

А. Я. БОМБА

С. С. КАШТАН

Д. О. ПРИГОРНИЦЬКИЙ

С. В. ЯРОЩАК

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний університет водного господарства та природокористування
Рівненський державний гуманітарний університет

А. Я. БОМБА

С. С. КАШТАН

Д. О. ПРИГОРНИЦЬКИЙ

С. В. ЯРОЩАК

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

РІВНЕ 2013

УДК 519.63.532.5

ББК 22.161.68

Б 80

Затверджено до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № __ від __. __. 2013р.) та Вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування (протокол № __ від __. __. 2013р.)

Рецензенти:

В.М. Булавацький, д.т.н., проф., провідний науковий співробітник відділу математичних систем моделювання проблем екології та енергетики Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України;

Є.Я. Чапля, д.ф.-м.н., проф., заслужений діяч науки і техніки України, головний науковий співробітник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С.Підстригача НАН України;

А.П. Власюк, д.т.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування.

Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В.
Методи комплексного аналізу. – Монографія – Рівне: НУВГП – РДГУ, 2012. – 430 с.

Монографію присвячено розробці числових методів конформних і квазіконформних відображень дослідження квазіідеальних полів на прикладі моделювання та оптимізації параметрів фільтраційних процесів у схильних до деформації середовищах з урахуванням зворотнього впливу визначальних факторів процесу на характеристики середовища.

Для спеціалістів з математичного моделювання та обчислювальних методів, інженерів, аспірантів, магістрантів, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

УДК 519.63.532.5

ББК 22.161.68

ISBN

- © А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак, 2013
- © Національний університет водного господарства та природокористування, 2013
- © Рівненський державний гуманітарний університет, 2013

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	8
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ДЕФОРМАЦІЙ В ҐРУНТАХ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМОВПЛИВУ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРЕДОВИЩА ТА ПРОЦЕСУ	11
1.1. Числово-аналітичні методи розв'язування нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення	13
1.1.1. Оборнені крайові задачі на конформні відображення однов'язних криволінійних чотирикутних областей	13
1.1.2. Числова побудова гідродинамічних сіток та поверхонь швидкості руху	33
1.1.3. Розв'язування обернених крайових задач на квазіконформні відображення в однорідних анізотропних середовищах	40
1.2. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації в неоднорідних середовищах	56
1.2.1. Нелінійні задачі теорії фільтрації у чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями	56
1.2.1.1. Поетапна параметризація характеристик процесу та середовища	56
1.2.1.2. Особливості побудови гідродинамічних сіток у випадку анізотропних середовищ	71
1.2.2. Моделювання процесів фільтрації в ізотропних	

середовищах схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу	86
1.2.3. Моделювання фільтраційних деформацій анізотропного середовища	102
1.3. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища і процесу	125
1.3.1. Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації	127
1.3.2. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу	134
1.3.3. Моделювання суфозійних зон за умов взаємовпливу градієнтів квазіпотенціалу та коефіцієнта провідності середовища	139
1.4. Проблеми системного дослідження збурення процесів типу “фільтрація-конвекція”	142
1.4.1. Моделювання збурень ідеальних полів в криволінійних чотирикутних областях обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями	143
1.4.2. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з керуванням у граничних умовах	156
1.4.3. Побудова обчислювальних алгоритмів розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування	167

