \left(\mathcal{P}^*(\psi, \eta, t) - c_0(\phi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi},$$

$$P_i(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi \right) d\phi - c_i(\phi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi \right) d\phi.$$

У випадку ж врахування інтенсивного відводу рідини (крайова умова (3.20)) для знаходження функцій P_i ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0''_{\Phi\Phi} + \kappa \cdot P_0'_{\Phi} = 0; \\ P_0(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P_0'_{\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{0\Phi}(0, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_i''_{\Phi\Phi} + \kappa \cdot P_i'_{\Phi} = q_i; \\ P_i(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P_i'_{\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{i\Phi}(0, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_{(n+1)}''_{\Phi\Phi} + \kappa \cdot P_{(n+1)}'_{\Phi} = q_{n+1}; \\ P_{n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P_{(n+1)\Phi}'(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

У результаті послідовного розв'язання цих задач одержимо наступні розв'язки:

$$P_0(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_0}{\kappa} \cdot c'_{0\Phi}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\Phi},$$

$$P_i(\Phi, \psi, \eta, t) = \int_0^{\Phi} \left(\frac{1}{d_0} \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi - c'_{i\Phi}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi \right) d\phi.$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (крайова умова (3.21)), то для знаходження функцій P_i ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0''_{\Phi\Phi} + \kappa \cdot P_0'_{\Phi} = 0; P_0(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot \left(c'_{0\Phi}(0, \psi, \eta, t) + P_0'_{\Phi}(0, \psi, \eta, t) \right) + \\ + \kappa \cdot \left(c_0(0, \psi, \eta, t) + P_0(0, \psi, \eta, t) - c^*(\psi, \eta, t) \right) = 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_i''_{\Phi\Phi} + \kappa \cdot P_i'_{\Phi} = q_i; P_i(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot \left(c'_{i\Phi}(0, \psi, \eta, t) + P_i'_{\Phi}(0, \psi, \eta, t) \right) + \\ + \kappa \cdot \left(c_i(0, \psi, \eta, t) + P_i(0, \psi, \eta, t) \right) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P''_{(n+1)\phi} + \kappa \cdot P'_{(n+1)\phi} = q_{n+1}; P_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot P'_{(n+1)\phi}(0, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P_{n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$P_0(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot \left(\kappa \cdot c^*(\psi, \eta, t) - d_0 \cdot c'_{0\phi}(0, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_0(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi},$$

$$P_i(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi - d_0 \cdot c'_{i\phi}(0, \psi, \eta, t) - \right. \\ \left. - \kappa \cdot c_i(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi \right) d\phi.$$

Для знаходження примежових поправок $\dot{P}_i, \dot{P}_i, \dot{P}_i, \dot{P}_i$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) у випадку наявності додаткових джерел (відповідно за крайових умов (3.22), (3.24), (3.26), (3.28)) отримаємо задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\phi, 0, \eta) \cdot P''_{0\phi} - \frac{\vartheta^2(\phi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{0\phi} = \sigma \cdot P'_{0i}; \\ P_0(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_0(\phi, 0, \eta, t) = \vartheta_{**}(\phi, \eta, t) - M_0(\phi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\phi, 0, \eta) \cdot P''_{i\phi} - \frac{\vartheta^2(\phi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{i\phi} = \sigma \cdot P'_{it} - \\ - M_i(\phi, \psi, \eta, t); P_i(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_i(\phi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_i(\phi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\phi, Q_*, \eta) \cdot P''_{0\phi} - \frac{\vartheta^2(\phi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{0\phi} = \sigma \cdot P'_{0i}; \\ P_0(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_0(\phi, Q_*, \eta, t) = \vartheta_{**}(\phi, \eta, t) - M_0(\phi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P_{i\varphi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot P_{i\varphi}' = \sigma \cdot P_{it}' - \\ & - M_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \eta, t); P_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} 0, P_i(\varphi, Q_*, \eta, t) = \\ & = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ не парне,} \\ -M_i(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & d_0 \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P_{0\varphi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot P_{0\varphi}' = \sigma \cdot P_{0t}'; \\ & P_0(\varphi, \psi, \vartheta t) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} 0, P_0(\varphi, \psi, 0, t) = \vartheta_{***}(\varphi, \psi, t) - K_0(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \right. \quad (3.48)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, \psi, 0) \cdot P_{i\varphi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot P_{i\varphi}' = \sigma \cdot P_{it}' - \\ & - K_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \vartheta t); P_i(\varphi, \psi, \vartheta t) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} 0, P_i(\varphi, \psi, 0, t) = \\ & = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ не парне,} \\ -K_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{aligned} \right. \quad (3.49)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & d_0 \cdot b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^*) \cdot P_{0\varphi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, \psi, Q^*)}{\kappa} \cdot P_{0\varphi}' = \sigma \cdot P_{0t}'; \\ & P_0(\varphi, \psi, \vartheta t) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} 0, P_0(\varphi, \psi, Q^*, t) = \vartheta_{***}(\varphi, \psi, t) - K_0(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \right. \quad (3.50)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & d_0 \cdot b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^*) \cdot P_{i\varphi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, \psi, Q^*)}{\kappa} \cdot P_{i\varphi}' = \sigma \cdot P_{it}' - \\ & = K_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \vartheta t); P_i(\varphi, \psi, \vartheta t) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} 0, P_i(\varphi, \psi, Q^*, t) = \\ & = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ не парне,} \\ -K_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{aligned} \right. \quad (3.51)$$

де $M_i(\varphi, \eta, t) = c_{i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $M_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \times$
 $\times \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P_{(i-k)\varphi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot P_{(i-1-k)\varphi}' + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\vartheta_k}{\kappa^2} \cdot P_{(i-2-k)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,k} \cdot P_{(i-2-k)\eta\eta}'' + \right. \right.$
 $\left. + B_{2,2,k} \cdot P_{(i-2-k)\eta}'' \right) - \sum_{k=1}^i \frac{\vartheta_k}{\kappa} \cdot P_{(i-k)\varphi}'$ ($i = \overline{1, 2n+1}$), ϑ_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$ і $B_{2,2,k}$ –

коєфіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, $M_i(\varphi, \eta, t) = c_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + P_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + \dot{P}_i(\varphi, Q_*, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $M_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i \dot{B}_{1,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-k)\vartheta}'' - \sum_{k=0}^{i-1} \dot{B}_{2,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-1-k)\vartheta}' + I(i, 2) \times \right.$
 $\left. \times \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\dot{V}_k}{\kappa^2} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\varphi}'' + \dot{B}_{1,2,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\eta\eta}'' - \dot{B}_{2,2,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\eta}' \right) \right) - \sum_{k=1}^i \frac{\dot{V}_k}{\kappa} \cdot \dot{P}_{(i-k)\varphi}'$ ($i = \overline{1, 2n+1}$),
 \dot{V}_k , $\dot{B}_{1,1,k}$, $\dot{B}_{1,2,k}$, $\dot{B}_{2,1,k}$ і $\dot{B}_{2,2,k}$ – коєфіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$,
 $K_i(\varphi, \psi, t) = c_{i-i/2}(\varphi, \psi, 0, t) + P_{i-i/2}(\varphi, \psi, 0, t) + \dot{P}_i(\varphi, \psi, 0, t) + \dot{P}_i(\varphi, \psi, 0, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$),
 $K_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i \dot{B}_{1,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-k)\vartheta}'' + \sum_{k=0}^{i-1} \dot{B}_{2,2,k} \cdot \dot{P}_{(i-1-k)\vartheta}' + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\dot{V}_k}{\kappa^2} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\varphi}'' + \right. \right.$
 $\left. \left. + \dot{B}_{1,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\psi\psi}'' + \dot{B}_{2,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\psi}' \right) \right) - \sum_{k=1}^i \frac{\dot{V}_k}{\kappa} \cdot \dot{P}_{(i-k)\varphi}'$ ($i = \overline{1, 2n+1}$), \dot{V}_k , $\dot{B}_{1,1,k}$, $\dot{B}_{1,2,k}$,
 $\dot{B}_{2,1,k}$ і $\dot{B}_{2,2,k}$ – коєфіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\eta = 0$, $K_i(\varphi, \psi, t) = c_{i-i/2}(\varphi, \psi, Q^*, t) + P_{i-i/2}(\varphi, \psi, Q^*, t) + \dot{P}_i(\varphi, \psi, Q^*, t) +$
 $\dot{P}_i(\varphi, \psi, Q^*, t) + \dot{P}_i(\varphi, \psi, Q^*, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $K_i^{\vartheta}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i \dot{B}_{1,2,k} \cdot \dot{P}_{(i-k)\vartheta}'' - \right.$
 $\left. - \sum_{k=0}^{i-1} \dot{B}_{2,2,k} \cdot \dot{P}_{(i-1-k)\vartheta}' + I(i, 2) \times \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\dot{V}_k}{\kappa^2} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\varphi}'' + \dot{B}_{1,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\psi\psi}'' - \dot{B}_{2,1,k} \cdot \dot{P}_{(i-2-k)\psi}' \right) \right) -$
 $\left. - \sum_{k=1}^i \frac{\dot{V}_k}{\kappa} \cdot \dot{P}_{(i-k)\varphi}' \right)$ ($i = \overline{1, 2n+1}$), \dot{V}_k , $\dot{B}_{1,1,k}$, $\dot{B}_{1,2,k}$, $\dot{B}_{2,1,k}$ і $\dot{B}_{2,2,k}$ – коєфіцієнти при

$b_{1,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon} \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon} \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon} \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon} \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\eta = Q^*$.

Для знаходження функцій $P'_i, \dot{P}_i, \ddot{P}_i, \overset{\circ}{P}_i$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) у випадку відсутності додаткових джерел (відповідно за крайових умов (3.23), (3.25), (3.27), (3.29)) отримаємо задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P''_{0\psi\psi} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{0\varphi} = \sigma \cdot P'_{0t}; \\ P_0(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P'_{0\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = -M_0(\varphi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P''_{i\psi\psi} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{i\varphi} = \sigma \cdot P'_{it} - \\ -M_i(\varphi, \psi, \eta, t); P_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P'_{i\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_i(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P''_{0\psi\psi} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{0\varphi} = \sigma \cdot P'_{0t}; \\ P_0(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P'_{0\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = -M_0(\varphi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P''_{i\psi\psi} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{i\varphi} = \sigma \cdot P'_{it} - \\ -M_i(\varphi, \psi, \eta, t); P_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P'_{i\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_i(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P''_{0\psi\psi} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot P'_{0\varphi} = \sigma \cdot P'_{0t}; \\ P_0(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, P'_{0\psi}(\varphi, \psi, 0, t) = -K_0(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, \psi, 0) \cdot P'_{i\mathbb{N}} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot P'_{i\varphi} = \sigma \cdot P'_{it} - \\ - K'_i(\varphi, \psi, \vartheta_0 t); P'_i(\varphi, \psi, \vartheta_0 t) \xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow \infty} 0, P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, 0, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -K'_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{array} \right. \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 \cdot b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^*) \cdot P'_{0\mathbb{N}} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, Q^*)}{\kappa} \cdot P'_{0\varphi} = \sigma \cdot P'_{0t}; \\ P'_0(\varphi, \psi, \vartheta_0 t) \xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow \infty} 0, P'_{0\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t) = -K'_0(\varphi, \psi, t), \end{array} \right. \quad (3.58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 \cdot b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^*) \cdot P'_{i\mathbb{N}} - \frac{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, Q^*)}{\kappa} \cdot P'_{i\varphi} = \sigma \cdot P'_{it} - \\ - K'_i(\varphi, \psi, \vartheta_0 t); P'_i(\varphi, \psi, \vartheta_0 t) \xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow \infty} 0, P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -K'_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \end{array} \right. \quad (3.59)$$

де $M'_i(\varphi, \eta, t) = c'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, 0, \eta, t)$, $M'_i(\varphi, \eta, t) = c'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, Q^*, \eta, t) + P'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, Q^*, \eta, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, Q^*, \eta, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, Q^*, \eta, t)$, $K'_i(\varphi, \psi, t) = c'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, \psi, 0, t) + P'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, \psi, 0, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, 0, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, 0, t)$, $K'_i(\varphi, \psi, t) = c'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t) + P'_{(i-1/2)\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t) + P'_{i\mathbb{N}}(\varphi, \psi, Q^*, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$).

У відповідних задачах рівняння виду $\alpha(\varphi, \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} - \delta(\varphi, \xi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} + q(\varphi, \xi, \mu, t)$ розв'язуються шляхом їх зведення за допомогою заміни

$F(s) = F(\varphi, \xi) - t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $\alpha(s) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} +$

$+q_0(s, \mu, t)$, де s – параметр. Іншим способом розв'язання відповідних задач є застосування методу сіток.

Для оцінки залишкового члену R_{n+1} матимемо задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} & \varepsilon \cdot d_0 \cdot \left(\frac{\nu_0^2}{\kappa^2} \cdot R''_{(n+1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot R''_{(n+1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot R''_{(n+1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot R'_{(n+1)\psi} + \right. \\ & \left. + b_{2,2} \cdot R'_{(n+1)\eta} \right) - \frac{\nu_0^2}{\kappa} \cdot R'_{(n+1)\varphi} = \sigma \cdot R'_{(n+1)t} - g(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{n+1}, \\ & R_{n+1}(\varphi_*, \psi, \eta, t, \varepsilon) = R_{n+1}(\varphi^*, \psi, \eta, t, \varepsilon) = R_{n+1}(\varphi, 0, \eta, t, \varepsilon) = R_{n+1}(\varphi, \psi, Q_*, t, \varepsilon) = \\ & = R_{n+1}(\varphi, \psi, 0, t, \varepsilon) = R_{n+1}(\varphi, \psi, Q^*, t, \varepsilon) = R_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, 0, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \text{де } g(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon) &= d_0 \cdot \left(\frac{\nu_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{n\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{n\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{n\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{n\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{n\eta} \right) - \sigma \cdot P'_{(n+1)t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n+2} \left(d_0 \cdot \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(n+2-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(n+2-k)\varphi} \right) + d_0 \cdot \sum_{i=n}^{n+1} \sum_{k=0}^i \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-k)\psi} + \right. \\ &+ B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-k)\eta} \left. \right) + d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n+2} B_{1,1,k} \cdot P''_{(2n+2-k)\varphi\varphi} + \sum_{k=0}^{2n+1} B_{2,1,k} \cdot P'_{(2n+1-k)\varphi} \right) + d_0 \times \\ &\times \sum_{i=2n}^{2n+1} \sum_{k=0}^i \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-k)\eta} \right) - \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(2n+2-k)\varphi} + \\ &+ d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n+2} B_{1,1,k} \cdot P''_{(2n+1-k)\varphi\varphi} - \sum_{k=0}^{2n+1} B_{2,1,k} \cdot P'_{(2n+1-k)\varphi} \right) + d_0 \cdot \sum_{i=2n}^{2n+1} \sum_{k=0}^i \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-k)\eta\eta} - \right. \\ &- B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-k)\eta} \left. \right) - \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(2n+2-k)\varphi} + d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n+2} B_{1,1,k} \cdot P''_{(2n+2-k)\varphi\varphi} + \sum_{k=0}^{2n+1} B_{2,2,k} \cdot P'_{(2n+1-k)\varphi} \right) + \\ &+ d_0 \cdot \sum_{i=2n}^{2n+1} \sum_{k=0}^i \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\varphi\varphi} + B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-k)\psi} \right) - \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(2n+2-k)\varphi} + \\ &+ d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n+2} B_{1,2,k} \cdot P''_{(2n+2-k)\varphi\varphi} - \sum_{k=0}^{2n+1} B_{2,2,k} \cdot P'_{(2n+1-k)\varphi} \right) + d_0 \cdot \sum_{i=2n}^{2n+1} \sum_{k=0}^i \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\varphi\varphi} + B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} - \right. \\ &- B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-k)\psi} \left. \right) - \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi}. \end{aligned}$$

Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів рівняння (3.16) та граничних і початкових умов (3.17) – (3.30) (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер області $G_z^1 \times (0, \infty)$, на основі задачі (3.60) та принципу макси-

муму для параболічних рівнянь аналогічно [17] приходимо до справедливості такого твердження: $R_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

3.1.2. Просторові нелінійні сингулярно-збурені крайові задачі із врахуванням сумарного зворотного впливу величин концентрацій забруднюючої речовини на коефіцієнт дифузії

У випадку, якщо на величину коефіцієнта дифузії в кожній точці у даний момент часу вносять впливи величини концентрації забруднюючої речовини, що мали місце в усі попередні моменти часу, то відповідну залежність

доцільно описати формулою $D = \varepsilon \cdot \left(d_0 + \varepsilon \cdot \int_0^t a(x, y, z, \tau) \cdot C(x, y, z, \tau) d\tau \right)$, де

$a(x, y, z, t)$ – деяка вагова обмежена функція, d_0 – задане додатне дійсне число, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$).

Проведемо математичне моделювання такого процесу поширення забруднюючої речовини у однорідному недеформівному водонасиченому пористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді $G_z^1 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (рис. 2.1 а). При цьому відповідна нелінійна модельна задача в області $G_z^1 \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь (2.1), (3.1), крайовими умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.14) і початковою умовою (3.15). При переході до області $G_w \times (0, \infty)$ рівняння (3.1) відповідної “дифузійної задачі” запишеться у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\left(d_0 + \varepsilon \cdot \int_0^t (a_\phi \cdot \varphi) d\tau \right) \left(\frac{\varphi_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\phi\phi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{\eta} \right) + \right. \\ & + \varepsilon \left(\frac{\varphi_0^2}{\kappa^2} \cdot c'_{\phi} \left(\int_0^t (a_\phi \cdot \varphi) d\tau + \int_0^t (a_\phi \cdot \varphi) d\tau \right) + b_{1,1} \cdot c'_{\psi} \left(\int_0^t (a_\psi \cdot \varphi) d\tau + \int_0^t (a_\psi \cdot \varphi) d\tau \right) + \right. \\ & \left. \left. + b_{1,2} \cdot c'_{\eta} \left(\int_0^t (a_\eta \cdot \varphi) d\tau + \int_0^t (a_\eta \cdot \varphi) d\tau \right) \right) \right) - \frac{\varphi_0^2}{\kappa} \cdot c'_{\phi} = \sigma \cdot c'_t, \end{aligned} \quad (3.61)$$

а крайові і початкова умови (3.2) – (3.15) матимуть вигляд (3.17) – (3.30), де $c = c(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\vartheta^2 = \vartheta^2(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta)$ (див. п. 3.1.1), $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) = a(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), \vartheta)$, $\mathcal{D} = \varepsilon \cdot \left(d_0 + \varepsilon \cdot \int_0^t \mathcal{A}(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) \cdot \mathcal{A}(\varphi, \psi, \eta, \vartheta) d\vartheta \right)$ [20, 76].

Розв'язок задачі (3.61), (3.17) – (3.30) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду (3.31). При цьому у випадку крайових умов (3.17) одержимо задачі (3.32), (3.33) для знаходження головної частини c_0 асимптотичного наближення розв'язку задачі і поправок c_i ($i = \overline{0, n}$), де

$$g_i = d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(i-1)\eta} \right) + I(i, 1) \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{i-2} \left(\int_0^t (\mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}_k) dt \right) \left(\frac{\vartheta^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-2-k)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-2-k)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(i-2-k)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(i-2-k)\eta} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\vartheta^2}{\kappa^2} \cdot c'_{k\varphi} \cdot \int_0^t (\mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}'_{(i-2-k)\varphi} + \mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}_{(i-2-k)}) dt + b_{1,1} \cdot c'_{k\psi} \cdot \int_0^t (\mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}'_{(i-2-k)\psi} + \mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}_{(i-2-k)}) dt +$$

$$\left. + b_{1,2} \cdot c'_{k\eta} \cdot \int_0^t (\mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}'_{(i-2-k)\eta} + \mathcal{A}^k \cdot \mathcal{C}_{(i-2-k)}) dt \right) \left(i = \overline{2, n} \right), \mathcal{C}_k = c_k(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (k = \overline{0, n}),$$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi, \psi, \eta, t)$, а у випадку задання на ділянці входу крайової умови Данквертса (3.18) для знаходження c_0 і c_1 , як і в п. 3.1.1, отримаємо задачі (3.32), (3.34), а для знаходження c_i ($i = \overline{2, n}$) отримаємо наступні задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta^2}{\kappa} \cdot c'_{i\varphi} + \sigma \cdot c'_{it} = g_i; c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ d_0 \cdot c'_{(i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) + \mathcal{G}_i - \kappa \cdot c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{2, n}), \end{cases} \quad (3.62)$$

де $\mathcal{G}_i = \int_0^t \mathcal{A}(\varphi, \psi, \eta, t) \cdot c_{i-2}(\varphi, \psi, \eta, t) dt \quad (i = \overline{2, n})$.

Розв'язки цих задач матимуть вигляд:

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_i(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_i(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $h_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_i(\varphi, \psi, \eta, f(\varphi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{\mathfrak{P}_i^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + d_0 \cdot c'_{(i-1)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) +$
 $+ \mathfrak{P}_i \ (i = \overline{2, n}), f(\varphi, \psi, \eta) = \kappa \cdot \sigma \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathfrak{P}_i^2(\varphi, \psi, \eta)}, f^{-1} - \text{функція, обернена до } f$

відносно змінної φ .

Для знаходження примежових поправок $P_i \ (i = \overline{0, n+1})$ в околі $\varphi = \varphi^*$ у випадку крайових умов (3.19), (3.20) одержимо задачі (3.35) – (3.40),

де $q_i = \frac{\kappa^2}{\mathfrak{P}_i^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P'_{(i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_0 \cdot \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \times \right.$
 $\times d_0 \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) +$
 $+ \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot \left(P''_{(l-k)\varphi\varphi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot \mathfrak{P}_{i-1-m} dt \right) + P'_{(l-k)\varphi} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot \mathfrak{P}_{(i-1-m)\varphi} dt \right) + \right.$
 $\left. + \int_0^t A'_{(m-l)\varphi} \cdot \mathfrak{P}_{i-2-m} dt \right) \Big) - I(i, 3) \cdot \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left((B_{1,1,k} \cdot P''_{(l-k)\psi\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(l-k)\eta\eta} + B_{2,1,k} \times \right.$
 $\times P'_{(l-k)\psi} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta}) \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot \mathfrak{P}_{i-3-m} dt + B_{1,1,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot \mathfrak{P}_{(i-3-m)\psi} dt + \right.$
 $\left. + \int_0^t A'_{(m-l)\psi} \cdot \mathfrak{P}_{i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot \mathfrak{P}_{(i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A'_{(m-l)\eta} \cdot \mathfrak{P}_{i-3-m} dt \right) \Big) \Big)$
 $(i = \overline{1, n+1}), \mathfrak{P}_k = P_k(\varphi, \psi, \eta, t) \ (k = \overline{0, n+1}), V_k, B_{1,1,k}, B_{1,2,k}, B_{2,1,k}, B_{2,2,k}, A_{m-l},$
 $A'_{(m-l)\varphi}, A'_{(m-l)\psi}, A'_{(m-l)\eta} - \text{коєфіцієнти при } k\text{-тих } (m-l)\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ в}$
розкладі відповідно функцій $\mathfrak{P}_i^2(\varphi^* - \varepsilon, \psi, \eta), \ b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon, \psi, \eta),$

$b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), \mathcal{B}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t),$
 $\mathcal{B}_\varphi(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t), \mathcal{B}_\psi(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t), \mathcal{B}_\eta(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$. У випадку ж задання на ділянці виходу крайових умов Данквертса (3.21) для знаходження P_0 , як і в п. 3.1.1, отримаємо задачу (3.41), а для знаходження P_i ($i = \overline{1, n+1}$) наступні задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_i'' + \kappa \cdot P_i' = q_i; P_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot (c_i'(0, \psi, \eta, t) + P_i'(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa \cdot (c_i(0, \psi, \eta, t) + P_i(0, \psi, \eta, t)) + \mathcal{B}_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_{(n+1)}'' + \kappa \cdot P_{(n+1)}' = q_{n+1}; P_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot P_{(n+1)}'(0, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P_{n+1}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{B}_{n+1} = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

де $\mathcal{B}_i = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \int_0^t A_k \cdot (c_{i-k}' + P_{i-k}') dt \cdot (c_{(i-1-m)}' + P_{(i-1-m)}')$ ($i = \overline{1, n+1}$).

У результаті їх розв'язання отримаємо:

$$P_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^\varphi \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^\phi q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi - d_0 \cdot c_i'(0, \psi, \eta, t) - \right. \\ \left. - \kappa \cdot c_i(0, \psi, \eta, t) - \mathcal{B}_i \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^\varphi \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^\phi q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi - \mathcal{B}_{n+1} \right) d\phi.$$

Для знаходження примежових поправок \hat{P}_i ($i = \overline{0, 2n+1}$) в околі $\psi = 0$ за крайових умов (3.22) одержимо задачі (3.44), (3.45), а за крайових умов

(3.23) – задачі (3.52), (3.53), де $M_i(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i \hat{B}_{1,1,k} \cdot \hat{P}_{(i-k)}'' + \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{B}_{2,1,k} \times \right.$

$$\begin{aligned}
& \times P'_{(i-1-k)\psi}) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \Bigg) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} + I(i, 2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot P''_{(l-k)\psi\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P_{i-1-m} dt + \right. \\
& + \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t \left(A_{(m-l)\psi} \cdot P_{i-2-m} + A_{m-l} \cdot P_{(i-2-m)\psi} \right) dt \Bigg) + I(i, 3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P_{i-1-m} dt + I(i, 4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(l-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\
& + B_{1,2,k} \cdot P''_{(l-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \Bigg) \times \int_0^t A_{m-l} \cdot P_{i-1-m} dt + \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P'_{(i-2-k)\varphi} \times \\
& \times \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P_{(i-3-m)\varphi} dt + \int_0^t A_{(m-l)\varphi} \cdot P_{i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P_{(i-3-m)\eta} dt + \right. \\
& \left. + \int_0^t A_{(m-l)\eta} \cdot P_{i-3-m} dt \right) \Bigg) \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \quad P_k = P_k(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (k = \overline{0, 2n+1}), \quad V_k, \quad B_{1,1,k},
\end{aligned}$$

$B_{1,2,k}, B_{2,1,k}, B_{2,2,k}, A_{m-l}, A_{(m-l)\psi}, A_{(m-l)\varphi}, A_{(m-l)\eta}$ – коефіцієнти при k -тих $(m-l)$ -тих степенях $\sqrt{\varepsilon}$ у розкладі відповідно функцій $\mathcal{P}^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $\mathcal{A}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$, $\mathcal{A}_\varphi(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$, $\mathcal{A}_\psi(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$ і $\mathcal{A}_\eta(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$.

Для знаходження функцій $\overset{\circ}{P}_i, \overset{\circ}{P}_i, \overset{\circ}{P}_i$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) відповідно за крайових умов (3.24), (3.26), (3.28) отримуються задачі (3.46) – (3.51), а за крайових умов (3.25), (3.27), (3.29) – задачі (3.54) – (3.59), де функції $\overset{\circ}{M}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\overset{\circ}{K}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\overset{\circ}{K}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно до функцій $\overset{\circ}{M}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) при виконанні відповідних заміни. Розв'язання цих задач і оцінка залишкового члена R_{n+1} здійснюються аналогічно до п. 3.1.1.

3.1.3. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових нелінійних сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії при многочленній залежності коефіцієнта дифузії від величин концентрації

У випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від величин концентрації забруднюючої речовини відповідну залежність доцільніше опи-

сати формулою: $D = e \cdot \left(d_0 + \sum_{k=1}^l e^k \cdot d_k \cdot C^k \right)$, де d_k ($k = \overline{0, l}$) – деякі дійсні чи-

сла, $d_0 > 0$, $l \in N$, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$) [23, 71]. При математичному моделюванні відповідного процесу в області $G_z^1 \times (0, \infty)$ приходимо до нелінійної модельної задачі, що описується рівняннями (2.1), (3.1) та крайовими і початковою умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.15). Відповідна “дифузійна задача” в області $G_w \times (0, \infty)$ описується наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \cdot \left(\left(d_0 + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_k \cdot c^k \right) \cdot \left(\frac{\mathcal{D}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{\eta} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\varepsilon \cdot d_1 + \sum_{k=2}^l k \cdot \varepsilon^k \cdot d_k \cdot c^{k-1} \right) \cdot \left(\frac{\mathcal{D}^2}{\kappa^2} \cdot c'^2_{\varphi} + b_{1,1} \cdot c'^2_{\psi} + b_{1,2} \cdot c'^2_{\eta} \right) \right) - \frac{\mathcal{D}^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} = \sigma \cdot c'_i \quad (3.65) \end{aligned}$$

з крайовими та початковою умовами (3.17) – (3.30), де, як і в п. 3.1.1 та 3.1.2,

$$\begin{aligned} c = c(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \mathcal{D}^2 = \mathcal{D}^2(\varphi, \psi, \eta), \quad b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta), \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta), \quad b_{2,1} = \\ = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta), \quad b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta), \quad \text{а } \mathcal{D} = e \cdot \left(d_0 + \sum_{k=1}^l e^k \cdot d_k \cdot c^k \right) [22]. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (3.65), (3.17) – (3.30) аналогічно до п. 3.1.1, п. 3.1.2 з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду (3.31). Аналогічно до п. 3.1.2 у випадку крайових умов (3.17) для знаходження головної частини c_0 асимптотичного наближення розв'язку задачі (3.65), (3.17) – (3.30) і поправок c_i ($i = \overline{1, n}$) одержимо задачі (3.32), (3.33), де

$$\begin{aligned}
g_i = & d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(i-1)\eta} \right) + I(i,2) \times \\
& \times \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{m=0}^k \left(d_{i-1-k} \cdot c_{k-m} \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{m\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{m\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{m\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{m\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{m\eta} \right) \right) + I(i,2) \cdot d_1 \times \\
& \times \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c'_{k\varphi} \cdot c'_{(i-2-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{k\psi} \cdot c'_{(i-2-k)\psi} + b_{1,2} \cdot c'_{k\eta} \cdot c'_{(i-2-k)\eta} \right) + I(i,3) \cdot \sum_{k=0}^{i-3} \left((i-2) \cdot d_{i-2} \cdot \sum_{m=0}^k (c_m \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c'_{(k-m)\varphi} \cdot c'_{(i-3-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{(k-m)\psi} \cdot c'_{(i-3-k)\psi} + b_{1,2} \cdot c'_{(k-m)\eta} \cdot c'_{(i-3-k)\eta} \right) \right) \quad (i = \overline{1, n}),
\end{aligned}$$

а у випадку задання на ділянці входу умови Данквертса (3.18) отримаємо задачі (3.32), (3.34) для знаходження c_i ($i = 0, 1$) і задачі (3.62) для знаходження c_i ($i = \overline{2, n}$), де $g_0 = d_1 \cdot c_0 \cdot c'_{0\varphi}$, $g_2 = d_1 \cdot c_0 \cdot c'_{1\varphi} + d_1 \cdot c_1 \cdot c'_{0\varphi} + d_2 \cdot c_0^2 \cdot c'_{0\varphi}$,

Для знаходження примезових поправок P_i ($i = \overline{0, n+1}$) у випадку задання на виході фільтраційної течії крайових умов (3.19) або (3.20) одержимо задачі (3.35) – (3.37) або (3.38) – (3.40) (див. п. 3.1.2), де $q_1 =$

$$\begin{aligned}
= & \frac{\kappa^2}{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P'_{0t} + \frac{d_0}{\kappa^2} \cdot 2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi \cdot P''_{0\Phi\Phi} - \frac{d_1}{\kappa^2} \cdot P_0 \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \times P'_{0\Phi\Phi} - \frac{d_1}{\kappa^2} \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{0\Phi}^2 + \frac{1}{\kappa} \cdot 2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi \cdot P'_{0\Phi} \right), \quad q_2 = \frac{\kappa^2}{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \times \\
& \times \left(\sigma \cdot P'_{1t} - \frac{d_0}{\kappa^2} \cdot \left(\left(\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \cdot \Phi^2 \cdot P''_{0\Phi\Phi} - 2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi \cdot P'_{1\Phi\Phi} \right) + \frac{d_1}{\kappa^2} \cdot P_0 \left(2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi \cdot P''_{0\Phi\Phi} - \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{1\Phi\Phi} \right) - \right. \\
& \left. - d_1 \cdot P_1 \cdot \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa^2} \cdot P'_{0\Phi\Phi} - d_2 \cdot P_0 \cdot \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa^2} \cdot P'_{0\Phi\Phi} - d_0 \cdot \left(b_{1,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P'_{0\psi\psi} + b_{2,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times P'_{0\psi} + b_{2,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P'_{0\eta} \right) - \frac{d_1}{\kappa^2} \cdot \left(\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P'_{1\Phi} - 2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi \cdot P'_{1\Phi} \right) - \right. \\
& \left. - d_2 \cdot P_0 \cdot \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{0\Phi} + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \Phi}{\kappa} \cdot P'_{1\Phi} - \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \cdot \Phi^2 \cdot P'_{0\Phi} \right), \dots, \text{ а у випадку задання на ділянці виходу умови Данк-}
\end{aligned}$$

вертса (3.21) отримаємо задачу (3.41) для знаходження функції P_0 і задачі (3.63), (3.64) для знаходження функцій P_i ($i=\overline{1, n+1}$), де $\mathcal{G}_2 = d_1 \cdot c_0 \cdot c'_{0\varphi}$, $\mathcal{G}_3 = d_1 \cdot c_0 \cdot c'_{1\varphi} + d_1 \cdot c_1 \cdot c'_{0\varphi} + d_2 \cdot c_0^2 \cdot c'_{0\varphi}$, ..., $\mathcal{G}_i = d_1 \cdot (c_0 + P_0) \cdot (c'_{0\varphi} + P'_{0\varphi})$, $\mathcal{G}_2 = d_1 \times (c_0 + P_0) \cdot (c'_{1\varphi} + P'_{1\varphi}) + d_1 \cdot (c_1 + P_1) \cdot (c'_{0\varphi} + P'_{0\varphi}) + d_2 \cdot (c_0 + P_0)^2 \cdot (c'_{0\varphi} + P'_{0\varphi})$,

Для знаходження примежових поправок \hat{P}_i , \hat{P}_i , \hat{P}_i , \hat{P}_i ($i=\overline{0, 2n+1}$) на бічних гранях модельної області, як і в п. 3.1.1 та 3.1.2, у випадку крайових умов (3.22), (3.24), (3.26), (3.28) отримаємо задачі (3.44) – (3.51), а у випадку крайових умов (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) – задачі (3.52) – (3.59), де, зокрема,

$$\begin{aligned} M_1^{\mathcal{G}} &= -d_0 \cdot (b'_{1,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot \mathcal{P}_{0\psi\psi}^{\mathcal{G}} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \mathcal{P}_{0\psi}^{\mathcal{G}}) + \frac{2 \cdot \mathcal{V}(\varphi, 0, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\psi}^{\mathcal{G}}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot \mathcal{P}_{0\varphi}^{\mathcal{G}}}{\kappa}, \\ M_2^{\mathcal{G}} &= -d_0 \cdot \left(\frac{\mathcal{V}_{\psi}^{\mathcal{G}}(\varphi, 0, \eta)}{\kappa^2} \cdot \mathcal{P}_{0\varphi\varphi}^{\mathcal{G}} + b'_{1,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot \mathcal{P}_{1\psi\psi}^{\mathcal{G}} + b''_{1,1\psi\psi}(\varphi, 0, \eta) / 2 \cdot \Psi^2 \cdot \mathcal{P}_{0\psi\psi}^{\mathcal{G}} + \right. \\ &+ b_{1,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot \mathcal{P}_{0\eta\eta}^{\mathcal{G}} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \mathcal{P}_{1\psi}^{\mathcal{G}} + b'_{2,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot \mathcal{P}_{0\psi}^{\mathcal{G}} + b_{2,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot \mathcal{P}_{0\eta}^{\mathcal{G}}) + \\ &+ \frac{2 \cdot \nu(\varphi, 0, \eta) \cdot \nu'_{\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot \mathcal{P}_{1\varphi}^{\mathcal{G}} + (\nu(\varphi, 0, \eta) \cdot \nu'_{\psi}(\varphi, 0, \eta) + \nu''_{\psi\psi}(\varphi, Q^*, \eta)) \cdot \Psi^2}{\kappa} \cdot \mathcal{P}_{0\varphi}^{\mathcal{G}}, \dots \end{aligned}$$

Розв'язання цих задач і оцінка залишкового члена R_{n+1} здійснюються аналогічно до п. 3.1.1.

