РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ
РІВНЕНСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

А.Я. Бомба, І.А. Барановська, А.В. Теребус, Т.В. Тищук

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Рівне 2007

УДК 517.518.4+511.14

Бомба А.Я., Барановська І.А., Теребус А.В., Т.В. Тищук Узагальнення тригонометричних функцій та комплексних чисел. – Рівне: РОІППО. – 2007. – 60с.

Посібник присвячено узагальненню тригонометричних функцій і комплексних чисел. Запропоновано варіант переходу від кругових до еліптичних функцій. Відомі методи комплексних чисел розв'язання задач планіметрії перенесено на відповідні задачі стереометрії. Розроблено просторовий аналог комплексних чисел на основі сферичної системи координат, який, зокрема, є ефективним інструментом розв'язання задач на просторові переміщення, розтяги та повороти. Введено основи «просторової конформності», теорії антикомплексних чисел.

Призначений учням, студентам, вчителям, викладачам-методистам для організації та проведення наукових досліджень у МАН.

Відповідальний редактор: методист Рівненської Малої академії наук учнівської молоді **Тимощук А.І**.

Рецензенти: **Б.П. Петрівський** – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Л.В. Пекарська – методист кабінету математики Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, протокол № від . .2007 р.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ПРО ОДИН ПІДХІД ДО УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Питанню про узагальнення понять елементарних функцій, зокрема тригонометричних присвячено ряд підручників, монографій, наукових праць (див., напр., [1] – [6] та вказану в даних працях літературу). В залежності від мети та цільової направленості, існують різноаспектні підходи до таких узагальнень. У даному розділі пропонується узагальнення тригонометричних (кругових) функцій до еліптичних, виходячи із понять та методів обчислення довжини дуги кривої. Для розуміння даного матеріалу та проведення подальших пошуків (розвитку цієї тематики) юному математику-досліднику необхідно знати основні відомості про визначений та невизначений інтеграли, обчислення довжин дуг кривих (див., напр., [4], [5]), особливо акцентуємо увагу на необхідності знань стосовно методу обчислення інтегралів виду Ейлера ([2],[4],[5]).

1.1. Еліптичні інтеграли та функції

Вираз виду:

$$F(x,k)=\int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{(1-\tilde{x}^2)(1-k^2\tilde{x}^2)}} \tag{1.1.1}$$

назвемо еліптичним інтегралом за модулем *k*, $0<k<1$, а $F(1,k)\overset{df}{=}K(k)$ – повним еліптичним інтегралом першого роду.

Очевидно, що

$$F(x,0)\le F(x,k)\le F(x,1)\,. \tag{1.1.2}$$

Причому

$$F(x,0)=\int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}}=\arcsin x, \qquad (1.1.3)$$

$$F(x,1)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \qquad (1.1.4)$$

Графіки функцій $F(x,0)$, $F(x,k)$, $F(x,1)$ зображені на рис. 1.1.1.

Аналогічно до того, як на відрізку $[0;1]$ ми будували функцію обернену до функції $F(x,0)=\arcsin x$, тобто функцію $\sin x$ $(0\le x\le \pi/2)$, побудуємо тепер функцію обернену до $F(x,k)$. Таку функцію назвемо $\mathrm{sn}(x,k)$, $(0\le x\le K(k))$. На рис 1.1.2 зображені графіки функцій $\sin x=\mathrm{sn}(x,0)$, $\mathrm{sn}(x,k)$ $(0<k<1)$, $\mathrm{sn}(x,1)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\mathrm{th}\,2x$.

Причому із проміжку $[0;K(k)]$ функція $\mathrm{sn}(x;k)$ продовжується на всю пряму аналогічно до того, як $\sin x$ із проміжку $[0;\pi/2]$. Тобто періоду $T=2\pi \leftrightarrow T=4K(k)$; $\mathrm{sn}(-x,k)=-\mathrm{sn}(x,k)$;

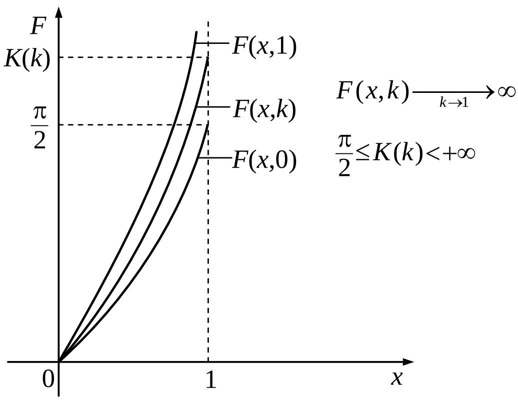


Рис. 1.1.1. Графіки $F(x,0)$, $F(x,k)$, $F(x,1)$

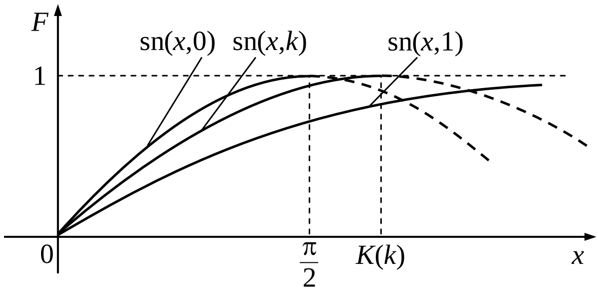


Рис. 1.1.2. Графіки sn(x,0), sn(x,k),

$\mathrm{sn}(K(k)-\alpha,k)= \mathrm{sn}(K(k)+\alpha,k),\ \forall\alpha\in R$ та інші.

Легко бачити, що (див. рис. 1.1.2., 1.1.3.) $K(k)$ зростає від $\pi/2$ до $+\infty$, при зростанні k від 0 до 1, а $K'(k)$ спадатиме від $+\infty$ до $\pi/2$, тобто $\pi/2<K(k)<+\infty$, при $0<k<1$.

Зауважимо, що крім введеного поняття еліптичного інтеграла першого роду є ще одне (причому більш природне) узагальнене поняття функції $\arcsin x$ – еліптичний інтеграл 2-го роду. А саме еліптичним інтегралом 2-го роду $\mathrm{E}(x,k)$ назвемо вираз виду:

$$\mathrm{E}(x,k)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2\tilde{x}^2}{1-\tilde{x}^2}}d\tilde{x}, \qquad (1.1.5)$$

де останній інтеграл представляє собою формулу для обчислення довжини дуги еліпса (див. рис. 1.1.4а) з довжиною дійсної півосі $a=1$ і фокусною відстанню –k ($b=\sqrt{1-k^2}$, як „середньої” ($0<k<1$) двох граничних положень – кола ($k=0$) і відрізка (–1;1) (при $k=1$).

Графіки функцій $\mathrm{E}(x,0)$, $\mathrm{E}(x,k)$ та $\mathrm{E}(x,1)$ зображені на рис. 1.1.4б.

Аналогічно можна ввести обернену функцію (позначивши її

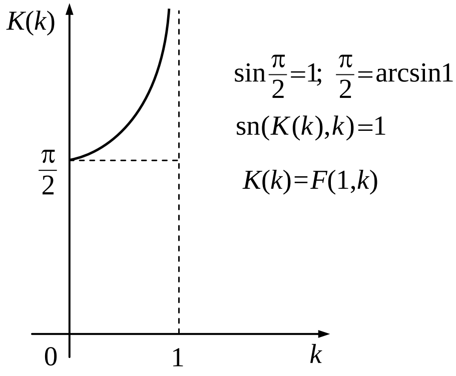


Рис. 1.1.3.Залежність $K(k)$

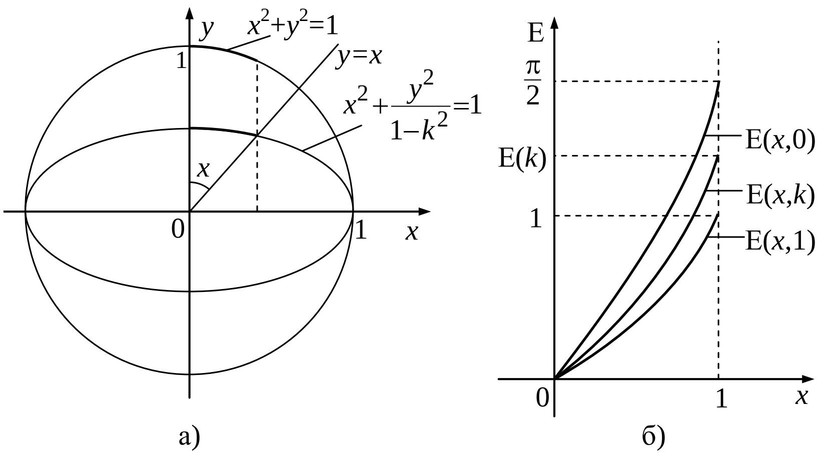


Рис. 1.1.4.

$\overline{\mathrm{sn}}(x,k)$) до еліптичного інтеграла 2-го роду. На рис. 1.1.5а зображені графіки функцій $y=\overline{\mathrm{sn}}(x,k)$, $y=\overline{\mathrm{sn}}(x,0)=\sin x$ та $y=\overline{\mathrm{sn}}(x,1)=x$, а на рис. 1.1.5.б – графік залежності $\mathrm{E}(k)\overset{df}{=}\mathrm{E}(1,k)$ від k.

Якщо ж тепер шукати таку криву (а саме її рівняння $y=f(x,k)$), що (1.1.1) є формулою для обчислення її довжини дуги,

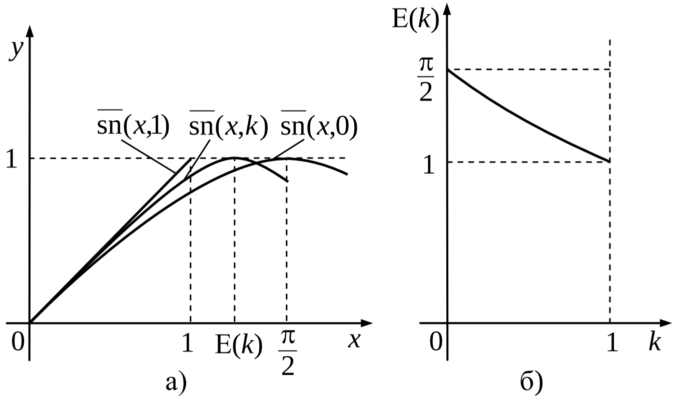


Рис. 1.1.5.

то прийдемо до виразу

$$f(x,k)=\pm\frac{1}{2}\int_0^x\sqrt{\frac{1+k^2-k^2\tilde{x}^2}{(1-\tilde{x}^2)(1-k^2\tilde{x}^2)}}d\tilde{x}^2\ . \qquad (1.1.6)$$

Зокрема

$$f(x,1)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad f(x,0)=\sqrt{1-x^2}\ . \qquad (1.1.7)$$

На рис. 1.1.6 зображені графіки цих трьох функцій.

1.2. Властивості еліптичних функцій

Для виведення теореми додавання еліптичних функцій, скористаємося методом Ейлера (див., напр., [4], [5]), для знаходження алгебраїчного інтегралу рівняння

$$\frac{du}{\sqrt{1+mu^2+nu^4}}+\frac{dv}{\sqrt{1+mv^2+mv^4}}=0\,, \qquad (1.2.1)$$

де $u=s(\alpha)$, $v=s(\beta)$, якщо $\alpha+\beta=\gamma=const,\ d(\alpha+\beta)=0$.

Ідею запозичимо у роботі [2]. А саме, будемо виходити із

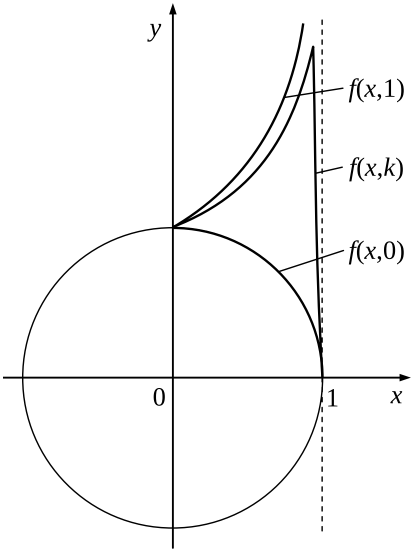


Рис. 1.1.6. Графіки $f(x,k)$, $f(x,0)$, $f(x,1)$

наступного алгебраїчного рівняння четвертого степеня, що пов’язує змінні u, v і містить три довільні параметри A, B і C:

$$u^2+v^2+Au^2v^2+2Buv-C^2=0. \qquad (1.2.2)$$

Диференціюючи його, отримаємо:

$$(u+BV+Auv^2)du+(v+Bu+Au^2v)dv=0. \qquad (1.2.3)$$

Але, переписавши (1.2.2) у вигляді

$$(Av^2+1)u^2+2Bvu+(v^2-C^2)=0,$$

та помноживши обидві частини на Av^2+1 і виділяючи повний квадрат, знайдемо:

$$((Av^2+1)u+Bv)^2-((C^2-v^2)(Av^2+1)+B^2v^2)=0,$$

звідки

$$u+Bv+Auv^2=\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)v^2-Av^4}. \qquad (1.2.4)$$

Ми не пишемо тут подвійного знаку, припускаючи, що із двох значень квадратного кореня будемо вибирати лиш те, що співпадає з лівою частиною рівняння.

Рівняння (1.2.2) симетричне відносно u та v, тому міняючи місцями u та v, отримаємо із (1.2.4):

$$u+Bu+Au^2v=\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)u^2-Au^4}. \qquad (1.2.5)$$

Підставляючи (1.2.4) і (1.2.5) у (1.2.3), знайдемо:

$$\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)v^2-Av^4}\,du+\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)u^2-Au^4}\,dv=0,$$

або

$$\frac{du}{\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)u^2-Au^4}}+\frac{dv}{\sqrt{C^2+(B^2+AC^2-1)v^2-Av^4}}=0. \qquad (1.2.6)$$

Оскільки диференціальне рівняння (1.2.6) задовольняється для всіх значень u та v, пов'язаних співвідношенням (1.2.2), то (1.2.2) є алгебраїчним інтегралом (1.2.6).