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ДВО- ТА

ТРИЗВ'ЯЗНИХ ПОРИСТИХ ПЛАСТАХ	176
2.1. Нелінійні крайові задачі теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних модельних областей	176
2.1.1. Обернені крайові задачі на конформні відображення. Проблема вибору природного розрізу та врахування роздвоєння відповідної лінії течії у випадку двозв'язної модельної області	176
2.1.1.1. Математична постановка задачі	177
2.1.1.2. Різницевий аналог задачі та алгоритм чисельного розв'язування	179
2.1.1.3. Побудова поля швидкостей на основі динамічної сітки	187
2.1.1.4. Тестові приклади	188
2.1.2. Обернені крайові задачі на квазіконформні відображення для двозв'язних областей та їх розв'язування	192
2.1.3. Задачі на знаходження потенціалу одного з контурів за відомою повною витратою	200
2.1.4. Моделювання фільтраційних деформацій ґрунту у випадку двозв'язної модельної області	208
2.2. Нелінійні крайові задачі теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення для тризв'язних модельних областей	216
2.2.1. Постановки задач. Алгоритм “вибору” та узагальнений алгоритм розв'язування задач для тризв'язних областей	216
2.2.2. Задачі із керуючим потенціалом та проміжні задачі.	

Алгоритми їх числового розв'язування	230
2.2.3. Приклади побудови алгоритмів розв'язування задач у тризв'язних областях для різних випадків формування течії	240
2.2.4. Нелінійна фільтрація у випадку тризв'язних модельних областей	256
2.3. Комп'ютерне моделювання фільтраційних процесів в грунтах	268
2.3.1. Особливості програмної реалізації числових алгоритмів моделювання фільтраційних процесів у пористих середовищах для багатозв'язних областей	268
2.3.2. Результати розрахунків фільтраційних процесів у пористих середовищах без та з врахуванням деформаційних явищ, їх аналіз та порівняльна характеристика	270
РОЗДІЛ 3. КОМПЛЕКСНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ	
287	
3.1. Використання методу квазіконформних відображень до дослідження нелінійних процесів витіснення	288
3.1.1. Методи комплексного аналізу побудови гідродинамічних сіток та дослідження еволюції границі розділу різнокольорових рідин	289
3.1.2. Моделювання нелінійних процесів витіснення за умов взаємовпливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища	308
3.1.3. Дослідження еволюції границі розділу рідин при поршневому витісненні	319
3.2. Моделювання багатофазної фільтрації в горизонтальному	

пласті за умов неповного витіснення	327
3.3. Проблеми оптимізації параметрів та керування процесами витіснення у нафтогазових пластах	336
3.3.1. Алгоритм вибору випадку формування течії та методика керування системою перетоків між свердловинами з наступним підбором оптимальних параметрів їх роботи	336
3.3.2. Розв'язання крайових задач багатофазної фільтрації в чотиризв'язних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями з використанням ідей квазіконформних відображень	342
3.3.3. Узагальнення методів комплексного аналізу моделювання процесів витіснення на випадки існування в пласті великої кількості свердловин	349
3.4. Обґрунтування та узагальнення розроблених алгоритмів математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах	369
3.4.1. Питання коректності та оптимізації розроблених алгоритмів	369
3.4.2. Шляхи розповсюдження методу комплексного аналізу на простір. Моделювання процесів витіснення в мало-просторово-викривлених пластах	383
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	391

ПЕРЕДМОВА

Монографію присвячено розробці числових методів конформних і квазіконформних відображень дослідження квазіідеальних полів на прикладі моделювання та оптимізації параметрів фільтраційних процесів у схильних до деформації середовищах з урахуванням зворотнього впливу визначальних факторів процесу на характеристики середовища.

Проведено дослідження фільтраційних деформацій в пористих середовищах – криволінійних складної геометрії областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища та процесу. Використовуючи ідею поетапної параметризації характеристик середовища та процесу, розроблені нові ефективні алгоритми розв'язування відповідних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення криволінійних многокутників на прямокутні, що описують процеси зворотного впливу градієнтів квазіпотенціалу (більших за їх критичні значення) на фільтраційні характеристики середовища. На основі побудованих розв'язків таких нелінійних задач, коли коефіцієнт фільтрації та компоненти тензора фільтрації залежать як від координат фізичної області фільтрації, так і від шуканих функцій течії, потенціалу та його градієнту досліджено характер формування збурених зон середовища. Отримано модельні співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується під впливом гідродинамічної дії фільтраційного потоку. На основі проведених розрахунків встановлено, що врахування властивостей пористого середовища та впливу

градієнтів потенціалу на процес фільтрації принципово змінює базові положення відомої у літературі методики оцінки фільтраційних характеристик ґрунтів.