Зауважимо, що у разі недостатньої узгодженості початкової і крайових умов вздовж ребер та в кутових точках прямокутного паралелепіпеда G_Z^1 наведених вище у п. 3.1.1 – 3.1.3 задач, асимптотичний розклад їх розв'язку необхідно шукати у вигляді ряду: $c = \bar{c} + P_1 + P_2 + P_3$, де $\bar{c} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \cdot \bar{c}_i$ – регулярна

частина асимптотики, $P_1 = \sum_{j=1}^6 P_{1,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \cdot (P_{1,1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{1,2,i}(\varphi, \psi, \eta, t)) +$
 $+ \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\varepsilon^i} \cdot (P_{1,3,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{1,4,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{1,5,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{1,6,i}(\varphi, \psi, \eta, t))$ –

примежові поправки в околах поверхонь криволінійного паралелепіпеда,

$$P_2 = \sum_{j=1}^{12} P_{2,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\varepsilon^{2 \cdot i + 1}} \cdot (P_{2,1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,2,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,3,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + P_{2,4,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,5,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,6,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,7,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,8,i}(\varphi, \psi, \eta, t)) + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \cdot (P_{2,9,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,10,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,11,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{2,12,i}(\varphi, \psi, \eta, t)) \quad - \quad \text{в}$$

$$\text{околах його ребер, } P_3 = \sum_{j=1}^8 P_{3,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2 \cdot i} \cdot (P_{3,1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{3,2,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + P_{3,3,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{3,4,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{3,5,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{3,6,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{3,7,i}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + P_{3,8,i}(\varphi, \psi, \eta, t)) \quad - \quad \text{в околах його вершин, які ліквідують нев'язки, внесені в}$$

граничні умови регулярною частиною асимптотики, $\varphi = \frac{\varphi - \varphi^*}{\varepsilon}$, $\psi = \frac{\psi^* - \psi}{\varepsilon}$,

$$\eta = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varphi = \frac{Q^* - \varphi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \psi = \frac{Q^* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \eta = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}} \quad - \quad \text{відповідні їм регуляризуючі пере-}$$

творення (розтяги). Задачі для знаходження відповідних функцій отримують-ся аналогічно з вихідних рівнянь шляхом переходу до відповідних змінних і розкладом коефіцієнтів в ряд за степенями ε із використанням стандартної процедури прирівнювання [17].

3.1.4 Математичне моделювання просторових нелінійних процесів конвективної дифузії із запізненням

При дослідженні процесів масопереносу розчинних речовин у пористих середовищах трапляються випадки, коли різноманітні взаємовпливи характеристик середовища та процесу доцільно врахувати шляхом введення у відповідні рівняння типу “конвекція-дифузія” запізнення за часом, що дає можливість вихідну задачу звести до розв’язування більш простіших нелінійних задач. Так, у випадку, коли концентрація розчинної речовини C у кожній точці області фільтрації здійснює зворотній вплив на коефіцієнт дифузії D через деякий момент часу τ , отримаємо залежність, яка в загальному ви-

падку описується формулою $D = \varepsilon \cdot (d_0 + \varepsilon \cdot h(C(x, y, z, t - \tau)))$ [21, 75], де h – деяка обмежена, достатньо гладка функція, d_0 – задане додатне дійсне число, τ – запізнення ($\tau > 0$), ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$). При цьому в області $G_z^1 \times (0, \infty)$ відповідна просторова модельна задача масопереносу забруднюючої речовини описується рівняннями (2.1), (3.1) з крайовими умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.14) і початковою умовою:

$$C(x, y, z, \theta) = c_0^0(x, y, z, \theta) \quad (-\tau \leq \theta \leq 0), \quad (3.66)$$

де $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_{***}(M, t)$, $c^{***}(M, t)$, $c_0^0(x, y, z, \theta)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та вздовж ребер області G [17, 98]. Крім того, вважаємо, що функція $c_0^0(x, y, z, \theta)$ в моменти часу $t = -\tau$ і $t = 0$ задовольняє умовам, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв’язку C при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \dots$) [58].

Припустивши, що фільтраційна задача (2.1) – (2.4) є розв’язаною (див. п. 2.1.1, 1.1.2), та здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2) – (3.14), (3.66) приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується рівнянням:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left((d_0 + \varepsilon \cdot h(c(\varphi, \psi, \eta, t - \tau))) \left(\frac{\theta^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_1 \cdot c''_{\psi\psi} + b_2 \cdot c''_{\eta\eta} + d_1 \cdot c'_{\psi} + d_2 \cdot c'_{\eta} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\theta^2 \cdot c'_{\varphi} \cdot h'_{\varphi} + b_1 \cdot c'_{\psi} \cdot h'_{\psi} + b_2 \cdot c'_{\eta} \cdot h'_{\eta} \right) \right) - \frac{\theta^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} = \sigma \cdot c'_t \end{aligned} \quad (3.67)$$

з крайовими умовами (3.17) – (3.29) і наступною початковою умовою:

$$c(\varphi, \psi, \eta, \theta) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta, \theta) \quad (-\tau \leq \theta \leq 0), \quad (3.68)$$

де $c = c(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\theta^2 = \theta^2(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta)$ (див. п. 3.1.1), а $D = \varepsilon \cdot (d_0 + \varepsilon \cdot h(c(\varphi, \psi, \eta, t - \tau)))$.

Задачу із запізненням τ (3.68), (3.17) – (3.29), (3.67) на кожному із часових проміжків $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n=1,2,\dots$ зведемо до таких задач без запізнення:

$$\varepsilon \cdot \left((d_0 + \varepsilon \cdot \mathcal{H}_{n\tau}^0) \cdot \left(\frac{\mathcal{H}_0^2}{\kappa^2} \cdot c_{\varphi\varphi}^{[n]} + b_{1,1} \cdot c_{\psi\psi}^{[n]} + b_{1,2} \cdot c_{\eta\eta}^{[n]} + b_{2,1} \cdot c_{\psi}^{\prime[n]} + b_{2,2} \cdot c_{\eta}^{\prime[n]} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon \cdot \left(\mathcal{H}_0^2 \cdot c_{\varphi}^{\prime[n]} \cdot \mathcal{H}_{n\tau}^0 + b_{1,1} \cdot c_{\psi}^{\prime[n]} \cdot \mathcal{H}_{n\tau}^0 + b_{1,2} \cdot c_{\eta}^{\prime[n]} \cdot \mathcal{H}_{n\tau}^0 \right) \right) - \frac{\mathcal{H}_0^2}{\kappa} \cdot c_{\varphi}^{\prime[n]} = \sigma \cdot c_t^{\prime[n]}, \quad (3.69)$$

$$c^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \mathcal{H}_0(\psi, \eta, t) \quad (3.70)$$

або

$$\mathcal{D} \cdot c_{\varphi}^{\prime[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \mathcal{H}_0(\psi, \eta, t)) = 0, \quad (3.71)$$

$$c^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = \mathcal{H}_0^*(\psi, \eta, t) \quad (3.72)$$

або

$$c_{\varphi}^{\prime[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \quad (3.73)$$

або

$$\mathcal{D} \cdot c_{\varphi}^{\prime[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \mathcal{H}_0^*(\psi, \eta, t)) = 0, \quad (3.74)$$

$$c^{[n]}(\varphi, 0, \eta, t) = \mathcal{H}_{0*}(\varphi, \eta, t) \text{ або } c_{\psi}^{\prime[n]}(\varphi, 0, \eta, t) = 0,$$

$$c^{[n]}(\varphi, Q_*, \eta, t) = \mathcal{H}_{0*}^*(\varphi, \eta, t) \text{ або } c_{\psi}^{\prime[n]}(\varphi, Q_*, \eta, t) = 0,$$

$$c^{[n]}(\varphi, \psi, 0, t) = \mathcal{H}_{\psi*}(\varphi, \psi, t) \text{ або } c_{\eta}^{\prime[n]}(\varphi, \psi, 0, t) = 0,$$

$$c^{[n]}(\varphi, \psi, Q^*, t) = \mathcal{H}_{\psi*}^*(\varphi, \psi, t) \text{ або } c_{\eta}^{\prime[n]}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, (n-1)\tau) = c^{[n-1]}(\varphi, \psi, \eta, (n-1)\tau), \quad \mathcal{H}_{n\tau}^0(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= \mathcal{H}^0(c^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t - \tau)) = \mathcal{H}^0(c^{[n-1]}(\varphi, \psi, \eta, t)),$$

$$c^{[0]}(\varphi, \psi, \eta, \mathcal{H}_0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta, \mathcal{H}_0) \quad (-\tau \leq \mathcal{H}_0 \leq 0). \quad (3.75)$$

Розв'язки задач (3.69) – (3.75) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned}
c^{[n]} = & c_0^{[n]} + \varepsilon c_1^{[n]} + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i^{[n]} + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \overset{\circ}{P}_i^{[n]} + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \overset{\circ}{P}_i^{[n]} + \\
& + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \overset{\circ}{P}_i^{[n]} + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \overset{\circ}{P}_i^{[n]} + R_2^{[n]} \quad (n=1,2,\dots),
\end{aligned} \tag{3.76}$$

де, аналогічно п. 3.1.1, $c_i^{[n]} = c_i^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики: $c_0^{[n]}$ – розв’язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу); $c_1^{[n]}$ – поправки, що враховують “вплив” дифузії всюди в області G за виключенням деякої її приграничної ділянки; $P_i^{[n]} = P_i^{[n]}(\overset{\circ}{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\overset{\circ}{P}_i^{[n]} = \overset{\circ}{P}_i^{[n]}(\varphi, \overset{\circ}{\psi}, \eta, t)$, $\overset{\circ}{P}_i^{[n]} = \overset{\circ}{P}_i^{[n]}(\varphi, \overset{\circ}{\psi}, \eta, t)$, $\overset{\circ}{P}_i^{[n]} = \overset{\circ}{P}_i^{[n]}(\varphi, \psi, \overset{\circ}{\eta}, t)$, $\overset{\circ}{P}_i^{[n]} = \overset{\circ}{P}_i^{[n]}(\varphi, \psi, \overset{\circ}{\eta}, t)$ ($i = \overline{0,3}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах ділянок $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних гранях модельної області), $\overset{\circ}{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_2^{[n]} = R_2^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь аналогічно п. 3.1.1).

Аналогічно до [17], підставивши (3.76) в (3.69) – (3.75) та застосувавши стандартну “процедуру прирівнювання”, отримаємо ряд задач. Для знаходження функцій $c_0^{[n]}$, $c_1^{[n]}$ ($n = 1, 2, \dots$) у випадку задання на ділянці входу крайових умов (3.70) або (3.71) матимемо такі задачі:

$$\begin{cases}
\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{\kappa} \cdot c_{0\varphi}^{[n]} + \sigma \cdot c_{0t}^{[n]} = 0; \quad c_0^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \quad c_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, (n-1)\tau) = \\
= c_0^{n-1}(\varphi, \psi, \eta, (n-1)\tau) \quad (c_0^{[1]}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta, 0)), \\
\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{\kappa} \cdot c_{1\varphi}^{[n]} + \sigma \cdot c_{1t}^{[n]} = g^{[n]}; \\
c_1^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \quad c_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0,
\end{cases} \tag{3.77}$$

$$\text{де } g^{[n]} = d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c_{0\varphi\varphi}^{[n]} + b_{1,1} \cdot c_{0\psi\psi}^{[n]} + b_{1,2} \cdot c_{0\eta\eta}^{[n]} + b_{2,1} \cdot c_{0\psi}^{[n]} + b_{2,2} \cdot c_{0\eta}^{[n]} \right).$$

У результаті їх розв'язання одержимо:

$$c_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_*(\psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ c_0^{[n-1]}(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, (n-1)\tau), & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta) + f(\phi, \psi, \eta))}{\vartheta_0^2(\phi, \psi, \eta)} d\phi, & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{(n-1)\tau}^t g^{[n]}(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t + t), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\text{де } f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \kappa \cdot \sigma \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\phi}{\vartheta_0^2(\phi, \bar{\psi}, \bar{\eta})}, \quad f^{-1} - \text{функція, обернена до } f \text{ відносно}$$

змінної φ .

При умові, що на ділянці входу задана умова (3.71), для знаходження головних частин $c_0^{[n]}$ ($n = 1, 2, \dots$) розв'язку отримаємо задачі (3.77), а для знаходження поправок $c_1^{[n]}$ ($n = 1, 2, \dots$) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c_{1\varphi}^{[n]} + \sigma \cdot c_{1t}^{[n]} = g^{[n]}; c_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ d_0 \cdot c_{0\varphi}^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_1^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases}$$

У результаті розв'язання цих задач отримаємо:

$$c_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} g_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{(n-1)\tau}^t g^{[n]}(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t + t), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\text{де } g_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta) + f(\phi, \psi, \eta))}{\vartheta_0^2(\phi, \psi, \eta)} d\phi + d_0 \cdot c_{0\varphi}^{[n]}(\varphi_*, \psi, \eta, t)$$

($i = \overline{1, n}$).

Для знаходження примежових поправок $P_i^{[n]}$ ($i = \overline{0,2}$) в околі ділянки

$\varphi = \varphi^*$ у випадку крайових умови (3.72) маємо задачу:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0^{[n]} + \kappa \cdot P_0'^{[n]} = 0; \\ P_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_0^{[n]}(0, \psi, \eta, t) = c^*(\psi, \eta, t) - c_0^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_1^{[n]} + \kappa \cdot P_1'^{[n]} = \mathcal{A}_1; \\ P_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t) = -c_1^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_2^{[n]} + \kappa \cdot P_2'^{[n]} = \mathcal{A}_2; \\ P_2^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_2^{[n]}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \mathcal{A}_0 &= \frac{\kappa^2}{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P_{0t}^{[n]} - \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0'(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0}{\kappa^2} \cdot (d_0 \cdot P_{0\varphi\varphi}^{[n]} + \kappa \cdot P_{0\varphi}^{[n]}) - \frac{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa^2} \times \right. \\ &\times \mathcal{V}_{\eta\tau}^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \cdot P_{0\varphi\varphi}^{[n]} \Big), \mathcal{A}_1 = \frac{\kappa^2}{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P_{1t}^{[n]} - \frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) - \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0'(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0}{\kappa^2} \times \right. \\ &\times (d_0 \cdot P_{0\varphi\varphi}^{[n]} + \kappa \cdot P_{0\varphi}^{[n]}) - \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0'(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0}{\kappa^2} \cdot (d_0 \cdot P_{1\varphi\varphi}^{[n]} + \kappa \cdot P_{1\varphi}^{[n]}) - b_{1,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{0\psi\psi}^{[n]} - \\ &- b_{1,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{0\eta\eta}^{[n]} - b_{2,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{0\psi\psi}^{[n]} - b_{2,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P_{0\eta\eta}^{[n]} - \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0'(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0}{\kappa^2} \times \\ &\times \mathcal{V}_{\eta\tau}^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \cdot P_{0\varphi\varphi}^{[n]} - \frac{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa^2} \cdot \mathcal{V}_{\eta\tau}^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \cdot P_{1\varphi\varphi}^{[n]} - \frac{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa} \cdot \mathcal{V}_{\eta\tau\varphi}^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \cdot P_{0\varphi}^{[n]} \Big). \end{aligned}$$

У результаті розв'язання цих задач одержимо:

$$P_0^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{d_0}{\kappa} \cdot \left(\mathcal{A}_0(\psi, \eta, t) - c_0^{[n]}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\varphi},$$

$$P_1^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^{\varphi} \left(\frac{1}{d_0} \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_1(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi - c_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi,$$

$$P_2^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\varphi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0}\phi} \cdot \int_0^{\phi} q_2(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0}\phi} d\phi \right) d\phi.$$

У випадку використання крайових умови (3.73) для знаходження функцій $P_i^{[n]}$ ($i = \overline{0,2}$) в околі ділянки $\phi = \phi^*$ матимемо такі задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0^{\prime[n]} + \kappa \cdot P_0^{[n]} = 0, \\ P_0^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) = -c_0^{\prime[n]}(\phi^*, \psi, \eta, t), P_0^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_1^{\prime[n]} + \kappa \cdot P_1^{[n]} = \mathcal{Q}_1, \\ P_1^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) = -c_1^{\prime[n]}(\phi^*, \psi, \eta, t), P_1^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_2^{\prime[n]} + \kappa \cdot P_2^{[n]} = \mathcal{Q}_2, \\ P_2^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) = 0, P_2^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Результатом розв'язання цих задач є:

$$P_0^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_0}{\kappa} \cdot c_0^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi},$$

$$P_1^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) = \int_0^{\phi} \left(\frac{1}{d_0} \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_1(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0} \phi} d\phi - c_1^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi,$$

$$P_2^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_2(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (3.74), то для знаходження функцій $P_i^{[n]}$ ($i = \overline{0,2}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_0^{\prime[n]} + \kappa \cdot P_0^{[n]} = 0; P_0^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot (c_0^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) + P_0^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa \cdot (c_0^{[n]}(0, \psi, \eta, t) + P_0^{[n]}(0, \psi, \eta, t) - c^*(\psi, \eta, t)) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_1^{\prime[n]} + \kappa \cdot P_1^{[n]} = q_1^{[n]}; P_1^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot (c_1^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t) + P_1^{\prime[n]}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa \cdot (c_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t) + P_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t)) + \mathcal{Q}_1^{[n]} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P_2^{[n]} + \kappa \cdot P_2^{[n]} = q_2^{[n]}; P_2^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_0 \cdot P_2^{[n]}(0, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P_2^{[n]}(0, \psi, \eta, t) + q_2^{[n]} = 0. \end{cases}$$

де $q_1^{[n]} = \frac{\rho_0}{\mu_{nt}}(\phi^*, \psi, \eta, t) \cdot (c_0^{[n]} + P_0^{[n]})$, $q_2^{[n]} = \frac{\rho_0}{\mu_{nt}}(\phi^*, \psi, \eta, t) \cdot (c_1^{[n]} + P_1^{[n]}) + \frac{\rho_0}{\mu_{nt}}(\phi^*, \psi, \eta, t) \cdot (c_0^{[n]} + P_0^{[n]})$.

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} P_0^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot (\kappa \cdot c^*(\psi, \eta, t) - d_0 \cdot c_0^{[n]}(0, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_0^{[n]}(0, \psi, \eta, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi}, \\ P_1^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_1^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0} \phi} d\phi - d_0 \cdot c_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t) - \right. \\ &\quad \left. - \kappa \cdot c_1^{[n]}(0, \psi, \eta, t) - q_1^{[n]} \right) d\phi, \\ P_2^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_0} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_0} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_2^{[n]}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_0} \phi} d\phi - q_2^{[n]} \right) d\phi. \end{aligned}$$

Функції типу примежового шару $\hat{P}_i^{[n]}$, $\check{P}_i^{[n]}$, $\bar{P}_i^{[n]}$, $\underline{P}_i^{[n]}$ ($i = \overline{0, 3}$) отримуються і розв'язуються аналогічно до п. 3.1.1 – 3.1.3.

3.1.5. Побудова числово-асимптотичного наближення розв'язків просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії для двозв'язних областей фільтрації

Для модельної області $G_z^3 \times (0, \infty)$, G_z^3 – двозв'язна область, обмежена гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями S_* , S^* і двома поверхнями течії S_{**} , S^{**} (рис. 2.3), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої речовини у відповідному недеформівному водонасиченому

пористому середовищі, що описується рівняннями (2.1), (3.1) з крайовими умовами (2.18) та наступними:

$$C|_{S_*} = c_*(M, t) \quad (3.78)$$

або

$$D \cdot C_n^f - v_{*n} \cdot (C - c_*(M, t))|_{S_*} = 0, \quad (3.79)$$

$$C|_{S^*} = c^*(M, t) \quad (3.80)$$

або

$$C_n^f|_{S^*} = 0, \quad (3.81)$$

або

$$D \cdot C_n^f - v_n^* \cdot (C - c^*(M, t))|_{S^*} = 0, \quad (3.82)$$

$$C|_{S^{**}} = c^{***}(M, t) \quad (3.83)$$

або

$$C_n^f|_{S^{**}} = 0, \quad (3.84)$$

$$C|_{S^{**}} = c^{***}(M, t) \quad (3.85)$$

або

$$C_n^f|_{S^{**}} = 0 \quad (3.86)$$

і початковою умовою (3.15) для випадків, коли коефіцієнт дифузії є сталим:

$D = \varepsilon \cdot d_0$ (див. п. 3.1.1) і нелінійно залежить від величин концентрацій:

$$D = \varepsilon \cdot \left(d_0 + \varepsilon \cdot \int_0^t a(x, y, z, t) \cdot C(x, y, z, t) dt \right) \text{ або } D = \varepsilon \cdot \left(d_0 + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_k \cdot C^k(x, y, z, t) \right)$$

(див. п. 3.1.2, 3.1.3) [67].

Шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (див. п. 2.1.3) задача (2.1), (3.1), (2.18), (3.78) – (3.86) зводиться з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу Γ (2.39) до відшу-

кання в області $G^0 = G_z^0 \times (0, \infty)$, де $G_z^0 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (однозв'язна область $G_z^3 \setminus \Gamma$) – криволінійний паралелепіпед, обмежений двома еквіпотенціальними поверхнями ABB_*A_* , CDD_*C_* та чотирма поверхнями течії $ABCD$, $A_*B_*C_*D_*$, ADD_*A_* , BCC_*B_* , які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (рис. 2.3), розв'язку задачі, що описується рівняннями (2.1), (3.1) з крайовими і початковою умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.6), (3.11) – (3.15) та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов (2.40) і узгодженості величин концентрацій забруднюючої речовини на “умовній поверхні розрізу” із використанням умов:

$$C \Big|_{ADD_*A_*} = C \Big|_{BCC_*B_*}, \quad C'_n \Big|_{ADD_*A_*} = C'_n \Big|_{BCC_*B_*}. \quad (3.87)$$

Вважатимемо, що відповідна фільтраційна задача є розв'язаною (див. п. 2.1.3), зокрема, побудована гідродинамічна сітка для модельної області, знайдені значення параметрів Q , Q_* , Q^* , розраховане поле швидкостей \dot{v} та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2) – (3.6), (3.11) – (3.15), (3.87) отримаємо відповідні “дифузійні задачі” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується рівнянням (3.16) при сталому коефіцієнті дифузії і (3.61) або (3.65) відповідно при інтегральній або многочленній залежностях коефіцієнта дифузії від концентрації забруднюючої речовини, крайовими і початковою умовами (3.17) – (3.21), (3.26) – (3.30) і умовами узгодженості величин концентрацій на “умовній поверхні розрізу”:

$$c(\varphi, 0, \eta, t) = c(\varphi, Q_*, \eta, t), \quad c'_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = c'_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t). \quad (3.88)$$

Асимптотичні наближення розв'язків c цих задач аналогічно до п. 3.1.1 – 3.1.3 шукатимемо у вигляді ряду (3.31). При цьому отримаємо такі ж, як і в п. 3.1.1 – 3.1.3, задачі (3.32) – (3.34), (3.61) для знаходження головної частини c_0 розв'язку і поправок c_i ($i = \overline{1, n}$), (3.35) – (3.43), (3.62), (3.63) – поправок на виході фільтраційної течії P_i ($i = \overline{0, n+1}$) в околі $\varphi = \varphi^*$, (3.44),

(3.45), (3.52), (3.53) – примежових поправок $\overset{\circ}{P}_i$ і $\overset{\circ}{P}'_i$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) в околах $\eta = 0$ і $\eta = Q^*$, а для знаходження функцій $\overset{\circ}{P}_i$ і $\overset{\circ}{P}'_i$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) отримуємо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}''_{0\psi} + \frac{\overset{\circ}{\nu}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \overset{\circ}{P}'_{0\varphi} = \sigma \cdot \overset{\circ}{P}'_{0t}, \\ d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}''_{0\psi} - \frac{\overset{\circ}{\nu}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \overset{\circ}{P}''_{0\varphi} = \sigma \cdot \overset{\circ}{P}'_{0t}, \\ \overset{\circ}{P}_0(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\circ}{P}'_0(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, c_0(\varphi, \psi, \eta, t) + P_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_0(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0} = c_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + P_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_0(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_0(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0}, \\ c'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + P'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0} = c'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + P'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{0\psi}(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0}, \\ \\ d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}''_{i\psi} + \frac{\overset{\circ}{\nu}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \overset{\circ}{P}'_{i\varphi} = \sigma \cdot \overset{\circ}{P}'_{it} - M_i, \\ d_0 \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}''_{i\psi} - \frac{\overset{\circ}{\nu}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \overset{\circ}{P}''_{i\varphi} = \sigma \cdot \overset{\circ}{P}'_{it} - M_i, \\ \overset{\circ}{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\circ}{P}'_i(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, c_{i-i/2}(\varphi, \psi, \eta, t) + P_{i-i/2}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0} = c_{i-i/2}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + P_{i-i/2}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}_i(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0}, \\ c'_{(i-i/2)\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + P'_{(i-i/2)\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0} = c'_{(i-i/2)\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + P'_{(i-i/2)\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \\ + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \overset{\circ}{P}'_{i\psi}(\varphi, \psi, \eta, t)|_{\psi=0} \quad (i = \overline{1, 2n+1}). \end{array} \right.$$

У цих задачах при заданні в області сталого коефіцієнта дифузії

$$M_i = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot \overset{\circ}{P}''_{(i-k)\psi} + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot \overset{\circ}{P}'_{(i-1-k)\psi} + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\overset{\circ}{\nu}_k}{\kappa^2} \cdot \overset{\circ}{P}''_{(i-2-k)\varphi} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \left(B_{1,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} \cdot M_i = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} + \right. \\
& + \left. \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-1-k)\psi} + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \text{ при інтегральній залежності коефіцієнта дифузії}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{від концентрації забруднюючої речовини } M_i = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. P'_{(i-1-k)\psi} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} + I(i,2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot P''_{(l-k)\psi\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{i-1-m} dt + \right. \\
& + \left. \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t \left(A_{(m-l)\psi} \cdot P'_{i-2-m} + A_{m-l} \cdot P'_{(i-2-m)\psi} \right) dt \right) + I(i,3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{i-1-m} dt + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(l-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\
& + \left. \left. B_{1,2,k} \cdot P''_{(l-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \right) \times \int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{i-1-m} dt + \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P'_{(i-2-k)\varphi} \times \right. \\
& \times \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{(i-3-m)\varphi} dt + \int_0^t A_{(m-l)\varphi} \cdot P'_{i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{(i-3-m)\eta} dt + \right. \\
& + \left. \int_0^t A_{(m-l)\eta} \cdot P'_{i-3-m} dt \right) \left. \right), M_i = d_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-k)\psi\psi} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. P'_{(i-1-k)\psi} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\varphi} + I(i,2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot P''_{(l-k)\psi\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P'_{i-1-m} dt + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t \left(A_{(m-l)\psi} \cdot P_{i-2-m}^\psi + A_{m-l} \cdot P_{(i-2-m)\psi}^\psi \right) dt^\psi + I(i,3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\psi} \cdot \int_0^t A_{m-l} \cdot P_{i-1-m}^\psi dt^\psi + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(l-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\
& + B_{1,2,k} \cdot P''_{(l-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \left. \right) \times \int_0^t A_{m-l} \cdot P_{i-1-m}^\psi dt^\psi + \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P'_{(i-2-k)\varphi} \times \\
& \times \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P_{(i-3-m)\varphi}^\psi dt^\psi + \int_0^t A_{(m-l)\varphi} \cdot P_{i-3-m}^\psi dt^\psi \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{m-l} \cdot P_{(i-3-m)\eta}^\psi dt^\psi + \right. \\
& \left. + \int_0^t A_{(m-l)\eta} \cdot P_{i-3-m}^\psi dt^\psi \right) \left(i = \overline{1, 2n+1} \right), \text{ а при многочленній залежності } M_1 =
\end{aligned}$$

$$= -d_0 \cdot \left(b'_{1,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \cdot P''_{0\psi\psi} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{0\psi} \right) + \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \psi \cdot P'_{0\varphi},$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & -d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P''_{0\varphi\varphi} + b'_{1,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \cdot P''_{1\psi\psi} + \frac{b''_{1,1\psi\psi}(\varphi, 0, \eta)}{2} \cdot \psi^2 \cdot P''_{0\psi\psi} + \right. \\
& + b_{1,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P''_{0\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{1\psi} + b'_{2,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \cdot P'_{0\psi} + b_{2,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{0\eta} \left. \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \psi \cdot P'_{1\varphi} + \frac{(\vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, 0, \eta) + \vartheta_{\psi\psi}(\varphi, 0, \eta))}{\kappa} \cdot \psi^2 \cdot P'_{0\varphi}, \dots,$$

$$M_1 = -d_0 \cdot \left(b'_{1,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P''_{0\psi\psi} + b_{2,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P'_{0\psi} \right) + \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \times$$

$$\times \psi \cdot P'_{0\varphi}, M_2 = -d_0 \cdot \left(\frac{\vartheta^2(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot P''_{0\varphi\varphi} + b'_{1,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P''_{1\psi\psi} + \frac{b''_{1,1\psi\psi}(\varphi, Q_*, \eta)}{2} \times$$

$$\times \psi^2 \cdot P''_{0\psi\psi} + b_{1,2}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P''_{0\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P'_{1\psi} + b'_{2,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P'_{0\psi} + b_{2,2}(\varphi, Q_*, \eta) \times$$

$$\times P'_{0\eta} \left. \right) + \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa} \cdot \psi \cdot P'_{1\varphi} + \frac{(\vartheta(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \vartheta_\psi(\varphi, Q_*, \eta) + \vartheta_{\psi\psi}(\varphi, Q_*, \eta))}{\kappa} \times$$

$$\times \psi^2 \cdot P'_{0\varphi}, \dots, \text{ де } V_k, \hat{B}_{1,1,k}, \hat{B}_{1,2,k}, \hat{B}_{2,1,k} \text{ і } \hat{B}_{2,2,k} - \text{ коефіцієнти при } k\text{-их степе-}$$

нях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\varphi^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, а $\overset{\frown}{V}_k$, $\overset{\frown}{B}_{1,1,k}$, $\overset{\frown}{B}_{1,2,k}$, $\overset{\frown}{B}_{2,1,k}$ і $\overset{\frown}{B}_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\varphi^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$.

Одним із способів розв’язання відповідних задач є застосування методу сіток. Оцінка залишкового члена R_{n+1} здійснюються аналогічно до п. 3.1.1.

3.1.6. Дослідження просторових процесів поширення багатокомпонентних забруднюючих речовин фільтраційною течією у пористих середовищах

Розглянемо модельну задачу процесу поширення багатокомпонентної забруднюючої речовини у недеформівному водонасиченому пористому середовищі, яке характеризується коефіцієнтами фільтрації κ , активної пористості σ і дифузії $D_j = \varepsilon \cdot d_{j,0}$, де κ , σ , $d_{j,0}$ – деякі додатні дійсні числа ($j = \overline{1, m}$),

$$0 < \sigma < 1 \text{ і коефіцієнтами } a_{j,k}(x, y, z, t) = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{j,k}(x, y, z, t), & j \neq k, \\ 0, & j = k \end{cases} \quad (j = \overline{1, m},$$

$k = \overline{1, m})$, що характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами забруднюючої речовини у фільтраційному розчині (неперервні обмежені функції) [69]. Відповідна модельна задача в області $G_z^1 \times (0, \infty)$, де $G_z^1 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (рис. 2.1 а), описується системою рівнянь (2.1) з крайовими умовами (2.2) – (2.4) та рівняннями:

$$\operatorname{div}(D_j \cdot \operatorname{grad} C_j) - \overset{\mathbf{r}}{v} \cdot \operatorname{grad} C_j - \sum_{k=1}^m a_{j,k} \cdot C_j + \sum_{k=1}^m a_{k,j} \cdot C_k = \sigma \cdot C'_{jt} \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.89)$$

за наступних крайових умов:

$$C_j \Big|_{ABB_*A_*} = c_{j*}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.90)$$

або

$$D_j \cdot C'_{j\bar{n}} \mathbf{r}(x, y, z, t) - v_{n^*} \cdot (C_j(x, y, z, t) - c_{j^*}(M, t)) \Big|_{CDD_*C_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.91)$$

$$C_j \Big|_{CDD_*C_*} = c_{j^*}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.92)$$

або

$$C'_{j\bar{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.93)$$

або

$$D_j \cdot C'_{j\bar{n}} \mathbf{r}(x, y, z, t) - v_n^* \cdot (C_j(x, y, z, t) - c_j^*(M, t)) \Big|_{CDD_*C_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.94)$$

$$C_j \Big|_{ADD_*A_*} = c_{j^{**}}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.95)$$

або

$$C'_{j\bar{n}} \Big|_{ADD_*A_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.96)$$

$$C_j \Big|_{BCC_*B_*} = c_j^{**}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.97)$$

або

$$C'_{j\bar{n}} \Big|_{BCC_*B_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.98)$$

$$C_j \Big|_{ABCD} = c_{j^{***}}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.99)$$

або

$$C'_{j\bar{n}} \Big|_{ABCD} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.100)$$

$$C_j \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = c_j^{***}(M, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.101)$$

або

$$C'_{j\bar{n}} \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.102)$$

і початкових умов:

$$C_j \Big|_{t=0} = c_j^0(x, y, z) \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.103)$$

Аналогічно п. 3.1.1 припустивши, що фільтраційна задача (2.1) – (2.4) є розв'язаною (див. п. 2.1.2), та здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівняннях (3.89) та умовах (3.90) – (3.103),

отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \cdot d_{j,0} \cdot (\vartheta_{j,0}^2 \cdot c_{j\varphi\varphi}'' + b_{1,1} \cdot c_{j\psi\psi}'' + b_{1,2} \cdot c_{j\eta\eta}'' + b_{2,1} \cdot c_{j\psi}' + b_{2,2} \cdot c_{j\eta}') - \\ & - \vartheta_{j,0}^2 \cdot c_{j\varphi}' - \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^m \vartheta_{j,k} \cdot c_j + \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^m \vartheta_{k,j} \cdot c_k = \sigma \cdot c_{jt}' \quad (j = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (3.104)$$

з крайовими умовами:

$$c_j(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \vartheta_{j*}(\psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.105)$$

або

$$\varepsilon \cdot d_{j,0} \cdot c_{j\varphi}'(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c_j(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \vartheta_{j*}(\psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.106)$$

$$c_j(\varphi^*, \psi, \eta, t) = \vartheta_{j*}^*(\psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.107)$$

або

$$c_{j\varphi}'(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.108)$$

або

$$\varepsilon \cdot d_{j,0} \cdot c_{j\varphi}'(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot (c_j(\varphi^*, \psi, \eta, t) - \vartheta_{j*}^*(\psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.109)$$

$$c_j(\varphi, 0, \eta, t) = \vartheta_{j**}(\varphi, \eta, t) \quad (3.110)$$

або

$$c_{j\psi}'(\varphi, 0, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.111)$$

$$c_j(\varphi, Q_*, \eta, t) = \vartheta_{j**}^*(\varphi, \eta, t) \quad (3.112)$$

або

$$c_{j\psi}'(\varphi, Q_*, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.113)$$

$$c_j(\varphi, \psi, 0, t) = \vartheta_{j***}(\varphi, \psi, t), \quad (3.114)$$

або

$$c_{j\eta}'(\varphi, \psi, 0, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.115)$$

$$c_j(\varphi, \psi, Q^*, t) = \vartheta_{j***}^*(\varphi, \psi, t) \quad (3.116)$$

або

$$c'_{j\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}) \quad (3.117)$$

і початковими умовами:

$$c_j(\varphi, \psi, \eta) = \mathcal{C}_j^0(\varphi, \psi, \eta) \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.118)$$

Асимптотичне наближення розв'язку c_j ($j = \overline{1, m}$) задачі (3.104) – (3.118) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_j = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot P_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathring{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathring{P}_{j,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathring{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathring{P}_{j,i} + R_{j,n+1}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

де $c_{j,i} = c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $P_{j,i} = P_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\mathring{P}_{j,i} = \mathring{P}_{j,i}(\varphi, \mathring{\psi}, \eta, t)$, $\mathring{P}_{j,i} = \mathring{P}_{j,i}(\varphi, \mathring{\psi}, \eta, t)$, $\mathring{P}_{j,i} = \mathring{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \mathring{\eta}, t)$, $\mathring{P}_{j,i} = \mathring{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \mathring{\eta}, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних гранях модельної області), $\mathring{\psi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\mathring{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$\mathring{\eta} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mathring{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mathring{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення

(розтяги), $R_{j,n+1} = R_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($j = \overline{1, m}$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється аналогічно п. 3.1.1 на основі принципу максимуму).

У результаті підстановки (3.119) в (3.104) – (3.118) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε для знаходження головних частин $c_{j,0}$ ($j = \overline{1, m}$) розв'язку і поправок $c_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$) за крайових умов (3.105) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c'_{(j,0)\varphi} + \sigma \cdot c'_{(j,0)t} = 0; c_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \vartheta_0^0(\varphi, \psi, \eta), \\ c_{j,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \vartheta_{0*}(\varphi, \psi, t) \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (3.120)$$

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c'_{(j,i)\varphi} + \sigma \cdot c'_{(j,i)t} = g_{j,i}; c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ c_{j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

де $g_{j,i} = d_{j,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(j,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(j,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(j,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(j,i-1)\psi} + b_{2,2} \times \right.$
 $\left. \times c'_{(j,i-1)\eta} \right) + \sum_{k=1}^m \vartheta_{j,k} \cdot c_{j,i-1} - \sum_{k=1}^m \vartheta_{k,j} \cdot c_{k,i-1} \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}).$

У результаті їх розв'язання отримаємо:

$$c_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_{j*}(\psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ c_j^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, f(\varphi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi, & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_{j,i}(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}, f(\varphi, \psi, \eta) = \kappa \cdot \sigma \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, \eta)}, f^{-1}$ – функція, обернена до

f відносно змінної φ .