Виберемо тепер A, B і C так, щоб ототожнити (1.2.6) з рівнянням (1.2.1). Для цього достатньо покласти:

$$B^2+AC^2-1=mC^2,$$
$$A=-nC^2.$$

Виразимо A і B через m, n і C; тоді рівняння (2.6) після множення всіх членів на C набуде вигляду:

$$\frac{du}{\sqrt{1+mu^2+nu^4}}+\frac{dv}{\sqrt{1+mv^2+mv^4}}=0, \qquad (1.2.1)$$

а його інтеграл (1.2.2) –

$$u^2+v^2-nC^2u^2v^2+2\sqrt{1+mC^2+nC^4}\,uv-C^2=0, \qquad (1.2.7)$$

де C – довільна постійна величина.

Представимо (1.2.7) у вигляді $F(u, v)=C$, розв'яжемо рівняння (1.2.7) відносно C, отримаємо:

$$(u^2+v^2-(nu^2v^2+1)C^2)^2=4(1+mC^2+nC^4)u^2v^2,$$

$$(1-nu^2v^2)^2C^4-2((1+nu^2v^2)(u^2+v^2)+2mu^2v^2)C^2+(u^2-v^2)^2=0,$$

$$C^2=\frac{(1+nu^2v^2)(u^2+v^2)+2mu^2v^2}{(1-mu^2v^2)^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{((1+nu^2v^2)(u^2+v^2)+2mu^2v^2)^2-(u^2-v^2)^2(1-nu^2v^2)^2}}{(1-nu^2v^2)^2}=$$

$$=\frac{u^2(1+mv^2+nv^4)+v^2(1+mu^2+nu^4)}{(1-nu^2v^2)^2}+\frac{2uv\sqrt{(1+mu^2+nu^4)(1+mv^2+nv^4)}}{(1-nu^2v^2)^2},$$

звідки:

$$\frac{u\sqrt{1+mv^2+nv^4}+v\sqrt{1+mu^2+nu^4}}{1-nu^2v^2}=C. \qquad (1.2.8)$$

Функція

$$F(u,v)=\frac{u\sqrt{1+mv^2+nv^4}+v\sqrt{1+mu^2+nu^4}}{1-nu^2v^2} \; -$$

алгебраїчна, якщо v=0, то вона перетворюється в u, а якщо u=0 – в v, алгебраїчний диференціал якої має вигляд:

$$dF(u,v)=\Phi(u,v)\left(\frac{du}{\sqrt{1+mu^2+nu^4}}+\frac{dv}{\sqrt{1+mv^2+nv^4}}\right),$$

де $\Phi(u,v)$ – деяка алгебраїчна функція, тому диференціальне рівняння (1.2.1) має наслідок:

$$dF(u,v)=0, \;\; F(u,v)\equiv const.$$

Отже, існування алгебраїчного інтеграла рівняння (1.2.1) встановлено. Звідси випливає алгебраїчна теорема суми для $s(t)$ у вигляді:

$$s(\alpha+\beta)=F[s(\alpha),s(\beta)],$$

тобто

$$s(\alpha+\beta)=\frac{s(\alpha)\sqrt{1+ms^2(\beta)+ns^4(\beta)}+s(\beta)\sqrt{1+ms^2(\alpha)+ns^4(\alpha)}}{1-ns^2(\alpha)s^2(\beta)}=$$
$$=\frac{s^2(\alpha)-s^2(\beta)}{s(\alpha)\sqrt{1+ms^2(\beta)+ns^4(\beta)}-s(\beta)\sqrt{1+ms^2(\alpha)+ns^4(\alpha)}}. \quad (1.2.9)$$

Із загальної теореми додавання (1.2.9), справедливої для функції $s(t)$, якщо $m=-(1+k^2)$, $n=k^2$, $(0<k<1)$, випливає формула додавання еліптичних синусів:

$$sn(\alpha+\beta)=\frac{sn\alpha\sqrt{1+msn^2\beta+nsn^4\beta}+sn\beta\sqrt{1+msn^2\alpha+nsn^4\alpha}}{1-nsn^2\alpha sn^2\beta}=$$
$$=\frac{sn^2\alpha-sn^2\beta}{sn\alpha\sqrt{1+msn^2\beta+nsn^4\beta}-sn\beta\sqrt{1+msn^2\alpha+nsn^4\alpha}}. \quad (1.2.10)$$

Через основну функцію $sn(t,k)$ визнаються дві інші $cn(t,k)$ та $dn(t,k)$, зокрема:

$$cn^2(t,k)=1-sn^2(t,k),$$
$$dn^2(t,k)=1-k^2sn^2(t,k)=k'^2+k^2cn^2(t,k)=cn^2(t,k)+k'^2sn^2(t,k),$$
$$k'^2=1-k^2,$$
$$sn^2(t,k)=\frac{1-cn2(t,k)}{1+dn2(t,k)}, \quad (1.2.11)$$
$$cn^2(t,k)=\frac{cn2(t,k)+dn2(t,k)}{1+dn2(t,k)},$$
$$dn^2(t,k)=\frac{dn2(t,k)+k^2cn2(t,k)+k'^2}{1+dn2(t,k)}.$$

З формул (1.2.12) випливає, що $cn(t,k)$ та $dn(t,k)$ – парні функції, $sn(t,k)$ – непарна функція, а саме:

$$sn(-t,k)=-sn(t,k),$$
$$cn(-t,k)=cn(t,k), \quad (1.2.12)$$
$$dn(-t,k)=dn(t,k).$$

Якщо модуль k=0, то функції $sn\ t$, $cn\ t$ перетворюються в $\sin t$, $\cos t$, функція $dn\ t$ вироджується при цьому в 1.

За допомогою функцій $cn(t,k)$ та $dn(t,k)$ теорема додавання (1.2.10) для $sn(t,k)$ набуває вигляду:

$$sn(\alpha+\beta,k)=\frac{sn(\alpha,k)cn(\beta,k)dn(\beta,k)+sn(\beta,k)cn(\alpha,k)dn(\alpha,k)}{1-k^2sn^2(\alpha,k)sn^2(\beta,k)}=$$
$$=\frac{sn^2(\alpha,k)-sn^2(\beta,k)}{sn(\alpha,k)cn(\beta,k)dn(\beta,k)-sn(\beta,k)cn(\alpha,k)dn(\alpha,k)}. \quad (1.2.13)$$

Щоб вивести з (1.2.13) теореми додавання для $cn(t,k)$ та $dn(t,k)$, скористаємося наступними тотожностями, справедливість яких перевіряється за допомогою формул (1.2.11):

$$(sn\alpha cn\beta dn\beta+sn\beta cn\alpha dn\alpha)^2+(cn\alpha cn\beta-sn\alpha sn\beta dn\alpha dn\beta)^2=$$
$$=(dn\alpha dn\beta-k^2sn\alpha sn\beta cn\alpha cn\beta)^2+k^2(sn\alpha cn\beta dn\beta+sn\beta cn\alpha dn\alpha)^2=$$
$$=(1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta)^2.$$

Отримаємо:

$$cn(\alpha+\beta,k)=\sqrt{1-sn^2(\alpha+\beta,k)}=$$
$$=\frac{\sqrt{(1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta)^2-(sn\,\alpha cn\beta dn\beta+sn\beta cn\alpha dn\alpha)^2}}{1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta}= \quad (1.2.14)$$
$$=\frac{cn\alpha cn\beta-sn\alpha sn\beta dn\alpha dn\beta}{1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta}$$

та

$$dn(\alpha+\beta,k)=\sqrt{1-k^2sn^2(\alpha+\beta,k)}=$$
$$=\frac{\sqrt{(1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta)^2-k^2(sn\alpha cn\beta dn\beta+sn\beta cn\alpha dn\alpha)^2}}{1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta}= \quad (1.2.15)$$
$$=\frac{dn\alpha dn\beta-k^2sn\alpha sn\beta cn\alpha cn\beta}{1-k^2sn^2\alpha sn^2\beta}.$$

Покладемо

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = K(k) = K, \qquad (1.2.16)$$

де інтегрування проводиться вздовж відрізка дійсної осі, що з’єднує точки 0 і 1, так, що $K(k)$ – додатне дійсне число. Із (1.2.16) випливає:

$$sn[K(k),k]=1; \qquad (1.2.17)$$

тому

$$cn[K(k),k]=\sqrt{1-sn^2[K(k),k]}=0$$

і (1.2.18)

$$dn[K(k),k]=\sqrt{1-k^2sn^2[K(k),k]}=\sqrt{1-k^2}=k'.$$

Опускаючи для зручності в позначеннях модуль k, покладемо у формулах (1.2.13), (1.2.14) та (1.2.15) $\alpha=K,\ \beta=-t$. Отримаємо:

$$sn(K-t)=\frac{snK\,cnt\,dnt-snt\,cnK\,dnK}{1-k^2sn^2Ksn^2t}=\frac{cnt\,dnt}{1-k^2sn^2t}=\frac{cnt}{dnt}; \quad (1.2.19)$$

$$cn(K-t)=\frac{cnK\,cnt+snK\,snt\,dnK\,dnt}{1-k^2sn^2Ksn^2t}=\frac{k'snt\,dnt}{1-k^2sn^2t}=k'\frac{snt}{dnt}; \quad (1.2.20)$$

$$dn(K-t)=\frac{dnK\,dnt+k^2snK\,snt\,cnK\,cnt}{1-k^2sn^2Ksn^2t}=\frac{k'dnt}{1-k^2sn^2t}=\frac{k'}{dnt}. \quad (1.2.21)$$

Замінюючи тут t на $-t$, знайдемо:

$$sn(K+t)=\frac{cnt}{dnt}=sn(K-t);$$

$$cn(r+t)=-k'\frac{snt}{dnt}=-cn(K-t); \qquad (1.2.22)$$

$$dn(K+t)=\frac{k'}{dnt}=dn(K-t).$$

В теорії еліптичних функцій формули (1.2.19)-(1.2.22) відіграють роль, аналогічну формулам зведення в тригонометрії.

Якщо у формулах (1.2.22) замінити t на $t+K$, то матимемо:

$$\begin{aligned} sn(t+2K)&=-snt,\\ cn(t+2K)&=-cnt,\\ dn(t+2K)&=dnt. \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

Із останньої формули випливає, що функція $dn\ t$ – періодична з періодом $2K$. Замінивши в перших двох формулах (1.2.23) t на $t+2K$, отримаємо:

$$\begin{aligned} sn(t+4K)&=snt,\\ cn(t+4K)&=cnt. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Отже, $sn\ t$, $cn\ t$ – періодичні функції з періодом $4K$.

Література до розділу 1

1. *Ахиезер А.И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970.– 325 с.
2. *Маркушевич А.И.* Замечательные синусы. Введение в теорию эллиптических функций. – М.: Наука, 1974.–95 с.
3. *Маркушевич А.И.* Целые функции. Элементарный очерк. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, – 1975. – 120 с.
4. *Леонард Эйлер*. Интегральное исчисление, т.I. – М.: Гостехиздат, 1956. – 532с.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального интегрального исчисления, т. II. – М.: Наука, 1970. – 608 с .
6. *Янке Е. Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции М.: Наука, 1977. – 342 с.

РОЗДІЛ 2. ПОБУДОВА ПРОСТОРОВИХ АНАЛОГІВ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Перенести теорію комплексних чисел “в простір” намагалися ряд вчених. Серед них, наприклад, відомий ірландський математик Вільям Роуан Гамільтон [6], який ще у XIX ст. близько 10-ти років свого життя присвятив множенню так званих триплетів (чисел виду $a+bi+cj$). Хоча у своїх намаганнях він зазнав невдачі, але, натомість, винайшов кватерніони – числа виду $a+bi+cj+dk$, що відповідають точкам чотиривимірного простору. Згодом німецький вчений Фробеніус [10] довів, що не існує такого способу множення триплетів, щоб одночасно виконувались умови асоціативності, комутативності додавання і множення, дистрибутивності множення відносно додавання, покомпонентного додавання, можливості ділення на ненульові елементи. Проте це не зупинило математиків, вчені до нашого часу займаються узагальненням поля комплексних чисел на простір (з втратою тих чи інших їх властивостей), що зумовлюється потребами різних галузей науки і техніки (див., напр., [1-5]).

Так, наш сучасник – проф. В.І. Єлісеєв [5] будує множину просторових комплексів (v), як векторну суму плоских комплексних чисел ($v=z+j\sigma=(\chi+i\gamma)+j(\xi+i\eta)$, $\chi,\gamma,\xi,\eta\in R$). Ним введені основні поняття теорії функцій просторової комплексної змінної: поняття функції, її похідної, інтеграла тощо. При цьому, при введенні дій над такими числами (комплексами), зокрема, розкритті змісту ii, jj, ij, ji, $(ij)^2$, $(ji)^2$, значну увагу він відводить так званим дільникам нуля (ненульовим числам, які в добутку дають нуль) та вводить третю уявну одиницю k, виходячи із так званого закону добування кореня із числа [5]. Створена теорія знайшла застосування в ядерній фізиці, фізиці мікрочастинок, теорії відносності.

Дослідженням просторових конформних відображень, як одного з розділів теорії функцій комплексної змінної, займались, ще з XIX ст. Саме тоді німецький вчений Ліувілль [13,17] довів, що так звані просторові конформні відображення (такі, що зберігають форму) в малому зводяться до переміщення, розтягу з поворотом, інверсії відносно сфер. З геометричних і з фізичних міркувань підходять до проблеми побудови просторового аналогу конформних відображень вчені Новосибірська [див., напр., 1]. Узагальненням теорії функцій комплексної змінної (а саме побудовою просторового аналогу системи Коші-Рімана) займались румунські математики К.Моісіл та Н.Теодореско [4]. У роботі [3] побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник.

Нижче проведемо узагальнення теорії комплексних чисел та методів теорії функцій комплексної змінної на простір, виходячи із їх застосування до розв'язання широких класів задач стереометрії (як аналогів відповідних задач планіметрії (див., напр., [14-16])), переходу від тригонометричної до “сферично–тригонометричної” форми їх запису, а також побудови просторового аналогу однієї із класичних крайових задач на конформні відображення (для криволінійних чотирикутних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями).