При умові, що на ділянці входу задана умова (3.106), для знаходження головних частин $c_{j,0}$ ($j = \overline{1, m}$) розв'язку отримаємо задачу (3.120), а для знаходження поправок $c_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_0^2}{\kappa} \cdot c'_{(j,i)\varphi} + \sigma \cdot c'_{(j,i)t} = g_{j,i}; c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \\ d_{j,0} \cdot c'_{(j,i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_{j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}). \end{cases}$$

У результаті розв'язання цих задач отримаємо:

$$c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_{j,i}(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\text{де } h_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, f(\varphi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{\mathcal{V}_i^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + d_{j,0} \cdot c'_{(j,i-1)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t)$$

$$(j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}).$$

Для знаходження примежових поправок $P_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ у випадку крайових умов (3.107) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,0)\varphi\varphi} + \kappa \cdot P'_{(j,0)\varphi} = 0; P_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{j,0}(0, \psi, \eta, t) = \mathcal{Z}_j^*(\psi, \eta, t) - c_{j,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,i)\varphi\varphi} + \kappa \cdot P'_{(j,i)\varphi} = q_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t); P_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{j,i}(0, \psi, \eta, t) = -c_{j,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,n+1)\varphi\varphi} + \kappa \cdot P'_{(j,n+1)\varphi} = q_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t); \\ P_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{j,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0 (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\text{де } q_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{\kappa^2}{\mathcal{V}_i^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P'_{(j,i-1)t} - \sum_{l=1}^i \left(d_{j,0} \cdot \frac{V_l}{\kappa^2} \cdot P''_{(j,i-l)\varphi\varphi} + \frac{V_l}{\kappa} \cdot P'_{(j,i-l)\varphi} \right) - \right.$$

$$\left. - I(i, 2) \cdot d_{j,0} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1,1,l} \cdot P''_{(j,i-2-l)\varphi\psi} + B_{2,1,l} \cdot P'_{(j,i-2-l)\psi} + B_{1,2,l} \cdot P''_{(j,i-2-l)\eta\eta} + B_{2,2,l} \cdot P'_{(j,i-2-l)\eta} \right) + \right.$$

$$\left. + I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{j,k,l} \cdot c_{j,i-2-l} - I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{k,j,l} \cdot c_{k,i-2-l} \right) (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n+1}), V_l,$$

$B_{1,1,l}, B_{1,2,l}, B_{2,1,l}, B_{2,2,l}, A_{j,k,l}$ ($j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}$) – коефіцієнти при l -тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\mathcal{V}_i^2(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta)$, $\mathcal{Z}_{j,k}^*(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}$) в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{j,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{j,0}}{\kappa} \left(\mathcal{B}_j^*(\psi, \eta, t) - c_{j,0}(\phi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{j,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi - c_{j,i}(\phi^*, \psi, \eta, t)$$

$$(j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{j,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

У випадку задання в околі ділянки виходу фільтраційної течії крайових умов (3.108), для знаходження функцій $P_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) одержимо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,0)\phi\phi} + \kappa \cdot P'_{(j,0)\phi} = 0; P_{j,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ P'_{(j,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(j,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,i)\phi\phi} + \kappa \cdot P'_{(j,i)\phi} = q_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t); P_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ P'_{(j,i)\phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(j,i)\phi}(0, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,n+1)\phi\phi} + \kappa \cdot P'_{(j,n+1)\phi} = q_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t); \\ P_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(j,n+1)\phi}(0, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Результатом ж їх послідовного розв'язання є:

$$P_{j,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{j,0}}{\kappa} \cdot c'_{(j,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \int_0^\phi \left(\frac{1}{d_{j,0}} \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi - c'_{(j,i)\phi}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi$$

$$(j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{j,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (крайова умова (3.109)), то для знаходження функцій $P_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,0)\Phi} + \kappa \cdot P'_{(j,0)\Phi} = 0; P_{j,0}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{j,0} \cdot (c'_{(j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa \cdot (c_{j,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{j,0}(0, \psi, \eta, t) - c_j^*(\psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,i)\Phi} + \kappa \cdot P'_{(j,i)\Phi} = q_{j,i}; P_{j,i}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{j,0} \cdot (c'_{(j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa \cdot (c_{j,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{j,i}(0, \psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,n+1)\Phi} + \kappa \cdot P'_{(j,n+1)\Phi} = q_{j,n+1}; P_{j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{j,0} \cdot P'_{(j,n+1)\Phi}(0, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P_{j,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$P_{j,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot (\kappa \cdot c_j^*(\psi, \eta, t) - d_{j,0} \cdot c'_{(j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) - \kappa \cdot c_{j,0}(0, \psi, \eta, t)) \times \\ \times e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \Phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{j,i}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{j,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi - d_{j,0} \cdot c'_{(j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) - \right. \\ \left. - \kappa \cdot c_{j,i}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{j,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d_{j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

Примежові поправки $\hat{P}_{j,i}$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,2n+1}$) в околі $\psi = 0$ у випадку задання крайових умов (3.110) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \hat{P}_{(j,0)\psi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \hat{P}_{(j,0)\varphi}' = \sigma \cdot \hat{P}_{(j,0)t}'; \\ \hat{P}_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \hat{P}_{j,0}(\varphi, 0, \eta, t) = \mathcal{M}_{j,0}(\varphi, \eta, t) - \hat{M}_{j,0}(\varphi, \eta, t) \quad (j = \overline{1,m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \hat{P}_{(j,i)\psi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \hat{P}_{(j,i)\varphi}' = \sigma \cdot \hat{P}_{(j,i)t}' - \\ - \hat{M}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t); \hat{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \hat{P}_{j,i}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -\hat{M}_{j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{1,2n+1}). \end{cases}$$

Тут $\hat{M}_{j,i}(\varphi, \eta, t) = c_{j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,2n+1}$), $\hat{M}_{j,i}^0 =$

$$= d_{j,0} \cdot \left(\sum_{l=1}^i B_{1,1,l}^* \cdot \hat{P}_{(j,i-l)\psi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,l}^* \cdot \hat{P}_{(j,i-1-l)\psi}' + I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(\frac{V_l^*}{\kappa^2} \cdot \hat{P}_{(j,i-2-l)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,l}^* \times \right. \right.$$

$$\left. \times \hat{P}_{(j,i-2-l)\eta\eta}'' + B_{2,2,l}^* \cdot \hat{P}_{(j,i-2-l)\eta}' \right) + \sum_{l=1}^i \frac{V_l^*}{\kappa} \cdot \hat{P}_{(j,i-l)\varphi}' + I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{j,k,l}^* \cdot \hat{P}_{(j,i-2-l)} -$$

$$- I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{k,j,l}^* \cdot \hat{P}_{(k,i-2-l)} \quad (j = \overline{1,m}, i = \overline{1,2n+1}), V_l^*, B_{1,1,l}^*, B_{1,2,l}^*, B_{2,1,l}^*, B_{2,2,l}^*,$$

$A_{j,k,l}^*$ ($j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$) – коефіцієнти при l -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $\mathcal{M}_{j,k}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$) в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$.

Функції $\hat{P}_{j,i}$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,2n+1}$) при крайових умовах (3.111) отримуються у результаті розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \hat{P}_{(j,0)\psi}'' - \frac{\vartheta^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \hat{P}_{(j,0)\varphi}' = \sigma \cdot \hat{P}_{(j,0)t}', \\ \hat{P}_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \hat{P}_{(j,0)\psi}'(\varphi, 0, \eta, t) = -\hat{M}_{j,0}(\varphi, \eta, t) \quad (j = \overline{1,m}), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{(j,i)\varphi} - \frac{\varphi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot P'_{(j,i)\varphi} = \sigma \cdot P'_{(j,i)t} - \\ - M'_{j,i}(\varphi, \varphi, \eta, t), P'_{j,i}(\varphi, \varphi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P'_{(j,i)\varphi}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M'_{j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, 2n+1}), \end{array} \right.$$

де $M'_{j,i}(\varphi, \eta, t) = c'_{(j,i-i/2)\varphi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{(j,i-i/2)\varphi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{0, 2n+1}$).

Задачі для знаходження функцій $P'_{j,i}, P'_{j,i}, P'_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно.

Зауважимо, що при моделюванні процесів масопереносу для m -компонентних систем окрім власних коефіцієнтів дифузії також доцільно враховувати парціальні коефіцієнти взаємної дифузії $D_{j,k}$ (у цьому випадку сумарний коефіцієнт гетеродифузії для j -того компонента виражається так:

$$D_j = D_{j,j} + \sum_{j \neq k} D_{j,k} \cdot \frac{\text{grad } C_k}{\text{grad } C_j}, \quad j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}).$$

У алгоритмі розв'язку відповідних задач принципівих змін не відбудеться, зросте лише тривалість обчислення поправок (за рахунок зростання громіздкості виразів для формування коефіцієнтів відповідних рівнянь) [24].

3.1.7. Просторові сингулярно-збурені крайові задачі в анізотропних середовищах

Досить часто дослідженні процесів масопереносу забруднюючих речовин у недеформівних водонасичених пористих середовищах виникає необхідність у врахуванні анізотропних властивостей середовища. Так, наприклад, у випадку, коли його анізотропія пов'язана з опадонакопиченням: проникність вздовж шарів має одне значення, а в перпендикулярному напрямку – інше, значно менше.

Проведемо математичне моделювання такого процесу поширення забруднюючої речовини у однорідному анізотропному недеформівному водо-

насиченому пористому середовищі, яке характеризується коефіцієнтами фільтрації κ , активної пористості σ і дифузії D , де $\kappa = (\kappa_{r_1, r_2})_{3 \times 3}$, $D = (D_{r_1, r_2})_{3 \times 3}$, $D_{r_1, r_2} = \varepsilon \cdot d_{r_1, r_2}$, κ_{r_1, r_2} , d_{r_1, r_2} – деякі додатні дійсні числа ($r_1 = \overline{1, 3}$, $r_2 = \overline{1, 3}$), $0 < \sigma < 1$. Відповідна модельна задача в області $G_z^1 \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь (2.1), (3.1), крайовими умовами (2.2) – (2.4), (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) – (3.14) і початковою умовою (3.15). При переході до області $G_w \times (0, \infty)$ рівняння (3.1) відповідної “дифузійної задачі” запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \left((b_{1,1} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,2} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,3} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{\varphi\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{\varphi\eta} + \right. \\ \left. + b_{2,3} \cdot c''_{\psi\eta} + b_{3,1} \cdot c'_\varphi + b_{3,2} \cdot c'_\psi + b_{3,3} \cdot c'_\eta) - q \cdot c'_\varphi = \sigma \cdot c'_t, \right. \end{aligned} \quad (3.121)$$

а умови (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) – (3.15) матимуть вигляд (3.17), (3.19), (3.20), (3.22) – (3.30), де коефіцієнти b_{r_1, r_2} ($r_1 = \overline{1, 3}$, $r_2 = \overline{1, 3}$) і q матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \varphi_x^2 + d_{2,2} \cdot \varphi_y^2 + d_{3,3} \cdot \varphi_z^2 + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot \varphi'_x \cdot \varphi'_y + (d_{1,3} + d_{3,1}) \times \\ \times \varphi'_x \cdot \varphi'_z + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot \varphi'_y \cdot \varphi'_z, \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \psi_x'^2 + d_{2,2} \cdot \psi_y'^2 + d_{3,3} \cdot \psi_z'^2 + \\ + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot \psi'_x \cdot \psi'_y + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot \psi'_x \cdot \psi'_z + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot \psi'_y \cdot \psi'_z, \quad b_{1,3} = b_{1,3}(\varphi, \psi, \eta) = \\ = d_{1,1} \cdot \eta_x'^2 + d_{2,2} \cdot \eta_y'^2 + d_{3,3} \cdot \eta_z'^2 + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot \eta'_x \cdot \eta'_y + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot \eta'_x \cdot \eta'_z + (d_{2,3} + d_{3,2}) \times \\ \times \eta'_y \cdot \eta'_z, \quad b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \varphi'_x \cdot \psi'_x + d_{2,2} \cdot \varphi'_y \cdot \psi'_y + d_{3,3} \cdot \varphi'_z \cdot \psi'_z) + (d_{1,2} + d_{2,1}) \times \\ \times (\varphi'_x \cdot \psi'_y + \varphi'_y \cdot \psi'_x) + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot (\varphi'_x \cdot \psi'_z + \varphi'_z \cdot \psi'_x) + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot (\varphi'_y \cdot \psi'_z + \varphi'_z \cdot \psi'_y), \\ b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \varphi'_x \cdot \eta'_x + d_{2,2} \cdot \varphi'_y \cdot \eta'_y + d_{3,3} \cdot \varphi'_z \cdot \eta'_z) + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot (\varphi'_x \cdot \eta'_y + \\ + \varphi'_y \cdot \eta'_x) + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot (\varphi'_x \cdot \eta'_z + \varphi'_z \cdot \eta'_x) + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot (\varphi'_y \cdot \eta'_z + \varphi'_z \cdot \eta'_y), \quad b_{2,3} = \\ = b_{2,3}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \psi'_x \cdot \eta'_x + d_{2,2} \cdot \psi'_y \cdot \eta'_y + d_{3,3} \cdot \psi'_z \cdot \eta'_z) + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot (\psi'_x \cdot \eta'_y + \\ + \psi'_y \cdot \eta'_x) + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot (\psi'_x \cdot \eta'_z + \psi'_z \cdot \eta'_x) + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot (\psi'_y \cdot \eta'_z + \psi'_z \cdot \eta'_y), \quad b_{3,1} = \\ = b_{3,1}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \varphi''_{xx} + d_{2,2} \cdot \varphi''_{yy} + d_{3,3} \cdot \varphi''_{zz} + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot \varphi''_{xy} + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot \varphi''_{xz} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot \varphi''_{yz}, \quad b_{3,2} = b_{3,2}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \psi''_{xx} + d_{2,2} \cdot \psi''_{yy} + d_{3,3} \cdot \psi''_{zz} + (d_{1,2} + d_{2,1}) \times \\
& \times \psi''_{xy} + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot \psi''_{xz} + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot \psi''_{yz}, \quad b_{3,3} = b_{3,3}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \eta''_{xx} + d_{2,2} \cdot \eta''_{yy} + \\
& + d_{3,3} \cdot \eta''_{zz} + (d_{1,2} + d_{2,1}) \cdot \eta''_{xy} + (d_{1,3} + d_{3,1}) \cdot \eta''_{xz} + (d_{2,3} + d_{3,2}) \cdot \eta''_{yz}, \quad q = q(\varphi, \psi, \eta) = \\
& = v_x \cdot \varphi'_x + v_y \cdot \varphi'_y + v_z \cdot \varphi'_z.
\end{aligned}$$

У випадку, коли $d_{1,2} = d_{1,3} = d_{2,1} = d_{2,3} = d_{3,1} = d_{3,2} = 0$, коефіцієнти b_{r_1, r_2} ($r_1 = \overline{1,3}$, $r_2 = \overline{1,3}$) спростяться до вигляду: $b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \varphi_x'^2 + d_{2,2} \cdot \varphi_y'^2 + d_{3,3} \cdot \varphi_z'^2$, $b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \psi_x'^2 + d_{2,2} \cdot \psi_y'^2 + d_{3,3} \cdot \psi_z'^2$, $b_{1,3} = b_{1,3}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \eta_x'^2 + d_{2,2} \cdot \eta_y'^2 + d_{3,3} \cdot \eta_z'^2$, $b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \varphi'_x \cdot \psi'_x + d_{2,2} \cdot \varphi'_y \cdot \psi'_y + d_{3,3} \cdot \varphi'_z \cdot \psi'_z)$, $b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \varphi'_x \cdot \eta'_x + d_{2,2} \cdot \varphi'_y \cdot \eta'_y + d_{3,3} \cdot \varphi'_z \cdot \eta'_z)$, $b_{2,3} = b_{2,3}(\varphi, \psi, \eta) = 2 \cdot (d_{1,1} \cdot \psi'_x \cdot \eta'_x + d_{2,2} \cdot \psi'_y \cdot \eta'_y + d_{3,3} \cdot \psi'_z \cdot \eta'_z)$, $b_{3,1} = b_{3,1}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \varphi''_{xx} + d_{2,2} \cdot \varphi''_{yy} + d_{3,3} \cdot \varphi''_{zz}$, $b_{3,2} = b_{3,2}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \psi''_{xx} + d_{2,2} \cdot \psi''_{yy} + d_{3,3} \cdot \psi''_{zz}$, $b_{3,3} = b_{3,3}(\varphi, \psi, \eta) = d_{1,1} \cdot \eta''_{xx} + d_{2,2} \cdot \eta''_{yy} + d_{3,3} \cdot \eta''_{zz}$.

Розв'язок задачі (3.121), (3.17), (3.19), (3.20), (3.22) – (3.30) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ також шукається у вигляді асимптотичного ряду (3.31) і її розв'язання зводиться до відшукування розв'язків задач, аналогічних п. 3.1.1, а в результаті їх розв'язання отримуються схожі розв'язки. Так, наприклад, для знаходження головної частини c_0 асимптотичного наближення розв'язку задачі і поправок c_i ($i = \overline{0, n}$) одержимо задачі:

$$\begin{cases} q \cdot c'_{0\varphi} + \sigma \cdot c'_{0t} = 0; \\ c_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} q \cdot c'_{i\varphi} + \sigma \cdot c'_{it} = g_i; \\ c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

де $g_i = d_0 \cdot (b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\varphi\varphi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\psi\psi} + b_{1,3} \cdot c''_{(i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(i-1)\varphi\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(i-1)\varphi\eta} + b_{2,3} \cdot c''_{(i-1)\psi\eta} + b_{3,1} \cdot c'_{(i-1)\varphi} + b_{3,2} \cdot c'_{(i-1)\psi} + b_{3,3} \cdot c'_{(i-1)\eta})$ ($i = \overline{1, n}$).

У результаті їх розв'язання матимемо:

$$c_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \mathcal{D}_\varphi(\psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathcal{D}_\varphi^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\phi, \psi, \eta, f(\phi, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{q(\phi, \psi, \eta)} d\phi, & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_i(f^{-1}(t + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \psi, \eta) = \sigma \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\phi}{q(\phi, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідними частинками

шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^1$ вздовж відповідної лінії течії, f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної ϕ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $q(\phi, \psi, \eta)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а σ – додатньо-визначена стала).

3.1.8. Результати числових експериментів

При комп'ютерному моделюванні процесів масопереносу, які описуються просторовими нелінійними сингулярно-збуреними задачами типу “конвекція-дифузія” часто використовують плоскі ідеальні фільтраційні фони. Так, для одержання результатів розрахунку процесу масопереносу із врахуванням сумарного зворотного впливу величин концентрацій розчинної речовини на коефіцієнт дифузії, що описується інтегральною залежністю (п. 3.1.2), використано плоский ідеальний фільтраційний фон, породжений двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого $w = \frac{Q_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}$ при

$$\varphi_* = -1.4, \quad \varphi^* = 1.4, \quad AD = \left\{ z : \psi(x, y) = \frac{5\pi}{6} \right\}, \quad BC = \left\{ z : \psi(x, y) = \frac{3\pi}{2} \right\}. \quad \text{На}$$

рис. 3.1 зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_{Φ} та відповідну їй динамічну сітку в G_{Ψ} : $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 20$, $\psi(x, y) = \bar{\psi}_j = Q_* + (Q_0 \cdot j) / 10$, $i = \overline{0, 20}$, $j = \overline{0, 10}$, величини швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k = \overline{1, 6}$ при $t_1 = 0.3492$, $t_2 = 0.8882$, $t_3 = 1.6592$, $t_4 = 2.6492$, $t_5 = 3.7584$, $t_6 = 4.8258$ (криві 1-6 відповідно).

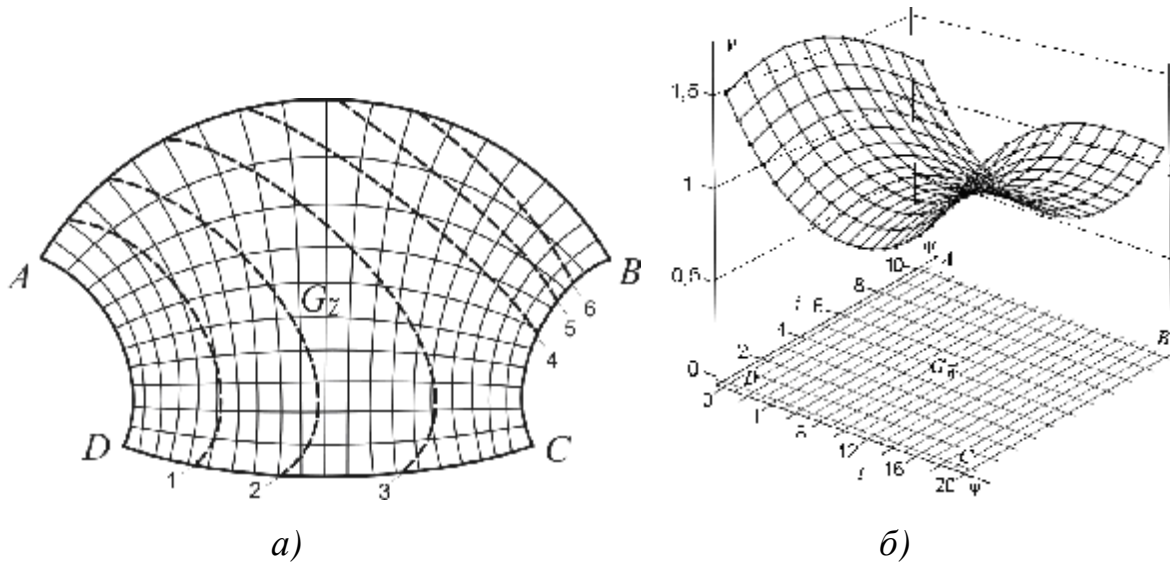


Рис. 3.1. Лінії фронту (а) та величина швидкості (б)

На рис. 3.2 зображено зміну розподілу концентрації $c(\varphi, \psi, \eta, t)$ розчинної речовини з часом при $\varepsilon = 0.01$, $Q^0 = \pi$, $d_0 = 1$, $a(\varphi, \psi, \eta, t) = (|\varphi| + \psi)^t$, $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.1 \cdot ((\varphi - \psi - \eta + 1.4)^2 + 5)^{-1}$, $\alpha_1(\psi, \eta, t) = \alpha_2(\psi, \eta, t) = 1$, $\gamma_1(\psi, \eta, t) = \gamma_2(\psi, \eta, t) = 0$, $\beta_1(\psi, \eta, t) = -0.5(\psi + \eta)^{-1}$, $\beta_2(\psi, \eta, t) = -0.5(\psi + \eta + 2.8)^{-1}$, $c_{**}(\varphi, \eta, t) = 0.1 \cdot ((\varphi - \eta + 4.2)^2 + t + 5)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, \eta, t) = 0.1 \cdot ((\varphi - \eta + 6.11)^2 + t + 5)^{-1}$.

Для визначення коректності запропонованих просторових моделей було проведено порівняльний аналіз розв'язків відповідно просторової і плоскої задач. Для цього використано плоский ідеальний фільтраційний фон, породжений двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (рис. 3.1) і визначено

розподіли концентрацій $c(\varphi, \psi, \eta, t)$ і $c(\varphi, \psi, t)$ розчинної речовин, отримані шляхом розв'язання просторової задачі при $\varepsilon = 0.01$, $d_0 = 1$, $a(\varphi, \psi, \eta, t) = (|\varphi| + \psi)^t$, $Q^* = 2$ ($-1 \leq \eta \leq 1$), $c_*(\psi, \eta, t) = (3 \cdot t + \psi^2 + \eta^2)^{-1}$, $c^*(\psi, \eta, t) = (3 \cdot t + (2.8)^2 + \psi^2 + \eta^2)^{-1}$, $c_{**}(\varphi, \eta, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (5\pi/6)^2 + \eta^2)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, \eta, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (3\pi/2)^2 + \eta^2)^{-1}$, $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = ((\varphi + 1.4)^2 + \psi^2 + \eta^2)^{-1}$, $c_{***}(\varphi, \psi, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (5\pi/6)^2 + \psi^2)^{-1}$, $c^{***}(\varphi, \psi, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (3\pi/2)^2 + \psi^2)^{-1}$, а потім усереднений по змінній η та відповідної плоскої при усереднених по змінній η функціях $c_*(\psi, \eta, t)$, $c^*(\psi, \eta, t)$, $c_{**}(\varphi, \eta, t)$, $c^{**}(\varphi, \eta, t)$, $c_0^0(\varphi, \psi, \eta)$. Різниця між отриманими розв'язками не перевищує 10^{-10} . Аналогічні результати були одержані і при порівнянні розв'язку плоскої задачі при многочленній залежності коефіцієнта дифузії від величини концентрації з усередненим розв'язком відповідної просторової.

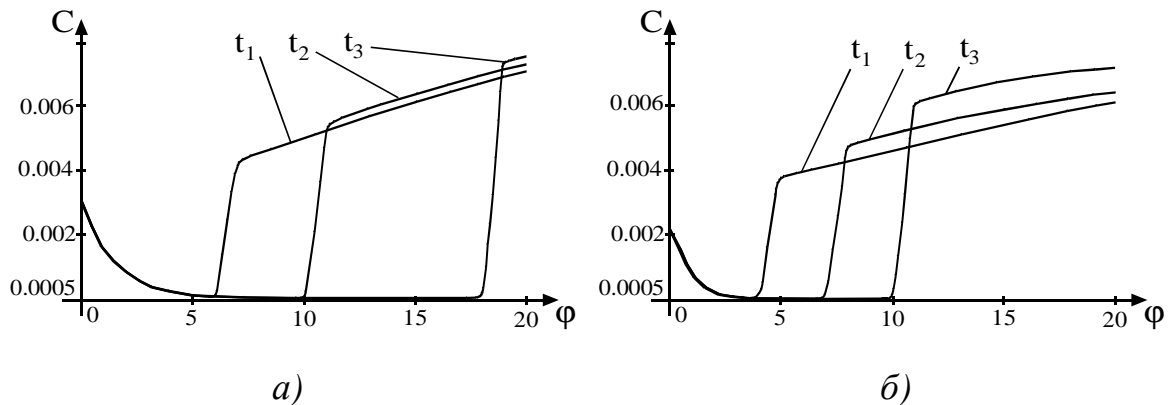


Рис. 3.2. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж ліній $\{(\varphi, 3.456, 0.2) = \bar{\psi} : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$ (а) і $\{(\varphi, 4.294, 0.2) = \bar{\psi} : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$ (б) в моменти часу $t_1 = 0.592$, $t_2 = 1.244$, $t_3 = 2.131$

Розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, t)$, отриманий шляхом розв'язання плоскої задачі, в моменти часу $t_1 = 0.592$, $t_2 = 2.131$, $t_3 = 4.308$, $t_4 = 6.068$ вздовж лінії течії $\psi = 4,284$ зображено на рис. 3.3 а, а в момент часу $t = 2.649$ вздовж ліній течії $\psi_1 = 3.037$, $\psi_2 = 3.456$, $\psi_3 = 3.875$, $\psi_4 = 4.294$ – на рис. 3.3 б).

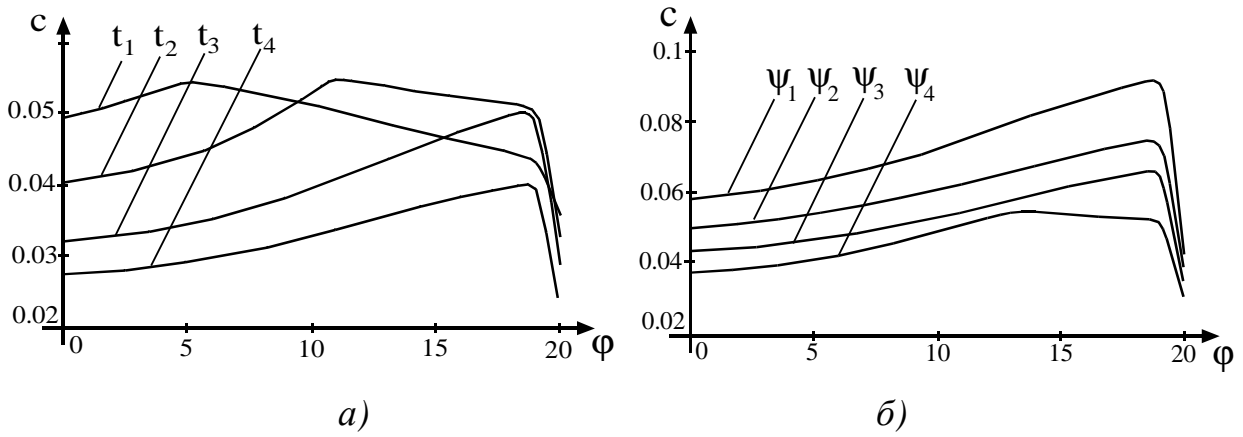


Рис. 3.3. Розподіл концентрації речовини в моменти часу $t_1 = 0.592$, $t_2 = 2.131$, $t_3 = 4.308$, $t_4 = 6.068$ вздовж лінії течії $\psi = 4.284$ (а) та в момент часу $t = 2.649$ вздовж ліній течії $\psi_1 = 3.037$, $\psi_2 = 3.456$, $\psi_3 = 3.875$, $\psi_4 = 4.294$ (б)

При комп'ютерному моделюванні процесу масопереносу деякої забруднюючої речовини у однорідному водонасиченому пористому середовищі – області конусоподібної форми із внутрішнім вирізом $G_z^{2,1}$ (рис. 2.10), що характеризується коефіцієнтом фільтрації $\kappa = 5.6$ м/добу, пористості $\sigma = 0.7$ і дифузії $D = 0.006$ м²/добу, отримано розподіл середніх величин концентрацій забруднюючої речовини $c_{сер}(\phi, t)$ при $c_0^0(\phi, \psi, \eta) = 0$, $c_*(\psi, \eta, t) = c^*(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1 \cdot \psi^2}$ (рис. 3.4).

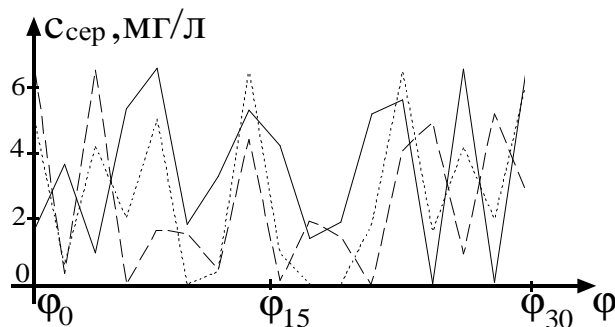


Рис. 3.4. Розподіли середніх величин концентрацій забруднюючої речовини вздовж пористого середовища (суцільна лінія — та штрихові --- і ---- відповідають відповідно моментам часу 100, 200 і 300 діб)

3.2. Математичне моделювання процесів масопереносу забруднюючих речовин у кусково-однорідних пористих середовищах

3.2.1. Просторові сингулярно-збурені процеси конвективної дифузії у двошарових кусково-однорідних пористих середовищах

Процес міграції розчинних речовин не завжди протікає лише в одношарових пористих середовищах. Практичний інтерес також становлять задачі моделювання відповідних процесів у багатошарових середовищах. Так, наприклад, розглянемо спочатку задачу моделювання процесу масопереносу забруднюючої речовини у двошаровому середовищі – модельній області, яка є криволінійним паралелепіпедом $G_z^5 = ABCDA_*B_*C_*D_*$, що розділений еквіпотенціальною поверхнею EFF_*E_* на дві підобласті $G_{z-} = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{z+} = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 2.5 а), і характеризується коефіцієнтами фільтрації

$$\text{ці } \kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ \kappa_2, & (x, y, z) \in G_{z+}, \end{cases} \quad \text{пористості } \sigma = \begin{cases} \sigma_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ \sigma_2, & (x, y, z) \in G_{z+} \end{cases} \quad \text{і дифузії}$$

$$D = \begin{cases} D_1 = d_{1,0} \cdot \varepsilon, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ D_2 = d_{2,0} \cdot \varepsilon, & (x, y, z) \in G_{z+}, \end{cases} \quad \text{де } \kappa_s, \sigma_s, d_{s,0} \text{ – довільні дійсні додатні числа,}$$

при чому $0 < \sigma_s < 1$ ($s = 1, 2$), ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$) [150]. Відповідна модельна задача в області $G = G_z^5 \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь (2.1), (3.1), крайовими та початковою умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.15), а на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_* задано умови узгодженості (2.74) і наступні:

$$C \Big|_{EFF_*E_{*-}} = C \Big|_{EFF_*E_{*+}}, \quad D_1 \cdot C'_n - v_n \cdot C \Big|_{EFF_*E_{*-}} = D_2 \cdot C'_n - v_n \cdot C \Big|_{EFF_*E_{*+}}, \quad (3.122)$$

де v_n – нормальна складова швидкості на поверхні розділу EFF_*E_* [66].

Припустивши, що задача (2.1) – (2.4), (2.74) є розв'язаною (див. п. 2.2.1), зокрема, знайдено параметри ϕ^* , Q , Q_* , Q^* , обчислено поле швидкостей \dot{v} і ряд інших величин, та, здійснивши заміну змінних $x = x(\phi, \psi, \eta)$,

$y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2) – (3.15), (3.122), отримано відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується рівнянням (3.16) з крайовими і початковою умовами (3.17) – (3.30) та умовами узгодженості на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* :

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^-} c(\varphi, \psi, \eta, t) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^+} c(\varphi, \psi, \eta, t), \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^-} (D_1 \cdot c'_\varphi(\varphi, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t)) = \\ & = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^+} (D_2 \cdot c'_\varphi(\varphi, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t)). \end{aligned} \quad (3.124)$$

У випадку, коли коефіцієнт дифузії має вигляд $D = \begin{cases} D_1, (x, y, z) \in G_{z-}, \\ D_2, (x, y, z) \in G_{z+}, \end{cases}$

де $D_s = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \varepsilon \cdot \int_0^t a_s(x, y, z, t) \cdot C(x, y, z, t) dt \right)$ ($s=1,2$), де $d_{s,0}$ – довільні

дійсні додатні числа, $a_s(x, y, z, t)$ – деякі вагові обмежені функції ($s=1,2$), або

$D_s = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_{s,k} \cdot C^k(x, y, z, t) \right)$, де $d_{s,k}$ – довільні дійсні додатні числа

($s=1,2$), рівняння (3.16) відповідної “дифузійної задачі” для області $G_w \times (0, \infty)$ переписеться у вигляді:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D} \cdot \left(\frac{\vartheta^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_\psi + b_{2,2} \cdot c'_\eta \right) + \\ & + \frac{\vartheta^2}{\kappa^2} \cdot \mathcal{D}_\varphi \cdot c'_\varphi + b_{1,1} \cdot \mathcal{D}_\psi \cdot c'_\psi + b_{1,2} \cdot \mathcal{D}_\eta \cdot c'_\eta - \frac{\vartheta^2}{\kappa} \cdot c'_\varphi = \sigma \cdot c'_t, \end{aligned} \quad (3.125)$$

а умова узгодженості на екіпотенціальній поверхні EFF_*E_* (3.124) – у вигляді:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^-} (\mathcal{D}_1 \cdot c'_\varphi(\varphi, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t)) = \\ & = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^+} (\mathcal{D}_2 \cdot c'_\varphi(\varphi, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t)), \end{aligned} \quad (3.126)$$

де

$$\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\varphi(\varphi, \psi, \eta, t) = D(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\mathcal{D}_s = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \varepsilon \cdot \int_0^t \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t) dt \right) (s=1,2),$$

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) = a_s(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t) (s=1,2)$$

або

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_{s,k} \cdot c^k(\varphi, \psi, \eta, t) \right) (s=1,2, k=\overline{0,l}).$$

$$\text{Асимптотичне наближення розв'язку } c(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_1(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ c_2(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$$

сформульованих вище задач з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_1 = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{1,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + R_{1,n+1}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} c_2 = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{2,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{2,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{2,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{2,i} + R_{2,n+1}, \end{aligned} \quad (3.128)$$

де $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s=1,2, i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик,

$\mathcal{P}_{1,i} = \mathcal{P}_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{P}_{2,i} = \mathcal{P}_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового

шару в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки в околі поверхні $E'F'F_*'E_*$ розділу підобластей

G_{w-}^5 і G_{w+}^5), $\mathcal{P}_{2,i} = \mathcal{P}_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару

в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$,

$\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) –

функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\eta=0$,

$\eta = Q^*$ (поправки на бічних гранях модельної області), $\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\varphi_*^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\frac{\psi}{\varepsilon} = \frac{\varphi - \varphi_*^*}{\varepsilon}$,

$\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{Q}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляри-

зуючі перетворення (розтяги), $R_{s,n+1} = R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s=1,2$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється аналогічно п. 3.1.1).

У результаті підстановки (2.127) і (2.128) у (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124) і (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126) та виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , при крайовій умові (3.17) одержимо наступні задачі для знаходження головних частин $c_{s,0}$ ($s=1,2$) розв'язків цих задач і поправок $c_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{1,n}$):

$$\begin{cases} \frac{\vartheta^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,0)\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,0)t} = 0, \\ c_{1,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \vartheta_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \vartheta_0^*(\psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.129)$$

$$\begin{cases} \frac{\vartheta^2}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,0)\varphi} + \sigma_2 \cdot c'_{(2,0)t} = 0, \\ c_{2,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \vartheta_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{2,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.130)$$

$$\begin{cases} \frac{\vartheta^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,i)\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,i)t} = g_{1,i}, \\ c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}); \end{cases} \quad (3.131)$$

$$\begin{cases} \frac{\vartheta^2}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,i)\varphi} + \sigma_2 \cdot c'_{(2,i)t} = g_{2,i}, \\ c_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{2,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1,n}), \end{cases} \quad (3.131)$$

де при сталих коефіцієнтах дифузії забруднюючої речовини у кожному шарі

середовища $g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi} + \right.$
 $\left. + b_{2,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta} \right) \quad (s=1,2, i=\overline{1,n})$, при інтегральних залежностях коефіцієнтів

дифузії від концентрації забруднюючої речовини у кожному шарі

$$g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta} \right) +$$

$$+ I(i, 2) \left(\sum_{k=0}^{i-2} \left(\int_0^t (\mathcal{D}_s^0 \cdot \mathcal{C}_{s,k}) dt \right) \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-2-k)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-2-k)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-2-k)\eta\eta} + b_{2,1} \times \right. \right.$$

$$\times c'_{(s,i-2-k)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} \left. \right) + \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,k)\varphi} \cdot \int_0^t (\mathcal{D}_s^0 \cdot \mathcal{C}'_{(s,i-2-k)\varphi} + \mathcal{D}_s^0 \varphi \cdot \mathcal{C}'_{s,i-2-k}) dt + b_{1,1} \times$$

$$\times c'_{(s,k)\psi} \cdot \int_0^t (\mathcal{D}_s^0 \cdot \mathcal{C}'_{(s,i-2-k)\psi} + \mathcal{D}_s^0 \psi \cdot \mathcal{C}'_{s,i-2-k}) dt + b_{1,2} \cdot c'_{(s,k)\eta} \cdot \int_0^t (\mathcal{D}_s^0 \cdot \mathcal{C}'_{(s,i-2-k)\eta} + \mathcal{D}_s^0 \eta \cdot \mathcal{C}'_{s,i-2-k}) dt \left. \right)$$

($s = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, n}$), $\mathcal{C}_{s,i-2-k} = c_{s,i-2-k}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{D}_s^0 = \mathcal{D}_s^0(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, 2}$), а при використанні многочленних залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрації забруднюючої речовини у кожному шарі

$$g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \times \right.$$

$$\times c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,i-1)\eta} \left. \right) + I(i, 1) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{m=0}^k \left(d_{s,i-1-k} \cdot c_{s,k-m} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,m)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,m)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,m)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(s,m)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,m)\eta} \right) + I(i, 1) \cdot d_{s,1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,k)\varphi} \cdot c'_{(s,i-2-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{(s,k)\psi} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} + b_{1,2} \cdot c'_{(s,k)\eta} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} \right) + I(i, 2) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{i-3} \left((i-2) \cdot d_{s,i-2} \cdot \sum_{m=0}^k \left(c_{s,m} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,k-m)\varphi} \cdot c'_{(s,i-3-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{(s,k-m)\psi} \cdot c'_{(s,i-3-k)\psi} + b_{1,2} \times \right. \right.$$

$$\times c'_{(s,k-m)\eta} \cdot c'_{(s,i-3-k)\eta} \left. \right) \right) \left. \right) \left. \right) \left. \right) (s = \overline{1, 2}, i = \overline{1, n}).$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{1,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \mathcal{D}_s^0(\psi, \eta, t - f_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathcal{D}_s^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{2,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t - f_2(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathfrak{H}_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, f_1(\varphi, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\mathfrak{H}_1^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi, & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_0^t g_{1,i}(f_1^{-1}(t + f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_i(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_2} \cdot \int_0^t g_{2,i}(f_2^{-1}(t + f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$h_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_2 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, f_2(\varphi, \psi, \eta) + t - f_2(\varphi, \psi, \eta))}{\mathfrak{H}_2^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t),$$

де $f_1(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_1 \cdot \sigma_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{\mathfrak{H}_1^2(s, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідними частин-

ками шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_{z-}^5$ вздовж відповідної лінії течії, а

$f_2(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_2 \cdot \sigma_2 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{\mathfrak{H}_2^2(s, \psi, \eta)}$ – від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in$

EFF_*E_* до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_{z+}^5$, f_s^{-1} ($s=1,2$) – функції, обернені відповідно до f_s ($s=1,2$) відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $\mathfrak{H}_s^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а κ_s, σ_s ($s=1,2$) – додатньо-визначені сталі).

При умові, що на ділянці входу задана умова (3.18), для знаходження головних частин $c_{s,0}$ ($s=1,2$) і поправок $c_{2,i}$ ($i=\overline{1,n}$) розв'язку задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124) отримаємо задачі (3.129) – (3.131), а для знаходження поправок $c_{1,i}$ ($i=\overline{1,n}$) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_1^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,i)\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,i)t} = g_{1,i}; c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ d_{1,0} \cdot c'_{(1,i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (3.133)$$

У результаті розв'язання цих задач отримаємо:

$$c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_0^t g_{1,i}(f_1^{-1}(t + f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\text{де } h_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, f_1(\varphi, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta_1^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + d_{1,0} \cdot c'_{(1,i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t)$$

($i = \overline{1, n}$).

При розв'язанні задачі (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126), що відповідає випадкам нелінійних інтегральної і многочленної залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному шарі задачі для знаходження головних частин $c_{s,0}$ ($s = 1, 2$) і поправок $c_{1,1}$, $c_{2,i}$ ($i = \overline{1, n}$) матимуть вигляд (3.129), (3.130), (3.133), (3.132), а задачі для знаходження поправок $c_{1,i}$ ($i = \overline{2, n}$) отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_1^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,i)\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,i)t} = g_{1,i}; c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ d_{1,0} \cdot c'_{(1,i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) + \mathcal{G}_{1,i} - \kappa_1 \cdot c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{2, n}), \end{cases} \quad (3.134)$$

де у випадку інтегральної залежності: $\mathcal{G}_{1,i} = \int_0^t \mathcal{G}_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \cdot c_{1,i-2}(\varphi_*, \psi, \eta, t) dt \times$
 $\times c'_{(1,i-2)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{2, n}$), а у випадку многочленної: $\mathcal{G}_{1,2} = d_{1,1} \cdot c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \times$
 $\times c'_{(1,0)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{G}_{1,3} = d_{1,1} \cdot c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \cdot c'_{(1,1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) + d_{1,1} \cdot c_{1,1}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \times$
 $\times c'_{(1,0)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) + d_{1,2} \cdot c_{1,0}^2(\varphi_*, \psi, \eta, t) \cdot c'_{(1,0)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t), \dots$

Розв'язки цих задач отримаємо у вигляді:

$$c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_0^t g_{1,i}(f_1^{-1}(t + f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $h_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_1 \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, f_1(\varphi, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + g_{1,i} + d_{1,0} \times$
 $\times c'_{(1,i-1)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{2, n}).$

Для знаходження примежових поправок $P_{2,i} \quad (i = \overline{0, n+1})$ в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ як у випадку задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124) (випадок сталих коефіцієнтів дифузії у кожному із шарів), так і у випадку задачі (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126) (випадок нелінійних інтегральної і многочленної залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному із шарів) за крайової умови (3.19) (за відсутності інтенсивного відводу рідини) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,0)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)\varphi} = 0, \\ P_{2,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) = g^*(\psi, \eta, t) - c_{2,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.135)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,i)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)\varphi} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{2,i}(0, \psi, \eta, t) = -c_{2,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.136)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,n+1)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)\varphi} = q_{n+1}, \\ P_{2,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases} \quad (3.137)$$

де при сталих коефіцієнтах дифузії у кожному шарі пористого середовища

$$q_i = \frac{\kappa_2^2}{\vartheta^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P'_{(2,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{2,0} \cdot \frac{V_k}{\kappa_2^2} \cdot P''_{(2,i-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa_2} \cdot P'_{(2,i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times d_{2,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} (B_{1,1,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\eta}) \right)$$

$(i = \overline{1, n+1})$. У складніших випадках: при врахуванні зворотнього впливу величин концентрацій забруднюючої речовини на величини коефіцієнтів дифузії

$$q_i = \frac{\kappa_2^2}{\vartheta^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P'_{(2,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{2,0} \cdot \frac{V_k}{\kappa_2^2} \cdot P''_{(2,i-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa_2} \cdot P'_{(2,i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(d_{2,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} (B_{1,1,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\eta}) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\frac{V_k}{\kappa_2^2} \cdot \left(P_{(2,l-k)\psi\psi}'' \cdot \int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{2,i-1-m} dt + P_{(2,l-k)\psi}' \cdot \left(\int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-1-m)\psi} dt + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \int_0^t A_{(2,m-l)\psi}' \cdot P_{2,i-2-m} dt \right) \right) \right) - I(i,3) \cdot \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left((B_{1,1,k} \cdot P_{(2,l-k)\psi\psi}'' + B_{1,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta\eta}'' + B_{2,1,k} \times \right. \\
& \left. \times P_{(2,l-k)\psi}' + B_{2,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta}' \right) \cdot \int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{2,i-3-m} dt + B_{1,1,k} \cdot P_{(2,l-k)\psi}' \cdot \left(\int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-3-m)\psi} dt + \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t A_{(2,m-l)\psi}' \cdot P_{2,i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta}' \cdot \left(\int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A_{(2,m-l)\eta}' \cdot P_{2,i-3-m} dt \right) \right)
\end{aligned}$$

$(i = \overline{1, n+1})$, V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$, $A_{2,m-l}$, $A_{(2,m-l)\psi}'$, $A_{(2,m-l)\eta}'$ – коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях ε у розкладі відповідно

функцій $\mathcal{V}^2(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta)$, $\mathcal{D}_2(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{D}_{2\psi}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta, t)$, $\mathcal{D}_{2\eta}(\varphi^* - \varepsilon\Phi, \psi, \eta, t)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$; при

врахуванні многочленної залежності величин концентрацій забруднюючої

речовини на величини коефіцієнтів дифузії у кожному шарі $q_1 = \frac{\kappa_2^2}{\mathcal{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \times$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,0)t} + d_{2,0} \cdot \frac{2 \cdot \mathcal{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_\psi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,0)\psi\psi}'' - d_{2,1} \cdot P_{2,0} \cdot \frac{\mathcal{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{2,0\psi\psi}'' - \right. \\
& \left. - d_{2,1} \cdot \frac{\mathcal{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,0)\psi}'' + \frac{2 \cdot \mathcal{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_\psi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot P_{(2,0)\psi}' \right), \quad q_2 = \frac{\kappa_2^2}{\mathcal{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,1)t} - d_{2,0} \cdot \left(\frac{(\mathcal{V}_\psi^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \mathcal{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\psi\psi}(\varphi^*, \psi, \eta))}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,0)\psi\psi}'' - 2 \cdot \mathcal{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\mathcal{V}_\psi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot P_{(2,1)\psi\psi}'' \right) + d_{2,1} \cdot P_{2,0} \cdot \left(\frac{\mathcal{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,1)\psi\psi}'' - \frac{2 \cdot \mathcal{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_\psi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,1)\psi\psi}'' \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P''_{(2,0)\Phi} - d_{2,1} \cdot P_{2,1} \cdot \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P''_{(2,0)\Phi} - d_{2,2} \cdot P_{2,0}^2 \cdot \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P''_{(2,0)\Phi} - d_{2,0} \times \\
& \times \left(b_{1,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P''_{(2,0)\Psi\eta} + b_{1,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P''_{(2,0)\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P'_{(2,0)\Psi} + b_{2,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \times P'_{(2,0)\eta} - d_{2,1} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot P'_{(2,1)\Phi} - \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot \Phi \cdot P'_{(2,1)\Phi} \right) - d_{2,2} \cdot P_{2,0}^2 \times \\
& \times \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P'_{(2,0)\Phi} + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot \Phi \cdot P'_{(2,1)\Phi} - \left(\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \times \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \cdot \frac{\Phi^2}{\kappa_2} \cdot P'_{(2,0)\Phi} \left. \right), \dots
\end{aligned}$$

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$P_{2,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{2,0}}{\kappa_2} \left(\vartheta_0^*(\psi, \eta, t) - c_{2,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_2 \cdot \Phi}{d_{2,0}}},$$

$$P_{2,i}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}}s} \cdot \int_0^s q_i(\vartheta_0 \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}}\vartheta_0} d\vartheta_0 \right) ds - c_{2,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}}s} \cdot \int_0^s q_{n+1}(\vartheta_0 \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}}\vartheta_0} d\vartheta_0 \right) ds.$$

У випадку ж врахування інтенсивного відводу рідини (крайова умова (3.20)) для знаходження функцій $P_{2,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) отримаємо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,0)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)\Phi} = 0, \\ P_{2,0}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.138)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,i)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)\Phi} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{2,i}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.139)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,n+1)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)\Phi} = q_{n+1}, \\ P_{2,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,n+1)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases} \quad (3.140)$$

Розв'язки цих задач мають наступний вигляд:

$$P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{2,0}}{\kappa_2} c'_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi},$$

$$P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \int_0^\phi \left(\frac{1}{d_{2,0}} \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi - c'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (крайова умова (3.21)), то для знаходження функцій $P_{2,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) у випадку задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124) (випадок сталих коефіцієнтів дифузії у кожному із шарів) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) = 0; P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,0} \cdot (c'_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) - c^*(\psi, \eta, t)) = 0, \end{cases} \quad (3.141)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) = q_{2,i}; P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,0} \cdot (c'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t)) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.142)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) = q_{2,n+1}; P_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,0} \cdot P'_{(2,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases} \quad (3.143)$$

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot \kappa_2} \cdot \left(\kappa_2 \cdot c^*(\psi, \eta, t) - d_{2,0} \cdot c'_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) - \right. \\ \left. - \kappa_2 \cdot c_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi},$$

$$P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi - \right.$$

$$-d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) \Big) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

У випадку ж побудови асимптотичного наближення розв'язку задачі (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126) (випадок нелінійних інтегральної і многочленної залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному із шарів) задача (3.141) для знаходження поправок $P_{2,0}$ залишиться без змін, а задачі (3.142), (3.143) для знаходження поправок $P_{2,i}$ ($i = \overline{1, n+1}$) перепишуться у вигляді:

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) = q_{2,i}; P_{2,i}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,0} \cdot \left(c'_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) \right) + \\ + \kappa_2 \cdot \left(c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,i}(0, \psi, \eta, t) \right) + \mathcal{Q}_{2,i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.144)$$

$$\begin{cases} d_{2,0} \cdot P''_{(2,n+1)}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)}(0, \psi, \eta, t) = q_{2,n+1}; P_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,0} \cdot P'_{(2,n+1)}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{2,n+1} = 0, \end{cases} \quad (3.145)$$

де при інтегральній залежності: $\mathcal{Q}_{2,i} = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\int_0^t A_{2,k} \cdot \left(c'_{(2,l-k)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,l-k)}(0, \psi, \eta, t) \right) dt \right) \cdot \left(c'_{(2,i-1-m)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,i-1-m)}(0, \psi, \eta, t) \right)$ ($i = \overline{1, n+1}$), а

при многочленній: $\mathcal{Q}_{2,1} = d_{2,1} \cdot \left(c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot \left(c'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) \right)$, $\mathcal{Q}_{2,2} = d_{2,1} \cdot \left(c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot \left(c'_{(2,1)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,1)}(0, \psi, \eta, t) \right) + d_{2,1} \cdot \left(c_{2,1}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,1}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot \left(c'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) \right) + d_{2,2} \cdot \left(c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) \right)^2 \cdot \left(c'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) \right)$, ...

Розв'язки цих задач отримаємо у вигляді:

$$P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi - \right. \\ \left. -d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) - q_{2,i} \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi - q_{2,n+1} \right) d\phi.$$

Для знаходження функцій $P_{1,i}$, $P_{2,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) у випадку задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124) (випадок сталих коефіцієнтів дифузії у кожному із шарів) отримаємо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,0} \cdot P_{(1,0)} + \kappa_1 \cdot P_{(1,0)} = 0, \quad d_{2,0} \cdot P_{(2,0)} - \kappa_2 \cdot P_{(2,0)} = 0; \\ P_{1,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,0}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,0}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,0} \cdot (c'_{(1,0)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(1,0)}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) + \\ + P_{1,0}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{2,0} \cdot (c'_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(2,0)}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(0, \psi, \eta, t)), \end{array} \right. \quad (3.146)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,0} \cdot P_{(1,i)} + \kappa_1 \cdot P_{(1,i)} = q_{1,i}, \quad d_{2,0} \cdot P_{(2,i)} - \kappa_2 \cdot P_{(2,i)} = q_{2,i}; \\ P_{1,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,i}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,i}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,0} \cdot (c'_{(1,i)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(1,i)}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,i}(0, \psi, \eta, t) + \\ + P_{1,i}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{2,0} \cdot (c'_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(2,i)}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,i}(0, \psi, \eta, t)) \quad (i = \overline{1, n}), \end{array} \right. \quad (3.147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,0} \cdot P_{(1,n+1)}^{\%} + \kappa_1 \cdot P_{(1,n+1)}^{\%} = q_{1,n+1}, \\ d_{2,0} \cdot P_{(2,n+1)}^{\%} - \kappa_2 \cdot P_{(2,n+1)}^{\%} = q_{2,n+1}; \\ P_{1,n+1}^{\%}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P_{2,n+1}^{\%}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow -\infty} 0, \\ P_{1,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,0} \cdot P_{(1,n+1)}^{\%}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot P_{1,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = \\ = -d_{2,0} \cdot P_{(2,n+1)}^{\%}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P_{2,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \end{array} \right. \quad (3.148)$$

$$\text{де } q_{1,i} = \frac{\kappa_1^2}{\mathcal{V}^2(\phi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_1 \cdot P_{(1,i-1)t}^{\%} - \sum_{k=1}^i \left(d_{1,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{1,k}^{\%}}{\kappa_1^2} \cdot P_{(2,i-k)}^{\%} + \frac{\mathcal{V}_{1,k}^{\%}}{\kappa_1} \cdot P_{(1,i-k)}^{\%} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times d_{1,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\psi\psi}^{\%} + B_{2,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\psi}^{\%} + B_{1,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\eta\eta}^{\%} + B_{2,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\eta}^{\%} \right), \right.$$

$$q_{2,i} = \frac{\kappa_2^2}{\mathcal{V}^2(\phi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,i-1)t}^{\%} - \sum_{k=1}^i \left(d_{2,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{2,k}^{\%}}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,i-k)}^{\%} - \frac{\mathcal{V}_{2,k}^{\%}}{\kappa_2} \cdot P_{(2,i-k)}^{\%} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times d_{2,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,2,k}^{\%} \cdot P_{(2,i-2-k)\psi\psi}^{\%} + B_{2,1,2,k}^{\%} \cdot P_{(2,i-2-k)\psi}^{\%} + B_{1,2,2,k}^{\%} \cdot P_{(2,i-2-k)\eta\eta}^{\%} + B_{2,2,2,k}^{\%} \cdot P_{(2,i-2-k)\eta}^{\%} \right) \right)$$

$(i = \overline{1, n+1})$, $\mathcal{V}_{s,k}^{\%}$, $B_{1,1,s,k}^{\%}$, $B_{1,2,s,k}^{\%}$, $B_{2,1,s,k}^{\%}$, $B_{2,2,s,k}^{\%}$ ($s = 1, 2$) – коефіцієнти при k -тих степенях ε у розкладі відповідно функцій $\mathcal{V}^2(\phi_*^* - \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $\mathcal{V}^2(\phi_*^* + \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\phi_*^* - \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\phi_*^* + \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\phi_*^* - \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\phi_*^* + \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\phi_*^* - \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\phi_*^* + \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\phi_*^* - \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\phi_*^* + \varepsilon \cdot \phi, \psi, \eta)$ у ряд Тейлора в околі $\phi = \phi_*^*$.

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$P_{1,0}^{\%}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\ \left. + \kappa_1 \cdot c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_1 \cdot \phi}{d_{1,0}}},$$

$$P_{2,0}^{\%}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_1 \cdot c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi}, \\
P_{1,i}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{1,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_{1,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{1,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_{1,0}} \phi} d\phi \right) d\phi + (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \times \\
& \times \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot c_{1,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \times \right. \\
& \left. \times c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (i = \overline{1, n}), \\
P_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi \right) d\phi + (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \times \\
& \times \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot c_{1,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \times \right. \\
& \left. \times c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (i = \overline{1, n}), \\
P_{1,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{1,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_{1,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{1,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_{1,0}} \phi} d\phi \right) d\phi, \\
P_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^\phi \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} \cdot \int_0^\phi q_{2,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.
\end{aligned}$$

У випадку ж задачі (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126) (випадок не-лінійних інтегральної і многочленної залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному із шарів) для знаходження функцій $P_{1,i}$, $P_{2,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) отримаємо дещо складніші задачі:

$$\left\{ \begin{aligned}
& d_{1,0} \cdot P_{(1,0)} + \kappa_1 \cdot P_{(1,0)} = 0, \quad d_{2,0} \cdot P_{(2,0)} - \kappa_2 \cdot P_{(2,0)} = 0; \\
& P_{1,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\
& P_{1,0}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,0}(0, \psi, \eta, t), \\
& d_{1,0} \cdot \left(c'_{(1,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{(1,0)}(\phi, \psi, \eta, t) \right) + \kappa_1 \cdot \left(c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& \left. + P_{1,0}(0, \psi, \eta, t) \right) = -d_{2,0} \cdot \left(c'_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{(2,0)}(\phi, \psi, \eta, t) \right) + \\
& \left. + \kappa_2 \cdot \left(c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) \right), \right.
\end{aligned} \right. \quad (3.149)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,0} \cdot P_{(1,i)\varphi}^{\%} + \kappa_1 \cdot P_{(1,i)\varphi}^{\%} = q_{1,i}, \quad d_{2,0} \cdot P_{(2,i)\varphi}^{\%} - \kappa_2 \cdot P_{(2,i)\varphi}^{\%} = q_{2,i}; \\ P_{1,i}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,i}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0 \quad (i=1, n), \\ P_{1,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,0} \cdot \left(c'_{(1,i)\varphi}(0, \psi, \eta, t) + P_{(1,i)\varphi}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) + \kappa_1 \cdot \left(c_{1,i}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\ \left. + P_{1,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) + q_{1,i} = -d_{2,0} \cdot \left(c'_{(2,i)\varphi}(0, \psi, \eta, t) + P_{(2,i)\varphi}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) + \\ \left. + \kappa_2 \cdot \left(c_{2,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) - q_{2,i}, \end{array} \right. \quad (3.150)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,0} \cdot P_{(1,n+1)\varphi}^{\%} + \kappa_1 \cdot P_{(1,n+1)\varphi}^{\%} = q_{1,n+1}, \\ d_{2,0} \cdot P_{(2,n+1)\varphi}^{\%} - \kappa_2 \cdot P_{(2,n+1)\varphi}^{\%} = q_{2,n+1}; \\ P_{1,n+1}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,n+1}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,0} \cdot P_{(1,n+1)\varphi}^{\%}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot P_{1,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) + q_{1,n+1} = \\ = -d_{2,0} \cdot P_{(2,n+1)\varphi}^{\%}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P_{2,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) - q_{2,n+1}, \end{array} \right. \quad (3.151)$$

де при інтегральній залежності коефіцієнта дифузії від концентрації:

$$\begin{aligned} q_{1,i} = & \frac{\kappa_1^2}{\varphi^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_1 \cdot P_{(1,i-1)t}^{\%} - \sum_{k=1}^i \left(d_{1,0} \cdot \frac{V_{1,k}^{\%}}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,i-k)\varphi}^{\%} + \frac{V_{1,k}^{\%}}{\kappa_1} \cdot P_{(1,i-k)\varphi}^{\%} \right) - \right. \\ & - I(i, 2) \cdot \left(d_{1,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\psi\varphi}^{\%} + B_{2,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\psi}^{\%} + B_{1,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\eta\eta}^{\%} + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{2,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,i-2-k)\eta}^{\%} \right) + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{V_{1,k}^{\%}}{\kappa_1^2} \cdot \left(P_{(1,l-k)\varphi}^{\%} \cdot \int_0^t A_{1,m-l}^{\%} \cdot P_{1,i-1-m}^{\%} dt^{\%} + \right. \\ & \left. \left. + P_{(1,l-k)\varphi}^{\%} \cdot \int_0^t A_{1,m-l}^{\%} \cdot P_{(1,i-1-m)\varphi}^{\%} dt^{\%} + P_{(1,l-k)\varphi}^{\%} \cdot \int_0^t A_{(1,m-l)\varphi}^{\%} \cdot P_{1,i-2-m}^{\%} dt^{\%} \right) \right) - I(i, 3) \times \\ & \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(B_{1,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,l-k)\psi\varphi}^{\%} + B_{1,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,l-k)\eta\eta}^{\%} + B_{2,1,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,l-k)\psi}^{\%} + B_{2,2,1,k}^{\%} \cdot P_{(1,l-k)\eta}^{\%} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t A_{1,m-l} \cdot P_{1,i-3-m} dt + B_{1,1,k} \cdot P_{(1,l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{1,m-l} \cdot P_{(1,i-3-m)\psi} dt + \int_0^t A_{(1,m-l)\psi} \cdot P_{1,i-3-m} dt \right) + \\
& + B_{1,2,1,k} \cdot P_{(1,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{1,m-l} \cdot P_{(1,i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A_{(1,m-l)\eta} \cdot P_{1,i-3-m} dt \right) \Bigg), \quad \mathcal{Q}_{1,i} = \\
& = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \int_0^t A_{1,k} \cdot \left(c_{1,l-k} + P_{1,l-k} \right) dt \cdot \left(c'_{(1,i-2-m)\psi} + P_{(1,i-2-m)\psi} \right) \quad (i = \overline{1, n+1}), \\
q_{2,i} & = \frac{\kappa_2^2}{\mathcal{V}_2^2(\varphi_*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{2,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{2,k}^2}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,i-k)\psi\psi} - \frac{\mathcal{V}_{2,k}^2}{\kappa_2} \cdot P_{(2,i-k)\psi} \right) - \right. \\
& - I(i, 2) \cdot \left(d_{2,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,2,k} \cdot P_{(2,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,2,k} \cdot P_{(2,i-2-k)\psi} + B_{1,2,2,k} \cdot P_{(2,i-2-k)\eta\eta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{2,2,2,k} \cdot P_{(2,i-2-k)\eta} \right) + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{\mathcal{V}_{2,k}^2}{\kappa_2^2} \cdot \left(P_{(2,l-k)\psi\psi} \cdot \int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{2,i-1-m} dt - \right. \right. \\
& \left. \left. - P_{(2,l-k)\psi} \cdot \int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-1-m)\psi} dt + P_{(2,l-k)\psi\psi} \cdot \int_0^t A_{(2,m-l)\psi} \cdot P_{2,i-2-m} dt \right) \right) - I(i, 3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(B_{1,1,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\psi\psi} + B_{1,2,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta\eta} + B_{2,1,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\psi} + B_{2,2,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta} \right) \times \\
& \times \int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{2,i-3-m} dt + B_{1,1,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-3-m)\psi} dt + \int_0^t A_{(2,m-l)\psi} \cdot P_{2,i-3-m} dt \right) + \\
& + B_{1,2,2,k} \cdot P_{(2,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{2,m-l} \cdot P_{(2,i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A_{(2,m-l)\eta} \cdot P_{2,i-3-m} dt \right) \Bigg), \quad \mathcal{Q}_{2,i} = \\
& = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \int_0^t A_{2,k} \cdot \left(c_{2,l-k} + P_{2,l-k} \right) dt \cdot \left(c'_{(2,i-2-m)\psi} + P_{(2,i-2-m)\psi} \right) \quad (i = \overline{1, n+1}),
\end{aligned}$$

$\mathcal{V}_{s,k}^2$, $B_{1,1,s,k}$, $B_{1,2,s,k}$, $B_{2,1,s,k}$, $B_{2,2,s,k}$, $A_{s,k}$ або $A_{s,m-l}$, $A_{(1,m-l)\psi}$, $A_{(2,m-l)\psi}$,
 $A_{(s,m-l)\psi}$, $A_{(s,m-l)\eta}$ ($s = 1, 2$) – коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях ε в

розкладі відповідно функцій $\mathcal{V}_2^2(\varphi_* - \varepsilon \cdot \psi, \eta)$, $\mathcal{V}_2^2(\varphi_* + \varepsilon \cdot \psi, \eta)$,

$$\begin{aligned}
& b_{1,1}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{1,1}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{1,2}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{1,2}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \\
& b_{2,1}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{2,1}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{2,2}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \quad b_{2,2}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta), \\
& \alpha_{\varphi}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \quad \alpha_{\varphi}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \quad \alpha_{\psi}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \quad \alpha_{\psi}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \\
& \alpha_{\eta}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \quad \alpha_{\eta}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t), \quad \alpha_{\eta}(\varphi_*^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t) \text{ i } \alpha_{\eta}(\varphi_*^* + \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta, t)
\end{aligned}$$

у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_*^*$, а у іншому випадку (многочленній залежності):

$$\begin{aligned}
& q_{1,1} = \frac{\kappa_1^2}{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_1 \cdot P_{(1,0)t} - d_{1,0} \cdot \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,0)\varphi\varphi} - d_{1,1} \cdot P_{1,0} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,0)\varphi\varphi} - d_{1,1} \cdot \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1} \cdot P_{(1,0)\varphi}^2 + \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_1} \cdot P_{(1,0)\varphi} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{2,1} = \frac{\kappa_2^2}{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,0)t} - d_{2,0} \cdot \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,0)\varphi\varphi} - d_{2,1} \cdot P_{2,0} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,0)\varphi\varphi} - d_{2,1} \cdot \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot P_{(2,0)\varphi}^2 - \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_2} \cdot P_{(2,0)\varphi} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{1,2} = \frac{\kappa_1^2}{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_1 \cdot P_{(1,1)t} - d_{1,0} \cdot \left(\frac{(\varphi_{\varphi}^2(\varphi_*^*, \psi, \eta) + \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta)) \cdot \varphi^2}{\kappa_1^2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times P_{(1,0)\varphi\varphi} - \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,1)\varphi\varphi} \right) - d_{1,1} \cdot P_{1,0} \cdot \left(\frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,1)\varphi\varphi} + \right. \\
& \left. - \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,0)\varphi\varphi} \right) - d_{1,1} \cdot P_{1,1} \cdot \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,0)\varphi\varphi} - d_{1,2} \cdot P_{1,0} \times \\
& \left. \times \frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1^2} \cdot P_{(1,0)\varphi\varphi} - d_{1,0} \cdot (b_{1,1}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot P_{(1,0)\psi\psi} + b_{1,2}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot P_{(1,0)\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \times P_{(1,0)\psi} + b_{2,2}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot P_{(1,0)\eta}) - d_{1,1} \cdot \left(\frac{\varphi^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)}{\kappa_1} - \frac{2 \cdot \varphi(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi}(\varphi_*^*, \psi, \eta) \cdot \varphi}{\kappa_1^2} \right) \cdot P_{(1,1)\varphi} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_{1,2} \cdot I_{1,0}^{\mathbb{R}} \cdot \frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_1^2} \cdot I_{(1,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} + \frac{2 \cdot \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{R}}{\kappa_1} \cdot I_{(1,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - \left(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \right. \\
& \left. + \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \frac{\mathbb{R}}{\kappa_1} \cdot I_{(1,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \Big), \quad \mathcal{Q}_{2,2} = \frac{\kappa_2^2}{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot I_{(2,1)t}^{\mathbb{R}} - d_{2,0} \cdot \left(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \cdot \frac{\mathbb{R}}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} + \frac{2 \cdot \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{R}}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \right) - \\
& -d_{2,1} \cdot I_{2,0}^{\mathbb{R}} \cdot \left(\frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} + \frac{2 \cdot \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{R}}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \right) - d_{2,1} \times \\
& \times I_{2,1}^{\mathbb{R}} \cdot \frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - d_{2,2} \cdot I_{2,0}^{\mathbb{R}} \cdot \frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \cdot I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - d_{2,0} \cdot \left(b_{1,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \times I_{(2,0)\psi\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} + b_{1,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot I_{(2,0)\eta\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} + b_{2,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot I_{(2,0)\psi}^{\mathbb{R}} + b_{2,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot I_{(2,0)\eta}^{\mathbb{R}} \Big) - d_{2,1} \times \\
& \times \left(\frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2} + \frac{2 \cdot \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{R}}{\kappa_2^2} \right) \cdot I_{(2,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - d_{2,2} \cdot I_{2,0}^{\mathbb{R}} \cdot \frac{\mathbb{V}^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_2^2} \times \\
& \times I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - \frac{2 \cdot \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathbb{R}}{\kappa_2} \cdot I_{(2,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - \left(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \mathbb{V}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \times \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\varphi^*, \psi, \eta) \Big) \cdot \frac{\mathbb{R}}{\kappa_2} \cdot I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \Big), \quad \dots, \quad \mathcal{Q}_{1,1} = d_{1,1} \cdot \left(c'_{(1,0)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(1,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right), \\
& \mathcal{Q}_{2,1} = d_{2,1} \cdot \left(c'_{(2,0)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(2,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right), \quad \mathcal{Q}_{1,2} = d_{1,1} \cdot \left(c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& + I_{1,0}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \Big) \cdot \left(c'_{(1,1)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(1,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right) + d_{1,1} \cdot \left(c_{1,1}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& + I_{1,1}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \Big) \cdot \left(c'_{(1,0)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(1,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right) + d_{1,2} \cdot \left(c_{1,0}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& + I_{1,0}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \Big)^2 \cdot \left(c'_{(1,0)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(1,0)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right), \quad \mathcal{Q}_{2,2} = d_{2,1} \cdot \left(c_{2,0}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& + I_{2,0}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \Big) \cdot \left(c'_{(2,1)\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) + I_{(2,1)\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}(0, \psi, \eta, t) \right) + d_{2,1} \cdot \left(c_{2,1}(0, \psi, \eta, t) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ I_{2,1}^{\Phi} (0, \psi, \eta, t) \cdot \left(c'_{(2,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + I_{(2,0)\Phi}^{\Phi} (0, \psi, \eta, t) \right) + d_{2,2} \cdot \left(c_{2,0} (0, \psi, \eta, t) + \right. \\ \left. + I_{2,0}^{\Phi} (0, \psi, \eta, t) \right)^2 \cdot \left(c'_{(2,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + I_{(2,0)\Phi}^{\Phi} (0, \psi, \eta, t) \right), \dots$$

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$I_{1,0}^{\Phi} (\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_1 \cdot c_{1,0} (0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,0} (0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_1 \cdot \Phi}{d_{1,0}}},$$

$$I_{2,0}^{\Phi} (\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,0)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_2 \cdot c_{2,0} (0, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c_{1,0} (0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{\frac{\kappa_2 \cdot \Phi}{d_{2,0}}},$$

$$I_{1,i}^{\Phi} (\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{1,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_1 \cdot \phi}{d_{1,0}}} \cdot \int_0^{\phi} q_{1,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1 \cdot \phi}{d_{1,0}}} d\phi \right) d\phi + (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \times$$

$$\times \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,i)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot c_{1,i} (0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \times \right.$$

$$\left. \times c_{2,i} (0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{2,i} (0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{1,i} (0, \psi, \eta, t) \right) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$I_{2,i}^{\Phi} (\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2 \cdot \phi}{d_{2,0}}} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2 \cdot \phi}{d_{2,0}}} d\phi \right) d\phi + (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \times$$

$$\times \left(d_{1,0} \cdot c'_{(1,i)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + d_{2,0} \cdot c'_{(2,i)\Phi} (0, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot c_{1,i} (0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \times \right.$$

$$\left. \times c_{2,i} (0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{2,i} (0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{1,i} (0, \psi, \eta, t) \right) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$I_{1,n+1}^{\Phi} (\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{1,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_1 \cdot \phi}{d_{1,0}}} \cdot \int_0^{\phi} q_{1,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1 \cdot \phi}{d_{1,0}}} d\phi \right) d\phi +$$

$$+ \frac{\mathcal{Q}_{2,n+1} (0, \psi, \eta, t) + \mathcal{Q}_{1,n+1} (0, \psi, \eta, t)}{\kappa_2 - \kappa_1},$$

$$P_{2,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,0}} \cdot \int_0^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \varphi} \left(\int_0^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \varphi} q_{2,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,0}} \varphi} d\varphi \right) d\varphi + \frac{q_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) + q_{1,n+1}(0, \psi, \eta, t)}{\kappa_2 - \kappa_1}.$$

Функції $P_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$), що є бічними поправками в околі $\psi=0$ в асимптотичному наближенні розв'язку сингулярно-збуреної задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.124), у випадку наявності додаткових джерел (крайова умова (3.22)) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\varphi}'' - \frac{\varphi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi}' = \sigma_s \cdot P_{(s,0)t}' \quad (s=1,2), \\ P_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,0}(\varphi, 0, \eta, t) = M_{s,0}(\varphi, \eta, t), \end{cases} \quad (3.152)$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,i)\varphi}'' - \frac{\varphi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i)\varphi}' = \sigma_s \cdot P_{(s,i)t}' - \\ - M_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t), P_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,i}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_{s,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s=1,2, i=\overline{1,2n+1}). \end{cases} \quad (3.153)$$

Тут $M_{1,i}(\varphi, \eta, t) = c_{1,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{1,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t)$, $M_{2,i}(\varphi, \eta, t) = c_{2,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{2,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i=\overline{0,2n+1}$), $M_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P_{(s,i-k)\varphi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot P_{(s,i-1-k)\psi}' + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,k} \cdot P_{(s,i-2-k)\eta\eta}'' + B_{2,2,k} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P_{(s,i-2-k)\eta}' \right) - \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)\varphi}' \right)$ ($s=1,2, i=\overline{1,2n+1}$), V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$ і $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\varphi^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi=0$.