2.1. Про один просторовий аналог комплексних чисел і задачі стереометрії

Так само, як і метод комплексних чисел у планіметрії, розроблений нами стереометричний метод є високо алгоритмічним. Проте особливості переходу до просторових комплексів не дозволяють розвинути пропонований метод на настільки ж широкий клас задач, як у [14-16].

2.1.1. "Неповний" просторовий аналог комплексних чисел як інструмент розв'язання задач стереометрії

За аналогією до алгебраїчного запису комплексних чисел і кватерніонів надалі ми будемо вживати терміни "просторове комплексне число" $x = x_1 + x_2 i + x_3 j$, де $x_1, x_2, x_3 \in R$, і "точка" $X(x_1; x_2; x_3)$ ("вектор" $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$) як синонімічні. Адже, очевидно, між такими числами (просторовими комплексами) і точками простору має місце взаємно однозначна відповідність. При цьому, за аналогією до комплексних чисел, довжину вектора $\vec{x}$ назвемо модулем відповідного просторового комплексного числа x і позначимо $|x|$ (очевидно, що); додавання і віднімання у цій множині здійснюватимемо покомпонентно:

$$a \pm b = (a_1 + a_2 i + a_3 j) \pm (b_1 + b_2 i + b_3 j) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) i + (a_3 \pm b_3) j;$$

спряженим до просторового комплексного числа a, $a = a_1 + a_2 i + a_3 j$, ми називатимемо число $\overline{a}$ виду $\overline{a} = a_1 - a_2 i - a_3 j$.

Від множення вимагатимемо комутативності, дистрибутивності відносно додавання та виконання однієї із властивостей спряженого числа – добуток спряжених чисел дорівнює квадрату довжини модуля, тобто:

$$a\bar{a}=(a_1+a_2i+a_3j)(a_1-a_2i-a_3j)=a_1^2-a_2^2i^2-a_3^2j^2-2a_2a_3ij=a_1^2+a_2^2+a_3^2 .$$

Для забезпечення виконання цієї умови покладемо: $i^2=j^2=-1,\ ij=ji=0$.

При цьому зауважимо, що для всіх чисел a і b (таких, що $b_1\neq 0$), має місце ділення $a{:}b=z$ ($z=z_1+z_2i+z_3j$) як дія обернена до введеної вище дії множення. А саме, в результаті розв'язку рівняння $bz=a$ (відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $b_1z_1-b_2z_2-b_3z_3=a_2$, $b_2z_1+b_1z_2 \quad =a_2$, $b_3z_1 \quad +b_1z_3=a_3$) матимемо:

$$z_1=(b_1a_1+a_2b_2+a_3b_3)\big/(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\,;$$

$$z_2=(b_1^2a_2-b_2a_3b_3+a_2b_3^2-b_2a_1b_1)\big/(b_1(b_1^2+b_2^2+b_3^2))\,;$$

$$z_3=(b_1^2a_3-b_2a_2b_3+a_3b_2^2-b_3a_1b_1)\big/(b_1(b_1^2+b_2^2+b_3^2))\,.$$

Але отримати частку шляхом множення чисельника і знаменника на число, спряжене до знаменника, не можливо. Дійсно:

$$\frac{a}{b}=\frac{(a_1+a_2i+a_3j)(b_1-b_2i-b_3j)}{(b_1+b_2i+b_3j)(b_1-b_2i-b_3j)}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}+$$

$$+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}i+\frac{a_3b_1-a_1b_3}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}j\neq z.$$

Цей недолік, хоч і звужує клас "розв'язних стереометричних задач", але не є принциповим при виведенні відповідних формул. Надалі розглядатимемо ділення лише на дійсні, відмінні від нуля, числа.

Суть методу просторових комплексних чисел при розв'язанні стереометричних задач полягає у поетапному їх розв'язанні за таким алгоритмом: переклад умови задачі на мову алгебраїчних співвідношень (формул, рівнянь), якими у символічній формі виражаються важливі геометричні факти (відношення, властивості, теореми, ознаки тощо), що складають операційну базу методу; здійснення над виразами алгебраїчних перетворень до явного одержання потрібного результату, записаного у тій же алгебраїчній формі; геометрична інтерпретація отриманого алгебраїчного результату. При побудові операційної бази наслідуватимемо ідеї і термінологію роботи [7].

1. Квадрат відстані між двома точками. Дано дві точки $A(a)$ і $B(b)$. Вектору $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ відповідає число $b-a$. Отже:

$$AB^2=|b-a|^2=(b-a)(\overline{b}-\overline{a})\,. \tag{2.1.1}$$

2. Рівняння сфери та кулі. З формули (2.1.1) випливає рівняння сфери з центром в $A(a)$ і радіусом R:

$$(x-a)(\overline{x}-\overline{a})=R^2, \tag{2.1.2}$$

де $X(x)$ - біжуча її точка, або:

$$x\overline{x}-a\overline{x}-x\overline{a}+|a|^2-R^2=0\,. \tag{2.1.3}$$

Аналогічно отримуємо рівняння кулі: $(x-a)(\overline{x}-\overline{a})\leq R^2$.

3. Поділ відрізка у заданому відношенні. Нехай $\overline{AC}=k\overline{CB}$ ($k\in R$), $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ [7], тоді $(c-a)=k(b-c)$, звідси:

$$c=(a+kb)/(k+1)\,. \tag{2.1.4}$$

Зокрема, якщо $AC=CB$, то

$$c=(a+b)/2\,. \tag{2.1.5}$$

4. Формула центральної симетрії. Нехай точка $A(a)$ є центром симетрії, $X(x)$ - довільна точка площини, а $X'(x')$ її образ при симетрії відносно $A(a)$. Оскільки $A(a)$ - середина XX', то: $a=(x+x')/2$,звідси

$$x'=2a-x\,. \qquad (2.1.6)$$

5. *Колінеарність векторів, паралельність прямих.* Нагадаємо, що ненульові вектори $\overline{AA_1}$ *і* $\overline{BB_1}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли справджується співвідношення: $\overline{AA_1}=k\overline{BB_1}$, а для відповідних їм просторових комплексних чисел $\overline{AA_1}(p)$, $\overline{BB_1}(q)$: $p=kq$ (звідси: $\overline{p}=k\overline{q}$). Перемноживши рівності $\overline{p}=k\overline{q}$ і $kq=p$ та скоротивши результат на k, отримаємо: $p\overline{q}=q\overline{p}$. Звідси дістанемо необхідну і достатню умову паралельності прямих AB і CD ($A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$):

$$(b-a)(\overline{c}-\overline{d})=(\overline{b}-\overline{a})(c-d)\,. \qquad (2.1.7)$$

6. *Перпендикулярність векторів і прямих.* Два ненульові вектори $\overrightarrow{OA}\,і\,\overrightarrow{OB}$, де $A(a)$, $B(b)$, $O(0)$ перпендикулярні ($\angle AOB=90°$) тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься рівність: $a\overline{a}+b\overline{b}=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})$, яка безпосередньо випливає з теореми Піфагора для прямокутного ΔAOB (а саме з рівності $OA^2+OB^2=AB^2$). Звідси: $a\overline{a}+b\overline{b}=a\overline{a}-b\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}$, або:

$$-b\overline{a}=a\overline{b}\,. \qquad (2.1.8)$$

Переписавши (2.1.8) для прямих AB і CD ($C(c)$, $D(d)$), матимемо:

$$(b-a)(\overline{c}-\overline{d})=-(\overline{b}-\overline{a})(c-d)\,. \qquad (2.1.9)$$

7. *Критерій колінеарності (розміщення на одній прямій трьох точок).* Застосувавши рівність (2.1.7) для векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ ($A(a)$, $B(b)$ і $C(c)$), матимемо:

$$(b-a)(\overline{c}-\overline{a})=(\overline{b}-\overline{a})(c-a)\,, \qquad (2.1.10)$$

звідси: $\bar{c}(b-a)+\bar{b}(a-c)+\bar{a}(c-b)=0$.

8. Рівняння прямої за двома точками. Нехай $X(x)$ – біжуча точка прямої, що проходить через точки $A(a)$ і $B(b)$. Її рівняння безпосередньо випливає із (2.1.10), поклавши $c=x$:

$$(x-a)(\bar{b}-\bar{a})=(\bar{x}-\bar{a})(b-a), \tag{2.1.11}$$

або: $\bar{x}(b-a)-x(\bar{b}-\bar{a})+b\bar{a}-\bar{b}a=0$.

9. Рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора. Нехай $X(x)$ – біжуча точка шуканої площини α, $A(a)\in\alpha$, $\vec{n}\perp\alpha$. Так як $\vec{n}\perp\overrightarrow{AX}$, то з (2.1.8) матимемо:

$$n(\bar{x}-\bar{a})=-\bar{n}(x-a), \tag{2.1.12}$$

або: $n\bar{x}+\bar{n}x=\bar{a}n+\bar{n}a$.

10. Кут між векторами. Значення косинуса кута α між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ можна визначити з теореми косинусів:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(c-a)(\bar{c}-\bar{a})+(b-a)(\bar{b}-\bar{a})-(c-b)(\bar{c}-\bar{b})}{2\sqrt{(c-a)(\bar{c}-\bar{a})(b-a)(\bar{b}-\bar{a})}},$$

або: $\cos\alpha=\dfrac{(b-a)(\bar{c}-\bar{a})+(\bar{b}-\bar{a})(c-a)}{2\sqrt{(c-a)(\bar{c}-\bar{a})(b-a)(\bar{b}-\bar{a})}}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ($\alpha\in[0;\pi]$).

2.1.2. Приклади розв'язання стереометричних задач

Задача 1. Дано дві різні кулі, які дотикаються одна до одної. В більшій за радіусом кулі проведено довільний діаметр *AB і* розглядаються довжини дотичних прямих, проведених з точок *A* і *B* до меншої кулі. Довести, що сума квадратів довжин цих дотичних

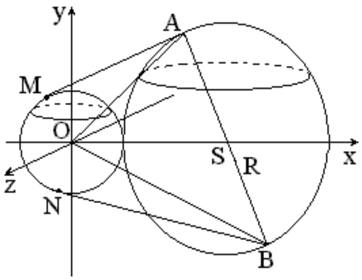


Рис. 2.1.1

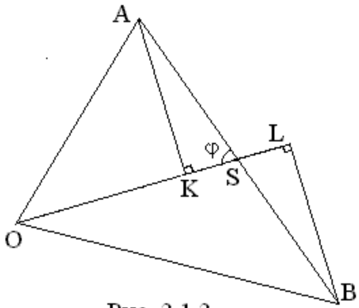


Рис. 2.1.2

не залежить від вибору діаметра AB.

Розв'язання. Нехай (для визначеності) кулі K_* і K^* дотикаються одна до одної зовнішнім чином (розв'язання задачі у випадку внутрішнього дотику проводиться аналогічно), центр меншої із них співпадає з початком координат ($O(0)$), її радіус дорівнює одиниці, а центр S більшої кулі (радіус її позначимо через R) лежить на осі Ox (див. рис. 2.1.1), $A(a),\ B(b) \in K^*$, $AB = 2R$. Виберемо будь-які дві дотичні AM *і* BN, де $M(m),\ N(n) \in K_*$. З (2.1.2) отримаємо $m\overline{m} = n\overline{n} = 1$. Врахувавши це та умови перпендикулярності прямих AM *і* MO, BN *і* NO, отримаємо $\overline{m}a + m\overline{a} = 2$, $\overline{n}b + n\overline{b} = 2$. Звідси:

$$AM^2 + BN^2 = (m-a)(\overline{m}-\overline{a}) + (n-b)(\overline{n}-\overline{b}) = m\overline{m} - (m\overline{a} + \overline{m}a) + a\overline{a} +$$

$$+ n\overline{n} - (n\overline{a} + \overline{n}a) + b\overline{b} = 1 - 2 + a\overline{a} + 1 - 2 + b\overline{b} = -2 + OA^2 + OB^2.$$

Залишилося довести, що $OA^2 + OB^2 = const$. Для цього розглянемо ΔAOB (рис. 2.1.2). Нехай K і L - проекції його вершин A і B на пряму OS, $\angle ASK = \varphi$, тоді:

$$OA^2 + OB^2 = (OK^2 + AK^2) + (OL^2 + BL^2) = (1 + R - R\cos\varphi)^2 + (1 + R + R\cos\varphi)^2 +$$

$+R^2\sin^2\varphi+R^2\sin^2\varphi=2(1+R)^2+2R^2\cos^2\varphi+R^2\sin^2\varphi=4R^2+4R+2=const,$ що й вимагалося довести.

Задача 2. Доведіть, що, якщо в тетраедрі $ABCD$ протилежні ребра попарно перпендикулярні, то $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=$ $=AD^2+BC^2$.

Розв'язання. Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Якщо $AD\perp BC$, то з (2.1.9) матимемо: $(a-d)(\overline{b}-\overline{c})=-(\overline{a}-\overline{d})(b-c)$, або (після перетворень):

$$a\overline{b}+b\overline{a}-(a\overline{c}+c\overline{a})-(d\overline{b}+b\overline{d})+d\overline{c}+c\overline{d}=0 .$$

На основі цього маємо:

$$AB^2+CD^2-AC^2-BD^2=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})+(c-d)(\overline{c}-\overline{d})-(a-c)(\overline{a}-\overline{c})-$$
$$-(b-d)\cdot(\overline{b}-\overline{d})=a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}-c\overline{d}-d\overline{c}+d\overline{d}-a\overline{a}+a\overline{c}+c\overline{a}-c\overline{c}-$$
$$-b\overline{b}+b\overline{d}+d\overline{b}-d\overline{d}=-(a\overline{b}+b\overline{a}-(a\overline{c}+c\overline{a})-(d\overline{b}+b\overline{d})+d\overline{c}+c\overline{d})=0.$$

Отже, $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$, що й потрібно було довести. Доведення рівності $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ (або $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$) аналогічне.

Задача 3 (з московських олімпіад). У просторі розміщені точки A, B, C, D так, що $AB\perp CD$, $AC\perp BD$. Доведіть, що $AD\perp BC$.

Розв'язання. Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Запишемо умову перпендикулярності (2.1.9) для прямих AB і CD, AC і BD відповідно:

$$(a-b)(\overline{c}-\overline{d})=-(\overline{a}-\overline{b})(c-d),\ (a-c)(\overline{b}-\overline{d})=-(\overline{a}-\overline{c})(b-d),$$

або ж

$$a\overline{c}-a\overline{d}-b\overline{c}+b\overline{d}-c\overline{b}+c\overline{a}+d\overline{b}-d\overline{a}=0,$$

$$a\bar{b}-a\bar{d}-c\bar{b}+c\bar{d}+b\bar{a}-d\bar{a}-b\bar{c}+d\bar{c}=0.$$

Звідси:

$$a\bar{c}-a\bar{d}-b\bar{c}+b\bar{d}-c\bar{b}+c\bar{a}+d\bar{b}-d\bar{a}=a\bar{b}-a\bar{d}-c\bar{b}+c\bar{d}+b\bar{a}-d\bar{a}-b\bar{c}+d\bar{c},$$

$$a\bar{c}+b\bar{d}+c\bar{a}+d\bar{b}=a\bar{b}+c\bar{d}+b\bar{a}+d\bar{c}, \text{ або } (a-d)(\bar{b}-\bar{c})=-(\bar{a}-\bar{d})(b-c).$$

А це і є умова перпендикулярності прямих AD і BC.

Задача 4 (олімпіада Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 2002 р.). Довести, що у правильній п'ятикутній піраміді для кожного її ребра існує інше ребро, перпендикулярне до даного.

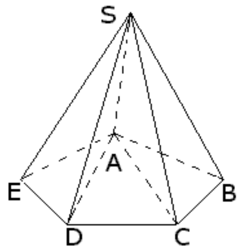


Рис. 2.1.3

Розв'язання. Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(e)$, $S(s)$, $SABCDE$ – правильна п'ятикутна піраміда (рис. 2.1.3). Використовуючи співвідношення (2.1.1), запишемо рівність довжин відрізків SC і SD у комплексній формі:

$$(s-c)(\bar{s}-\bar{c})=(s-d)(\bar{s}-\bar{d}),$$

або:

$$\bar{s}c+\bar{c}s-d\bar{s}-\bar{d}s=c\bar{c}-d\bar{d}. \qquad (2.1.13)$$

Доведемо, що прямі SA і CD є перпендикулярними. Дійсно, згідно з (2.1.9) маємо:

$$(s-a)(\bar{c}-\bar{d})=-(\bar{s}-\bar{a})(c-d), \qquad (2.1.14)$$

або: $(s\bar{c}+\bar{s}c-s\bar{d}-\bar{s}d)-a\bar{c}+a\bar{d}-\bar{a}c+\bar{a}d=0$. А згідно з (2.1.13), останню рівність перепишемо так:

$$c\bar{c}-d\bar{d}-a\bar{c}-\bar{a}c+a\bar{d}+\bar{a}d=0.$$

Звідси:

$$(a\bar{a}+c\bar{c}-a\bar{c}-\bar{a}c)-(d\bar{d}-a\bar{d}-\bar{a}d+a\bar{a})=0,$$

або: $(a-c)(\overline{a}-\overline{c})=(a-d)(\overline{a}-\overline{d})$. Звідси $AC^2=AD^2$, або $AC=AD$.

Остання рівність випливає з властивостей правильного п'ятикутника. Так як перетворення були рівносильними, то й умова (2.1.14) є правильною. Отже, $SA\perp CD$, що й потрібно було довести. Перпендикулярність ребер SB і DE, SC і AE, SD і AB, SE і BC доводиться аналогічно.

Задача 5 (Олімпіада Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 2003 р.). Нехай $ABCD$ – тетраедр, у якому E, F – середини ребер AB і CD відповідно, $DE\perp CE$ і $AF\perp BF$ (рис. 2.1.4). Довести, що $AB=CD$.

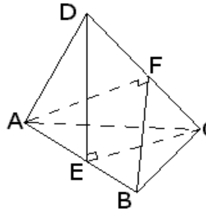


Рис. 2.1.4

Розв'язання. Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$. Запишемо умови перпендикулярності (2.1.9) для відрізків DE і CE, AF і BF відповідно:

$$(d-e)(\overline{c}-\overline{e})+(\overline{d}-\overline{e})(c-e)=0; \qquad (2.1.15)$$

$$(a-f)(\overline{b}-\overline{f})+(\overline{a}-\overline{f})(b-f)=0. \qquad (2.1.16)$$

Врахувавши, що $e=(a+b)/2$, $f=(c+d)/2$, замість (2.1.15) і (2.1.16) матимемо:

$$(2d-a-b)(2\overline{c}-\overline{a}-\overline{b})+(2\overline{d}-\overline{a}-\overline{b})(2c-a-b)=0,$$

$$(2a-c-d)(2\overline{b}-\overline{c}-\overline{d})+(2\overline{a}-\overline{c}-\overline{d})(2b-c-d)=0,$$

або

$$\begin{matrix} 4d\overline{c}-2d\overline{a}-2d\overline{b}-2a\overline{c}+a\overline{a}+a\overline{b}-2b\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{b}+ \\ +4c\overline{d}-2a\overline{d}-2b\overline{d}-2c\overline{a}+a\overline{a}+a\overline{b}-2c\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b}=0 \end{matrix}, \qquad (2.1.17)$$

$$\begin{matrix} 4a\overline{b}-2a\overline{c}-2a\overline{d}-2c\overline{b}+c\overline{c}+c\overline{d}-2d\overline{b}+d\overline{c}+d\overline{d}+ \\ +4b\overline{a}-2c\overline{a}-2d\overline{a}-2b\overline{c}+c\overline{c}+d\overline{c}-2b\overline{d}+c\overline{d}+d\overline{d}=0 \end{matrix}, \qquad (2.1.18)$$

Віднявши почленно рівності (2.1.17) та (2.1.18), одержимо:

$$2\overline{a}a-2\overline{a}b-2\overline{b}a+2\overline{b}b-2\overline{c}c+2\overline{d}c+2\overline{c}d-2\overline{d}d=0,$$

або: $(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=(c-d)(\overline{c}-\overline{d})$, тобто $AB=CD$, що й потрібно було довести.

Задача 6 (III вибірковий тур команди Києва на Всеукраїнську олімпіаду, 2003р.). На кожному ребрі тетраедра $ABCD$ відмічено по дві точки, що ділять ребро на три рівні частини. Виявилося, що всі 12 відмічених точок лежать на одній сфері. Чи обов'язково тетраедр $ABCD$ є правильним?

Розв'язання. Доведемо, що умова задачі виконується лише для правильного тетраедра. Припустимо, що $ABCD$ – довільний тетраедр. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що центр сфери радіуса (R) лежить у початку координат і що $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. З (2.1.4) неважко визначити комплексні координати відмічених точок: $\frac{a+2b}{3}$, $\frac{b+2a}{3}$; $\frac{a+2c}{3}$, $\frac{c+2a}{3}$; $\frac{a+2d}{3}$, $\frac{d+2a}{3}$; $\frac{c+2b}{3}$, $\frac{b+2c}{3}$; $\frac{d+2b}{3}$, $\frac{b+2d}{3}$; $\frac{d+2c}{3}$, $\frac{c+2d}{3}$.

Згідно з (2.1.2) маємо:

$$\frac{a+2b}{3}\cdot\frac{\overline{a}+2\overline{b}}{3}=\frac{b+2a}{3}\cdot\frac{\overline{b}+2\overline{a}}{3}=R^2,$$

або: $a\overline{a}+2a\overline{b}+2\overline{a}b+4b\overline{b}=b\overline{b}+2a\overline{b}+2\overline{a}b+4a\overline{a}$, звідси: $a\overline{a}=b\overline{b}$.

Аналогічно доводимо, що $a\overline{a}=c\overline{c}$, $a\overline{a}=d\overline{d}$, тобто:

$$a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=\mathrm{d}\overline{\mathrm{d}}. \qquad (2.1.19)$$

Але $\frac{a+2b}{3}\cdot\frac{\overline{a}+2\overline{b}}{3}=\frac{a+2c}{3}\cdot\frac{\overline{a}+2\overline{c}}{3}=R^2$. Враховуючи (2.1.19), запишемо: $a\overline{b}+b\overline{a}=a\overline{c}+c\overline{a} \Leftrightarrow a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{b}=a\overline{a}-a\overline{c}-c\overline{a}+c\overline{c} \Leftrightarrow$ $(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=(a-c)(\overline{a}-\overline{c}) \Leftrightarrow AB=AC$.

Доведення рівностей $AB=AD$, $AB=BC$, $AB=CD$, $AB=BD$ проводиться аналогічно.

Задача 7 (київська міська олімпіада, 1981р.). Дано тетраедр $ABCD$, точка O - точка перетину медіан грані ABC. Точка A рухається так, що довжина OD не змінюється. Знайти множину можливих положень точки A.

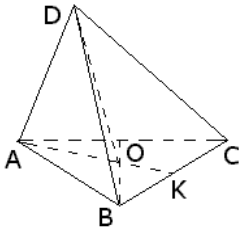


Рис. 2.1.5

Розв'язання. Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $O(o)$, $K(k)$, $K\in BC$, $BK=KC$ (рис. 2.1.5). Очевидно, що $k=\frac{a+b}{2}$, а, так як точка O ділить медіану AK у відношенні $2:1$, то, згідно з (2.1.4), маємо: $o=\frac{a+2k}{3}=\frac{a+b+c}{3}$. Обчислимо:

$$DO^2=(o-d)(\overline{o}-\overline{d})=\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}-\frac{a+b+c}{3}\cdot\overline{d}-\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}\cdot d+d\overline{d},$$

звідси:

$$9DO^2=a\overline{a}+b\overline{a}+c\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b}+c\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{c}+c\overline{c}-3a\overline{d}-3b\overline{d}-3c\overline{d}-$$
$$-3\overline{a}d-3\overline{b}d-3\overline{c}d+9d\overline{d} = a\overline{a}-a(3\overline{d}-\overline{b}-\overline{c})-\overline{a}(3d-b-c)+9d\overline{d}+$$
$$+b\overline{b}+c\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{c}-3b\overline{d}-3c\overline{d}-3\overline{b}d-3\overline{c}d=a\overline{a}-a(3\overline{d}-\overline{b}-\overline{c})-$$
$$-\overline{a}(3d-b-c)+(3\overline{d}-\overline{b}-\overline{c})(3d-b-c).$$

Отже, згідно з (2.1.3), точка A належить сфері радіуса $3DO$ з центром у точці $S(s)$, де $s=3d-b-c$. Переписавши останню рівність у вигляді $d=\frac{s+b+c}{3}=\frac{s+2k}{3}$, бачимо, що точка S є гомотетичною (з коефіцієнтом $\lambda=3$) точці D відносно точки K. При цьому точка A не може належати площині (BCD), що випливає з означення тетраедра.

Відповідь: множина точок сфери $\omega(S;3DO)$, де точка S гомотетична точці D відносно точки K з коефіцієнтом $\lambda=3$ (крім точок сфери, які лежать у площині (BCD)).

2.2. Сферична система координат і просторовий аналог комплексних чисел

Побудуємо ще один просторовий аналог комплексних чисел на основі властивостей множення комплексних чисел у тригонометричній формі (“суми аргументів” та “добутку модулів”).

Введемо сферичну систему координат, де кожній декартовій точці $(x;y;z)$ ставиться у відповідність трійка чисел $(r;\varphi;\theta)$, r – довжина відповідного радіус-вектора (відстань від початку координат до цієї точки), φ – азимут (кут між віссю абсцис і проекцією цього радіус-вектора на площину xOy), θ – полярний кут (кут між радіус-вектором і його проекцією на площину xOy), причому $0\le r<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$.

Введемо означення просторового комплексного числа w (в алгебраїчній формі), як $w=x+yi+zj$ (про зміст уявних одиниць i, j мова йтиме далі). Аналогічно до “плоского випадку” число $r=|w|$ називатимемо модулем даного комплексного числа, φ – його аргументом - азимутом ($tg\varphi=y/x$), θ – полярним аргументом ($\sin\theta=z/r$). Звідси: $r=|w|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi=arctg(y/x)+s(x;y)$,

$\theta = \arcsin(z/r)$, де: $s(x;y)=0$ при $x>0$, $y\geq 0$; $s(x;y)=\pi$ при $x<0$; $s(x;y)=2\pi$ при $y<0$, $x>0$; $\varphi = \pi/2$ при $x=0$, $y>0$; $\varphi = 3\pi/2$ при $x=0$, $y<0$, як і в плоскому випадку при $y=0$, $x=0$ аргумент φ – невизначений.

Дії додавання і віднімання просторових комплексних чисел вводимо аналогічно до відповідних дій у комплексних числах (ґрунтуючись на алгебраїчній формі їх запису, шляхом покомпонентного додавання (віднімання)): $w_i = x_i + y_i i + z_i j$, $i=1,2,3$, $w_3 = w_1 \pm w_2 \leftrightarrow x_3 = x_1 \pm x_2$, $y_3 = y_1 \pm y_2$, $z_3 = z_1 \pm z_2$.

Дію множення комплексних чисел вводимо, ґрунтуючись на їх сферичній формі запису: $w = r(\cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi + j\sin\theta)$.

Означення 2.2.1 Добутком двох просторових комплексних чисел w_1, w_2 назвемо таке число w_3 (позначимо: $w_3 = w_1 w_2$), що:

$$r_3 = r_1 \cdot r_2;\ \theta_3 = \left[\begin{array}{ll} \theta_1+\theta_2, & |\theta_1+\theta_2| \leq \pi/2, \\ \pi-(\theta_1+\theta_2), & \theta_1+\theta_2 > \pi/2, \\ -(\pi+(\theta_1+\theta_2)), & \theta_1+\theta_2 < -\pi/2; \end{array}\right.$$

$$\varphi_3 = \left[\begin{array}{lll} \varphi_1+\varphi_2, & 0 \leq \varphi_1+\varphi_2 < 2\pi, & |\theta_1+\theta_2| \leq \pi/2, \\ \varphi_1+\varphi_2+\pi, & 0 \leq \varphi_1+\varphi_2 < 2\pi, & |\theta_1+\theta_2| > \pi/2, \\ \varphi_1+\varphi_2-2\pi, & \varphi_1+\varphi_2 \geq 2\pi, & |\theta_1+\theta_2| \leq \pi/2, \\ \varphi_1+\varphi_2-\pi, & \varphi_1+\varphi_2 \geq 2\pi, & |\theta_1+\theta_2| > \pi/2, \end{array}\right.$$

або

$$\theta_3 = \left[\begin{array}{ll} \theta_1+\theta_2-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right], & \left|(\theta_1+\theta_2)-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right]\right| \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-\left(\theta_1+\theta_2-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right]\right), & (\theta_1+\theta_2)-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right] > \dfrac{\pi}{2}, \\ -\left(\pi+\left(\theta_1+\theta_2-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right]\right)\right), & (\theta_1+\theta_2)-2\pi\left[\dfrac{(\theta_1+\theta_2)}{2\pi}\right] < -\dfrac{\pi}{2}; \end{array}\right.$$

$$\varphi_3=(\varphi_1+\varphi_2)-2\pi\left[\frac{(\varphi_1+\varphi_2)}{2\pi}\right]. \tag{2.2.1}$$

Встановимо тепер залежності між алгебраїчними складовими просторових комплексних чисел, які при цьому отримуються.