У випадку відсутності додаткових джерел (перша з крайових умов (3.23)) функції $\overset{\frown}{P}_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)\psi\psi}'' - \frac{\psi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)t}, \\ \overset{\frown}{P}_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\frown}{P}'_{(s,0)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = -M_{s,0}(\varphi, \eta, t) \quad (s=1, 2), \end{cases} \quad (2.154)$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)\psi\psi}'' - \frac{\psi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)t} - \\ - M_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t); \overset{\frown}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\frown}{P}'_{(s,i)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_{s,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s=1, 2, i=\overline{1,2n+1}), \end{cases} \quad (2.155)$$

де $\overset{\frown}{M}_{1,i}(\varphi, \eta, t) = c'_{(1,i-1/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{(1,i-1/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t)$, $\overset{\frown}{M}_{2,i}(\varphi, \eta, t) = c'_{(2,i-1/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{(2,i-1/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{(2,i-1/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i=\overline{0,2n+1}$).

Для знаходження функцій $\overset{\frown}{P}_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$), що є примежовими поправками в околі $\psi=0$ в асимптотичних наближеннях розв'язків задачі (3.125), (3.17) – (3.30), (3.123), (3.126) при нелінійних інтегральній і многочленній залежностях коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин, у випадках як наявності, так і відсутності додаткових джерел (крайові умови (3.22) і (3.23)) отримаємо задачі (3.152), (3.153) і (3.154), (3.155) відпо-

$$\begin{aligned} \text{відно, де при інтегральній залежності: } M_{s,i} &= d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-k)\psi\psi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k} \times \right. \right. \\ &\times \overset{\frown}{P}'_{(s,i-1-k)\psi} + I(i, 2) \cdot \left. \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\eta\eta}'' + B_{2,2,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\eta} \right) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}'_{(s,i-k)\varphi} + I(i, 2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,l-k)\psi\psi}'' \cdot \int_0^t A_{s,m-l} \cdot \overset{\frown}{P}_{s,i-1-m} dt + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,l-k)\psi} \cdot \int_0^t \left(A_{(s,m-l)\psi} \cdot \overset{\frown}{P}_{s,i-2-m} + A_{s,m-l} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-m)\psi} \right) dt \right) + I(i, 3) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\Psi} \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^{\Psi} \cdot P_{s,i-1-m}^{\Psi} dt^{\Psi} + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P''_{(s,l-k)\Phi\Phi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{1,2,k} \cdot P''_{(s,l-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\eta} \right) \times \int_0^t A_{s,m-l}^{\Psi} \cdot P_{s,i-1-m}^{\Psi} dt^{\Psi} + \frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P'_{(s,i-2-k)\Phi} \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{\Psi} \cdot P_{(s,i-3-m)\Phi}^{\Psi} dt^{\Psi} + \int_0^t A_{(s,m-l)\Phi}^{\Psi} \cdot P_{s,i-3-m}^{\Psi} dt^{\Psi} \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{\Psi} \cdot P_{(s,i-3-m)\eta}^{\Psi} dt^{\Psi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t A_{(s,m-l)\eta}^{\Psi} \cdot P_{s,i-3-m}^{\Psi} dt^{\Psi} \right) \right) \quad (s=1,2, i=\overline{1,2n+1}), \quad P_k^{\Psi} = P_k^{\Psi}(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (k=\overline{0,2n+1}), \end{aligned}$$

$V_k, B_{1,1,k}, B_{1,2,k}, B_{2,1,k}, B_{2,2,k}, A_{s,m-l}^{\Psi}, A_{(s,m-l)\Phi}^{\Psi}, A_{(s,m-l)\Psi}^{\Psi}, A_{(s,m-l)\eta}^{\Psi}$ ($s=1,2$) – коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях $\sqrt{\varepsilon}$ у розкладі відповідно функцій $\vartheta_s^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta), b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta), b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta), b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta), b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta),$
 $\mathcal{A}_s^{\Psi}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta, t^{\Psi}), \mathcal{A}_{s\Phi}^{\Psi}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta, t^{\Psi}), \mathcal{A}_{s\Psi}^{\Psi}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta, t^{\Psi}), \mathcal{A}_{s\eta}^{\Psi}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta, t^{\Psi})$ ($s=1,2$) в ряд Тейлора в околі $\psi=0$, а при многочленній: $M_{s,1}^{\Psi} = -d_{s,0} \cdot (b'_{1,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \times$
 $\times P''_{(s,0)\Psi\Psi} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{(s,0)\Psi}) + \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_{\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\Phi}, M_{s,2}^{\Psi} = -d_{s,0} \times$
 $\times \left(\frac{\vartheta_s^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\Phi\Phi} + b'_{1,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot P'_{(s,1)\Psi\Psi} + \frac{b''_{1,1\Psi\Psi}(\varphi, 0, \eta)}{2} \cdot \Psi^2 \cdot P'_{(s,0)\Psi\Psi} + b_{1,2}(\varphi, 0, \eta) \times \right.$
 $\times P''_{(s,0)\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{(s,1)\Psi} + b'_{2,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot P'_{(s,0)\Psi} + b_{2,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P'_{(s,0)\eta} \left. \right) +$
 $+ \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_{\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,1)\Phi} + \frac{(\vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_{\Psi}(\varphi, 0, \eta) + \vartheta_{\Psi\Psi}(\varphi, 0, \eta)) \cdot \Psi^2}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\Phi}, \dots$
 $(s=1,2).$

Задачі для знаходження функцій $P'_{s,i}(\varphi, \Psi, \eta, t), P_{s,i}(\varphi, \psi, \Psi, t),$
 $P_{s,i}(\varphi, \psi, \Psi, t)$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) отримуються аналогічно.

3.2.2. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових сингулярно-збурених крайових задач конвективної дифузії для двозв'язних кусково-однорідних областей фільтрації

Для області $G = G_z^6 \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), G_z^6 – двозв'язна область, обмежена гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями S_* , S^* і двома поверхнями течії S_{**} , S^{**} та розділена деякою заданою поверхнею S_*^* на дві підобласті G_{z-}^6 і G_{z+}^6 (рис. 2.6), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої речовини у відповідному двошаровому водонасиченому пористому середовищі для випадків, коли коефіцієнт дифузії є сталим у кожному шарі: $D_s = \varepsilon \cdot d_{s,0}$ ($s = 1, 2$) і нелінійно залежить від величин концентрацій:

має інтегральну залежність – $D_s = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \varepsilon \cdot \int_0^t a(x, y, z, t) \cdot C(x, y, z, t) dt \right)$

($s = 1, 2$) або многочленну – $D_s = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_{s,k} \cdot C^k(x, y, z, t) \right)$ ($s = 1, 2$)

(див. п. 3.1.2, 2.1.3) [68]. Відповідні модельні задачі описується рівняннями (2.1), (3.1) з крайовими умовами (2.18), (3.77) – (3.85), початковою умовою (3.15) та умовами узгодженості на поверхні розділу (2.89) і наступною:

$$C \Big|_{S_{*-}}^* = C \Big|_{S_{*+}^*}^*, \quad D_1 \cdot C_n^t - v_n \cdot C \Big|_{S_{*-}}^* = D_2 \cdot C_n^t - v_n \cdot C \Big|_{S_{*+}^*}^*. \quad (3.156)$$

Аналогічно п. 3.1.5, шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (див. п. 2.2.2) задача (2.1), (3.1), (2.18), (3.77) – (3.85), (3.15), (2.89), (3.156) зводиться з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу Γ (2.39) до відшукування в області $\mathcal{G}^6 = \mathcal{G}_z^6 \times (0, \infty)$, де $\mathcal{G}_z^6 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (однозв'язна область $G_z^6 \setminus \Gamma$) – криволінійний паралелепіпед, обмежений двома екіпотенціальними поверхнями ABB_*A_* , CDD_*C_*

та чотирма поверхнями течії $ABCD$, $A_*B_*C_*D_*$, ADD_*A_* , BCC_*B_* які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, і розділений деякою заданою екіпотенціальною поверхнею EFF_*E_* на дві під області (рис. 2.6), розв'язку задачі, що описується рівняннями (2.1), (3.1) з умовами узгодженості на поверхні розділу (2.74) і (3.122), крайовими і початковою умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.6), (3.11) – (3.15) та подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу Γ із використанням умов (2.40) і узгодженості величин концентрацій забруднюючої речовини на “умовній поверхні розрізу” із використанням умов (3.87).

Вважаємо, що відповідна фільтраційна задача є розв'язаною (див. п. 2.2.5), зокрема, побудована гідродинамічна сітка для модельної області, знайдені значення параметрів φ_* , Q_* , Q^* , Q , розраховане поле швидкостей \mathbf{v} та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.122), (3.2) – (3.6), (3.11) – (3.15), (3.87) отримаємо відповідні “дифузійні задачі” для області $G_w \times (0, \infty)$. Відповідна задача у випадку сталих коефіцієнтів дифузії у кожному шарі описується рівнянням (3.16) з крайовими і початковою умовами (3.17) – (3.21), (3.26) – (3.30), умовами узгодженості на поверхні розділу (3.123), (3.124) і умовами узгодженості величин концентрацій на “умовній поверхні розрізу” (3.88). При нелінійних залежностях коефіцієнтів дифузії від концентрації рівняння (3.16) перепишеться у вигляді (3.125) і умова узгодженості на поверхні розділу (3.124) – у вигляді (3.126).

$$\text{Асимптотичне наближення розв'язків } c(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_1(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ c_2(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$$

отриманих задач з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ також шукатимемо у вигляді ряду (3.127), (3.128). При цьому отримаємо такі ж задачі, як і в п. 3.1.1, (3.129) – (3.134) для знаходження головної частини $c_{s,0}$ ($s=1,2$) розв'язку і поправок $c_{s,i}$ ($s=1,2$, $i=\overline{1,n}$), (3.135) – (3.145) – поправок на виході фільтраційної течії

$P_{2,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) в околі $\varphi = \varphi^*$, (3.146) – (3.151) – поправок на поверхні розділу $P_{1,i}^{\%}$ і $P_{2,i}^{\%}$ ($i = \overline{0, n+1}$) в околі $\varphi = \varphi_*^*$.

Функції $P_{s,i}^{\dagger}$ ($s = 1, 2, i = \overline{0, 2n+1}$), що є бічними поправками в околі $\eta = 0$ в асимптотичному наближенні розв'язку сингулярно-збуреної задачі (3.16), (3.17) – (3.21), (3.26) – (3.30), (3.123), (3.124), (3.88) у випадку наявності додаткових джерел (крайова умова (3.26)) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P_{(s,0)}^{\prime\prime} - \frac{\%(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi}^{\prime} = \sigma_s \cdot P_{(s,0)t}^{\prime} \quad (s = 1, 2), \\ P_{s,0}^{\prime}(\varphi, \psi, \%t) \rightarrow 0, P_{s,0}^{\prime}(\varphi, \psi, 0, t) = \%_{***}(\varphi, \psi, t) - M_{s,0}(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (3.157)$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P_{(s,i)}^{\prime\prime} - \frac{\%(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i)\varphi}^{\prime} = \sigma_s \cdot P_{(s,i)t}^{\prime} - \\ - M_{s,i}^{\%}(\varphi, \psi, \%t), P_{s,i}^{\prime}(\varphi, \psi, \%t) \rightarrow 0, P_{s,i}^{\prime}(\varphi, \psi, 0, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_{s,i}^{\prime}(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s = 1, 2, i = \overline{1, 2n+1}). \end{cases} \quad (3.158)$$

Тут $M_{1,i}^{\dagger}(\varphi, \psi, t) = c_{1,i-1/2}(\varphi, \psi, 0, t) + P_{1,i-1/2}^{\%}(\varphi, \psi, 0, t)$, $M_{2,i}^{\dagger}(\varphi, \psi, t) = c_{2,i-1/2}(\varphi, \psi, 0, t) + P_{2,i-1/2}^{\%}(\varphi, \psi, 0, t) + P_{2,i-1/2}(\varphi, \psi, 0, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $M_{s,i}^{\%} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,2,k} \cdot P_{(s,i-k)}^{\prime\prime} + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,2,k} \cdot P_{(s,i-1-k)}^{\prime\prime} + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-2-k)\varphi}^{\prime\prime} + B_{1,1,k} \cdot P_{(s,i-2-k)\psi\psi}^{\prime\prime} + B_{2,1,k} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P_{(s,i-2-k)\psi}^{\prime} \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)\varphi}^{\prime} \right)$ ($s = 1, 2, i = \overline{1, 2n+1}$), V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$ і $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\%(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\%)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\%)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\%)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\%)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\%)$ в ряд Тейлора в околі $\eta = 0$.

У випадку відсутності додаткових джерел (перша з крайових умов (3.27)) функції $\overset{\frown}{P}_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)\varphi\psi}'' - \frac{\overset{\frown}{V}_k^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)\varphi} = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,0)t} \quad (s=1,2), \\ \overset{\frown}{P}_{s,0}(\varphi, \psi, \overset{\frown}{V}_k t) \rightarrow 0, \overset{\frown}{P}_{(s,0)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t) = -\overset{\frown}{M}_{s,0}(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (3.159)$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)\varphi\psi}'' - \frac{\overset{\frown}{V}_k^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)\varphi} = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i)t} - \\ -\overset{\frown}{M}_{s,i}(\varphi, \psi, \overset{\frown}{V}_k t), \overset{\frown}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \overset{\frown}{V}_k t) \rightarrow 0, \overset{\frown}{P}_{(s,i)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -\overset{\frown}{M}_{s,i}(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s=1,2, i=\overline{1,2n+1}), \end{cases} \quad (3.160)$$

де $\overset{\frown}{M}_{1,i}(\varphi, \psi, t) = c'_{(1,i-1/2)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t) + \overset{\frown}{P}_{(1,i-1/2)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t)$, $\overset{\frown}{M}_{2,i}(\varphi, \psi, t) = c'_{(2,i-1/2)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t) + \overset{\frown}{P}_{(2,i-1/2)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t) + P'_{(2,i-1/2)\varphi}(\varphi, \psi, 0, t)$ ($i=\overline{0,2n+1}$).

Для знаходження примежових поправок $\overset{\frown}{P}_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) в околі $\eta=0$ асимптотичного наближення розв'язку задачі (3.125), (3.17) – (3.21), (3.26) – (3.30), (3.123), (3.126), (3.88) при інтегральній та многочленній залежностях коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин, у випадках як наявності, так і відсутності додаткових джерел (крайові умови (3.26) і (3.27)) отримаємо задачі (3.157), (3.158) і (3.159), (3.160) відповідно,

$$\begin{aligned} \text{де при інтегральній залежності: } \overset{\frown}{M}_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i \overset{\frown}{B}_{1,2,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-k)\varphi\psi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\overset{\frown}{B}_{2,2,k} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \overset{\frown}{P}_{(s,i-1-k)\varphi} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\overset{\frown}{V}_k}{\kappa_s^2} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}'' + \overset{\frown}{B}_{1,1,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\varphi\psi\psi}'' + \overset{\frown}{B}_{2,1,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-2-k)\psi} \right) \right) + \\ + \sum_{k=1}^i \frac{\overset{\frown}{V}_k}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,i-k)\varphi} + I(i,2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \overset{\frown}{B}_{1,2,k} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,l-k)\varphi\psi}'' \cdot \int_0^t \overset{\frown}{A}_{s,m-l} \cdot \overset{\frown}{P}_{s,i-1-m} dt \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi} \cdot \int_0^t \left(A_{(s,m-l)\varphi} \cdot P_{s,i-2-m} + A_{s,m-l} \cdot P_{(s,i-2-m)\varphi} \right) dt \right) + I(i,3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi} \cdot \int_0^t A_{s,m-l} \cdot P_{s,i-1-m} dt + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P''_{(s,l-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. B_{1,1,k} \cdot P''_{(s,l-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(s,l-k)\psi} \right) \times \int_0^t A_{s,m-l} \cdot P_{s,i-1-m} dt + \frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P'_{(s,i-2-k)\varphi} \times \right. \\
& \times \left. \left(\int_0^t A_{s,m-l} \cdot P_{(s,i-3-m)\varphi} dt + \int_0^t A_{(s,m-l)\varphi} \cdot P_{s,i-3-m} dt \right) + B_{2,1,k} \cdot P'_{(s,l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l} \cdot P_{(s,i-3-m)\eta} dt + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t A_{(s,m-l)\eta} \cdot P_{s,i-3-m} dt \right) \right) \quad (s=1,2, \quad i=\overline{1,2n+1}), \quad P'_k = P'_k(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (k=\overline{0,2n+1}),
\end{aligned}$$

$V_k, B_{1,1,k}, B_{1,2,k}, B_{2,1,k}, B_{2,2,k}, A_{s,m-l}, A_{(s,m-l)\varphi}, A_{(s,m-l)\psi}, A_{(s,m-l)\eta}$ ($s=1,2$) –

коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях $\sqrt{\varepsilon}$ у розкладі відповідно функцій $\vartheta_k^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$,

$\alpha_{s\varphi}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $\alpha_{s\varphi\varphi}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $\alpha_{s\psi}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$, $\alpha_{s\eta}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}t)$ ($s=1,2$) в

ряд Тейлора в околі $\eta=0$, а при многочленній залежності: $M_{s,1}^{\varphi} = -d_{s,0} \times$

$$\times \left(b'_{1,2\varphi}(\varphi, \psi, 0) \cdot P''_{(s,0)\varphi\varphi} + b_{2,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P'_{(s,0)\varphi} \right) + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi, \psi, 0) \cdot \vartheta_0(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\varphi},$$

$$M_{s,2}^{\varphi} = -d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot P''_{(s,0)\varphi\varphi} + b'_{1,2\varphi}(\varphi, \psi, 0) \cdot P''_{(s,1)\varphi\varphi} + \frac{b''_{1,2\varphi\varphi}(\varphi, \psi, 0)}{2} \cdot \vartheta_0^2 \times \right.$$

$$\times P''_{(s,0)\varphi\varphi} + b_{1,1}(\varphi, \psi, 0) \cdot P''_{(s,0)\psi\psi} + b_{2,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot P'_{(s,1)\varphi} + b'_{2,2\varphi}(\varphi, \psi, 0) \cdot P'_{(s,0)\varphi} + b_{2,1}(\varphi, \psi, 0) \times$$

$$\times \left. P'_{(s,0)\psi} \right) + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi, \psi, 0) \cdot \vartheta_0(\varphi, \psi, 0)}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,1)\varphi} + \frac{(\vartheta_0(\varphi, \psi, 0) \cdot \vartheta_0(\varphi, \psi, 0) + \vartheta''_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, 0))}{\kappa_s} \times$$

$$\times \vartheta_0^2 \cdot P'_{0\varphi}, \dots \quad (s=1,2).$$

Задачі для знаходження функцій $P'_{s,i}$ ($s=1,2, \quad i=\overline{0,2n+1}$) отримуються аналогічно.

Для знаходження функцій $\overset{\circ}{P}_{s,i}, \overset{\circ}{P}_{s,i}$ ($s=1,2, i=\overline{0,2n+1}$) отримаємо такі

задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)\psi}'' - \frac{\overset{\circ}{V}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)t}', \\ d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)\psi}'' - \frac{\overset{\circ}{V}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,0)t}', \\ \overset{\circ}{P}_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\circ}{P}_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0 (s=1,2), c_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \\ + \overset{\circ}{P}_{1,0}|_{\psi=0} = c_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0} + \overset{\circ}{P}_{1,0}|_{\psi=0}, c_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \\ + \overset{\circ}{P}_{2,0}|_{\psi=0} = c_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0} + \overset{\circ}{P}_{2,0}|_{\psi=0}, c'_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(1,0)\psi} + \\ + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi}|_{\psi=0} = c'_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi} + \\ + \overset{\circ}{P}'_{(1,0)\psi}|_{\psi=0}, c'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi}|_{\psi=0} = \\ = c'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,0)\psi}|_{\psi=0}, \\ d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)\psi}'' - \frac{\overset{\circ}{V}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)t}' - M_{s,i}, \\ d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)\psi}'' - \frac{\overset{\circ}{V}_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i)t}' - M_{s,i}, \\ \overset{\circ}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \overset{\circ}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0 (s=1,2), c_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \\ + \overset{\circ}{P}_i|_{\psi=0} = c_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \overset{\circ}{P}_i|_{\psi=0}, c_{2,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{2,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{2,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{2,i} + \\ + \overset{\circ}{P}_{2,i} + \overset{\circ}{P}_2|_{\psi=0} = c_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i-i/2} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \overset{\circ}{P}_{1,i} + \overset{\circ}{P}_i|_{\psi=0}, c'_{(1,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(1,i-i/2)\psi} + \\ + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi}|_{\psi=0} = c'_{(1,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(1,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(1,i)\psi}|_{\psi=0}, \\ c'_{(2,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(2,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi}|_{\psi=0} = c'_{(2,i-i/2)\psi} + \\ + \overset{\circ}{P}'_{(2,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}_{(2,i-i/2)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi} + \overset{\circ}{P}'_{(2,i)\psi}|_{\psi=0} (i=\overline{1,2n+1}). \end{array} \right.$$

У цих задачах при сталих коефіцієнтах дифузії в обох підобластях:

$$M_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i-k)\psi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i-1-k)\psi}' + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\overset{\circ}{V}_k}{\kappa_s^2} \cdot \overset{\circ}{P}_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}'' + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \left(\sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi} + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-k)\eta} \right) \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi}, M_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi} + \right. \\
& + \left. \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k} \cdot P'_{(s,i-1-k)\varphi} + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P'_{(s,i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,i-2-k)\eta} \right) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi} \quad (s=1,2, i=\overline{1,2n+1}), \text{ де } V_k, B_{1,1,k}, B_{1,2,k}, B_{2,1,k} \text{ і } B_{2,2,k} - \text{ кое-}
\end{aligned}$$

фіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\mathcal{V}^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, а $\hat{V}_k, \hat{B}_{1,1,k}, \hat{B}_{1,2,k}, \hat{B}_{2,1,k}$ і $\hat{B}_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\mathcal{V}^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$, у випадку інтегральних залежностей коефіцієнтів дифузії від

$$\begin{aligned}
& \text{концентрацій у обох підобластях: } M_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. P'_{(s,i-1-k)\varphi} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P'_{(s,i-2-k)\varphi\varphi} + B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,i-2-k)\eta} \right) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-k)\varphi} + I(i,2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi} \cdot \int_0^t A_{s,m-l} \cdot P'_{s,i-1-m} dt + \right. \\
& + \left. \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi} \cdot \int_0^t \left(A_{(s,m-l)\varphi} \cdot P'_{s,i-2-m} + A_{s,m-l} \cdot P'_{(s,i-2-m)\varphi} \right) dt \right) + I(i,3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi} \cdot \int_0^t A_{s,m-l} \cdot P'_{s,i-1-m} dt + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P'_{(s,l-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\
& + \left. \left. B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\eta} \right) \times \int_0^t A_{s,m-l} \cdot P'_{s,i-1-m} dt + \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i-2-k)\varphi} \times \right. \\
& \times \left. \left(\int_0^t A_{s,m-l} \cdot P'_{(s,i-3-m)\varphi} dt + \int_0^t A_{(s,m-l)\varphi} \cdot P'_{s,i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(s,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l} \cdot P'_{(s,i-3-m)\eta} dt + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t A_{(s,m-l)\eta}^{(s)} \cdot P_{s,i-3-m}^{(s)} dt^{(s)} \Big) \Big), M_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k} \cdot P_{(s,i-k)\varphi\varphi}^{(s)} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k} \times \right. \right. \\
& \times P_{(s,i-1-k)\varphi}^{(s)} + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}^{(s)} + B_{1,2,k} \cdot P_{(s,i-2-k)\eta\eta}^{(s)} + B_{2,2,k} \cdot P_{(s,i-2-k)\eta}^{(s)} \right) \Big) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{V_k}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)\varphi}^{(s)} + I(i,2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k} \cdot P_{(s,l-k)\varphi\varphi}^{(s)} \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{s,i-1-m}^{(s)} dt^{(s)} + \right. \\
& + \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k} \cdot P_{(s,l-k)\varphi}^{(s)} \cdot \int_0^t \left(A_{(s,m-l)\varphi}^{(s)} \cdot P_{s,i-2-m}^{(s)} + A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{(s,i-2-m)\varphi}^{(s)} \right) dt^{(s)} \Big) + I(i,3) \times \\
& \times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k} \cdot P_{(s,l-k)\varphi}^{(s)} \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{s,i-1-m}^{(s)} dt^{(s)} + I(i,4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,l-k)\varphi\varphi}^{(s)} + \right. \right. \\
& + B_{1,2,k} \cdot P_{(s,l-k)\eta\eta}^{(s)} + B_{2,2,k} \cdot P_{(s,l-k)\eta}^{(s)} \Big) \times \int_0^t A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{s,i-1-m}^{(s)} dt^{(s)} + \frac{V_k}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)\varphi}^{(s)} \times \\
& \times \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{(s,i-3-m)\varphi}^{(s)} dt^{(s)} + \int_0^t A_{(s,m-l)\varphi}^{(s)} \cdot P_{s,i-3-m}^{(s)} dt^{(s)} \right) + B_{1,2,k} \cdot P_{(s,l-k)\eta}^{(s)} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{(s)} \cdot P_{(s,i-3-m)\eta}^{(s)} dt^{(s)} + \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t A_{(s,m-l)\eta}^{(s)} \cdot P_{s,i-3-m}^{(s)} dt^{(s)} \right) \right) \Big) (s=1,2, i=\overline{1,2n+1}), \text{ де } V_k, \hat{B}_{1,1,k}, \hat{B}_{1,2,k}, \hat{B}_{2,1,k} \text{ і } \hat{B}_{2,2,k} -
\end{aligned}$$

коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в

ряд Тейлора в околі $\psi=0$, а $\hat{V}_k, \hat{B}_{1,1,k}, \hat{B}_{1,2,k}, \hat{B}_{2,1,k}$ і $\hat{B}_{2,2,k}$ – коефіцієнти при

k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$,

$b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$

в ряд Тейлора в околі $\psi=Q_*$, а при многочленних: $M_{s,1} = -d_{s,0} \times$

$$\times \left(b'_{1,1\varphi}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\varphi\varphi}^{(s)} + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\varphi}^{(s)} + \frac{2 \cdot \vartheta(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_{\varphi}(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi}^{(s)} \right),$$

$$\begin{aligned}
M_{s,2} = & -d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi\varphi}'' + b'_{1,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \cdot P_{(s,1)\psi\psi}'' + \frac{b''_{1,1\psi\psi}(\varphi, 0, \eta)}{2} \cdot \psi^2 \cdot P_{(s,0)\psi\psi}'' + \right. \\
& \left. + b_{1,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta\eta}' + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,1)\psi}' + b'_{2,1\psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \psi \cdot P_{(s,0)\psi}' + b_{2,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta}' \right) + \\
& + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \psi \cdot P_{(s,1)\varphi}' + \frac{(\vartheta_0(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi, 0, \eta) + \vartheta_{0\psi}(\varphi, 0, \eta))}{\kappa_s} \cdot \psi^2 \cdot P_{(s,0)\varphi}', \dots, \\
M_{s,1} = & -d_{s,0} \cdot \left(b'_{1,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P_{(s,0)\psi\psi}'' + b_{2,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P_{(s,0)\psi}' \right) + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi, 0, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \times \\
& \times \psi \cdot P_{(s,0)\varphi}', \quad M_{s,2} = -d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi\varphi}'' + b'_{1,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P_{(s,1)\psi\psi}'' + \right. \\
& + \frac{b''_{1,1\psi\psi}(\varphi, Q_*, \eta)}{2} \cdot \psi^2 \cdot P_{(s,0)\psi\psi}'' + b_{1,2}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta\eta}' + b_{2,1}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P_{(s,1)\psi}' + \\
& \left. + b'_{2,1\psi}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \psi \cdot P_{(s,0)\psi}' + b_{2,2}(\varphi, Q_*, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta}' \right) + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi, Q_*, \eta)}{\kappa_s} \times \\
& \times \psi \cdot P_{(s,1)\varphi}' + \frac{(\vartheta_0(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \vartheta_0(\varphi, Q_*, \eta) + \vartheta_{0\psi}(\varphi, Q_*, \eta))}{\kappa_s} \cdot \psi^2 \cdot P_{(s,0)\varphi}', \dots \quad (s = 1, 2).
\end{aligned}$$

3.2.3. Дослідження просторових процесів поширення багатокомпонентних забруднюючих речовин фільтраційною течією у двошарових кусково-однорідних пористих середовищах

Дослідимо процес поширення багатокомпонентної забруднюючої речовини у недеформівному водонасиченому пористому середовищі, яке характеризується коефіцієнтами фільтрації $\kappa =$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y, z) \in G_{z^-}^5, \\ \kappa_2, & (x, y, z) \in G_{z^+}^5, \end{cases} \quad \text{активної пористості } \sigma = \begin{cases} \sigma_1, & (x, y, z) \in G_{z^-}^5, \\ \sigma_2, & (x, y, z) \in G_{z^+}^5 \end{cases} \quad \text{і дифузії } D_j = \begin{cases} D_{1,j} = d_{1,j,0} \cdot \varepsilon, & (x, y, z) \in G_{z^-}^5, \\ D_{2,j} = d_{2,j,0} \cdot \varepsilon, & (x, y, z) \in G_{z^+}^5, \end{cases} \quad \text{де } \kappa_s,$$

$\sigma_s, d_{s,j,0}$ – деякі додатні дійсні числа ($s=1,2, j=\overline{1,m}$), при чому $0 < \sigma_s < 1$

($s=1,2$), ε – малий параметр і коефіцієнтами $a_{j,k} = \begin{cases} a_{1,j,k}, & (x,y,z) \in G_{z^-}^5, \\ a_{2,j,k}, & (x,y,z) \in G_{z^+}^5, \end{cases}$, які

характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами забруднюючої речовини у фільтраційному розчині,

$a_{s,j,k} = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{s,j,k}(x,y,z,t), & j \neq k, \\ 0, & j = k \end{cases}$ ($s=1,2, j=\overline{1,m}, k=\overline{1,m}$). Відповідна моде-

льна задача в області $G_z^5 \times (0, \infty)$, де $G_z^5 = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – криволінійний паралелепіпед, що розділений еквіпотенціальною поверхнею EFF_*E_* на дві підобласті $G_{z^-}^5 = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{z^+}^5 = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 2.5 а), описується системою рівнянь (2.1), (3.89) з крайовими умовами (2.2) – (2.4), (3.90) – (3.102), початковими умовами (3.103), умовами узгодженості на поверхні розділу EFF_*E_* (2.74) і наступними:

$$\begin{aligned} C_j \Big|_{EFF_*E_{*-}} &= C_j \Big|_{EFF_*E_{*+}}, \\ D_{1,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_n \cdot C_j \Big|_{EFF_*E_{*-}} &= D_{2,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_n \cdot C_j \Big|_{EFF_*E_{*+}}, \end{aligned} \quad (3.161)$$

де v_n – нормальна складова швидкості на поверхні розділу EFF_*E_* .

Аналогічно п. 3.2.1 припустивши, що фільтраційна задача (2.1), (2.2) – (2.4), (2.74) є розв'язаною (див. п. 2.2.1), та здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівняннях (3.89) та умовах (3.90) – (3.103), (3.161), отримано відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується системою рівнянь (3.104) з крайовими умовами (3.105) – (3.117), початковими умовами (3.118) і умовами узгодженості на поверхні EFF_*E_* розділу підобластей:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^-} c_j &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^+} c_j, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^-} (D_{1,j} \cdot c'_{j\varphi} - \kappa_1 \cdot c_j) &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_*^+} (D_{2,j} \cdot c'_{j\varphi} - \kappa_2 \cdot c_j) \quad (j = \overline{1,m}). \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\text{Асимптотичне наближення розв'язку } c_j = \begin{cases} c_{1,j}(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ c_{2,j}(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$$

($j = \overline{1, m}$) задачі (3.104), (3.105) – (3.118), (3.162) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукати-
 мемо у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_{1,j} = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{1,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \overset{\circ}{P}_{1,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{1,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{1,j,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{1,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{1,j,i} + R_{1,j,n+1}, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} c_{2,j} = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{2,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \overset{\circ}{P}_{2,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot P_{2,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{2,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{2,j,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{2,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \overset{\circ}{P}_{2,j,i} + R_{2,j,n+1}, \end{aligned} \quad (3.164)$$

де $c_{s,j,i} = c_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = 1, 2, j = \overline{1, m}, i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин
 асимптотик, $\overset{\circ}{P}_{1,j,i} = \overset{\circ}{P}_{1,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$, $\overset{\circ}{P}_{2,j,i} = \overset{\circ}{P}_{2,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{0, n+1}$) –
 функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi_*^*$ (поправки в околі поверхні
 розділу підобластей G_{w^-} і G_{w^+} області G_w), $P_{2,j,i} = P_{2,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$ ($j = \overline{1, m},$
 $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на ви-
 ході фільтраційної течії), $\overset{\circ}{P}_{s,j,i} = \overset{\circ}{P}_{s,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$, $\overset{\circ}{P}_{s,j,i} = \overset{\circ}{P}_{s,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$,
 $\overset{\circ}{P}_{s,j,i} = \overset{\circ}{P}_{s,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$, $\overset{\circ}{P}_{s,j,i} = \overset{\circ}{P}_{s,j,i}(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\eta}, t)$ ($s = 1, 2, j = \overline{1, m}, i = \overline{0, 2n+1}$) –
 функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$,
 $\eta = Q^*$ (поправки на бічних гранях модельної області), $\overset{\circ}{\varphi} = \frac{\varphi_*^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{\psi - \psi_*}{\varepsilon}$,
 $\overset{\circ}{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляри-
 зуючі перетворення (розтяги), $R_{s,j,n+1} = R_{s,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = 1, 2, j = \overline{1, m}$) –
 залишкові члени (їх оцінка встановлюється аналогічно п. 3.1.1).

У результаті підстановки (3.163), (3.164) в (3.104), (3.105) – (3.118), (3.162) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження головних частин $c_{s,j,0}$ ($s=1,2$, $j=\overline{1,m}$) розв'язку і поправок $c_{s,j,i}$ ($s=1,2$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$) при крайових умовах (3.105) одержимо наступні задачі:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{P}_0^2(\varphi, \psi, \eta)}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,j,0)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \sigma_1 \cdot c'_{(1,j,0)t}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_{1,j,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \mathcal{P}_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{1,j,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \mathcal{P}_0^*(\varphi, \psi, \eta, t) (j = \overline{1,m}), \end{cases} \quad (3.165)$$

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{P}_0^2(\varphi, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,j,0)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \sigma_2 \cdot c'_{(2,j,0)t}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_{2,j,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \mathcal{P}_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{2,j,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,j,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) (j = \overline{1,m}), \end{cases} \quad (3.166)$$

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{P}_0^2(\varphi, \psi, \eta)}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,j,i)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \sigma_1 \cdot c'_{(1,j,i)t}(\varphi, \psi, \eta, t) = g_{1,j,i}, \\ c_{1,j,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{1,j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{P}_0^2(\varphi, \psi, \eta)}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,j,i)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \sigma_2 \cdot c'_{(2,j,i)t}(\varphi, \psi, \eta, t) = g_{2,j,i}, \\ c_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{2,j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) (j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}), \end{cases}$$

де $g_{s,j,i} = d_{s,j,0} \cdot \left(\frac{\mathcal{P}_0^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,j,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,j,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,j,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(s,j,i-1)\psi} + \right.$
 $\left. + b_{2,2} \cdot c'_{(s,j,i-1)\eta} \right) + \sum_{k=1}^m \mathcal{P}_{s,j,k} \cdot c_{s,j,i-1} - \sum_{k=1}^m \mathcal{P}_{s,k,j} \cdot c_{s,k,i-1} \quad (s=1,2, j=\overline{1,m}, i=\overline{1,n}).$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{1,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \mathcal{P}_0^*(\psi, \eta, t - f_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathcal{P}_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{2,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_{1,j,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t - f_2(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathcal{P}_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{1,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{1,j,i}(\varphi, \psi, \eta, f_1(\varphi, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta_1^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi, & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_0^t g_{1,j,i}(f_1^{-1}(t + f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_2} \cdot \int_0^t g_{2,j,i}(f_2^{-1}(t + f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$h_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_2 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, f_2(\varphi, \psi, \eta) + t - f_2(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta_2^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + c_{1,j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t),$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, $f_1(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_1 \cdot \sigma_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{\vartheta_1^2(s, \psi, \eta)}$, $f_2(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_2 \cdot \sigma_2 \times$

$\times \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{\vartheta_2^2(s, \psi, \eta)}$, f_s^{-1} ($s = 1, 2$) – функції, обернені до f_s ($s = 1, 2$) відносно змін-

ної φ .