Теорема 2.2.1. Добутком двох просторових комплексних чисел $w_1=x_1+iy_1+jz_1$ та $w_2=x_2+iy_2+jz_2$ є таке число $w_3=x_3+iy_3+jz_3$, що:

$$\begin{aligned}w_3=&(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_1z_2)\frac{x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\\&+(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_1z_2)\cdot\frac{y_1x_2+x_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}i+\\&+(z_2\sqrt{x_1^2+y_1^2}+z_1\sqrt{x_2^2+y_2^2})\,j,\quad \left(x_1^2+y_1^2\neq0,\ x_2^2+y_2^2\neq0\right).\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Доведення. Доведемо формулу (2.2.2) для $\left|\theta_1+\theta_2\right|\leq\pi/2$ і $\varphi_1+\varphi_2<2\pi$. Нехай $w_1=r_1(\cos\theta_1\cos\varphi_1+\cos\theta_1\sin\varphi_1+\sin\theta_1)$, $w_2=r_2(\cos\theta_2\cos\varphi_2+\cos\theta_2\sin\varphi_2+\sin\theta_2)$. Тоді:

$$\begin{aligned}x_3=&r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2)=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\cdot\\&\cdot(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2(\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\\&-\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}})(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}-\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}})=\\&=(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_1z_2)\frac{x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3=&r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2)=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\cdot\\&\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2(\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\end{aligned}$$

$$-\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}})(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}})=$$

$$=(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_1z_2)\frac{y_1x_2+x_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}};$$

$$z_3=r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)=r_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)=$$

$$=r_1r_2(\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}})=$$

$$=z_1\sqrt{x_2^2+y_2^2}+z_2\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

Доведення співвідношення (2.2.2) для азимута і полярного кутів, що не лежать у зазначених межах є аналогічним і безпосередньо випливає з формул зведення тригонометричних функцій.

У випадку, якщо, наприклад, $x_1=y_1=0$ (аналогічно при $x_2=y_2=0$), $r_1=|z_1|$, $\theta_1=\pi/2$, аргумент φ_1 – невизначений. Якщо ж значення φ_1 задати, виходячи з деяких додаткових умов, то матимемо:

$$\begin{aligned}&w=r_1r_2(\cos(\pi/2+\theta_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cos(\pi/2+\theta_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\\&+j\sin(\pi/2+\theta_2))=r_1r_2(-\sin\theta_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))+jcos\theta_2).\end{aligned}\qquad(2.2.3)$$

Зауваження 2.2.1. Введена нами дія множення, є комутативною, асоціативною але, взагалі кажучи, не є дистрибутивною відносно додавання.

Означення 2.2.2. Спряженим до просторового комплексного числа $w=x+iy+jz$ назвемо число $\bar{w}$ виду $\bar{w}=x-iy-jz$.

Очевидно, що модулі двох спряжених просторових комплексних чисел рівні: $|w|=|\bar{w}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Теорема 2.2.2. Добутком просторового комплексного числа на спряжене до нього є квадрат довжини модуля цього числа.

Доведення. Визначимо добуток чисел $w = x + iy + jz$ та $\overline{w} = x - iy - jz$ за формулою:

$$w\overline{w} = ((\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2)(x^2+y^2)/(x^2+y^2) + i\cdot((\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2)\times$$
$$\times(yx - xy)/(x^2+y^2) + (z\sqrt{x^2+y^2} - z\sqrt{x^2+y^2})\,j = (x^2+y^2+z^2) = |w|^2.$$

Визначимо уявні одиниці, виходячи з формул як безпосередньо з алгебраїчного множення, так і з формул добутку:

$$\begin{cases} i^2 = (0+1i+0)(0+1i+0) = -1, \\ j^2 = (0+0+1j)(0+0+1j) = -1\frac{0}{0} - 1\frac{0}{0}i, \\ ij = (0+1i+0)(0+0+1j) = 0\frac{0}{0} + 0\frac{0}{0}i + j, \\ ji = (0+0+1j)(0+1i+0) = 0\frac{0}{0} + 0\frac{0}{0}i + j. \end{cases}$$

Бачимо, що однозначне визначення є лише в першій з отриманих чотирьох рівностей, а саме $i^2 = -1$. Інші три співвідношення містять невизначеності. Для встановлення змісту j^2, ij, ij скористаємося співвідношенням (2.2.3): $j^2 = -(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, так, як $r_1 = r_2 = 1$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, φ_1, φ_2 – невизначені; $ij = ji = j$, так, як в даному випадку $r_1 = r_2 = 1$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$ ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$).

Отже, тут символ j^2 однозначно невизначений (відомо лише, що це число відповідає точці тригонометричного кола площини xOy) навіть у алгебраїчній формі запису (для однозначності задання j^2, як і для j, необхідні додаткові умови).

Введемо дію ділення у цій множині аналогічно до плоского випадку:

$$w = w_1 / w_2 \;\; <=> \;\; w_1 = w_2 w. \qquad (2.2.4)$$

Розв’язавши методом підстановок систему, що отримується в результаті покоординатного виконання операції множення у (2.2.4) ($w_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j$; $w_2 = x_2 + y_2 i + z_2 j$; $w = x + yi + zj$), приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.2.3. Часткою двох просторових комплексних чисел $w_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j$ і $w_2 = x_2 + y_2 i + z_2 j$ є таке число $w = x + yi + zj$, що:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(z_1 z_2 + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2)})(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{r_2^2 \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2)}}; \\ y = \dfrac{(z_1 z_2 + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2)})(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{r_2^2 \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2)}}; \\ z = \dfrac{z_1 \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - z_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{r_2^2}. \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

Зауваження 2.2.2. Можна дати означення частки двох просторових комплексних чисел, аналогічне до (2.2.5), так: часткою двох просторових чисел є таке число, модуль якого дорівнюватиме частці модулів діленого і дільника, а азимут та полярний кут відповідно дорівнюють різницям азимутів та полярних кутів діленого і дільника. А саме:

$$x_3 = \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)\cdot$$

$$\cdot(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right)\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right) =$$

$$=\frac{(z_1z_2+\sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)})(x_1x_2+y_1y_2)}{r_2^2\sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)}};$$

$$y_3=\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\cdot$$

$$\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}(\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+$$

$$+\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}})(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}})=$$

$$=\frac{(z_1z_2+\sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)})(y_1x_2-y_2x_1)}{r_2^2\sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)}};$$

$$z_3=\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2)=r_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)=\frac{r_1}{r_2}(\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}})=\frac{1}{r_2^2}(z_1\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_2\sqrt{x_1^2+y_1^2}).$$

Зауваження 2.2.3. Частку $w=x+yi+zj$ двох просторових комплексних чисел $w_1=x_1+y_1i+z_1j$ і $w_2=x_2+y_2i+z_2j$ не важко встановити, використовуючи властивість спряженого числа й формулу добутку:

$$x+yi+zj=\frac{x_1+y_1i+z_1j}{x_2+y_2i+z_2j}=\frac{(x_1+y_1i+z_1j)(x_2-y_2i-z_2j)}{(x_2+y_2i+z_2j)(x_2-y_2i-z_2j)}=\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\cdot$$

$$((\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+z_1z_2)\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+z_1z_2)$$

$$\frac{y_1x_2-x_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\cdot i+(z_1\sqrt{x_2^2+y_2^2}-z_2\sqrt{x_1^2+y_1^2})\,j).$$

Із формули множення (2.2.1) безпосередньо випливає, що:

$$w^n = r^n(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + j\sin\alpha) \quad (n \in N),$$

де:

$$\begin{cases} \alpha = \begin{cases} n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right], & \left|n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right]\right| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - \left(n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right]\right), & n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right] > \dfrac{\pi}{2}, \\ -\left(\pi + \left(n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right]\right)\right), & n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right] < -\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \\ \varphi_3 = \begin{cases} n\varphi - 2\pi\left[\dfrac{n\varphi}{2\pi}\right], & \left|n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right]\right| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ n\varphi - 2\pi\left[\dfrac{n\varphi}{2\pi}\right] + \pi, & \left|n\theta - 2\pi\left[\dfrac{n\theta}{2\pi}\right]\right| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Операція відшукання кореня n-го степеня ($n \in N$) із комплексного числа w, як і в плоскому випадку, зводиться до розв'язку рівняння $t = w^n$ ($t = R(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + j\sin\alpha)$), або:

$$r^n(\cos n\theta\cos n\varphi + i\cos n\theta\sin n\varphi + j\sin n\theta) = R(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + j\sin\alpha).$$

У результаті прирівнювання маємо: $r^n\cos n\theta\cos n\varphi = R\cos\alpha\cos\beta$; $r^n\cos n\theta\sin n\varphi = R\cos\alpha\sin\beta$; $r^n\sin n\theta = R\sin\alpha$. Звідси:

$$r = \sqrt[n]{R}, \ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi l}{n} \ (l = \overline{0, n-1}), \ \varphi = \frac{\beta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \ (k = \overline{0, n-1}).$$

Отже:

$$w = \sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi l}{n}\right)\cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi l}{n}\right)\sin\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + j\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi l}{n}\right)\right), \quad l, k = 0, \ldots n-1.$$

Зауваження 2.2.5. Бачимо, що, згідно вище введеного означення, існує n^2 різних значень кореня n-го степеня із просторового комплексного числа.

Приклад. Обчислити $\sqrt{2\sqrt{3}+6i+4j}$.

Розв'язання: $2\sqrt{3}+6i+4j=r(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta i+\sin\alpha j)$;

$$R=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2+4^2}=8;\ \alpha=arctg\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3};\ \ \beta=\arcsin\frac{4}{8}=\frac{\pi}{6}.$$

Отже:

$$w=\sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi l\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi k\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi l\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi k\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi l\right)\right),$$

або:

$$w_{00}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3+\frac{3\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}}i+\sqrt{2}j,$$

$$w_{01}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+j\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\sqrt{3+\frac{3\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}}i+\sqrt{2}j,$$

$$w_{10}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\cos\frac{\pi}{12}+i\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\sin\frac{\pi}{12}+j\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right)=$$

$$=-\sqrt{3+\frac{3\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}}i-\sqrt{2}j,$$

$$w_{11}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{3+\frac{3\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}}i-\sqrt{2}j.$$

2.3. Просторові аналоги конформних відображень

Для розуміння наведеного нижче матеріалу та проведення власних досліджень юному математику-досліднику необхідно мати знання про нескінченно малі величини, відображення, наближені методи обчислень, основ аналітичної геометрії. Поняття про конформні відображення тут введено в дещо описовій авторській інтерпретації (з певною втратою математичної строгості), що дозволило у зрозумілій та доступній формі представити постановки конкретних плоскої та відповідної просторової задач на наближені конформні відображення без використання класичних теорії та методів функцій комплексної змінної.

2.3.1. Задача про конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник.

Нехай в площині (z) ($z=x+iy$, $x,y\in R$) задана деяка функція $\omega=f(z)$ ($\omega=\varphi+i\,\psi$, $\varphi,\psi \in \mathrm{R}$). Скажемо, що дана функція здійснює *конформне відображення* (таке, що зберігає форму), якщо при цьому геометричні фігури (області) нескінченно малих розмірів переходять (з точністю до нескінченно малих величин вищого порядку малості в порівнянні з їх розмірами) у подібні їм фігури (див. рис.2.3.1). Нижче наведемо інші еквіваленти цього поняття.

Постановка задачі. Однозв'язна криволінійна область $G_z=ABCD$ обмежена чотирма гладкими кривими $AB=\{z\colon f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z\colon f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z\colon f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z\colon f_4(x,y)=0\}$, ортогональними у кутових точках. Задача (в загальному) полягає у побудові наближеного конформного відображення (побудові відпо-

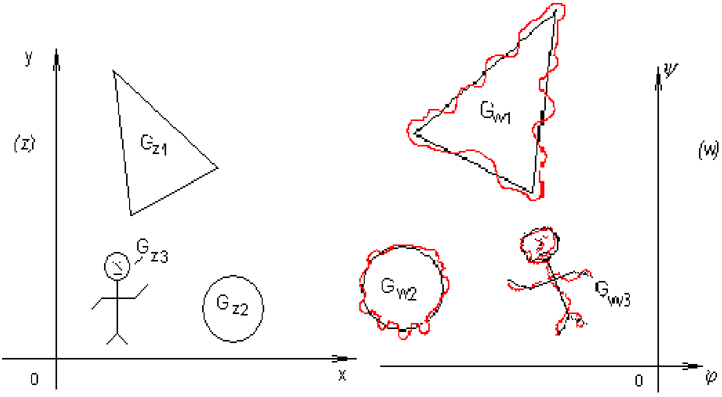


Рис. 2.3.1

відної ε-конформної сітки) $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ даного криволінійного чотирикутника на деякий прямокутник $G_\omega=\{\omega\colon \varphi_*<\varphi<\varphi^*, 0<\psi<Q\}$ із невідомим параметром Q (див рис.2.3.2-2.3.3), так щоб вершини G_z переходили у відповідні вершини G_ω. При цьому в процесі розв'язку даної задачі ми повинні знайти таке значення параметра Q (ширини прямокутника), при якому відображення є можливим.