При умові, що на ділянці входу задана умова (3.106), для знаходження головних частин $c_{s,j,0}$ ($s = 1, 2$, $j = \overline{1, m}$) розв'язку отримаємо задачі (3.165), (3.166), а для знаходження поправок $c_{s,j,i}$ ($s = 1, 2$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,j,i)\varphi} + \sigma_s \cdot c'_{(s,j,i)t} = g_{s,j,i}; c_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \\ d_{s,j,0} \cdot c'_{(s,j,i-1)\varphi}(\varphi_*, \psi, \eta, t) - \kappa_s \cdot c_{s,j,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (s = 1, 2, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}). \end{cases}$$

У результаті розв'язання цих задач отримаємо:

$$c_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_s(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_s} \cdot \int_0^t g_{s,j,i}(f_s^{-1}(t + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_s(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } h_{1,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \kappa_1 \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{1,j,i}(\varphi, \psi, \eta, f_1(\varphi, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + d_{1,j,0} \times \\ &\times c'_{(1,j,i-1)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad h_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_2 \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, f_2(\varphi, \psi, \eta) + t - f_2(\varphi, \psi, \eta))}{\vartheta^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + \\ &+ d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,i-1)\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (s=1, 2, \quad j=\overline{1, m}, \quad i=\overline{1, n}). \end{aligned}$$

Для знаходження примежових функцій $P_{2,j,i}$ ($j=\overline{1, m}, \quad i=\overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ для випадку крайових умов (3.107) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,0)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,0)\varphi} = 0; \quad P_{2,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t) = \mathcal{D}_j^*(\psi, \eta, t) - c_{2,j,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (j=\overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,j,i} \cdot P''_{(2,j,i)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,i)\varphi} = q_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t); \quad P_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t) = -c_{2,j,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (j=\overline{1, m}, \quad i=\overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,n+1)\varphi\varphi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,n+1)\varphi} = q_{2,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t); \\ P_{2,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,j,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j=\overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } q_{2,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \frac{\kappa_2^2}{\vartheta^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P'_{(2,j,i-1)t} - \sum_{l=1}^i \left(d_{2,j,0} \cdot \frac{V_l}{\kappa_2} \cdot P''_{(2,j,i-l)\varphi\varphi} + \frac{V_l}{\kappa_2} \times \right. \right. \\ &\times P'_{(2,j,i-l)\varphi} \left. \right) - I(i, 2) \cdot d_{2,j,0} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1,1,l} \cdot P''_{(2,j,i-2-l)\varphi\psi} + B_{2,1,l} \cdot P'_{(2,j,i-2-l)\psi} + B_{1,2,l} \cdot P''_{(2,j,i-2-l)\eta\eta} + \right. \\ &\left. + B_{2,2,l} \cdot P'_{(2,j,i-2-l)\eta} \right) + I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{2,j,k,l} \cdot c_{2,j,i-2-l} - I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{2,k,j,l} \cdot c_{2,k,i-2-l} \end{aligned}$$

($j=\overline{1, m}, \quad i=\overline{1, n+1}$), $V_l, B_{1,1,l}, B_{1,2,l}, B_{2,1,l}, B_{2,2,l}, A_{j,k,l}$ ($j=\overline{1, m}, \quad k=\overline{1, m}$) – коефіцієнти при l -тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\vartheta^2(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta), \mathcal{D}_{j,k}(\varphi^* - \varepsilon\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j=\overline{1, m}, \quad k=\overline{1, m}$) в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{2,j,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{2,j,0}}{\kappa_2} \left(\Phi^* (\psi, \eta, t) - c_{2,j,0}(\Phi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \Phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{2,j,i}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi -$$

$$-c_{2,j,i}(\Phi^*, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

У випадку задання в околі ділянки виходу фільтраційної течії крайових умов (3.108), для знаходження прилежових функцій $P_{2,j,i}(\Phi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) одержимо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,0)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,0)\Phi} = 0; P_{2,j,0}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ P'_{(2,j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,i)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,i)\Phi} = q_{2,j,i}(\Phi, \psi, \eta, t); P_{2,j,i}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ P'_{(2,j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,n+1)\Phi} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,n+1)\Phi} = q_{2,j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t); \\ P_{2,j,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,j,n+1)\Phi}(0, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Результатом ж їх послідовного розв'язання є:

$$P_{2,j,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{2,j,0}}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,j,0)\Phi}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \Phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{2,j,i}(\Phi, \psi, \eta, t) = \int_0^{\Phi} \left(\frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi - \right.$$

$$\left. -c'_{(2,j,i)\Phi}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (крайова умова (3.109)), то для знаходження функцій $P_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,0)}(\phi, \psi, \eta, t) = 0; P_{2,j,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,j,0} \cdot (c'_{(2,j,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(2,j,0)}(\phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,j,0}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{2,j,0}(\phi, \psi, \eta, t) - c_j^*(\psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,j,0} \cdot P''_{(2,j,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P'_{(2,j,i)}(\phi, \psi, \eta, t) = q_{2,j,i}; P_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{2,j,0} \cdot (c'_{(2,j,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(2,j,i)}(\phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) + P_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{j,0} \cdot P''_{(j,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P'_{(j,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) = q_{j,n+1}; P_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{j,0} \cdot P'_{(j,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa \cdot P_{j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$P_{2,j,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot \kappa_2} \cdot (\kappa_2 \cdot c_j^*(\psi, \eta, t) - d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,0)}(\phi, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,0}(\phi, \psi, \eta, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d_{2,j,0}} \phi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi - d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,i)}(\phi, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).$$

Для знаходження функцій $P_{1,j,i}(\phi_1, \psi, \eta, t)$, $P_{2,j,i}(\phi_2, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) отримаємо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,j,0} \cdot P_{(1,j,0)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P_{(1,j,0)\phi_1} = 0, \quad d_{2,j,0} \cdot P_{(2,j,0)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P_{(2,j,0)\phi_2} = 0; \\ P_{1,j,0}(\phi_1, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_1 \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,j,0}(\phi_2, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_2 \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,j,0}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,j,0} \cdot (c'_{(1,j,0)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + P_{(1,j,0)\phi_1}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,j,0}(0, \psi, \eta, t) + \\ + P_{1,j,0}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{2,j,0} \cdot (c'_{(2,j,0)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + P_{(2,j,0)\phi_2}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t)) \quad (j = \overline{1, m}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,j,0} \cdot P_{(1,j,i)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P_{(1,j,i)\phi_1} = q_{1,j,i}, \quad d_{2,j,0} \cdot P_{(2,j,i)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P_{(2,j,i)\phi_2} = \\ = q_{2,j,i}; \quad P_{1,j,i}(\phi_1, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_1 \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,j,i}(\phi_2, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_2 \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,j,i}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,j,0} \cdot (c'_{(1,j,i)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + P_{(1,j,i)\phi_1}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,j,i}(0, \psi, \eta, t) + \\ + P_{1,j,i}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{2,j,0} \cdot (c'_{(2,j,i)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + P_{(2,j,i)\phi_2}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_2 \cdot (c_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t)) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,j,0} \cdot P_{(1,j,n+1)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P_{(1,j,n+1)\phi_1} = q_{1,j,n+1}, \\ d_{2,j,0} \cdot P_{(2,j,n+1)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P_{(2,j,n+1)\phi_2} = q_{2,j,n+1}; \\ P_{1,j,n+1}(\phi_1, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_1 \rightarrow \infty} 0, \quad P_{2,j,n+1}(\phi_2, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_2 \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1,j,n+1}(0, \psi, \eta, t) = P_{2,j,n+1}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{1,j,0} \cdot P_{(1,j,n+1)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot P_{1,j,n+1}(0, \psi, \eta, t) = \\ = -d_{2,j,0} \cdot P_{(2,j,n+1)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot P_{2,j,n+1}(0, \psi, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}), \end{array} \right.$$

$$\text{де } q_{1,j,i} = \frac{\kappa_1^2}{\psi_0^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_1 \cdot P_{(1,j,i-1)t} - \sum_{l=1}^i \left(d_{1,j,0} \cdot \frac{\psi_{1,l}}{\kappa_1^2} \cdot P_{(2,j,i-l)\phi_1\phi_1} + \frac{\psi_{1,l}}{\kappa_1} \cdot P_{(1,j,i-l)\phi_1} \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -I(i,2) \cdot d_{1,j,0} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1,1,1,l}^{\%} \cdot P_{(1,j,i-2-l)\psi\psi}^{\%} + B_{2,1,1,l}^{\%} \cdot P_{(1,j,i-2-l)\psi}^{\%} + B_{1,2,1,l}^{\%} \cdot P_{(1,j,i-2-l)\eta\eta}^{\%} + \right. \\
& \left. + B_{2,2,1,l}^{\%} \cdot P_{(1,j,i-2-l)\eta}^{\%} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{1,j,k,l}^{\%} \cdot c_{1,j,i-2-l} - I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{1,k,j,l}^{\%} \cdot c_{1,k,i-2-l} \Bigg) \\
q_{2,j,i} = & \frac{\kappa_2^2}{\mathcal{P}_{\%}^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P_{(2,j,i-1)t}^{\%} - \sum_{l=1}^i \left(d_{2,j,0} \cdot \frac{V_{2,l}^{\%}}{\kappa_2^2} \cdot P_{(2,j,i-l)\phi_2\phi_2}^{\%} - \frac{V_{2,l}^{\%}}{\kappa_2} \cdot P_{(2,j,i-l)\phi_2}^{\%} \right) - \right. \\
& \left. - I(i,2) \cdot d_{2,j,0} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1,1,2,l}^{\%} \cdot P_{(2,j,i-2-l)\psi\psi}^{\%} + B_{2,1,2,l}^{\%} \cdot P_{(2,j,i-2-l)\psi}^{\%} + B_{1,2,2,l}^{\%} \cdot P_{(2,i-2-l)\eta\eta}^{\%} + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{2,2,2,l}^{\%} \cdot P_{(2,j,i-2-l)\eta}^{\%} \right) + I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{2,j,k,l}^{\%} \cdot c_{2,j,i-2-l} - I(i,2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{2,k,j,l}^{\%} \cdot c_{2,k,i-2-l} \right) \\
& (i = \overline{1, n+1}), \quad V_{s,l}^{\%}, \quad B_{1,1,s,l}^{\%}, \quad B_{1,2,s,l}^{\%}, \quad B_{2,1,s,l}^{\%}, \quad B_{2,2,s,l}^{\%} \quad (s = 1, 2), \quad A_{s,j,k,l}^{\%} \quad (s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \\
& k = \overline{1, m}) - \text{коэффициенти при } l\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ у розкладі відповідно функцій} \\
& \mathcal{P}_{\%}^2(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \quad \mathcal{P}_{\%}^2(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta), \quad b_{1,1}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \quad b_{1,1}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta), \\
& b_{1,2}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \quad b_{2,1}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \quad b_{1,2}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta), \quad b_{2,2}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \\
& b_{2,1}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta), \quad b_{2,2}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta), \quad \mathcal{A}_{1,j,k}^{\%}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta), \quad \mathcal{A}_{2,j,k}^{\%}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta) \\
& (j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}) \text{ у ряд Тейлора в околі } \varphi = \varphi_*^*.
\end{aligned}$$

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
P_{1,j,0}^{\%}(\phi_1, \psi, \eta, t) = & \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,0)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + d_{1,j,0} \cdot c'_{(1,j,0)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& \left. + \kappa_1 \cdot c_{1,j,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_1}{d_{1,j,0}}\phi_1} \quad (j = \overline{1, m}), \\
P_{2,j,0}^{\%}(\phi_2, \psi, \eta, t) = & \frac{1}{2 \cdot (\kappa_2 - \kappa_1)} \cdot \left(d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,0)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) - d_{1,j,0} \cdot c'_{(1,j,0)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) - \right. \\
& \left. + \kappa_1 \cdot c_{1,j,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}}\phi_2} \quad (j = \overline{1, m}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,j,i}^{\%}(\phi_1, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{1,j,0}} \cdot \int_0^{\phi_1} \left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_{1,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{1,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_{1,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi + \\
&+ (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \cdot \left(d_{1,j,0} \cdot c'_{(1,j,i)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,i)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
&+ \left. \kappa_1 \cdot c_{1,j,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \\
P_{2,j,i}^{\%}(\phi_2, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\phi_2} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi + \\
&+ (\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} \cdot \left(d_{1,j,0} \cdot c'_{(1,j,i)\phi_1}(0, \psi, \eta, t) + d_{2,j,0} \cdot c'_{(2,j,i)\phi_2}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
&+ \left. \kappa_1 \cdot c_{1,j,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_2 \cdot c_{2,j,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \\
P_{1,j,n+1}^{\%}(\phi_1, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{1,j,0}} \cdot \int_0^{\phi_1} \left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_{1,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{1,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_{1,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}), \\
P_{2,j,n+1}^{\%}(\phi_2, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{2,j,0}} \cdot \int_0^{\phi_2} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{2,j,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_{2,j,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (j = \overline{1, m}).
\end{aligned}$$

Примежові поправки $P_{s,j,i}$ ($s = 1, 2, j = \overline{1, m}, i = \overline{0, 2n+1}$) в околі $\psi = 0$ у випадку задання крайових умов (3.110) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases}
d_{s,j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,j,0)\psi}^{\%} - \frac{\mathcal{V}_s^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,j,0)\varphi}^{\%} = \sigma_s \cdot P_{(s,j,0)t}^{\%}; \\
P_{s,j,0}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,j,0}^{\%}(\varphi, 0, \eta, t) = \mathcal{V}_{s,*}(\varphi, \eta, t) - M_{s,j,0}(\varphi, \eta, t) \quad (s = 1, 2, j = \overline{1, m}), \\
d_{s,j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,j,i)\psi}^{\%} - \frac{\mathcal{V}_s^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,j,i)\varphi}^{\%} = \sigma_s \cdot P_{(s,j,i)t}^{\%} - \\
-M_{s,j,i}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t); P_{s,j,i}^{\%}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,j,i}^{\%}(\varphi, 0, \eta, t) = \\
= \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_{s,j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s = 1, 2, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, 2n+1}).
\end{cases}$$

$$\text{Тут } \overset{\frown}{M}_{1,j,i}(\varphi, \eta, t) = c_{1,j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{1,j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t), \quad \overset{\frown}{M}_{2,j,i}(\varphi, \eta, t) = \\ = c_{2,j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{2,j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{2,j,i-i/2}(\varphi, 0, \eta, t) \quad (j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, 2n+1}),$$

$$\overset{\frown}{M}_{s,j,i} = d_{s,j,0} \cdot \left(\sum_{l=1}^i B_{1,1,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-l)\psi\psi}'' + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-1-l)\psi}' + I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(\frac{V_l^*}{\kappa^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-2-l)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-2-l)\eta\eta}'' + B_{2,2,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-2-l)\eta}' \right) \right) + \sum_{l=1}^i \frac{V_l^*}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-l)\varphi}' + I(i, 2) \times \\ \times \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{s,j,k,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i-2-l)} - I(i, 2) \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m A_{s,k,j,l}^* \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,k,i-2-l)} \quad (s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, 2n+1}),$$

$V_l^*, B_{1,1,l}^*, B_{1,2,l}^*, B_{2,1,l}^*, B_{2,2,l}^*, A_{j,k,l}^*$ ($j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}$) – коефіцієнти при l -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\overset{\frown}{\psi}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $\overset{\frown}{\alpha}_{s,j,k}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta, t)$ ($s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}$) в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$.

Функції $\overset{\frown}{P}_{s,j,i}$ ($s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, 2n+1}$) при крайових умовах (3.111)

отримуються в результаті розв'язання наступних задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,0)\psi\psi}'' - \frac{\overset{\frown}{\psi}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,0)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,0)t}, \\ \overset{\frown}{P}_{s,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \quad \overset{\frown}{P}'_{(s,j,0)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = -\overset{\frown}{M}_{s,j,0}(\varphi, \eta, t) \quad (s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,j,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i)\psi\psi}'' - \frac{\overset{\frown}{\psi}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i)\varphi}' = \sigma_s \cdot \overset{\frown}{P}_{(s,j,i)t} - \\ - \overset{\frown}{M}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \overset{\frown}{P}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \quad \overset{\frown}{P}'_{(s,j,i)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -\overset{\frown}{M}_{s,j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, 2n+1}), \end{array} \right.$$

де $\overset{\frown}{M}_{1,j,i}(\varphi, \eta, t) = c'_{(1,j,i-i/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{(1,j,i-i/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t)$, $\overset{\frown}{M}_{2,j,i}(\varphi, \eta, t) = \\ = c'_{(2,j,i-i/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + \overset{\frown}{P}_{(2,j,i-i/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{(2,j,i-i/2)\psi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, 2n+1}$).

Задачі для знаходження функцій $\dot{P}_{j,i}, \dot{P}_{j,i}, \dot{P}_{j,i}$ ($j = \overline{1, m}, i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно.

3.2.4. Просторові сингулярно-збурені процеси конвективної дифузії у багат шарових кусково-однорідних пористих середовищах

Розглянемо модельну задачу процесу масопереносу забруднюючих речовин у багат шаровому кусково-однорідному водонасиченому пористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді $G_z^7 = ABCDA_*B_*C_*D_*$, що розділяється еквіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на p підобластей $G_z^{7,1} = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$, $G_z^{7,s} = E_{(s-1)} F_{(s-1)} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_z^{7,p} = E_{p-1} F_{p-1} C D E_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_*$. У випадку, коли середови-

ще характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, (x, y, z) \in G_z^1, \\ \kappa_2, (x, y, z) \in G_z^2, \\ \dots\dots\dots \\ \kappa_p, (x, y, z) \in G_z^p, \end{cases}$

активної пористості $\sigma = \begin{cases} \sigma_1, (x, y, z) \in G_z^1, \\ \sigma_2, (x, y, z) \in G_z^2, \\ \dots\dots\dots \\ \sigma_p, (x, y, z) \in G_z^p \end{cases}$ і дифузії $D = \begin{cases} D_1 = d_1 \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^1, \\ D_2 = d_2 \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^2, \\ \dots\dots\dots \\ D_p = d_p \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^p, \end{cases}$

де κ_s, σ_s, d_s – деякі дійсні додатні числа ($s = \overline{1, p}$), при чому $0 < \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p < 1$, відповідна модельна задача в області $G_z^7 \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь (2.1), (3.1) з крайовими умовами (2.2) – (2.4), (3.2) – (3.14), початковою умовою (3.15) і умовами узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) (2.90) та наступними:

$$C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}),$$

$$D_s \cdot C_n^t - v_n^s \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C_n^t - v_n^s \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (3.167)$$

де v_n^s – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) [1].

Припустивши, що задача (2.1) – (2.4), (2.90) є розв’язаною (див. п. 2.2.3), зокрема, знайдено параметри φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q , Q_* , Q^* , обчислено поле швидкостей \dot{v} і ряд інших величин, та здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2) – (3.15), (3.167) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$, що описується рівнянням (3.16), крайовими умовами (3.17) – (3.29), початковою умовою (3.30) і умовами узгодженості на екіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$):

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} c = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} c, \quad (3.168)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} (D_s \cdot c'_\varphi - \kappa_s \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} (D_{s+1} \cdot c'_\varphi - \kappa_{s+1} \cdot c) \quad (s = \overline{1, p-1}). \quad (3.169)$$

У випадку, коли коефіцієнт дифузії має вигляд $D = \begin{cases} D_1, & (x, y, z) \in G_1, \\ D_2, & (x, y, z) \in G_2, \\ \dots \\ D_p, & (x, y, z) \in G_p, \end{cases}$

де $D_s = D_s(x, y, z, t) = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \varepsilon \cdot \int_0^t a_s(x, y, z, t) \cdot C(x, y, z, t) dt \right)$, $d_{s,0}$ – деяке додат-

не дійсне число, $a_s(x, y, z, t)$ – деякі вагові обмежені функції ($s = \overline{1, p}$) або

$D_s = D_s(x, y, z, t) = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_{s,k} \cdot C^k(x, y, z, t) \right)$, $d_{s,k}$ – деякі додатні дій-

сні числа ($s = \overline{1, p}$, $k = \overline{0, l}$), рівняння (3.16) відповідної “дифузійної задачі”

для області $G_w \times (0, \infty)$ переписеться у вигляді (3.125), а умови узгодженості

(3.169) на екіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) – у вигляді:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} (\overset{\circ}{D}_s \cdot c'_\varphi - \kappa_s \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} (\overset{\circ}{D}_{s+1} \cdot c'_\varphi - \kappa_{s+1} \cdot c) \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (3.170)$$

де $\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}\Phi(\varphi, \psi, \eta, t) = D(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \varepsilon \cdot \int_0^t \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) \cdot c(\varphi, \psi, \eta, t) dt \right),$$

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) = a_s(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t) \quad (s = \overline{1, p})$$

або $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\varphi, \psi, \eta, t) = \varepsilon \cdot \left(d_{s,0} + \sum_{k=1}^l \varepsilon^k \cdot d_{s,k} \cdot c^k(\varphi, \psi, \eta, t) \right) \quad (s = \overline{1, p}).$

$$\text{Асимптотичні наближення} \quad c(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_1(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_{*1}^*, \\ c_2(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_{*1}^* < \varphi < \varphi_{*2}^*, \\ \dots & \dots \\ c_p(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_{*(p-1)}^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$$

розв'язків отриманих задач з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів:

$$c_1 = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{1,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{1,i} + R_{1,n+1}, \quad (3.171)$$

$$c_s = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{s,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{s,i} + R_{s,n+1} \quad (s = \overline{2, p-1}), \quad (3.172)$$

$$c_p = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{p,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{p,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \mathcal{P}_{p,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{p,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{p,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{p,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \mathcal{P}_{p,i} + R_{p,n+1}, \quad (3.173)$$

де $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик,

$\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p-1}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\mathcal{P}_{s,i} = \mathcal{P}_{s,i}(\varphi_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{2, p}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi = \varphi_{*s}^*$ ($s = \overline{1, p-1}$)

(поправки в околах поверхонь $E'_s F'_s F'_{*s} E'_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$) розділу підобластей G_w^s ($s = \overline{1, p-1}$)), $P_{p,i} = P_{p,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\overset{\circ}{P}_{s,i} = \overset{\circ}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\overset{\circ}{P}_{s,i} = \overset{\circ}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\overset{\circ}{P}_{s,i} = \overset{\circ}{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\overset{\circ}{\varphi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p-1}$), $\overset{\circ}{\varphi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p-1}$), $\overset{\circ}{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\overset{\circ}{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{s,n+1} = R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = \overline{1, p}$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму аналогічно п. 3.1.1).

Виконавши підстановку (3.171) – (3.173) в (3.16), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.169) і (3.124), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.170) та стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , у випадку крайових умов (3.17) для знаходження $c_{s,i}$ ($i = \overline{0, n}$) отримаємо задачі (3.128), (3.130), а для знаходження $c_{s,i}$ ($s = \overline{2, p}$, $i = \overline{0, n}$) – наступні задачі:

$$\begin{cases} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,0)\varphi} + \sigma_s \cdot c'_{(s,0)t} = 0, c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \overset{\circ}{\varphi}_s^0(\varphi, \psi, \eta), \\ c_{s,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t) = c_{s-1,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t) (s = \overline{2, p}), \end{cases} \quad (3.174)$$

$$\begin{cases} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,i)\varphi} + \sigma_s \cdot c'_{(s,i)t} = g_{s,i}, \\ c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{s,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t) = c_{s-1,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t) (s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.175)$$

де при сталих коефіцієнтах дифузії забруднюючої речовини у кожному шарі

багат шарового середовища $g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\overset{\circ}{\varphi}_s^2}{\kappa_s} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + \right.$

$+b_{2,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta} \Big) (s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n})$, при інтегральних залежностях

коефіцієнтів дифузії від концентрації забруднюючої речовини у кожному

шарі $g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \times \right.$

$\times c''_{(s,i-1)\eta} \Big) + I(i, 2) \left(\sum_{k=0}^{i-2} \left(\int_0^t \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c_{s,k} \right) dt \right) \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-2-k)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-2-k)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-2-k)\eta\eta} + \right.$

$+ b_{2,1} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} \Big) + \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,k)\varphi} \cdot \int_0^t \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\varphi} + \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} + \right.$

$\left. + b_{1,1} \cdot c'_{(s,k)\psi} \cdot \int_0^t \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} + \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} \right) dt + b_{1,2} \cdot c'_{(s,k)\eta} \cdot \int_0^t \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} + \frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} \right) dt \right)$

$(s = \overline{1, p}, i = \overline{1, n})$, $c'_{s,i-2-k} = c_{s,i-2-k}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s} = \vartheta_s(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{2, p}$), а при

використанні многочленних залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрації

забруднюючої речовини у кожному шарі $g_{s,i} = d_{s,0} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \times \right.$

$\times c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,i-1)\eta} \Big) + I(i, 1) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{m=0}^k \left(d_{s,i-1-k} \cdot c_{s,k-m} \times \right.$

$\times \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,m)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,m)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,m)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(s,m)\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(s,m)\eta} \right) + I(i, 1) \cdot d_{s,1} \times$

$\times \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,k)\varphi} \cdot c'_{(s,i-2-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{(s,k)\psi} \cdot c'_{(s,i-2-k)\psi} + b_{1,2} \cdot c'_{(s,k)\eta} \cdot c'_{(s,i-2-k)\eta} \right) + I(i, 2) \times$

$\times \sum_{k=0}^{i-3} \left((i-2) \cdot d_{s,i-2} \cdot \sum_{m=0}^k \left(c_{s,m} \cdot \left(\frac{\vartheta_s^2}{\kappa_s^2} \cdot c'_{(s,k-m)\varphi} \cdot c'_{(s,i-3-k)\varphi} + b_{1,1} \cdot c'_{(s,k-m)\psi} \cdot c'_{(s,i-3-k)\psi} + b_{1,2} \times \right. \right.$

$\left. \left. \times c'_{(s,k-m)\eta} \cdot c'_{(s,i-3-k)\eta} \right) \right) \Big) \Big) (s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n})$.

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_{s-1,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - f_s(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_s(\varphi, \psi, \eta), \\ \mathcal{G}_s^0(f_s^{-1}(f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_s(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_s(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma_s} \cdot \int_0^t g_{s,i}(f_s^{-1}(t + f_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, t) dt, & t < f_s(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$\text{де } h_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, f_s(\varphi, \psi, \eta) + t - f_s(\varphi, \psi, \eta))}{\mathcal{V}_s^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi + c_{s-1,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t)$$

$$(s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n}), f_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \cdot \sigma_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{ds}{\mathcal{V}_s^2(s, \psi, \eta)} - \text{час проходження відпо-}$$

відними частинками шляху від точки $(x(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta),$

$z(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta)) \in E_{s-1} F_{s-1} F_{*(s-1)}^* E_{*(s-1)}^*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^s$

вздовж відповідної лінії течії $(s = \overline{2, p})$, $f_s^{-1}(s = \overline{2, p})$ – функції, обернені від-
повідно до $f_s(s = \overline{2, p})$ відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існу-
ють, оскільки $\mathcal{V}_s^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-
визначена функція, а $\kappa_s, \sigma_s(s = \overline{2, p})$ – додатньо-визначені сталі).

При умові, що на ділянці входу задана умова Данквертса (3.18), для
знаходження головних частин $c_{s,0}(s = \overline{1, p})$ і поправок $c_{s,i}(s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n})$
розв'язку задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.169) отримаємо задачі
(3.128), (3.130), (3.174), (3.175), а для знаходження поправок $c_{1,i}(i = \overline{1, n})$ – за-
дачі (3.133). При розв'язанні задачі (3.124), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.170), що
відповідає випадкам нелінійних інтегральної і многочленної залежностей ко-
ефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному шарі,
задачі для знаходження головних частин $c_{1,0}(s = \overline{1, p})$ матимуть вигляд
(3.128), (3.174), а для поправок $c_{1,1}, c_{1,i}(i = \overline{2, n})$ і $c_{s,i}(s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n})$ – від-
повідно (3.130), (3.133), (3.175).

Для знаходження примежових поправок $P_{p,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ у випадку відсутності інтенсивного відводу рідини одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,0)\varphi\varphi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,0)\varphi} = 0, \\ P_{p,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{p,0}(0, \psi, \eta, t) = \mathcal{D}_0^*(\psi, \eta, t) - c_{p,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,i)\varphi\varphi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,i)\varphi} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{p,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{p,i}(0, \psi, \eta, t) = -c_{p,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,n+1)\varphi\varphi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,n+1)\varphi} = q_{n+1}, \\ P_{p,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0, P_{p,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases}$$

де при сталих коефіцієнтах дифузії у кожному шарі пористого середовища

$$q_i = \frac{\kappa_p^2}{\mathcal{D}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_p \cdot P'_{(p,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{p,0} \cdot \frac{V_k}{\kappa_p^2} \cdot P''_{(p,i-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa_p} \cdot P'_{(p,i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times d_{p,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\eta} \right) \right)$$

($i = \overline{1, n+1}$), V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -тих степенях ε у розкладі відповідно функцій $\mathcal{D}_0^2(\varphi^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta)$,

$b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon \cdot \varphi, \psi, \eta)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, а у складнішому випадку – при врахуванні зворотнього впливу величин концентрацій забруднюючої речовини на величини коефіцієнтів дифузії

$$q_i = \frac{\kappa_p^2}{\mathcal{D}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_p \cdot P'_{(p,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{p,0} \cdot \frac{V_k}{\kappa_p^2} \cdot P''_{(p,i-k)\varphi\varphi} + \frac{V_k}{\kappa_p} \cdot P'_{(p,i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(d_{p,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\eta} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\frac{V_k}{\kappa_p^2} \cdot \left(P''_{(p,l-k)\varphi\varphi} \cdot \int_0^t A_{p,m-l} \cdot P'_{p,i-1-m} dt \right) + P'_{(p,l-k)\varphi} \cdot \left(\int_0^t A_{p,m-l} \cdot P'_{(p,i-1-m)\varphi} dt \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \left(A'_{(p,m-l)\psi} \cdot P_{p,i-2-m} dt \right) \Big) \Big) - I(i,3) \cdot \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left((B_{1,1,k} \cdot P'_{(p,l-k)\psi\psi} + B_{1,2,k} \cdot P'_{(p,l-k)\eta\eta} + B_{2,1,k} \times \right. \\
& \times P'_{(p,l-k)\psi} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(p,l-k)\eta}) \cdot \int_0^t A_{p,m-l} \cdot P_{p,i-3-m} dt + B_{1,1,k} \cdot P'_{(p,l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{p,m-l} \cdot P'_{(p,i-3-m)\psi} dt + \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t A'_{(p,m-l)\psi} \cdot P_{p,i-3-m} dt \right) + B_{1,2,k} \cdot P'_{(p,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{p,m-l} \cdot P'_{(p,i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A'_{(p,m-l)\eta} \cdot P_{p,i-3-m} dt \right) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

$(i = \overline{1, n+1})$, V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$, $A'_{p,m-l}$, $A'_{(p,m-l)\psi}$, $A'_{(p,m-l)\eta}$ – коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях ε у розкладі відповідно

функцій $\mathcal{V}_0^2(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta)$, $\mathcal{D}_p(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta, t')$, $\mathcal{D}_{p\psi}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta, t')$, $\mathcal{D}_{p\eta}(\varphi^* - \varepsilon \Phi, \psi, \eta, t')$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$; при

врахуванні многочленної залежності величин концентрацій забруднюючої речовини на величини коефіцієнтів дифузії у кожному шарі $q_1 = \frac{\kappa_p^2}{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \times$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sigma_p \cdot P_{(p,0)t} + d_{p,0} \cdot \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot \Phi \cdot P'_{(p,0)\psi\psi} - d_{p,1} \cdot P_{p,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P'_{p,0\psi\psi} - \right. \\
& \left. - d_{p,1} \cdot \frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P_{(p,0)\psi}^2 + \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p} \cdot \Phi \cdot P'_{(p,0)\psi} \right), \quad q_2 = \frac{\kappa_p^2}{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sigma_p \cdot P_{(p,1)t} - d_{p,0} \cdot \left(\frac{(\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta))}{\kappa_p^2} \cdot \Phi^2 \cdot P'_{(2,0)\psi\psi} - 2 \cdot \mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot \Phi \cdot P'_{(p,1)\psi\psi} \right) + d_{p,1} \cdot P_{p,0} \cdot \left(\frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P_{(p,1)\psi\psi} - \frac{2 \cdot \mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_0(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot \Phi \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times P'_{(p,0)\psi\psi} \right) - d_{p,1} \cdot P_{p,1} \cdot \frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P'_{(p,0)\psi\psi} - d_{p,2} \cdot P_{p,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P'_{(p,0)\psi\psi} - d_{p,0} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(b_{1,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P''_{(p,0)\psi\psi} + b_{1,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P''_{(p,0)\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot P'_{(p,0)\psi} + b_{2,2}(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \times P'_{(p,0)\eta} \left. - d_{p,1} \cdot \left(\frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p} \cdot P'_{(p,1)\phi} - \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_\phi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot \phi \cdot P'_{(p,1)\phi} \right) - d_{p,2} \cdot P_{p,0}^2 \times \right. \\
& \times \frac{\vartheta_0^2(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p^2} \cdot P'_{(p,0)\phi} + \frac{2 \cdot \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \cdot \vartheta_\phi(\varphi^*, \psi, \eta)}{\kappa_p} \cdot \phi \cdot P'_{(p,1)\phi} - \left(\vartheta_\phi^2(\varphi^*, \psi, \eta) + \vartheta_0(\varphi^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \left. \times \vartheta_{\phi\phi}(\varphi^*, \psi, \eta) \right) \cdot \frac{\phi^2}{\kappa_p} \cdot P'_{(p,0)\phi} \right), \dots
\end{aligned}$$

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{p,0}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{p,0}}{\kappa_p} \left(\vartheta_0^*(\psi, \eta, t) - c_{p,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi},$$

$$P_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi \right) d\phi - c_{p,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

При врахуванні інтенсивного відводу рідини (крайова умова (3.20)) для знаходження функцій $P_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,0)\phi\phi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,0)\phi} = 0, \\ P_{p,0}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(p,0)\phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(p,0)\phi}(0, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,i)\phi\phi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,i)\phi} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(p,i)\phi}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(p,i)\phi}(0, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,n+1)\phi\phi} + \kappa_p \cdot P'_{(p,n+1)\phi} = q_{n+1}, \\ P_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, P'_{(p,n+1)\phi}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases}$$

У результаті ж їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$P_{p,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{d_{p,0}}{\kappa_p} \cdot c'_{p,0}(\Phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \Phi},$$

$$P_{p,i}(\Phi, \psi, \eta, t) = \int_0^{\Phi} \left(\frac{1}{d_{p,0}} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_i(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi - c'_{p,i}(\Phi, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{p,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\Phi} \left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

Якщо ж на ділянці виходу задана умова Данквертса (крайова умова (3.21)), то для знаходження функцій $P_{p,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$) у випадку розв'язання задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.169) (випадок сталих коефіцієнтів дифузії у кожному із шарів) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,0)}(\Phi) + \kappa_p \cdot P'_{(p,0)}(\Phi) = 0; P_{p,0}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{p,0} \cdot (c'_{(p,0)}(\Phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,0)}(\Phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_p \cdot (c_{p,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,0}(0, \psi, \eta, t) - c^*(\psi, \eta, t)) = 0, \end{cases} \quad (176)$$

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,i)}(\Phi) + \kappa_p \cdot P'_{(p,i)}(\Phi) = q_{p,i}; P_{p,i}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{p,0} \cdot (c'_{(p,i)}(\Phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,i)}(\Phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_p \cdot (c_{p,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,i}(0, \psi, \eta, t)) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (177)$$

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,n+1)}(\Phi) + \kappa_p \cdot P'_{(p,n+1)}(\Phi) = q_{p,n+1}; P_{p,n+1}(\Phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{p,0} \cdot P'_{(p,n+1)}(\Phi, \psi, \eta, t) + \kappa_p \cdot P_{p,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases} \quad (178)$$