Нехай при заданому розбитті $(m+1)\times(n+1)$ ($\varphi_i=\varphi^*+\Delta\varphi\cdot i,\quad i=\overline{0,m+1}$, $\psi_j=\Delta\psi\cdot j,\quad j=\overline{0,n+1}$, $\Delta\varphi=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{m+1}$, $\Delta\psi=\dfrac{Q}{n+1}$, $m,\ n\in\mathbf{N}$) параметричного прямокутника G_ω на рівні малі прямокутники $G_{\omega(i,j)}$ вузловим точкам (φ_i,ψ_j) з деякою точністю (ε-точністю) поставлено у відповідність такі точки $(x_{i,j},y_{i,j})$ ($x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j)$, $y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j)$) в G_Z, що побудовані відповідні малі чотирикутники $G_{Z(i,j)}$ є подібними з певною ε-точністю до відповідних прямокутників $G_{\omega(i,j)}$ (зауважимо, що за побудовою усі прямокутники $G_{\omega(i,j)}$ подібні вихідному прямокутнику G_ω і рівні між собою). Будемо називати побудовану таким чином сітку ε-*конформною*, а відповідне відображення – ε-*конформним відображенням*. При цьому подібність з ε-точністю чотирикутників $G_{Z(i,j)}$ та прямокутників $G_{\omega(i,j)}$ розуміється в тому сенсі, що скалярний добуток векторів, побудованих на прилеглих сторонах $G_{Z(i,j)}$, різниця між відношенням їх діагоналей і одиниці тощо, не перевищує заданого рівня малості ε. Величину $\gamma=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}$ (відношення сторін прямокутників $G_{\omega(i,j)}$), що знаходиться в процесі розв'язку задачі назвемо параметром конформності. Зрозуміло, що знаючи цю величину легко обчислити $Q=\gamma\cdot(\varphi^*-\varphi_*)$.

Зауваження 2.3.1. Виявляється, що не за всяким $(m+1)\times(n+1)$ розбиттям будується ε-конформна сітка заданої області G_z (якщо відповідну ε-конформну сітку побудувати не можна, то природнім є збільшення m та n з відповідним корегуванням співвідношення між ними).

Зауваження 2.3.2. Відповідність сторін *AB, CD, BC, AD* при відображенні $G_z \leftrightarrow G_\omega$ задається таким чином:

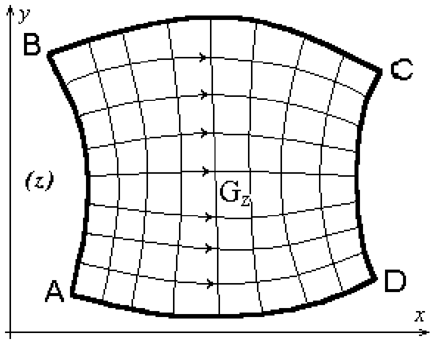
$$\begin{cases} f_1\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\big)=0, \quad f_3\big(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi)\big)=0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ f_2\big(x(\varphi,Q),y(\varphi,Q)\big)=0, \quad f_4\big(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\big)=0, \quad \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*. \end{cases} \tag{2.3.1.1}$$

Зауваження 2.3.3. До такої «геометричної» задачі зводиться модельна фізична задача побудови динамічної сітки (ліній течії

$p=\psi(x,y)$ та еквіпотенціальних ліній $q=\varphi(x,y)$) ідеального поля в області G_Z, обмеженої лініями течії AD ($\psi(x,y)=0$), BC ($\psi(x,y)=Q$) та еквіпотенціальними лініями AB ($\varphi_*=\varphi(x,y)$), CD ($\varphi^*=\varphi(x,y)$) [2,3].

Алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі побудуємо таким чином.

1. На початку задаємо рівняння граничних ліній області G_Z



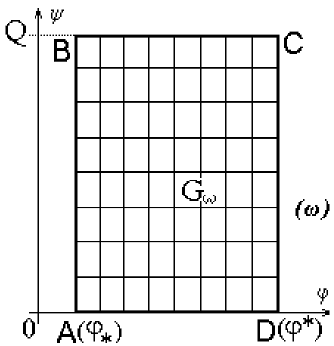


Рис.2.3.2 2 Рис.2.3.3

(також, у результаті розв'язання систем відповідних двох рівнянь з двома невідомими, знаходимо координати кутових точок *A*, *B*, *C*, *D*), параметри області G_ω – $\varphi_\bullet$, $\varphi^\bullet$, параметри розбиття областей *m* та *n*, параметр точності ε.

2. Задаємо початкові (нульові) наближення граничних вузлів $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$, $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$ так, щоб виконувались умови

$$\begin{array}{lll} f_1\left(x_{0,j},y_{0,j}\right)=0, & f_3\left(x_{m+1,j},y_{m+1,j}\right)=0, & j=\overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)=0, & f_4\left(x_{i,0},y_{i,0}\right)=0, & i=\overline{0,m+1}; \end{array} \qquad (2.3.1.2)$$

3. Задаємо початкові нульові наближення внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}; y_{i,j}^{(0)}, i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$, так щоб відповідні “чотирикутники” були якомога ближчими до подібних між собою “прямокутників".

4. За формулою (на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних чотирикутників двох областей)

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j} \ , \qquad (2.3.1.3)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}}$$

обчислюємо нульове наближення $\gamma^{(0)}$ невідомого параметра конформності (очевидно, що дана формула складається із відношення “середніх” довжин сторін “прямокутників").

5. Підправляємо (знаходимо наступне уточнення) координат внутрішніх вузлів шляхом знаходження середніх зважено арифметичних координат навколишніх вузлів, наприклад:

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \frac{\gamma^2 (x_{i,j-1}^{(k)} + x_{i,j+1}^{(k)}) + (x_{i-1,j}^{(k)} + x_{i+1,j}^{(k)})}{2(\gamma^2+1)},$$

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \frac{\gamma^2 (y_{i,j-1}^{(k)} + y_{i,j+1}^{(k)}) + (y_{i-1,j}^{(k)} + y_{i+1,j}^{(k)})}{2(\gamma^2+1)};$$

(можливий варіант, коли такі середні значення обчислюються як за результатами із попереднього кроку ітерації, так і даного кроку).

6. За формулою (2.3.1.3) знаходимо наступне наближення параметра конформності $\gamma^{(k+1)}$.

7. Знаходимо наступне наближення координат граничних

вузлів $x_{i,0}^{(k+1)}, y_{i,0}^{(k+1)}$, $x_{0,j}^{(k+1)}, y_{0,j}^{(k+1)}, x_{m+1,j}^{(k+1)}, y_{m+1,j}^{(k+1)}, x_{i,n+1}^{(k+1)}, y_{i,n+1}^{(k+1)}$ в результаті розв'язку такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \text{при } j=\overline{0,n+1}: \\ f_{1x}^{/}(x_{0,j}^{(k+1)},y_{0,j}^{(k+1)})(y_{1,j}^{(k+1)}-y_{0,j}^{(k+1)})-f_{1y}^{/}(x_{0,j}^{(k+1)},y_{0,j}^{(k+1)})(x_{1,j}^{(k+1)}-x_{0,j}^{(k+1)})=0, \\ f_{3x}^{/}(x_{m+1,j}^{(k+1)},y_{m+1,j}^{(k+1)})(y_{m,j}^{(k+1)}-y_{m+1,j}^{(k+1)})-f_{3y}^{/}(x_{m+1,j}^{(k+1)},y_{m+1,j}^{(k+1)})(x_{m,j}^{(k+1)}-x_{m+1,j}^{(k+1)})=0; \\ \text{при } i=\overline{0,m+1}: \\ f_{2x}^{/}(x_{i,n+1}^{(k+1)},y_{i,n+1}^{(k+1)})(y_{i,n}^{(k+1)}-y_{i,n+1}^{(k+1)})-f_{2y}^{/}(x_{i,n+1}^{(k+1)},y_{i,n+1}^{(k+1)})(x_{i,n}^{(k+1)}-x_{i,n+1}^{(k+1)})=0, \\ f_{4x}^{/}(x_{i,0}^{(k+1)},y_{i,0}^{(k+1)})(y_{i,1}^{(k+1)}-y_{i,0}^{(k+1)})-f_{4y}^{/}(x_{i,0}^{(k+1)},y_{i,0}^{(k+1)})(x_{i,1}^{(k+1)}-x_{i,0}^{(k+1)})=0. \end{cases} \qquad (2.3.1.4)$$

Умови ортогональності (додаткові умови для граничних та приграничних вузлів) "приграничних нормальних" та "граничних дотичних" векторів можна (замість (2.3.1.4)) записати ще й так (через рівність нулю скалярного добутку відповідних векторів):

$$\begin{cases} (x_{i,j}-x_{i,j+1})(x_{i,j}-x_{i+1,j})+(y_{i,j}-y_{i,j+1})(y_{i,j}-y_{i+1,j})=0, \\ (x_{i,j}-x_{i,j-1})(x_{i,j}-x_{i+1,j})+(y_{i,j}-y_{i,j-1})(y_{i,j}-y_{i+1,j})=0. \end{cases}$$

8. Нове наближення Q знаходимо за формулою $Q=\Delta\varphi\cdot\dfrac{n+1}{\gamma}$.

9. Умовами закінчення ітераційного процесу є:

$$\max_{x_{i,j},y_{i,j}\in\partial G_z}\left(\left|x_{i,j}^{(k+1)}-x_{i,j}^{(k)}\right|,\left|y_{i,j}^{(k+1)}-y_{i,j}^{(k)}\right|\right)<\varepsilon, \qquad (2.3.1.5)$$

$$\left|Q^{(k+1)}-Q^{(k)}\right|<\varepsilon, \quad \left|D^{(k+1)}-D^{(k)}\right|<\varepsilon,$$

де $D=\dfrac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\dfrac{\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}}$ – усереднене відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^{γ}.

2.3.2. Просторовий аналог задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник

Згідно з рис. 2.3.4, 2.3.5 задамо поверхню криволінійного паралелепіпеда $G_w = ABCDA'B'C'D'$: $ABCD = \{w: f_1(x,y,z)=0\}$, $A'B'C'D' = \{w: f_2(x,y,z)=0\}$, $ACC'A' = \{w: f_3(x,y,z)=0\}$, $BDD'B' = \{w:,$ $f_4(x,y,z)=0\}$, $ABB'A' = \{w: f_5(x,y,z)=0\}$, $CC'D'D = \{w: f_6(x,y,z)=0\}$, параметри n, m, l, φ_*, φ^* відповідної рівномірної сіткової області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j, \chi_k):\ \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i,\ i=\overline{0,n};\ \psi_j = \Delta\psi \cdot j,\ j=\overline{0,m};\ \chi_k = \Delta\chi \cdot k,$ $k=\overline{0,l};$ $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\Delta\psi = Q_*/m$, $\Delta\chi = Q^*/l$, $\gamma_\psi = \Delta\varphi/\Delta\psi$, $\gamma_\chi = \Delta\varphi/\Delta\chi$, $n,\ m,\ k \in \mathbf{N}\}$, та точність наближення ε. Через $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$ позначимо координати відповідних вузлів у G_w. При цьому:

$$
\begin{gathered}
f_1(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0,\ f_2(x_{n,j,k}, y_{n,j,k}, z_{n,j,k}) = 0,\ j=\overline{0,m},\ k=\overline{0,l};\\
f_3(x_{i,m,k}, y_{i,m,k}, z_{i,m,k}) = 0,\ f_4(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) = 0,\ i=\overline{0,n},\ k=\overline{0,l}; \qquad (2.3.2.1)\\
f_5(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0,\ f_6(x_{i,j,l}, y_{i,j,l}, z_{i,j,l}) = 0,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}.
\end{gathered}
$$

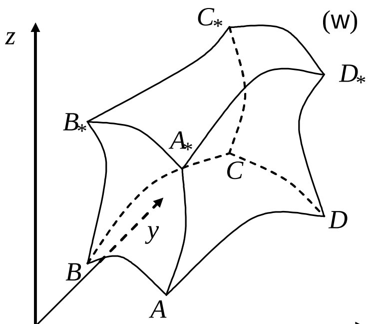


Рис. 2.3.4

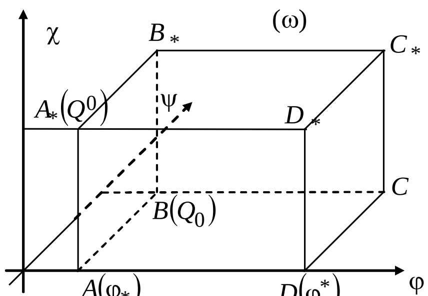


Рис. 2.3.5

Пригpаничні “умови колінеарності” (додаткові умови для граничних та приграничних вузлів) запишемо у вигляді ($i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ k=\overline{0,l}.$):

$$\frac{f'_{1x}}{x_{1,j,k}-x_{0,j,k}}=\frac{f'_{1y}}{y_{1,j,k}-y_{0,j,k}},\quad \frac{f'_{1x}}{x_{1,j,k}-x_{0,j,k}}=\frac{f'_{1z}}{z_{1,j,k}-z_{0,j,k}};$$

$$\frac{f'_{2x}}{x_{n-1,j,k}-x_{n,j,k}}=\frac{f'_{2y}}{y_{n-1,j,k}-y_{n,j,k}},\quad \frac{f'_{2x}}{x_{n-1,j,k}-x_{n,j,k}}=\frac{f'_{2z}}{z_{n-1,j,k}-z_{n,j,k}};$$

$$\frac{f'_{3x}}{x_{i,m-1,k}-x_{i,m,k}}=\frac{f'_{3y}}{y_{i,m-1,k}-y_{i,m,k}},\quad \frac{f'_{3x}}{x_{i,m-1,k}-x_{i,m,k}}=\frac{f'_{3z}}{z_{i,m-1,k}-z_{i,m,k}};$$

$$\frac{f'_{4x}}{x_{i,1,k}-x_{i,0,k}}=\frac{f'_{4y}}{y_{i,1,k}-y_{i,0,k}},\quad \frac{f'_{4x}}{x_{i,1,k}-x_{i,0,k}}=\frac{f'_{4z}}{z_{i,1,k}-z_{i,0,k}}; \qquad (2.3.2.2)$$

$$\frac{f'_{5x}}{x_{i,j,1}-x_{i,j,0}}=\frac{f'_{5y}}{y_{i,j,1}-y_{i,j,0}},\quad \frac{f'_{5x}}{x_{i,j,1}-x_{i,j,0}}=\frac{f'_{5z}}{z_{i,j,1}-z_{i,j,0}};$$

$$\frac{f'_{6x}}{x_{i,j,l-1}-x_{i,j,l}}=\frac{f'_{6y}}{y_{i,j,l-1}-y_{i,j,l}},\quad \frac{f'_{6x}}{x_{i,j,l-1}-x_{i,j,l}}=\frac{f'_{6z}}{z_{i,j,l-1}-z_{i,j,l}},$$

Формули для знаходження просторових параметрів конформності γ_ψ та γ_χ (шукані відношення сторін параметричного паралелепіпеда G_ω) одержимо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних “елементарних паралелепіпедів” в G_w та G_ω:

$$\gamma_\psi=\frac{1}{nm}\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l}\gamma_{\psi i,j,k}\ ,\ \gamma_\chi=\frac{1}{nl}\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l}\gamma_{\chi i,j,k}\ , \qquad (2.3.2.3)$$

$$\gamma_{\psi\, i,j,k}=\left(\left(\left(x_{i,j-1,k-1}-x_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k-1}-y_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k-1}-z_{i-1,j-1,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\left(\left(x_{i,j-1,k}-x_{i-1,j-1,k}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k}-y_{i-1,j-1,k}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k}-z_{i-1,j-1,k}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$\left(\left(x_{i,j,k-1}-x_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j,k-1}-y_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j,k-1}-z_{i-1,j,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$\left.\left(\left(x_{i,j,k}-x_{i-1,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j,k}-y_{i-1,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j,k}-z_{i-1,j,k}\right)^2\right)^{1/2}\right)/$$

$$/\left(\left(\left(x_{i,j-1,k-1}-x_{i,j,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k-1}-y_{i,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k-1}-z_{i,j,k-1}\right)^2\right)+\right.$$

$$+\left(\left(x_{i,j-1,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k}-z_{i,j,k}\right)^2\right)^{1/2}+\left(\left(x_{i-1,j-1,k-1}-x_{i-1,j,k-1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(y_{i-1,j-1,k-1}-y_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i-1,j-1,k-1}-z_{i-1,j,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$\left.\left(\left(x_{i-1,j-1,k}-x_{i-1,j,k}\right)^2+\left(y_{i-1,j-1,k}-y_{i-1,j,k}\right)^2+\left(z_{i-1,j-1,k}-z_{i-1,j,k}\right)^2\right)^{1/2}\right),$$

$$\gamma_{\chi\, i,j,k}=\left(\left(\left(x_{i,j-1,k-1}-x_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k-1}-y_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k-1}-z_{i-1,j-1,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\left(\left(x_{i,j-1,k}-x_{i-1,j-1,k}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k}-y_{i-1,j-1,k}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k}-z_{i-1,j-1,k}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\left(x_{i,j,k-1}-x_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j,k-1}-y_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j,k-1}-z_{i-1,j,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$\left.+\left(\left(x_{i,j,k}-x_{i-1,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j,k}-y_{i-1,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j,k}-z_{i-1,j,k}\right)^2\right)^{1/2}\right)/$$

$$/\left(\left(\left(x_{i,j-1,k}-x_{i,j-1,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j-1,k}-y_{i,j-1,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j-1,k}-z_{i,j-1,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\left(\left(x_{i-1,j-1,k}-x_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(y_{i-1,j-1,k}-y_{i-1,j-1,k-1}\right)^2+\left(z_{i-1,j-1,k}-z_{i-1,j-1,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\left(x_{i-1,j,k}-x_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(y_{i-1,j,k}-y_{i-1,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i-1,j,k}-z_{i-1,j,k-1}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$\left.+\left(\left(x_{i,j,k}-x_{i,j,k-1}\right)^2+\left(y_{i,j,k}-y_{i,j,k-1}\right)^2+\left(z_{i,j,k}-z_{i,j,k-1}\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Відповідний алгоритм в загальному випадку також будується шляхом "почергового заморожування" (почергової фіксації) параметрів конформності γ_ψ та γ_χ, граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ. Наведемо його основні фрагменти.

Задавши кількість вузлів розбиття *n, m* та *l* сіткової області G_ω, параметр ε початкові наближення координат граничних вузлів: $x_{0,j,k}^{(0)}$, $y_{0,j,k}^{(0)}$, $z_{0,j,k}^{(0)}$, $x_{n,j,k}^{(0)}, y_{n,j,k}^{(0)}$, $z_{n,j,k}^{(0)}$, $x_{i,0,k}^{(0)}$, $y_{i,0,k}^{(0)}$, $z_{i,0,k}^{(0)}$, $x_{i,m,k}^{(0)}$, $y_{i,m,k}^{(0)}$, $z_{i,m,k}^{(0)}$, $x_{i,j,0}^{(0)}$, $y_{i,j,0}^{(0)}$, $z_{i,j,0}^{(0)}$, $x_{i,j,l}^{(0)}$, $y_{i,j,l}^{(0)}$, $z_{i,j,l}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.3.2.1)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{1,l-1}$, знаходимо за формулою (2.3.2.3) початкове наближення $\gamma_\psi^{(0)}=\gamma(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z^{(0)}{}_{i,j,k})$ та $\gamma_\chi^{(0)}=\gamma(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z^{(0)}{}_{i,j,k})$. При знаходженні наступного наближення координат внутрішніх вузлів природно використати зважені середньоарифметичні значення координат "навколишніх" вузлів, які можна обчислити, наприклад, за формулами:

$$x_{i,j,k}^{(p+1)}=\frac{x_{i+1,j,k}^{(p)}+x_{i-1,j,k}^{(p)}+\gamma_\psi^2(x_{i,j+1,k}^{(p)}+x_{i,j-1,k}^{(p)})+\gamma_\chi^2(x_{i,j,k+1}^{(p)}+x_{i,j,k-1}^{(p)})}{2(1+\gamma_\psi^2+\gamma_\chi^2)};$$

$$y_{i,j,k}^{(p+1)}=\frac{y_{i+1,j,k}^{(p)}+y_{i-1,j,k}^{(p)}+\gamma_\psi^2(y_{i,j+1,k}^{(p)}+y_{i,j-1,k}^{(p)})+\gamma_\chi^2(y_{i,j,k+1}^{(p)}+y_{i,j,k-1}^{(p)})}{2(1+\gamma_\psi^2+\gamma_\chi^2)} \qquad (2.3.2.4)$$

$$z_{i,j,k}^{(p+1)}=\frac{z_{i+1,j,k}^{(p)}+z_{i-1,j,k}^{(p)}+\gamma_\psi^2(z_{i,j+1,k}^{(p)}+z_{i,j-1,k}^{(p)})+\gamma_\chi^2(z_{i,j,k+1}^{(p)}+z_{i,j,k-1}^{(p)})}{2(1+\gamma_\psi^2+\gamma_\chi^2)},$$

де *p* – крок ітерації.

Далі знову за формулами (2.3.2.3) обчислюємо нові наближення γ_ψ та γ_χ (при цьому $Q_* = \Delta\varphi \cdot m/\gamma_\psi$, $Q^* = \Delta\varphi \cdot l/\gamma_\chi$, $Q = Q_* Q^*$), уточнюємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.3.2.1), (2.3.2.2) та перевіряємо виконання умов:

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(p+1)} - x_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(p+1)} - y_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(p+1)} - z_{i,j,k}^{(p)} \right| \right) < \varepsilon. \quad (2.3.2.5)$$

Якщо умови (2.3.2.5) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів. Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку, то збільшуємо *n, m* і *l* та розв'язуємо різницеву задачу заново (оптимальність співвідношення між *n, m* і *l* досягається перебором).

Умовами закінчення ітераційного процесу (окрім (2.3.2.5)) є:

$$\left| D_1^{(p)} / D_2^{(p)} - 1 \right| < \varepsilon, \; \left| D_1^{(p)} / D_3^{(p)} - 1 \right| < \varepsilon, \; \left| D_1^{(p)} / D_4^{(p)} - 1 \right| < \varepsilon, \; \left| Q^{(p+1)} - Q^{(p)} \right| < \varepsilon,$$

де

$$D_1 = \frac{1}{mnk} \sum_{i,j,k=0}^{n-1,m-1,k-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j,k})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k})^2}};$$

$$D_2 = \frac{1}{mnk} \sum_{i,j,k=0}^{n-1,m-1,k-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j,k+1})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j+1,k})^2}};$$

$$D_3 = \frac{1}{mnk} \sum_{i,j,k=0}^{n-1,m-1,k-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j,k-1})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j,k-1})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j,k-1})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j+1,k})^2}};$$

$$D_4 = \frac{1}{mnk} \sum_{i,j,k=0}^{n-1,m-1,k-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j,k+1})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j+1,k})^2}}.$$

Найбільш перспективним напрямком досліджень в даній галузі, на наш погляд, є розробка теорії "просторових аналітичних функцій” (просторових збіжних степеневих рядів).

Література до розділу 2

1. *Антонцев С.Н.* Об одной задаче М.А. Лаврентьева // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 1975. – Вып.XXIII. – С. 11-21.
2. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про розв’язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип.6. – С. 25-36.
3. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” // Волинський математичний вісник. – 2003. – Вип.10. – С.5-15.
4. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука. –1969. – .
5. *Елисеев В. И.* Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. – М.: НИАТ. - 1990.- 189 с.
6. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа.- М.:Наука.-1973. – 144 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного.-М.:Наука.- 1973. – 736 с.
8. *Маркушевич А.И.* Комплексные числа и конформные отображения.-М.:Наука.- 1979. –56 с.
9. *Маркушевич А.И.,* Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.-М.:Просвещение.- 1997. – 320 с.
10. *Понтрягин Л.С.* Обобщение чисел // Квант. - М.:Наука.-1985.-

Вып.3.-С.2-5.

11. *Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И.* Лекции по алгебре и элементарным функциям.- М.:Изд-во. Моск. ун-та. - 1978. – 384 с.
12. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод.- М.:Наука, изд.2, 1977. – 664 с.
13. *Рауз. Х.* Механика жидкости.-М.:-Стройиздат.-1967. – 390 с.
14. *Тадеєв В.О.* Етюд про комплексні числа // У світі математики.- К.:Твімс.-2002. -Том.8. - Вип.1. - С.52-67.
15. *Тадеєв В.О.* Етюд про комплексні числа // У світі математики.- К.:Твімс.-2002.-Том.8. - Вип.2. - С.52-67.
16. *Федак І.В.* Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх.-Чернівці: Зелена Буковина.-2002.-340 с.
17. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука. – 1977. – 407 с.
18. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.-М.:Наука.- 1977.-736 с

РОЗДІЛ 3. АНТИКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ФУНКЦІЇ

У наш час комплексні числа є досить поширеними і використовуються, як у математиці, так і у фізиці та інших галузях науки і техніки: картографії, гідро- та аеродинаміці, електростатиці, теорії пружності, квантовій теорії та ін. Без і, навіть, всупереч волі того чи іншого математика, уявні числа знову і знову з'являються у викладках, і лише поступово, в міру того, як виявляється користь від їхнього вживання, вони одержують більш і більш широке поширення (Ф.Клейн). Вчені намагаються побудувати їх узагальнення (з втратою тих чи інших властивостей комплексних чисел) з метою застосування їх у різних галузях науки (див., напр., [1-5]).

Нижче нами: введено поняття антикомплексних чисел; отримані основні властивості (зокрема теореми про модуль та аргумент добутку; підходи до обчислення степеня та кореня); закладено основи відповідної теорії “антианалітичних” функцій; побудовано теорію антикомплексних чисел “$x+jt$”, особливістю якої є рівність $j^2=+1$, яка знаходить велике застосування при моделюванні та дослідженні коливальних процесів.

3.1. Антикомплексні числа

Означення 3.1.1. Під антикомплексними числами розумітимемо всеможливі пари (комплекси) дійсних чисел $c=a+jb$ дії над якими вводяться аналогічно до відповідних дій над комплексними (класичними) числами за умови, що $j^2=+1$. Тобто, якщо $z_1 = x_1 + jt_1$, $z_2 = x_2 + jt_2$, $z = x + jt$, то $z = z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow x = x_1x_2 + t_1t_2$, $t = x_1t_2 + t_1x_2$.

Неважко помітити, що для всіх z_1 та z_2 таких, що $x_2 \neq t_2$ існує частка z_1 / z_2 і отримується шляхом “спряженого множення”:

$$\frac{x_1 + jt_1}{x_2 + jt_2} = \frac{x_1x_2 + t_1t_2}{x_2^2 - t_2^2} + j\frac{-x_1t_2 + x_2t_1}{x_2^2 - t_2^2}. \qquad (3.1.1)$$

Зауваження 3.1.1 “На жаль” для чисел виду $z = x \pm xj$ частка $1/z$ не існує (для її визначення потрібно задавати додаткові умови, виходячи, наприклад, із фізичних процесів, що описуються такими просторово-часовими комплексами $x + jt$, де x - просторова змінна, а t - час).