Розв'язки цих задач отримаємо у наступному вигляді:

$$P_{p,0}(\Phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot \kappa_p} \cdot (\kappa_p \cdot c^*(\psi, \eta, t) - d_{p,0} \cdot c'_{(p,0)}(\Phi, \psi, \eta, t) - \kappa_p \cdot c_{p,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \Phi},$$

$$P_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi - \right. \\ \left. - d_{p,0} \cdot c'_{(p,i)}(\phi, \psi, \eta, t) - \kappa_p \cdot c_{p,i}(0, \psi, \eta, t) \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} \left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi \right) d\phi.$$

У випадку ж побудови асимптотичного наближення розв'язку задачі (3.124), (3.17) – (3.30), (3.168), (3.170) (випадок нелінійних інтегральної і многочленної залежностей коефіцієнтів дифузії від концентрацій забруднюючих речовин у кожному із шарів) задача (3.176) для знаходження поправки $P_{p,0}$ залишиться без змін, а задачі (3.177), (3.178) для знаходження поправок $P_{p,i}$ ($i = \overline{1, n+1}$) перепишуться у вигляді:

$$\begin{cases} d_{p,0} \cdot P''_{(p,i)}(\phi) + \kappa_p \cdot P'_{(p,i)}(\phi) = q_{p,i}; P_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{p,0} \cdot (c'_{(p,i)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,i)}(\phi, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_p \cdot (c_{p,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,i}(0, \psi, \eta, t)) + \mathcal{I}_{p,i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \\ d_{p,0} \cdot P''_{(p,n+1)}(\phi) + \kappa_p \cdot P'_{(p,n+1)}(\phi) = q_{p,n+1}; P_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, \\ d_{p,0} \cdot P'_{(p,n+1)}(\phi, \psi, \eta, t) + \kappa_p \cdot P_{p,n+1}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{I}_{p,n+1} = 0, \end{cases}$$

де при інтегральній залежності: $\mathcal{I}_{p,i} = \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\int_0^t A_{p,k} \cdot (c_{p,l-k}(0, \psi, \eta, t) + \right.$

$\left. + P_{p,l-k}(0, \psi, \eta, t) \right) dt \cdot (c'_{(p,i-1-m)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,i-1-m)}(\phi, \psi, \eta, t)) \quad (i = \overline{1, n+1})$, а

при многочленній: $\mathcal{I}_{p,1} = d_{p,1} \cdot (c_{p,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(p,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,0)}(\phi, \psi, \eta, t))$, $\mathcal{I}_{p,2} = d_{p,1} \cdot (c_{p,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(p,1)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,1)}(\phi, \psi, \eta, t)) + d_{p,1} \cdot (c_{p,1}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,1}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(p,0)}(\phi, \psi, \eta, t) + P'_{(p,0)}(\phi, \psi, \eta, t))$

$$+P'_{(p,0)}(0, \psi, \eta, t) + d_{p,2} \cdot (c_{p,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{p,0}(0, \psi, \eta, t))^2 \cdot (c'_{(p,0)}(0, \psi, \eta, t) + P'_{(p,0)}(0, \psi, \eta, t)), \dots$$

Розв'язки цих задач отримаємо у вигляді:

$$P_{p,i}(0, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{p,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi - \left. -d_{p,0} \cdot c'_{(p,i)}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_p \cdot c_{p,i}(0, \psi, \eta, t) - q_{p,i} \right) d\phi \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{p,n+1}(0, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{p,0}} \cdot \int_0^{\phi} e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{p,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,0}} \phi} d\phi - q_{p,n+1} \Big) d\phi.$$

При розв'язанні задачі (3.16), (3.17) – (3.30), (3.164), (3.165) для знаходження функцій $P_{s,i} (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{0, n+1})$, $P_{s,i} (s = \overline{2, p}, i = \overline{0, n+1})$ отримаємо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot P_{(s,0)}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_s \cdot P_{(s,0)}(0, \psi, \eta, t) = 0, \quad d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,0)}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_{s+1} \cdot P_{(s+1,0)}(0, \psi, \eta, t) = 0, \\ P_{s,0}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s,0}(0, \psi, \eta, t) = P_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot (c'_{(s,0)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s,0)}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_s \cdot (c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{s,0}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{s+1,0} \cdot (c'_{(s+1,0)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s+1,0)}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_{s+1} \cdot (c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t)) \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot P_{(s,i)}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_s \cdot P_{(s,i)}(0, \psi, \eta, t) = q_{s,i}, \quad d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,i)}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_{s+1} \cdot P_{(s+1,i)}(0, \psi, \eta, t) = q_{s,i}, \\ P_{s,i}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s,i}(0, \psi, \eta, t) = P_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot (c'_{(s,i)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s,i)}(0, \psi, \eta, t)) + \kappa_s \cdot (c_{s,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{s,i}(0, \psi, \eta, t)) = -d_{s+1,0} \cdot (c'_{(s+1,i)}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s+1,i)}(0, \psi, \eta, t)) + \\ + \kappa_{s+1} \cdot (c_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t) + P_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t)) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot \mathcal{P}_{(s,n+1)\mathbb{C}_s} + \kappa_s \cdot \mathcal{P}_{(s,n+1)\mathbb{C}_s} = \mathcal{Q}_{s,n+1}, d_{s+1,0} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,n+1)\mathbb{C}_s} - \kappa_{s+1} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,n+1)\mathbb{C}_s} = \mathcal{Q}_{s,n+1}, \\ \mathcal{P}_{s,n+1}(\mathbb{C}_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\mathbb{C}_s \rightarrow \infty} 0, \mathcal{P}_{s+1,n+1}(\mathbb{C}_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\mathbb{C}_s \rightarrow \infty} 0, \mathcal{P}_{s,n+1}(0, \psi, \eta, t) = \mathcal{P}_{s,n+1}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot \mathcal{P}_{(s,n+1)\mathbb{C}_s}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_s \cdot \mathcal{P}_{s,n+1}(0, \psi, \eta, t) = -d_{s+1,0} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,n+1)\mathbb{C}_s}(0, \psi, \eta, t) + \\ + \kappa_{s+1} \cdot \mathcal{P}_{s+1,n+1}(0, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{cases}$$

де $\mathcal{Q}_{s,i} = \frac{\kappa_s^2}{\mathcal{V}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_s \cdot \mathcal{P}_{(s,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{s,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{s,k}}{\kappa_s^2} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-k)\mathbb{C}_s} - \frac{\mathcal{V}_{s,k}}{\kappa_s} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-k)\mathbb{C}_s} \right) - \right.$
 $- I(i, 2) \cdot d_{s,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\mathcal{B}_{1,1,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-2-k)\psi\psi} + \mathcal{B}_{2,1,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-2-k)\psi} + \mathcal{B}_{1,2,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-2-k)\eta\eta} + \right.$
 $\left. + \mathcal{B}_{2,2,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s,i-2-k)\eta} \right), \mathcal{Q}_{s,i} = \frac{\kappa_{s+1}^2}{\mathcal{V}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_{s+1} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{s+1,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{s,k}}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-k)\mathbb{C}_s} + \right.$
 $\left. + \frac{\mathcal{V}_{s,k}}{\kappa_{s+1}} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-k)\mathbb{C}_s} \right) - I(i, 2) \cdot d_{s+1,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\mathcal{B}_{1,1,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-2-k)\psi\psi} + \mathcal{B}_{2,1,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-2-k)\psi} + \right.$
 $\left. + \mathcal{B}_{1,2,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-2-k)\eta\eta} + \mathcal{B}_{2,2,s,k} \cdot \mathcal{P}_{(s+1,i-2-k)\eta} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n+1}), \mathcal{V}_{s,k}, \mathcal{B}_{1,1,s,k},$
 $\mathcal{B}_{1,2,s,k}, \mathcal{B}_{2,1,s,k}, \mathcal{B}_{2,2,s,k} \quad (s = \overline{1, p-1})$ – коефіцієнти при k -тих степенях ε у розкладах функцій $\mathcal{V}^2(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $\mathcal{V}^2(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{C}_s, \psi, \eta)$ у ряд Тейлора відповідно в околі $\varphi = \varphi_{*s}^* \quad (s = \overline{1, p-1})$.

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\mathcal{P}_{s,0}(\mathbb{C}_s, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left(d_{s+1,0} \cdot c'_{(s+1,0)\mathbb{C}_s}(0, \psi, \eta, t) + d_{s,0} \cdot c'_{(s,0)\mathbb{C}_s}(0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_s \cdot c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \mathbb{C}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}),$$

$$\mathcal{P}_{s,0}(\mathbb{C}_{s-1}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{2 \cdot (\kappa_s - \kappa_{s-1})} \cdot \left(d_{s,0} \cdot c'_{(s,0)\mathbb{C}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) - d_{s-1,0} \cdot c'_{(s-1,0)\mathbb{C}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$+ \kappa_{s-1} \cdot c_{s-1,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_s \cdot c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi_{s-1}} \quad (s = \overline{2, p}),$$

$$P_{s,i}^{\%}(\phi_s, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\phi_s} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\phi +$$

$$+ \frac{1}{\kappa_{s+1} - \kappa_s} \cdot \left(d_{s,0} \cdot c'_{(s,i)\%_s}(0, \psi, \eta, t) + d_{s+1,0} \cdot c'_{(s+1,i)\%_s}(0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_s \cdot c_{s,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{s,i}^{\%}(\phi_{s-1}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\phi_{s-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\phi +$$

$$+ \frac{1}{\kappa_s - \kappa_{s-1}} \cdot \left(d_{s-1,0} \cdot c'_{(s-1,i)\%_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + d_{s,0} \cdot c'_{(s,i)\%_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_{s-1} \cdot c_{s-1,i}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_s \cdot c_{s,i}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{s,n+1}^{\%}(\phi_s, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\phi_s} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (s = \overline{1, p-1}),$$

$$P_{s,n+1}^{\%}(\phi_{s-1}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\phi_{s-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\phi \quad (s = \overline{2, p}).$$

При розв'язанні задач (3.124), (3.17) – (3.30), (3.164), (3.166) отримаємо дещо складніші задачі для знаходження функцій $P_{s,i}^{\%}$ ($s = \overline{1, p-1}$, $i = \overline{0, n+1}$),

$P_{s,i}^{\%}$ ($s = \overline{2, p}$, $i = \overline{0, n+1}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot P_{(s,0)\%_s}^{\%} + \kappa_s \cdot P_{(s,0)\%_s}^{\%} = 0, \quad d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,0)\%_s}^{\%} - \kappa_{s+1} \cdot P_{(s+1,0)\%_s}^{\%} = 0, \\ P_{s,0}^{\%}(\phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s+1,0}^{\%}(\phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_s \rightarrow \infty} 0, \quad P_{s,0}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{s+1,0}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot \left(c'_{(s,0)\%_s}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s,0)\%_s}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) + \kappa_s \cdot \left(c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\ \left. + P_{s,0}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) = -d_{s+1,0} \cdot \left(c'_{(s+1,0)\%_s}(0, \psi, \eta, t) + P_{(s+1,0)\%_s}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) + \\ \left. + \kappa_{s+1} \cdot \left(c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) + P_{s+1,0}^{\%}(0, \psi, \eta, t) \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot P_{(s,i)\Phi_s\Phi_s}^{\%} + \kappa_s \cdot P_{(s,i)\Phi_s}^{\%} = q_{s,i}, d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,i)\Phi_s\Phi_s}^{\%} - \kappa_{s+1} \cdot P_{(s+1,i)\Phi_s}^{\%} = q_{s,i}, \\ P_{s,i}^{\%}(\Phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi_s \rightarrow \infty} 0, P_{s+1,i}^{\%}(\Phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi_s \rightarrow \infty} 0, P_{s,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{s+1,i}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot \left(c'_{(s,i)\Phi_s} (0, \psi, \eta, t) + P_{(s,i)\Phi_s}^{\%} (0, \psi, \eta, t) \right) + \kappa_s \cdot \left(c_{s,i} (0, \psi, \eta, t) + \right. \\ \left. + P_{s,i}^{\%} (0, \psi, \eta, t) \right) - q_{s,i} = -d_{s+1,0} \cdot \left(c'_{(s+1,i)\Phi_s} (0, \psi, \eta, t) + P_{(s+1,i)\Phi_s}^{\%} (0, \psi, \eta, t) \right) + \\ \left. + \kappa_{s+1} \cdot \left(c_{s+1,i} (0, \psi, \eta, t) + P_{s+1,i}^{\%} (0, \psi, \eta, t) \right) + q_{s+1,i} \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{s,0} \cdot P_{(s,n+1)\Phi_s\Phi_s}^{\%} + \kappa_s \cdot P_{(s,n+1)\Phi_s}^{\%} = q_{s,n+1}, d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,n+1)\Phi_s\Phi_s}^{\%} - \kappa_{s+1} \cdot P_{(s+1,n+1)\Phi_s}^{\%} = q_{s,n+1}, \\ P_{s,n+1}^{\%}(\Phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi_s \rightarrow \infty} 0, P_{s+1,n+1}^{\%}(\Phi_s, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\Phi_s \rightarrow \infty} 0, P_{s,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t) = P_{s+1,n+1}^{\%}(0, \psi, \eta, t), \\ d_{s,0} \cdot P_{(s,n+1)\Phi_s}^{\%} (0, \psi, \eta, t) + \kappa_s \cdot P_{s,n+1}^{\%} (0, \psi, \eta, t) - q_{s,n+1} = -d_{s+1,0} \cdot P_{(s+1,n+1)\Phi_s}^{\%} (0, \psi, \eta, t) + \\ \left. + \kappa_{s+1} \cdot P_{s+1,n+1}^{\%} (0, \psi, \eta, t) + q_{s+1,n+1} \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{array} \right.$$

де при інтегральній залежності коефіцієнта дифузії від концентрації

$$q_{s,i} = \frac{\kappa_s^2}{\Phi_s^2(\Phi_s^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_s \cdot P_{(s,i-1)t}^{\%} - \sum_{k=1}^i \left(d_{s,0} \cdot \frac{V_{1,k}^{\%}}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-k)\Phi_s\Phi_s}^{\%} + \frac{V_{1,k}^{\%}}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)\Phi_s}^{\%} \right) - \right.$$

$$- I(i, 2) \cdot \left(d_{s,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,i-2-k)\Psi\Psi}^{\%} + B_{2,1,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,i-2-k)\Psi}^{\%} + B_{1,2,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,i-2-k)\eta\eta}^{\%} + \right. \right.$$

$$\left. + B_{2,2,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,i-2-k)\eta}^{\%} \right) + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{V_{s,k}^{\%}}{\kappa_s^2} \cdot \left(P_{(s,l-k)\Phi_s\Phi_s}^{\%} \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^{\%} \cdot P_{s,i-1-m}^{\%} dt^{\%} + \right.$$

$$\left. + P_{(s,l-k)\Phi_s}^{\%} \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^{\%} \cdot P_{(s,i-1-m)\Phi_s}^{\%} dt^{\%} + P_{(s,l-k)\Phi_s}^{\%} \cdot \int_0^t A_{(s,m-l)\Phi_s}^{\%} \cdot P_{s,i-2-m}^{\%} dt^{\%} \right) \Big) - I(i, 3) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(B_{1,1,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\Psi\Psi}^{\%} + B_{1,2,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\eta\eta}^{\%} + B_{2,1,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\Psi}^{\%} + B_{2,2,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\eta}^{\%} \right) \times$$

$$\times \int_0^t A_{s,m-l}^{\%} \cdot P_{s,i-3-m}^{\%} dt^{\%} + B_{1,1,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\Psi}^{\%} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{\%} \cdot P_{(s,i-3-m)\Psi}^{\%} dt^{\%} + \int_0^t A_{(s,m-l)\Psi}^{\%} \cdot P_{s,i-3-m}^{\%} dt^{\%} \right) +$$

$$\left. + B_{1,2,s,k}^{\%} \cdot P_{(s,l-k)\eta}^{\%} \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l}^{\%} \cdot P_{(s,i-3-m)\eta}^{\%} dt^{\%} + \int_0^t A_{(s,m-l)\eta}^{\%} \cdot P_{s,i-3-m}^{\%} dt^{\%} \right) \right) \Big) \Big), \quad q_{s,i} =$$

$$= \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \int_0^t A_{s,k} \cdot \left(\mathcal{C}_{s,l-k} + \mathcal{F}_{s,l-k} \right) dt \cdot \left(c'_{(s,i-2-m)\mathbb{F}_s} + \mathcal{F}_{(s,i-2-m)\mathbb{F}_s} \right) \quad (i = \overline{1, n+1}),$$

$$\begin{aligned} q_{s,i} = & \frac{\kappa_{s+1}^2}{\mathcal{V}_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_{s+1} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_{s+1,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{s+1,k}}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-k)\mathbb{F}_s} - \frac{\mathcal{V}_{s+1,k}}{\kappa_{s+1}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \mathcal{F}_{(s+1,i-k)\mathbb{F}_s} \right) - I(i, 2) \cdot \left(d_{s+1,0} \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\mathcal{B}_{1,1,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-2-k)\psi\psi} + \mathcal{B}_{2,1,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-2-k)\psi} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mathcal{B}_{1,2,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-2-k)\eta\eta} + \mathcal{B}_{2,2,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-2-k)\eta} \right) + \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{\mathcal{V}_{s+1,k}}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \left(\mathcal{F}_{(s+1,l-k)\mathbb{F}_s} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_0^t A_{s+1,m-l} \cdot \mathcal{F}_{s+1,i-1-m} dt - \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\mathbb{F}_s} \cdot \int_0^t A_{s+1,m-l} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-1-m)\mathbb{F}_s} dt + \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\mathbb{F}_s} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \int_0^t A_{(s+1,m-l)\mathbb{F}_s} \cdot \mathcal{F}_{s+1,i-2-m} dt \right) \right) \right) - I(i, 3) \cdot \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\mathcal{B}_{1,1,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\psi\psi} + \mathcal{B}_{1,2,s+1,k} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\eta\eta} + \mathcal{B}_{2,1,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\psi} + \mathcal{B}_{2,2,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\eta} \right) \cdot \int_0^t A_{s+1,m-l} \cdot \mathcal{F}_{s+1,i-3-m} dt + \right. \\ & \left. + \mathcal{B}_{1,1,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\psi} \cdot \left(\int_0^t A_{s+1,m-l} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-3-m)\psi} dt + \int_0^t A_{(s+1,m-l)\psi} \cdot \mathcal{F}_{s+1,i-3-m} dt \right) + \right. \\ & \left. + \mathcal{B}_{1,2,s+1,k} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,l-k)\eta} \cdot \left(\int_0^t A_{s+1,m-l} \cdot \mathcal{F}_{(s+1,i-3-m)\eta} dt + \int_0^t A_{(s+1,m-l)\eta} \cdot \mathcal{F}_{s+1,i-3-m} dt \right) \right) \right), \quad \mathcal{F}_{s+1,i} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \int_0^t A_{s+1,k} \cdot \left(\mathcal{C}_{s+1,l-k} + \mathcal{F}_{s+1,l-k} \right) dt \cdot \left(c'_{(s+1,i-2-m)\mathbb{F}_s} + \mathcal{F}_{(s+1,i-2-m)\mathbb{F}_s} \right) \quad (i = \overline{1, n+1}),$$

$$\mathcal{V}_{s,k}, \mathcal{V}_{s,k}, \mathcal{B}_{1,1,s,k}, \mathcal{B}_{1,1,s,k}, \mathcal{B}_{1,2,s,k}, \mathcal{B}_{1,2,s,k}, \mathcal{B}_{2,1,s,k}, \mathcal{B}_{2,1,s,k}, \mathcal{B}_{2,2,s,k}, \mathcal{B}_{2,2,s,k}, A_{s,k}$$

або $A_{s,m-l}, A_{(s,m-l)\mathbb{F}_s}, A_{(s,m-l)\psi}, A_{(s,m-l)\eta}$ ($s = \overline{1, p-1}$) – коефіцієнти при k -тих

($m-l$ -тих) степенях ε в розкладі відповідно функцій $\mathcal{V}_s^2(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$,

$\mathcal{V}_s^2(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$,

$b_{1,2}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \mathbb{F}_s, \psi, \eta)$,

$$b_{2,2}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta), \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}, \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}, \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s},$$

$$\mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}, \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}, \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}, \mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}$$

і $\mathcal{A}_{\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \varphi_s, \psi, \eta, \eta}^{\varphi_s}$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_{*s}^*$ ($s = \overline{1, p-1}$), а у іншому випадку (при заданні многочленної залежності у кожній підобласті) – $q_{s,1} =$

$$= \frac{\kappa_s^2}{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_s \cdot P_{(s,0)t}^{\varphi_s} + d_{s,0} \cdot \frac{2 \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} - d_{s,1} \cdot P_{s,0}^{\varphi_s} \times \right.$$

$$\times \frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} - d_{s,1} \cdot \frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi_s}^2 + \frac{2 \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s}{\kappa_s} \times$$

$$\left. \times P_{(s,0)\varphi_s}^{\varphi_s} \right), q_{s+1,1} = \frac{\kappa_{s+1}^2}{\varphi_{s+1}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_{s+1} \cdot P_{(s+1,0)t}^{\varphi_{s+1}} - d_{s+1,0} \cdot \frac{2 \cdot \varphi_{s+1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{s+1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{s+1}}{\kappa_{s+1}^2} \times \right.$$

$$\times P_{(s+1,0)\varphi_{s+1}\varphi_{s+1}}^{\varphi_{s+1}} - d_{s+1,1} \cdot P_{s+1,0}^{\varphi_{s+1}} \cdot \frac{\varphi_{s+1}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}^2} \cdot P_{(s+1,0)\varphi_{s+1}\varphi_{s+1}}^{\varphi_{s+1}} - d_{s+1,1} \cdot \frac{\varphi_{s+1}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}} \times$$

$$\left. \times P_{(s+1,0)\varphi_{s+1}}^{\varphi_{s+1}^2} - \frac{2 \cdot \varphi_{s+1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{s+1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{s+1}}{\kappa_{s+1}} \cdot P_{(s+1,0)\varphi_{s+1}}^{\varphi_{s+1}} \right), q_{s,2} = \frac{\kappa_s^2}{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \times$$

$$\times \left(\sigma_s \cdot P_{(s,1)t}^{\varphi_s} - d_{s,0} \cdot \left(\frac{(\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_{\varphi_s\varphi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)) \cdot \varphi_s^2}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{2 \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,1)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} \right) - d_{s,1} \cdot P_{s,0}^{\varphi_s} \cdot \left(\frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,1)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} + \right.$$

$$\left. \frac{2 \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \varphi_s}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} \right) - d_{s,1} \cdot P_{s,1}^{\varphi_s} \cdot \frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} - d_{s,2} \times$$

$$\times P_{s,0}^{\varphi_s} \cdot \frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,0)\varphi_s\varphi_s}^{\varphi_s} - d_{s,0} \cdot (b_{1,1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot P_{(s,0)\psi\psi}^{\varphi_s} + b_{1,2}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta\eta}^{\varphi_s} +$$

$$+ b_{2,1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot P_{(s,0)\psi}^{\varphi_s} + b_{2,2}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot P_{(s,0)\eta}^{\varphi_s}) - d_{s,1} \cdot \left(\frac{\varphi_s^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s} - 2 \cdot \varphi_s(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_s^2} \left) \cdot \mathcal{I}_{(s,1)\phi_s} - d_{s,2} \cdot \mathcal{I}_{s,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s^2} \cdot \mathcal{I}_{(s,0)\phi_s} + \frac{2 \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_s} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s} \cdot \mathcal{I}_{(s,1)\phi_s} - \frac{\left(\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s \phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \right) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}^2}{\kappa_s} \cdot \mathcal{I}_{(s,0)\phi_s} \right), \\
q_{s+1,2} &= \frac{\kappa_{s+1}^2}{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_{s+1} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,1)t} - d_{s+1,0} \cdot \left(\left(\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \times \mathcal{V}_{\phi_s \phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \right) \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s \phi_s} + \frac{2 \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_{s+1}^2} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{(s+1,1)\phi_s \phi_s} \right) - d_{s+1,1} \cdot \mathcal{I}_{s+1,0} \cdot \left(\frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,1)\phi_s \phi_s} + 2 \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \times \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s \phi_s} \right) - d_{s+1,1} \cdot \mathcal{I}_{s+1,1} \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s \phi_s} - \\
& - d_{s+1,2} \cdot \mathcal{I}_{s+1,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}^2} \cdot \mathcal{I}_{(2,0)\phi_s \phi_s} - d_{s+1,0} \cdot \left(b_{1,1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\psi\eta} + b_{1,2}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{(s+1,0)\eta\eta} + b_{2,1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\psi} + b_{2,2}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\eta} \right) - d_{s+1,1} \cdot \left(\frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}} + \right. \\
& \left. + \frac{2 \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_{s+1}^2} \right) \cdot \mathcal{I}_{(s+1,1)\phi_s} - d_{s+1,2} \cdot \mathcal{I}_{s+1,0} \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}{\kappa_{s+1}^2} \times \\
& \left. \times \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s} - \frac{2 \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_{s+1}} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,1)\phi_s} - \left(\mathcal{V}_{\phi_s}^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathcal{V}_{\phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \mathcal{V}_{\phi_s \phi_s}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \right) \cdot \frac{\mathcal{V}_{\phi_s}}{\kappa_{s+1}} \cdot \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s} \right), \dots, \mathcal{I}_{s,1} = d_{s,1} \cdot \left(c'_{(s,0)\phi_s}(0, \psi, \eta, t) + \right. \\
& \left. + \mathcal{I}_{(s,0)\phi_s}(0, \psi, \eta, t) \right), \mathcal{I}_{s+1,1} = d_{s+1,1} \cdot \left(c'_{(s+1,0)\phi_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{I}_{(s+1,0)\phi_s}(0, \psi, \eta, t) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{s,2} = d_{s,1} \cdot (c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(s,1)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s,1)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)) + \\
& + d_{s,1} \cdot (c_{s,1}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s,1}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(s,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)) + d_{s,2} \times \\
& \times (c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s,0}(0, \psi, \eta, t))^2 \cdot (c'_{(s,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)), \quad \mathcal{P}_{s+1,2} = \\
& = d_{s+1,1} \cdot (c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(s+1,1)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s+1,1)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)) + \\
& + d_{s+1,1} \cdot (c_{s+1,1}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s+1,1}(0, \psi, \eta, t)) \cdot (c'_{(s+1,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s+1,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)) + \\
& + d_{s+1,2} \cdot (c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t))^2 \cdot (c'_{(s+1,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{(s+1,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t)), \dots
\end{aligned}$$

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{s,0}(\mathbb{F}_s, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{2 \cdot (\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot (d_{s+1,0} \cdot c'_{(s+1,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + d_{s,0} \cdot c'_{(s,0)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \\
& + \kappa_s \cdot c_{s,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \mathbb{F}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{s,0}(\mathbb{F}_{s-1}, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{2 \cdot (\kappa_s - \kappa_{s-1})} \cdot (d_{s,0} \cdot c'_{(s,0)\mathbb{F}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + d_{s-1,0} \cdot c'_{(s-1,0)\mathbb{F}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + \\
& + \kappa_{s-1} \cdot c_{s-1,0}(0, \psi, \eta, t) - \kappa_s \cdot c_{s,0}(0, \psi, \eta, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \mathbb{F}_{s-1}} \quad (s = \overline{2, p}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{s,i}(\mathbb{F}_s, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\mathbb{F}_s} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} d\phi} d\phi \right) d\phi + (\kappa_{s+1} - \kappa_s)^{-1} \times \\
& \times (d_{s,0} \cdot c'_{(s,i)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + d_{s+1,0} \cdot c'_{(s+1,i)\mathbb{F}_s}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_s \cdot c_{s,i}(0, \psi, \eta, t) - \\
& - \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s+1,i}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s,i}(0, \psi, \eta, t)) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{s,i}(\mathbb{F}_{s-1}, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\mathbb{F}_{s-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\phi} q_{s,i}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} d\phi} d\phi \right) d\phi + (\kappa_s - \kappa_{s-1})^{-1} \times \\
& \times (d_{s-1,0} \cdot c'_{(s-1,i)\mathbb{F}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + d_{s,0} \cdot c'_{(s,i)\mathbb{F}_{s-1}}(0, \psi, \eta, t) + \kappa_{s-1} \cdot c_{s-1,i}(0, \psi, \eta, t) - \\
& - \kappa_s \cdot c_{s,i}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s,i}(0, \psi, \eta, t) + \mathcal{P}_{s-1,i}(0, \psi, \eta, t)) \quad (s = \overline{2, p}, i = \overline{1, n}),
\end{aligned}$$

$$P_{s,n+1}^{(s)}(\psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\psi} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\eta} q_{s,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\psi +$$

$$+ \frac{P_{s+1,n+1}^{(s+1)}(0, \psi, \eta, t) + P_{s,n+1}^{(s)}(0, \psi, \eta, t)}{\kappa_{s+1} - \kappa_s} \quad (s = \overline{1, p-1}),$$

$$P_{s,n+1}^{(s)}(\psi_{s-1}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_{s,0}} \cdot \int_0^{\psi_{s-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} \cdot \int_0^{\eta} q_{s,n+1}(\phi, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,0}} \phi} d\phi \right) d\psi +$$

$$+ \frac{P_{s,n+1}^{(s)}(0, \psi, \eta, t) + P_{s-1,n+1}^{(s-1)}(0, \psi, \eta, t)}{\kappa_s - \kappa_{s-1}} \quad (s = \overline{2, p}).$$

Функції $P_{s,i}^{(s)}$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) у випадку наявності додаткових джерел знайдемо, розв'язавши задачу:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)\psi\eta}^{(s)} - \frac{V_1^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)\varphi}^{(s)} = \sigma_s \cdot P_{(s,0)t}^{(s)}, \\ P_{s,0}^{(s)}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,0}^{(s)}(\varphi, 0, \eta, t) = M_{s,0}^{(s)}(\varphi, \eta, t) - \dot{M}_{s,0}^{(s)}(\varphi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,i)\psi\eta}^{(s)} - \frac{V_1^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i)\varphi}^{(s)} = \sigma_s \cdot P_{(s,i)t}^{(s)} - \\ - M_{s,i}^{(s)}(\varphi, \psi, \eta, t), P_{s,i}^{(s)}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, P_{s,i}^{(s)}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M_{s,i}^{(s)}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, 2n+1}), \end{cases}$$

де $\dot{M}_{1,i}^{(1)}(\varphi, \eta, t) = c_{1,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{1,i-1/2}^{(1)}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $\dot{M}_{s,i}^{(s)}(\varphi, \eta, t) = c_{s,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{s,i-1/2}^{(s)}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{s,i-1/2}^{(s)}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($s = \overline{2, p-1}, i = \overline{0, 2n+1}$), $\dot{M}_{p,i}^{(p)}(\varphi, \eta, t) = c_{p,i-1/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{p,i-1/2}^{(p)}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{p,i-1/2}^{(p)}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$).

Тут при заданні сталих коефіцієнтів дифузії у кожній підобласті

$$M_{s,i}^{(s)} = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k}^* \cdot P_{(s,i-k)\psi\eta}^{(s)} + \sum_{k=0}^{i-1} B_{2,1,k}^* \cdot P_{(s,i-1-k)\psi}^{(s)} + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k^*}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)\varphi\varphi}^{(s)} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{1,2,k}^* \cdot P_{(s,i-2-k)\eta\eta}^{(s)} + B_{2,2,k}^* \cdot P_{(s,i-2-k)\eta}^{(s)} \right) \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_k^*}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)\varphi}^{(s)} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, 2n+1}),$$

V_k^* , $B_{1,1,k}^*$, $B_{1,2,k}^*$, $B_{2,1,k}^*$ і $B_{2,2,k}^*$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\Psi^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\Psi, \eta)$ у ряд Тейлора в околі $\Psi = 0$, при заданні ж інтегральних залежностей коефіцієнтів дифузії від величин концентрацій забруднюючої речовини у кожній підобласті $M_{s,i}^0 = d_{s,0} \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k}^* \cdot P_{(s,i-k)}'' \Psi \Psi + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,1,k}^* \times \right. \right.$
 $\times P_{(s,i-1-k)}' \Psi \left. \right) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k^*}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)}'' \varphi \varphi + B_{1,2,k}^* \cdot P_{(s,i-2-k)}'' \eta \eta + B_{2,2,k}^* \cdot P_{(s,i-2-k)}' \eta \right) \left. \right) +$
 $+ \sum_{k=1}^i \frac{V_k^*}{\kappa_s} \cdot P_{(s,i-k)}' \varphi + I(i, 2) \cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,1,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}'' \Psi \Psi \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^0 \cdot P_{s,i-1-m}^0 dt + \right.$
 $+ \sum_{m=0}^{i-2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{2,1,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}' \Psi \cdot \int_0^t \left(A_{(s,m-l)}^0 \cdot P_{s,i-2-m}^0 + A_{s,m-l}^0 \cdot P_{(s,i-2-m)}' \Psi \right) dt \left. \right) + I(i, 3) \times$
 $\times \sum_{m=0}^{i-3} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l B_{1,2,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}' \Psi \cdot \int_0^t A_{s,m-l}^0 \cdot P_{s,i-1-m}^0 dt + I(i, 4) \cdot \sum_{m=0}^{i-4} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^l \left(\left(\frac{V_k^*}{\kappa_s} \cdot P_{(s,l-k)}'' \varphi \varphi + \right. \right.$
 $+ B_{1,2,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}'' \eta \eta + B_{2,2,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}' \eta \left. \right) \times \int_0^t A_{s,m-l}^0 \cdot P_{s,i-1-m}^0 dt + \frac{V_k^*}{\kappa_s^2} \cdot P_{(s,i-2-k)}' \varphi \times$
 $\times \left(\int_0^t A_{s,m-l}^0 \cdot P_{(s,i-3-m)}' \varphi dt + \int_0^t A_{(s,m-l)}^0 \cdot P_{s,i-3-m}^0 dt \right) + B_{1,2,k}^* \cdot P_{(s,l-k)}' \eta \cdot \left(\int_0^t A_{s,m-l}^0 \cdot P_{(s,i-3-m)}' \eta dt + \right.$
 $\left. \left. + \int_0^t A_{(s,m-l)}^0 \cdot P_{s,i-3-m}^0 dt \right) \right) (s = \overline{1, p})$, а при многочленних – $M_{s,1}^0 = -d_{s,0} \cdot (b'_{1,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \times$
 $\times \Psi \cdot P_{(s,0)}'' \Psi \Psi + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)}' \Psi) + \frac{2 \cdot \Psi(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)}' \varphi$, $M_{s,2}^0 = -d_{s,0} \times$
 $\times \left(\frac{\Psi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P_{(s,0)}'' \varphi \varphi + b'_{1,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot P_{(s,1)}'' \Psi \Psi + \frac{b'_{1,1\Psi\Psi}(\varphi, 0, \eta)}{2} \cdot \Psi^2 \cdot P_{(s,0)}'' \Psi \Psi + b_{1,2}(\varphi, 0, \eta) \times \right.$
 $\times P_{(s,0)}'' \eta \eta + b_{2,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,1)}' \Psi + b'_{2,1\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi \cdot P_{(s,0)}' \Psi + b_{2,2}(\varphi, 0, \eta) \cdot P_{(s,0)}' \eta \left. \right) +$

$$+ \frac{2 \cdot \Psi(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi_{\Psi}(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,1)\varphi} + \frac{(\Psi(\varphi, 0, \eta) \cdot \Psi_{\Psi}(\varphi, 0, \eta) + \Psi_{\Psi\Psi}(\varphi, 0, \eta)) \cdot \Psi^2}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\varphi}, \dots$$

$(s = \overline{1, p})$.

У випадку відсутності додаткових джерел функції $P'_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P''_{(s,0)\Psi\Psi} - \frac{\Psi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,0)\varphi} = \sigma_s \cdot P'_{(s,0)t}, \\ P'_{s,0}(\varphi, \Psi, \eta, t) \xrightarrow{\Psi \rightarrow \infty} 0, P'_{(s,0)\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) = -M'_{s,0}(\varphi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{s,0} \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot P''_{(s,i)\Psi\Psi} - \frac{\Psi^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_s} \cdot P'_{(s,i)\varphi} = \sigma_s \cdot P'_{(s,i)t} - \\ - M'_{s,i}(\varphi, \Psi, \eta, t), P'_{s,i}(\varphi, \Psi, \eta, t) \xrightarrow{\Psi \rightarrow \infty} 0, P'_{(s,i)\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -M'_{s,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне} \end{cases} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, 2n+1}), \end{cases}$$

де $M'_{1,i}(\varphi, \eta, t) = c_{1,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{1,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $M'_{s,i}(\varphi, \eta, t) =$
 $= c_{s,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{s,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{s,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($s = \overline{2, p-1}, i = \overline{0, 2n+1}$),
 $M'_{p,i}(\varphi, \eta, t) = c_{p,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{p,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{p,i-i/2\Psi}(\varphi, 0, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$).