Теорема 3.1.1. (про модуль і аргумент добутку антикомплексних чисел). Якщо $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $z = z_1z_2$, $z_i = r_i(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i)$, $i = 1{,}2$, то:

$$r = r_1 \cdot r_2\sqrt{\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sqrt{\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}}, \quad \left(tg\varphi = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\right). \qquad (3.1.2)$$

Доведення. Дійсно,

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = r_1r_2 \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + j\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)\right) =$$

$$=r_1 r_{21}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+j\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

Наслідок. На основі виведеної вище формули про множення у тригонометричній формі одержуємо формули про піднесення до квадрату, кубу, четвертого степеня тощо:

$$z^2=\rho\left(\cos\theta+j\sin\theta\right), \tag{3.1.3}$$

де $\rho=r^2\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}}$, $\sin\theta=\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}}$;

$$z^3=\rho\left(\cos\theta+j\sin\theta\right), \tag{3.1.4}$$

де $\rho=r^3\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}\cdot\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2 3\varphi}$, $\cos\theta=\dfrac{\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin 3\varphi}{\sqrt{\left(1+\sin^2 2\varphi\right)\left(\cos^2\varphi+\sin^2 3\varphi\right)}}$,

$\sin\theta=\dfrac{\cos\varphi\sin 2\varphi+\sin 3\varphi}{\sqrt{\left(1+\sin^2 2\varphi\right)\left(\cos^2\varphi+\sin^2 3\varphi\right)}}$;

$$z^4=\rho\left(\cos\theta+j\sin\theta\right), \tag{3.1.5}$$

де $\rho=r^4\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}\cdot\sqrt{1+\sin^2 4\varphi}$, $\cos\theta=\dfrac{1+\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{\sqrt{\left(1+\sin^2 2\varphi\right)\left(1+\sin^2 4\varphi\right)}}$,

$\sin\theta=\dfrac{\sin 2\varphi+\sin 4\varphi}{\sqrt{\left(1+\sin^2 2\varphi\right)\left(1+\sin^2 4\varphi\right)}}$.

В загальному, використовуючи біном Ньютона, маємо:

$$\left(r\left(\cos\varphi+j\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(A+jB\right)=r^n\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{\cos A}{\sqrt{A^2+B^2}}+j\frac{\sin B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right),$$

де

$$A=C_n^0\cos^n\varphi+C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\phi+\ldots+C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\phi+\ldots,$$

$$B=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi+C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\phi+\ldots+C_n^{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\phi+\ldots$$

$$(k=\overline{0,n},\ k=0,\ldots,n).$$

Звідси, наприклад, при добуванні квадратного кореня, маємо:

$$\sqrt{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta), \qquad (3.1.6)$$

де $\sin 2\varphi = tg\theta$, $\quad r^2 = \dfrac{\rho}{\sqrt{1+tg^2\theta}}$.

В алгебраїчній ж формі маємо:

$$z^n = (x+jt)^n = (C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} t^2 + C_n^4 x^{n-4} t^4 + \ldots) + j(C_n^1 x^{n-1} t +$$
$$+ C_n^3 x^{n-} t^3 + \ldots). \qquad (3.1.7)$$

Нехай $w=z^n$ $(w=u+jv)$. Тоді на основі вище отриманої формули приходимо до справедливості такої теореми.

Теорема 3.1.2 Мають місце співвідношення

$$u(x,t) = C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} t^2 + C_n^4 x^{n-4} t^4 + \ldots + C_n^{n-2} x^2 t^{n-2} + C_n^n t^n;$$
$$v(x,t) = C_n^1 x^{n-1} t + C_n^3 x^{n-3} t^3 + C_n^5 x^{n-5} t^5 + \ldots + C_n^{n-3} x^3 t^{n-3} + C_n^{n-1} x t^{n-1}, \qquad (3.1.8)$$

причому:

$$u_x = v_t,\ u_t = v_x\ u_{xx} = v_{tt},\ v_{xx} = v_{tt}. \qquad (3.1.9)$$

Доведення (другої частини теореми 3.1.2). Обчислимо похідну від функції $u(x,t)$ стосовно змінної x (вважаючи t параметром, константою): $u_x = nC_n^0 x^{n-1} + (n-2)C_n^2 x^{n-3} t^2 + (n-4)C_n^4 \times$ $\times x^{n-5} t^4 + \ldots + 4C_n^{n-2} x^3 t^{n-4} + 2C_n^{n-2} x t^{n-2}$, та похідну $v(x,t)$ стосовно змінної t (вважаючи x параметром):

$$v_t = C_n^1 x^{n-1} + 3C_n^3 x^{n-3} t^2 + 5C_n^4 x^{n-5} t^4 + \ldots + (n-3)C_n^{n-3} x^5 t^{n-4} + (n-1)C_n^{n-1} x t^{n-2}.$$

Порівнюючи відповідні доданки в отриманих формулах:

$$(n-2k)C_n^{2k} x^{n-2k-1} t^{2k} = (n-2k)\frac{n!}{2k!\cdot(n-2k)!}\cdot x^{n-2k-1} t^{2k} =$$

$$= \frac{n!}{2k!(n-2k-1)!}\cdot x^{n-2k-1} t^{2k},$$

$$(2k+1)C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}t^{2k}=(2k+1)\frac{n!}{(2k+1)!\cdot(n-2k-1)!}\cdot x^{n-2k-1}t^{2k}=$$

$$=\frac{n!}{2k!(n-2k-1)!}\cdot x^{n-2k-1}t^{2k},$$

бачимо, що функції u та v задовольняють рівняння $u_x=v_t$. Інші тотожності доводяться аналогічно.

Теорема 3.1.3 (наслідок теореми 3.1.2). Нехай $w=u+jv=C_o+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_nz^n-$ многочлен, де $c_k=a_k+jb_k$ $k=0,...,n$ тоді мають місце формули (3.1.8).

Доведення ґрунтується на теоремах про похідну добутку та суми і винесення сталого множника з-під знаку похідної.

Неважко перенести цю теорему і на нескінченні многочлени (збіжні степеневі ряди).

3.2. Відображення з допомогою функцій антикомплексної змінної

Розглянемо відображення з допомогою функції $w=w(z)$ $(u=u(x,t), v=v(x,t))$, де $z=x+jt$ – антикомплексна змінна, $w=u+jv$.

3.2.1. Відображення з допомогою лінійної функції

Розглянемо функцію:

$$w=cz+d\,, \tag{3.2.1}$$

де $c=a+jb, d=d_*+jd^*$. Звідси: $u=ax+bt+d_*, v=bx+at+d^*$ (умова взаємно однозначності $a\neq\pm b$);

$$x=\frac{a}{a^2-b^2}u+\frac{-b}{a^2-b^2}v+\frac{-ad_*+bd^*}{a^2-b^2},$$

$$y=\frac{a}{a^2-b^2}v+\frac{-b}{a^2-b^2}u+\frac{-ad^*+bd_*}{a^2-b^2}. \qquad (3.2.2)$$

Відображення прямої.

Теорема 3.2.1. При лінійному відображенні $w=cz+d\ (a\neq\pm b)$ пряма:

$$Ax+Bt=C \qquad (3.2.3)$$

переходить у пряму

$$A^*u+B^*v=C^*, \qquad (3.2.4)$$

де $A^*=Aa-Bb,\ B^*=-Ab+Ba,\ C^*=C\left(a^2-b^2\right)-A\left(ad_*+bd^*\right)-B\left(-ad^*+bd_*\right).$

Дійсно, підставивши (3.2.2) у (3.2.3), після спрощень приходимо до (3.2.4).

Теорема 3.2.2. При лінійному відображенні $w=cz+d\ (a\neq\pm b)$ паралельність між прямими зберігається.

Доведення. Нехай прямі $l_1\left(A_1x+B_1t=C_1\right)$ і $l_2\left(A_2x+B_2t=C_2\right)$ є паралельними, тобто $A_1B_2=A_2B_1$. Покажемо, що відповідне співвідношення має місце і між відповідними образами, а саме, що: $A_1^*B_2^*=A_2^*B_1^*$. Дійсно, $A_1^*B_2^*=-A_1B_2ab+B_1A_2b^2+A_1B_2a^2-B_1B_2ab$, $A_2^*B_1^*=-A_1A_2ab+B_1A_2a^2+A_1B_2b^2-B_1B_2ab$; врахувавши, що $A_1B_2=A_2B_1$, приходимо до рівності $A_1^*B_2^*=A_2^*B_1^*$.

Зауваження3.2.2. При лінійному відображенні $w=cz+d\ (a\neq\pm b)$ перпендикулярність між прямими, взагалі кажучи, не зберігається. Дійсно, нехай прямі $l_1\left(A_1x+B_1t=C_1\right)$ і $l_2\left(A_2x+B_2t=C_2\right)$ є перпендикулярними, тобто $A_1A_2=-B_1B_2$.

Подивимося, чи виконується таке співвідношення і між відповідними образами, а саме, чи: $A_1^* A_2^* = -B_1^* B_2^*$. Маємо: $A_1^* A_2^* = -A_1 A_2 a^2 - A_1 B_2 ab - A_2 B_2 ab + B_1 B_2 b^2$, $B_1^* B_2^* = A_1 A_2 b^2 - A_1 B_2 ab - A_2 B_2 ab + B_1 B_2 a^2$; використовуючи, що $A_1^* A_2^* = -B_1^* B_2^*$, приходимо до наступного: $A_1^* A_2^* + B_1^* B_2^* = -2ab(A_1 B_2 + A_2 B_1)$.

Теорема 3.2.3. При лінійному відображенні $w = cz + d$ $(a \neq \pm b)$ коло переходить в коло.

Доведення. Нехай

$$(x - A)^2 + (t - B)^2 = C^2 \tag{3.2.5}$$

рівняння вихідного кола. Тоді, підставивши (3.2.2) у (3.2.5), після відповідних спрощень, матимемо: $\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2 - 4\beta uv + 2\gamma_1 u + 2\gamma_2 v = \gamma$, де $\alpha^2 = a^2 + b^2$, $\beta = ab$, $\gamma_1 = -a^2 d_* + 2abd^* - b^2 d_* - a^3 A + Aab^2 + Bba^2 - Bb^3$, $\gamma_2 = -a^2 d^* + 2abd_* - b^2 d^* - b^3 A + Aa^2 b + Bab^2 - Ba^3$, $\gamma = (a^2 - b^2)^2 (C^2 + A^2 - B^2) + 4abd^* d_* + 2A(a^2 - b^2) \cdot (-ad_* + bd^*) + 2B(a^2 - b^2)(-ad^* + bd_*) - (a^2 + b^2)(d_*^2 + d^{*2})$. Оскільки $(a \neq \pm b)$, то $\alpha^2 \alpha^2 - (-2\beta)^2 = (a^2 + b^2)^2 - \quad -4a^2 b^2 = (a^2 - b^2)^2 > 0$. Отже отримане вище співвідношення є рівнянням кола.

3.2.2. Відображення за допомогою функції $w = 1/z$.

Нехай $w = 1/z$, тоді $w = u + jv = \dfrac{1}{x + jt} = \dfrac{x - jt}{x^2 - t^2} = \dfrac{x}{x^2 - t^2} + j\dfrac{-t}{x^2 - t^2}$ $t \neq \pm x$.

3.2.2.1. Знайдемо образ прямої $t = kx (k \neq \pm 1)$ при даному відображенні. Маємо: $u = 1/((1 - k^2)x)$, $v = -k/((1 - k^2)x)$. Звідси

$v=-ku$ (пряма симетрична заданій відносно осі ординат).

3.2.2.2. Тепер знайдемо образ прямої $t=kx+d$.

Теорема 3.2.4. У випадку $d\neq 0, |k|>1$, пряма $t=kx+d$ при відображенні $w=1/z$ переходить у гіперболу $Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev=0,$ де $A=(4k-1)d,$ $B=2kd,$ $C=d,$ $D=k/2,$ $E=1/2.$

Доведення. Використовуючи виведені вище рівності, маємо

$$u=\frac{x}{x^2-(kx+d)^2}, \quad v=\frac{-(kx+d)}{x^2-(kx+d)^2} . \tag{3.2.6}$$

Звідси, виключивши x , одержимо:

$$v=-(k+\frac{2d(1-k^2)u}{2kdu+1+\sqrt{1+4kdu+4d^2u^2}})u ;$$

або:

$$\sqrt{1+4kdu+4d^2u^2}=\left(2d(1-k^2)u^2\right)\left(v+ku\right)^{-1}-2kdu-1 ,$$

або ж (піднісши останню рівність до квадрату, звівши подібні доданки):

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev=F .$$

Оскільки

$$AC-B^2=(4k-1)d^2-\ 4k^2d^2=-d^2\left(2k-1\right)^2<0 ,$$

то дана крива другого порядку є гіперболою, що проходить через початок координат (оскільки відсутній вільний член).

Легко бачити [4], що дійсна a та уявна b осі, кутові коефіцієнти асимптот k_0, координати центра (u_0,v_0) цієї гіперболи відповідно рівні:

$$a = \frac{1}{2d(2k-1)}\sqrt{\frac{(k-1)(3k-1)}{2k+\sqrt{8k^2-4k+1}}},$$

$$b = \frac{1}{2d(2k-1)}\sqrt{-\frac{(k-1)(3k-1)}{2k-\sqrt{8k^2-4k+1}}},$$

$$k_0 = \pm\frac{\sqrt{8k^2-4k+1}+2k}{2k-1},\ u_0 = -\frac{k}{2d\left(2k-1\right)^2},\ v_0 = -\frac{2k^2-4k+1}{4d\left(2k-1\right)^2}.$$

Зауваження 3.2.3 Оскільки $ACF+2BED-D^2C-$ $-E^2A-B^2F=2BED-D^2C-E^2A=2\cdot 2kd\cdot 1/2\cdot k/2-k^2/4\cdot d-1/4\cdot d\left(4k-1\right)=$ $=1/4\left(k-1\right)\left(3k-1\right)$, то при $d\to 0$ або $k\to 1$ дана гіпербола вироджується у прямі [4].

Література до розділу 3

1. *Абрамов А.М., Виленкин Н.Я, Дорофеев Г.Ф. и др.* Избранные вопросы математики.- М.: Просвещение.- 1980. – 191 с.
2. *Бомба А.Я., Теребус А.В.* Про один просторовий аналог комплексних чисел і задачі стереометрії // У світі математики.- К.:Твімс.-2006 -Том.12. - Вип.1. - С.34-41.
3. *Вартабедян В. А*. Загальна електротехніка.- К.: Вища школа.- 1971.- 358 с.
4. *Ефимов Н. В*. Квадратические формы и матрицы.- М.: Наука. - 1972.- 159с.
5. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа.- М.:Наука.-1973. – 144 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Обобщение чисел // Квант. - М.:Наука.-1985.- Вып.3.-С.2-5.

Навчальне видання

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Андрій Ярославович Бомба,
Ірина Анатоліївна Барановська,
Анна Вікторівна Теребус,
Тетяна Володимирівна Тищук

Підписано до друку 15.05.2007 р.
Формат 60/84. 1/16.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
33028, м. Рівне, вул.. Чорновола, 74