Задачі для знаходження функцій $P'_{s,i}$, $P'_{s,i}$, $P'_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно.

3.2.5. Результати числових експериментів прогнозування процесів масопереносу забруднюючих речовин у кусково-однорідних пористих середовищах

Для комп'ютерного моделювання процесу масопереносу деякої забруднюючої речовини у двошаровому кусково-однорідному недеформівному водонасиченому пористому середовищі, що характеризується сталими коефі-

цієнтами фільтрації $\kappa_1 = 0.45$ /добу, $\kappa_2 = 0.3$ /добу, активної пористості $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.5$ і дифузії $D_1 = 0.008$ м²/добу, $D_2 = 0.005$ м²/добу, використано ідеальні фільтраційні фони, які отримані в п. 2.2.5 для області $G_z^{5,2}$ при різних положеннях поверхні розділу. На рис. 3.5 зображено розподіли середніх величин концентрацій забруднюючих речовин $c_{сер}(\varphi, t)$ при $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$, $c_*(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot (1 + 0.5 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\psi^2 + \eta^2)})$. Проведений числовий експеримент демонструє необхідність врахування шаруватості середовища.

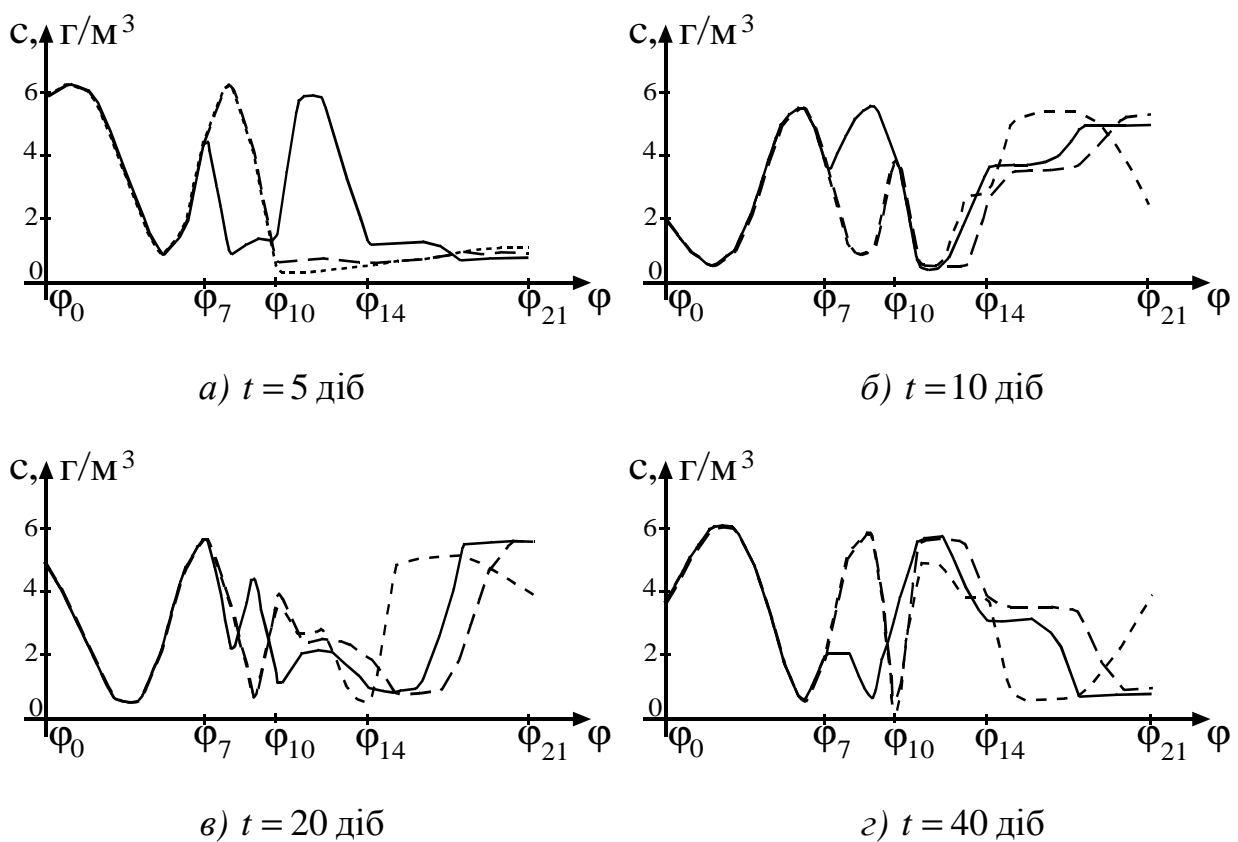


Рис. 3.5. Розподіли середніх величин концентрацій забруднюючої речовини вздовж двошарового пористого середовища (суцільна лінія — та штрихові --- і ---- відповідають відповідно модельним областям $G_z^{5,2,j}$ ($j = \overline{1,3}$))

Для комп'ютерного моделювання процесу двохкомпонентного масопереносу деякої забруднюючої речовини у двошаровому пористому середовищі, що характеризується різними сталими коефіцієнтами фільтрації

$\kappa_1 = 0.45$ м/добу, $\kappa_2 = 0.3$ м/добу, активної пористості $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.5$ і дифузії $D_{1,1} = 0.008$ м²/добу, $D_{1,2} = 0.005$ м²/добу, $D_{2,1} = 0.006$ м²/добу, $D_{2,2} = 0.003$ м²/добу, використано ідеальний фільтраційний фон для області $G_z^{5,2,2}$ (рис. 2.21 б). На рис. 3.6 зображено розподіли середніх величин концентрацій компонент забруднюючої речовини $c_{1\text{сеп}}(\varphi, t)$ і $c_{2\text{сеп}}(\varphi, t)$ при $c_1^0(\varphi, \psi, \eta) = c_2^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$, $c_{1*}(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot (1 - 0.5 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\psi^2 + \eta^2)})$, $c_{2*}(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot (1 - 0.5 \cdot \cos(t) \cdot e^{-0.1(\psi^2 + \eta^2)})$, $\varepsilon \cdot \mathcal{R}_{1,2,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0.02$, $\varepsilon \cdot \mathcal{R}_{2,2,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0.01$.

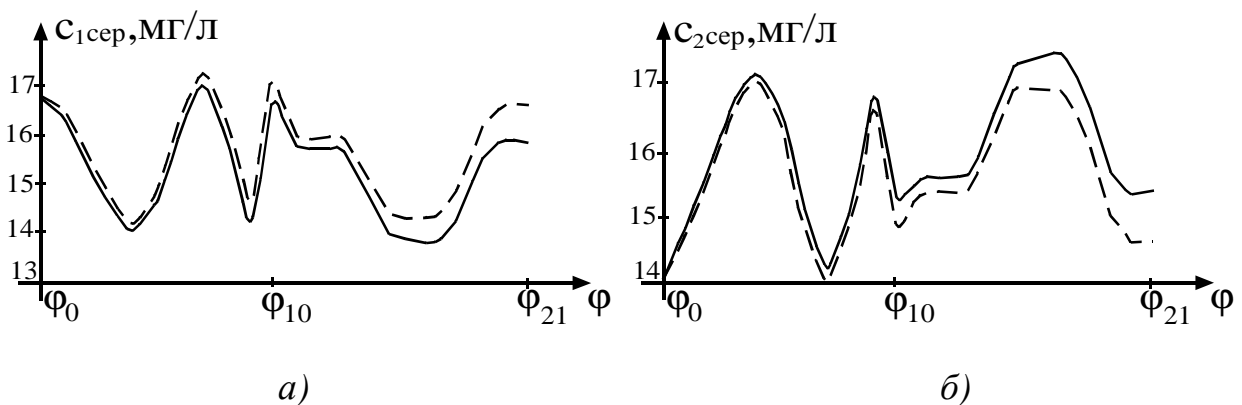


Рис. 3.6. Розподіли середніх величин концентрацій забруднюючої речовини вздовж двошарового пористого середовища (суцільна і штрихова лінії відповідають варіантам врахування і неврахування взаємодії речовин між собою)

Проведений числовий експеримент підтверджує необхідність врахування масообмінних процесів при дослідженні явищ масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамович О. В.* Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах / О. В. Абрамович, Ю. Є. Климяк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 9 (18). – Рівне : РВВ РДГУ, 2012. – С. 5–21.
2. *Авер'янов С. Ф.* Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / С. Ф. Авер'янов. – М. : Колос, 1982. – 237 с.
3. *Альфортс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. – Киев : Мир, 1969. – 133 с.
4. *Андерсон Д.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.; – Т. 2. – 392 с.
5. *Антонцев С. Н.* Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах / С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов // Докл. АН СССР. – 1978. – 243, № 3. – С. 553–556.
6. *Аравин В. И.* Расчет плоской фильтрации в грунтах с криволинейной анизотропией / В. И. Аравин // Изв. ВНИИГ. – 1974. – Вып. 104. – С. 3–9.
7. *Аравин В. И.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – М. : Гостехиздат, 1953. – 616 с.
8. *Баренблатт Г. И.* Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1984. – 303 с.
9. *Барсегян Р. М.* Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах / Р. М. Барсегян. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1977. – 303 с.
10. *Басниев К. С.* Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. И. Кочина, М. В. Максимов. – М. : Недра, 1993. – 416 с.
11. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ, 2003. – 632 с.
12. *Бэр Я.* Физико-математические основы фильтрации воды : Пер. с англ. / Я. Бэр, Д. Заславский, С. Ирмей. – М. : Мир, 1971. – 451 с.
13. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Физматгиз, 1958. – 408 с.

14. *Бомба А. Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса / А. Я. Бомба // В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения. – М. : Наука, 1988. – С. 115–120.
15. *Бомба А. Я.* Асимптотичні методи в задачах екології: Методичний посібник / А. Я. Бомба, І. І. Маркуш. – Ужгород–Рівне, 1994. – 47 с.
16. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
17. *Бомба А. Я.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2008. – 254 с.
18. *Бомба А. Я.* Просторові аналоги крайових задач на квазіконформі відображення / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // VII Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”: В 2-х т. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2006. – Т. 1. – С. 60.
19. *Бомба А. Я.* Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // В кн.: XII Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. Тези доповідей. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – С. 38–39.
20. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37–44.
21. *Бомба А. Я.* Пространственные сингулярно возмущённые краевые задачи типа “конвекция-диффузия” с запаздыванием / А. Я. Бомба, Ю. Е. Климюк, В. В. Скопецкий // Компьютерная математика. – 2007. – № 2. – С. 3–11.
22. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 105–113.
23. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – С. 31–32.

24. *Бомба А. Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної гетеродифузії / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, Ю. Є. Климюк // В кн. : Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. Тези доповідей. – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – С. 138–139.
25. *Бондарев Э. Н.* Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции / Э. Н. Бондарев, В. Н. Николаевский // Журн. прикл. мат. и техн. физики. – 1962. – №5. – С. 127–134.
26. *Бочевер Ф. М.* Защита подземных вод от загрязнения / Ф. М. Бочевер, Н. М. Лапшин, А. Е. Орадовская. – М. : Недра, 1979. – 254 с.
27. *Булавацкий В. М.* Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 48–56.
28. *Булавацький В. М.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецкий. – К. : Наукова думка, 2005. – 283 с.
29. *Булавацький В. М.* Системний підхід к проблемі математического моделювання процесу фільтраційної консолидації / В. М. Булавацький, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 73–81.
30. *Булавацький В. М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики / В. М. Булавацький. – К. : Наук. думка, 1993. – 132 с.
31. *Бурак Я. Й.* Про вертикальну міграцію радіонуклідів у ґрунті // Доп. НАН України / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – 1995. – № 11. – С. 34–37.
32. *Бутузов В. Ф.* Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “реакция-диффузия-перенос” / В. Ф. Бутузов // Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. – Рига: Intelstrv, 1990. – С. 18–26.
33. *Бутузов В. Ф.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, К. Р. Шнайдер // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2005. – № 1. – С. 9–13.
34. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М. : Мир, 1968. – 464 с.

35. *Ван-даjk М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-даjk. – М. : Мир, 1967. – 310 с.
36. *Василевский Ю. В.* Параллельное трехмерное моделирование распространения примесей в пористых средах / Ю. В. Василевский, И. В. Капырин // Матричные методы и технологии решения больших задач. – М. : ИВМ РАН, 2005. – С. 33–50.
37. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.
38. *Васильева А. Б.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов // Фундаментальная и прикладная математика, 4, № 3, 1998. – С. 799–851.
39. *Веригин Н. Н.* Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М.: Наука, 1967. – С. 237–313.
40. *Веригин Н. Н.* Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. – М. : 1980. – С. 19–24.
41. *Веригин Н. Н.* Фильтрация суспензий через пористые среды / Н. Н. Веригин, Г. М. Коммунар // Труды ВНИИ – ВОДГЕО “Научные исследования в области инженерной гидрологии”. – М. : – 74, 1978. – С. 120–124.
42. *Вишик М. И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. Я. Люстерник // Успехи математ. наук. – 1957. – 12. – Вып. 5. – С. 3–122.
43. *Власюк А. П.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с „плавающими” узлами / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Киев, 1989. – 55 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т матем, 89.79).
44. *Власюк А. П.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. – 210 с.

45. *Власюк А. П.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
46. *Власюк А. П.* Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
47. *Волковысский Л. И.* Квазиконформные отображения / Л. И. Волковысский. – Львов: Изд. Львовск. гос. ун-та, 1954. – 156 с.
48. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1977. – 288 с.
49. *Герсеванов Н. М.* Основы динамики грунтовой массы / Н. М. Герсеванов. – М.–Л. : ОНТИ, 1937. – 242 с.
50. *Гіроль М. М.* Техногенна безпека : Підручник / М. М. Гіроль, Л. Р. Ниник, В. Й. Чабан. – Рівне : Вид-во УДВГП, 2004. – 452 с.
51. *Годунов С. К.* О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С. К. Годунов, Г. П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – 7, № 5. – С. 1031–1059.
52. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. – М. : Высшая школа, 1972. – 368 с.
53. *Голубев Г. В.* Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде / Г. В. Голубев, Г. Г. Тумашев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 190 с.
54. Доочистка сточных вод на зернистых фильтрах / Н. Н. Гироль, М. Г. Журба, Г. М. Семчук, Б. Н. Якимчук; под общ. ред. Н. Н. Гироля. – К., 1998. – 92 с.
55. *Жуковский Н. Е.* Собрание сочинений. Том. 2. Гидродинамика / Н. Е. Жуковский. – М. : ГИТТЛ, 1949. – 760 с.
56. *Заграй Я. М.* Моделювання і прогнозування стану доквілля: навч. посібник / Я. М. Заграй, О. А. Котовенко. – К. : КНУБА, 2008. – 97 с.
57. *Ердей А.* Асимптотичні розкладання. Переклад з англ. / А. Ердей. – М. : Физматгиз, 1962. – 382 с.

58. *Ельсгольц Л. С.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. С. Ельсгольц, С. Б. Норкин. – М. : Наука, 1971. – 296 с.
59. *Иванов В. И.* Конформные отображения / В. И. Иванов, В. Ю. Попов. – МГУ, УРСС, 2002. – 167 с.
60. *Ильин А. М.* Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени / А. М. Ильин, М. А. Меленцов // Труды института математики и механики. – 2005. – Т. 11, № 1. – С. 97–111.
61. *Ильинский Н. Б.* Аналитические решения задач фильтрации. Обратный метод вариационные теоремы, оптимизация и оценки / Н. Б. Ильинский, А. Р. Касимов, Н. Д. Якимов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 2. – С. 3–19.
62. *Исакова Е. К.* Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром / Е. К. Исакова // Матем. сборник. – 1966. – 69 (111). – С. 300–320.
63. *Истомина В. С.* Фильтрационная устойчивость грунтов / В. С. Истомина. – М. : Госстройиздат, 1957. – 295 с.
64. *Калугин Ю. И.* Моделирование удаления железа из воды фильтрованием с учетом изменения фильтрационных свойств среды / Ю. И. Калугин, С. К. Киселев, А. Я. Олейник // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 83–187.
65. *Киселев С. К.* Гидродинамическая модель фильтрования при очистке подземных вод от соединений железа / С. К. Киселев, А. Я. Олейник // Прикладная гидромеханика. – 1999. – № 1 (73). – С. 20–25.
66. *Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання одного класу просторових нелінійних сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, А. О. Теслюк, Ю. О. Шепетько // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РВВ РДГУ, 2011. – С. 76–91.
67. *Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, Р. А. Рожко // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 9 (18). – Рівне : РВВ РДГУ, 2012. – С. 101–115.

68. *Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових процесів масо-переносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, О. В. Абрамович, Р. А. Рожко // В кн.: Шістнадцята Всеукраїнська (Одинадцята Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики. Тези доповідей. – Львів : ЛНУ, 2013. – С. 148–149.
69. *Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових процесів масо-переносу забруднюючих речовин у пористих середовищах з урахуванням їх мікропористої структури і масообміну між компонентами / Ю. Є. Климюк, Г. А. Діда, Н. А. Давидюк // В кн.: Шістнадцята Всеукраїнська (Одинадцята Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики. Тези доповідей. – Львів : ЛНУ, 2013. – С. 150–151.
70. *Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 10 (19). – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 49–65.
71. *Климюк Ю. Є.* Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації / Ю. Є. Климюк, І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 2 (11). – Рівне : РВВ РДГУ, 2004. – С. 121–129.
72. *Климюк Ю. Є.* Оборнення крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // В кн.: Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. Тези доповідей. – Львів : ІППММ ім. Я. Підстригача НАН України, 2009. – С. 124–126.
73. *Климюк Ю. Є.* Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РВВ РДГУ, 2011. – С. 51–62.
74. *Климюк Ю. Є.* Побудова алгоритму числового розв'язування просторових аналогів оборнених крайових задач на конформні відображення для

- одного класу кусково-однорідних областей / Ю. Є. Климюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 9 (18). – Рівне : РВВ РДГУ, 2012. – С. 58–72.
75. *Климюк Ю. Є.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” із запізненням в анізотропних середовищах / Ю. Є. Климюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 4 (13). – Рівне : РВВ РДГУ, 2007. – С. 89–95.
76. *Климюк Ю. Є.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” / Ю. Є. Климюк // II Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, педагогів, психологів та молодих науковців “Наука, освіта, суспільство очима молодих”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2007. – С. 125–126.
77. *Климюк Ю. Є.* Числова реалізація аналога методу конформних відображень побудови просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідною засипкою / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РВВ РДГУ, 2011. – С. 63–75.
78. *Климюк Ю. Є.* Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими екіпотенціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 7 (16). – Рівне : РВВ РДГУ, 2010. – С. 84–92.
79. *Климюк Ю. Є.* Числове розв’язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 9 (18). – Рівне : РВВ РДГУ, 2012. – С. 73–100.
80. *Климюк Ю. Є.* Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв’язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 6 (15). – Рівне : РВВ РДГУ, 2009. – С. 59–71.
81. *Климюк Ю. Є.* Числове розв’язування обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв’язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів,

- аспірантів та науковців “Інформаційні технології в професійній діяльності”. – Рівне : РІВМУРОЛ “Україна”, 2009. – С. 99–101.
82. *Климюк Ю. Є.* Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 5 (14). – Рівне : РВВ РДГУ, 2008. – С. 104–143.
 83. *Ковальчук П. І.* Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: навч. посібник / П. І. Ковальчук. – К. : Либідь, 2003. – 208 с.
 84. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М. : Мир, 1964. – 350 с.
 85. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон. – М. : Мир, 1966. – 159 с.
 86. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М. : Мир, 1972. – 274 с.
 87. *Коппенфель С. В.* Практика конформных отображений / С. В. Коппенфель, Ф. Штальман. – М. : Мир, 1963. – 407 с.
 88. *Кочин Н. Е.* Теор. гидромеханика, ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Физматлит, 1963. – 728 с.
 89. *Кочина Н. Н.* Мир подземных жидкостей / Н. Н. Кочина, П. Я. Кочина, В. Н. Николаевский. – М. : ИФЗ, 1994. – 112 с.
 90. *Кремез В. С.* Розрахунок витрат напору на фільтрі при очистці води з низькою концентрацією завислих забруднень / В. С. Кремез // Меліорація і водне господарство. – 2000. – Вип. 87. – С. 70–74.
 91. *Крылов В. И.* Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т.1. – 584с.; 1977. – Т.2. – 611 с.
 92. *Курант Р.* Уравнение с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с.
 93. *Кухарський В. М.* Стабілізація розв’язків задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченних елементів / В. М. Кухарський, Я. Г. Савула, Н. П. Головач // Моделювання та інформаційні технології. – 2002. – Вип. 15. – С. 3–14.
 94. *Кухарський В. М.* Чисельне дослідження задач конвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами / В. М. Кухарський, Я. Г. Савула, М. Ф. Копитко // Волинський математичний вісник. – Вип. 8. – Рівне : РВВ РДГУ, 2001. – С. 86–92.

95. *Лаврентьев М. А.* Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука. – 1977. – 407 с.
96. *Лаврик В. И.* Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба // ДАН УССР. – 1980. – № 5. – С. 47–51.
97. *Лаврик В. І.* Математичне моделювання деяких нерівноважних фільтраційних процесів / В. І. Лаврик, В. М. Булавацький // Доп. НАН України. – 2003. – №1. – С. 37–43.
98. *Лаврик В. И.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев, 1985. – 16 с.
99. *Ламб Г.* Гидродинамика / Г. Ламб. – М. : ГИТТЛ, 1947. – 929 с.
100. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидрогазодинамика: Собр. тр. в 2 т. / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд-во АН СССР, 1953. – 554 с.
101. *Лыков А. В.* Теория массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М. : Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.
102. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.
103. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 398 с.
104. *Лукнер Л.* Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. – М. : Недра, 1986. – 209 с.
105. *Люстерник Л. А.* Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр / Л. А. Люстерник, О. А. Олейник // Тр. 3 матем. съезда. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – Т. 2. – С. 158–169.
106. *Ляшко И. И.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
107. Математичне моделювання тепло-вологопереносу в ґрунті та задачі інтерпретації даних дистанційного зондування земної поверхні / Я. С. Підстригач, Б. В. Гера, Є. Я. Чапля та ін. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 8–20.
108. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы / В. П. Маслов. – М. : Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.

109. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький, С. С. Каштан, С. В. Ярощак. – Рівне : НУВГП–РДГУ, 2013. – 415 с.
110. *Миколаївський В. М.* Механіка пористих і тріщинуватих середовищ / В. М. Миколаївський. – М. : Недра, 1984. – 232 с.
111. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика / Л. М. Милн-Томсон. – М. : Мир, 1964. – 660 с.
112. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
113. Моделювання і прогнозування стану довкілля: підручник, гриф МОН / В. І. Лаврик, В. М. Боголюбов, Л. М. Полетаєва та ін.; за ред. В. І. Лаврика. – К. : Академія, 2010. – 400 с.
114. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1969. – 379 с.
115. *Молтянер Г. Л.* Массоперенос в подземных водах / Г. Л. Молтянер, А. С. Хабиров. – Ташкент : Укнтувчи, 1976. – 100 с.
116. Моніторинг довкілля: підручник / В. М. Боголюбов, М. О. Клименко, В. Б. Мокін та ін.; під ред. В. М. Боголюбова. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 272 с.
117. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М. : Мир, 1984. – 535 с.
118. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних: монографія / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилук, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2011. – 280 с.
119. *Николадзе Г. И.* Подготовка воды для питьевого и промышленного водоснабжения / Г. И. Николадзе, Д. М. Минц, А. А. Кастальский. – М. : Высшая школа, 1984. – 368 с.
120. *Николаевский В. Н.* Конвективная диффузия в пористых средах // Прикл. математика и механика / В. Н. Николаевский. – 1959. – 23, № 6. – С. 1042–1050.
121. *Николаевский В. Н.* Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках / В. Н. Николаевский // Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 189–193.
122. *Нужин М. Т.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений: Обратные краевые задачи теории фильтрации / М. Т. Нужин, Н. Б. Ильинский. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1963. – 140 с.

123. *Нумеров С. Н.* Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев // Труды ЛПИ. – 1947. – № 4. – С. 165–169.
124. *Олійник О. Я.* Деякі результати теоретичних досліджень процесів масообміну в пористих середовищах / О. Я. Олійник, Ю. І. Калугін // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2005. – Вип. 5 – С. 100–112.
125. *Олейник А. Я.* Математическая модель трансформации и миграции азотных соединений в почве при внесении минеральных азотных удобрений / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Доповіді АН України. – 1992. – № 4. – С. 142–145.
126. *П’янило Я. Д.* Дослідження математичних моделей конвективного гетеродифузного масопереносу / Я. Д. П’янило, Є. Я. Чапля // Моделювання та інформаційні технології. – Київ, 2002. – Вип. 15. – С. 103–111.
127. *Павловский Н. Н.* Движение грунтовых вод: Собр. соч. в 2 т. / Н. Н. Павловский. – М. : Изд- во АН СССР, 1956. – 771 с.
128. *Патрашев А. Н.* Диффузия солей при фильтрации по трещинам / А. Н. Патрашев // Изв. ВНИИГ. – 1946. – № 31. – С. 55–92.
129. *Патрашев А. Н.* Диффузия солей при одномерной фильтрации / А. Н. Патрашев, Н. Х. Арутюнян. – Л. : Изв. ВНИИГ, 1941, 30. – С. 64–77.
130. *Пачепский Я. А.* Математическое моделирование физико-химических процессов в почвах / Я. А. Пачепский. – М. : Наука, 1990. – 188 с.
131. *Пеньковский В. И.* Промывка почвы с подвижной границей промачивания в условиях нелинейной кинетики солеотдачи / В. И. Пеньковский // В кн.: Математические вопросы механики. – Новосибирск, 1975. – С. 133–137.
132. *Петрик М. Р.* Математическое моделирование масопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой пинтерфейсных взаимодействий / М. Р. Петрик // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 114–134.
133. *Петрик М. Р.* Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа “фильтрация-консолидация” / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 74–86.
134. *Пивень В. Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень. – Орёл : Издательство ГОУ

- ВПО “Орловский государственный университет”, Полиграфическая фирма “Картуш”, 2006. – 508 с.
135. *Положий Г. М.* Численные решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. М. Положий. – К. : Изд-во КГУ, 1982. – 161 с.
136. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664 с.
137. Прогноз миграции и рассеяния загрязняющих веществ после их сброса в водоносные пласты / А. А. Готлиф, В. Д. Озерова // Изв. ВНИИ гидротехн., 2001. – 239. – С. 237–245.
138. Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах: монографія / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, В. Є. Гончарук, А. Р. Торський. – Львів : Євросвіт, 2010. – 261 с.
139. *Радыгин В. М.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов / В. М. Радыгин, О. В. Голубева. – М. : Высш. школа, 1983. – 160 с.
140. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной. – М. : Наука, 1969. – 546 с.
141. *Рауз Х.* Механика жидкости / Х. Рауз. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
142. *Рекс Л. М.* Перераспределение солей в почвогрунтовом слое / Л. М. Рекс // Журн. прикл. мех. и техн. физики. – 1967. – № 6. – С.35–39.
143. *Рудаков Д. В.* Математичні методи в охороні підземних вод: навч. посібник / Д. В. Рудаков. – Д. : Національний гірничий університет, 2012. – 158 с.
144. *Савула Я. Г.* Некоторые приложения метода конечных элементов / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, В. Н. Вовк. – Львов: Изд-во Львов. унта, 1981. – 38 с.
145. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
146. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 247 с.
147. *Самарский А. А.* Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Наука, Физматлит., 1997. – 320 с.
148. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1976. – 536 с.

149. *Сергиенко И. В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.
150. *Сівак В. М.* Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. Є. Климяк // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2013. – С. 135.
151. *Сівак В. М.* Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. О. Шепетько, Ю. Є. Климяк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне: Вид-во НУВГП, 2011. – С. 37–55.
152. *Сівак В. М.* Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідним завантаженням / В. М. Сівак, Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 1 (57). – Рівне: Вид-во НУВГП, 2012. – С. 48–58.
153. *Сівак В. М.* Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із тришаровою засипкою / В. М. Сівак, Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне: Вид-во НУВГП, 2011. – С. 70–82.
154. *Стеля О. Б.* Математичне моделювання в системі моніторингу майданчика об'єкту “вектор” (30-км зона ЧАЕС) / О. Б. Стеля, М. С. Ходорівський // Волинський математичний вісник. – Вип. 5. – Рівне : РВВ РДПІ, 1998. – С. 134–138.
155. Стратегії розвитку України: теорія і практика / За ред. О. С. Власюка. – К. : НІСД, 2002. – 864 с.
156. *Сушко В. Г.* О некоторых сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с вырождением / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1989. – 304, №4. – С. 777–780.
157. *Сушко В. Г.* Об асимптотике по малому параметру для одного квазилинейного параболического уравнения / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1972. – 205, №4. – С. 794–797.

158. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Мат. сб. – 1952. – 31(73), № 3. – С. 575–586.
159. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных / А. Н. Тихонов // УМН. – 1952. – 7, вып. 1 (47). – С. 140–142.
160. *Тумашев Г. Г.* Обратные краевые задачи и их приложения / Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
161. *Требин Г. Ф.* Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах / Г. Ф. Требин. – М. : Гостоптехиздат, 1959. – 160 с.
162. *Треногин В. А.* Об асимптотике решений почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем / В. А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, вып. 1 (9). – С. 163–170.
163. *Треногин В. А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика / В. А. Треногин // УМН. – 1970. – 25, вып. 4. – С. 123–156.
164. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1983. – 352 с.
165. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений / А. Н. Филатов. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
166. Фильтрация из водохранилищ и прудов / [С. В. Васильев, Н. Н. Веригин, Г. А. Газумов та ін.]. – М. : Колос, 1975. – 303 с.
167. *Фешенко С. Ф.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фешенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К. : Наукова думка, 1966. – 251 с.
168. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов: В 2-х т. / В. А. Флорин. – Л.; М. : Госстройиздат, 1961. – Т. 2. – 544 с.
169. *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений / П. Ф. Фильчаков. – Киев, 1964. – 536 с.
170. *Фильчаков П. Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями / П. Ф. Фильчаков. – К. : Изд-во АН УССР, 1960. – Т. 2. – 255 с.
171. *Фрид Ж.* Загрязнение подземных вод / Ж. Фрид. – М. : Недра, 1981. – 304 с.
172. *Христианович С. А.* Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая

- теория пластичности. Движение грунтовых вод / С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон; Акад. наук СССР, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова; под ред. Н. Е. Кочина. – М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1938. – 407 с.
173. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2006. – 414 с.
174. *Чапля Є. Я.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу: монографія / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
175. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 367 с.
176. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика. Техническая механика жидкости: учебник / Р. Р. Чугаев. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 672 с.
177. *Шейдеггер А. Е.* Фізика течії рідини через пористі середовища. Пер. з англ. / А. Е. Шейдеггер. – М. : Гостоптехіздат, 1960. – 249 с.
178. *Шержуков Б. С.* Диффузия и неравномерный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков / Б. С. Шержуков. – Тр. ин-та ВОДГЕО. – М. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.
179. *Шестаков В. М.* Динамика подземных вод / В. М. Шестаков. – М. : Изд-во МГУ, 1979. – 368 с.
180. *Шестаков В. М.* Модели переноса в неоднородных пластах / В. М. Шестаков // Теория и расчеты фильтрации. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 179–187.
181. *Шехтман Ю. М.* Фильтрация малоконцентрированных суспензий / Ю. М. Шехтман. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 212 с.
182. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1974. – 711 с.
183. *Шульгин Д. Ф.* Двумерная задача промывки двухслойной толщи почвогрунтов / Д. Ф. Шульгин, М. П. Чиркин // Труды САНИИРИ. – 1971. – Вып. 126. – С. 145–159.
184. *Эмих В. Н.* Гидродинамика фильтрационных течений с дренажом / В. Н. Эмих. – Новосибирск : Наука, 1993. – 213 с.
185. *Amsden A. A.* A simple scheme for generating general curvilinear grids / A. A. Amsden, C. W. Hirt // J. Comp. Phys. – 1973. – 11, № 3. – P. 348–369.

186. *Arnold D. N.* Course of complex analysis. – Lecture notes, Penn State, 1997. – 38 p.
187. *Aronson D. G.* Linear parabolic equations containing a small parameter / D. G. Aronson // *J. Rational Mech. Anal.* – 1956. – № 5. – P. 1003–1014.
188. *Barfield W. D.* Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes / W. D. Barfield // *J. Comp. Phys.* – 1970. – 5, № 1. – P.23–33.
189. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media / J. Bear. – New York : American Elsevier publ. co., 1967. – 764 p.
190. *Bear J.* Hydraulics of groundwater / J. Bear. – New York etc. : McGraw-Hill intern. book co., 1979. – XIII. – 567 p.
191. *Bear J.* Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht et al. : Kluwer, 1990. – 533 p.
192. *Bobisud L. E.* Parabolic equations with a small parameter and discontinuous data / L. E. Bobisud // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1969. – 26, № 1. – P. 208–220.
193. *Bobisud L. E.* The second initial-boundary-value problem for a linear parabolic equation with a small parameter / L. E. Bobisud // *Mich. Math. J.* – 1968. – 15, № 4. – P. 495–504.
194. *Butuzov V. F.* Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities / V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider. // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2004. – 121, № 1. – P. 1973–2079.
195. *Dachler R.* Veber sicherwasserstromugen in geschichteten material / R. Dachler // *Die Wasserwirtschaft, Wien.* – 1933. – № 2. – P. 54–63.
196. *Darcy H.* Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon / H. Darcy. – Paris : Dalmont, 1856. – 647 p.
197. *Eckhaus W.* Asymptotic analysis of singular perturbations / W. Eckhaus. – Amsterdam: North-Holland, 1979. – 286 p.
198. *Friedrichs K.* Asymptotic phenomena in mathematical physics / K. Friedrichs // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1955. – 61, № 6. – P. 485–504.
199. *Haber S.* Boundary conditions for Darcy' s flow through porous media / S. Haber, R. Mauri // *J. Multiphase Flow.* – 1983. – 9, № 5. – P. 561–574.
200. *Halanay A.* Some new results and problems in the theory of differential-delay equations / A. Halanay, J. A. Yorke // *SIAM Review.* – 1971. – V. 13, № 1. – P. 5–78.
201. *Levy T.* Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity / T. Levy // *Eur. J. Mech.* – 1990. – V. 9, № 4. – P. 309–327.

202. *Maas C.* Groundwater flows to a well in a layered porous medium / C. Maas // *Water resources research*. – 1987. – V. 23, № 8. – P. 1675–1681.
203. *Meegoda N. J.* An expression for the permeability of anisotropy granular media / N. J. Meegoda, I. P. King, K. Arulandan // *Int. J. number. anal. methods in geomechanics*. – 1989. – V. 13. – P. 575–598.
204. Natural attenuation of volatile hydrocarbons in the unsaturated zone and shallow groundwater plumes: scenario-specific modelling and laboratory experiments / Peter Grathwohl, Ingo D. Klenk, Uli Maier, B. F. Reckhorn Sayonara // *IAHS Publ.*, 2002. – № 275. – P. 141–146.
205. *Needham T.* *Visual Complex Analysis* / T. Needham. – Oxford, 1997. – 612 p.
206. *Pap E.* *Complex Analysis through Examples and Exercises* / E. Pap. – Kluwer, 1999. – 345 p.
207. *Piven' V. F.* The theory of two-dimensional processes in inhomogeneous layers with power law of their conductivity variation / V. F. Piven' // *J. Appl. Maths. Mechs.* – 1997. – Vol. 61, №4. – P. 577–586.
208. *Schaffernak E.* Erforschung der physikalischen gresetze, nach welchen die durchsickerung des wassers durch eine tallspre oder durch deu untergrund stattfindet / E. Schaffernak // *Die Wasserwirtschaft, Wien*. – 1933. – № 3. – P. 43–49.
209. Solution of the advection-diffusion equation using a combination of discontinuous and mixed finite elements / P. Siegel, R. Mose, Ph. Ackerer and and J. Jaffré // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 1997, 24. – P. 595–613.
210. *Thompson J. F.* Boundary-fitted coordinated systems for numerical solution of partial differential equations. A revier / J. F. Thompson, Z. V. Warsy // *J. Comput. Phys.* – 1982. – 47. – P. 1-108.
211. *Winslow A. M.* Numerical solution on the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh / A. M. Winslow // *J. Comp. Phys.* – 1966. – 1, № 2. – P. 149–172.
212. *Zijl W.* Modelling permeability in imperfectly layered porous media / W. Zijl, J. M. Stam // *Math. Geol.* – 1992. – V. 24, № 8. – P. 865–883.
213. *Zill D.* *A first course in complex analysis with applications* / D. Zill, P. Shanahan. – 2003. – 517 p.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО-
ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ
ФІЛЬТРАЦІЯ-КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ**

МОНОГРАФІЯ

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 24.10.2014 р.
Формат 60/84 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 12,4. Тираж 300. Зам. № 160/1.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12

Видавець і виготовлювач ТзОВ фірма «Ассоль»
Свідоцтво про державну реєстрацію СВ №23 від 27.11.2003 р.
33028, м. Рівне, вул. Замкова, 21. Тел.: 63-31-41.