Відповідну методологію перенесено на випадки багатозв'язних криволінійних областей фільтрації. При цьому вирішено проблему врахування роздвоєння лінії течії при переході від багатозв'язної області фільтрації до однозв'язної. Розроблено нові ефективні числові методи та алгоритми розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних та тривзв'язних областей на основі ідеї почергової параметризації характеристик процесу та середовища при моделюванні суфозійних явищ у ґрунтах; отримано числові розв'язки задач із врахуванням фільтраційної деформації середовища при врахуванні взаємовпливу градієнту квазіпотенціалу та фільтраційних характеристик середовища, встановлено зони збурення вихідного потоку змінним коефіцієнтом фільтрації; вперше на основі результатів числових розрахунків встановлено співвідношення між характеристиками середовища і процесу до та після деформації (фільтраційна витрата, гідродинамічна сітка, коефіцієнт фільтрації, ін.) для випадків, коли фізична область фільтрації є багатозв'язною.

На цій основі розроблено комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії за умов зворотнього впливу та розвинуто числові методи конформних і квазіконформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації. Зокрема, розроблено алгоритми розрахунку процесів багатофазної фільтрації у нафтогазових пластах за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом поповнення існуючого фонду

свердловин, при цьому, проаналізовано і описано всі можливі випадки формування течії залежно від значень керуючого потенціалу та виділено «ключові» типи задач на знаходження тих його значень, які забезпечували б оптимізацію певних функціоналів (витрат, перетоків тощо), зокрема, з метою уникнення формування (значних по своїй площі) застійних зон. На основі комбінації і модифікації методів квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено підхід до розв'язання відповідних крайових задач. Побудовано методіку комплексного моделювання двофазної фільтрації за умови неповного витіснення (модель Баклея-Леверетта), оптимізації параметрів та керування. Створено програмний комплекс, що реалізує розроблені в роботі алгоритми, які є універсальними, зокрема, придатними для вирішення досить важливої технічної задачі сьогодення – розрахунку ефективності впливу гідравлічного розриву пласта на фільтраційні характеристики процесу витіснення.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ДЕФОРМАЦІЙ В ҐРУНТАХ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМВПЛИВУ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРЕДОВИЩА ТА ПРОЦЕСУ

При перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) їх значення для певного ґрунту, наприклад, в навіолодренному середовищі відбувається втрата фільтраційної міцності ґрунтів, що зумовлює зміну коефіцієнта фільтрації. Незважаючи на те, що розміри зони, де градієнти напору перевищують критичні їх значення, порівняно із геометричними розмірами області фільтрації (зокрема, міждренними відстанями), досить малі, зміни, що відбуваються у ґрунті цієї зони, впливають на коефіцієнт фільтрації. Характер і розвиток цих змін ґрунту досить складний і залежить не тільки від градієнтів напору, а й від механічного складу ґрунту, геометрії області тощо. Але, відомі на цей час теоретичні розрахунки процесу фільтрації в пористому середовищі не враховують взаємовпливу градієнтів напору та коефіцієнта фільтрації на фільтраційні характеристики середовища. Це явище, зумовлене виникненням фільтраційних деформацій, супроводжується суттєвими змінами питомої витрати. Тому, особливий інтерес представляє нелінійне моделювання такого роду явищ з урахуванням взаємовпливу великих градієнтів напору та фільтраційних характеристик середовища (наприклад, суфозія, що породжена градієнтами більшими за критичні їх значення). Методика розв'язування такого роду задач розроблена в роботі [72].

У цій роботі ставиться задача розповсюдити ідею врахування взаємовпливу та підхід нелінійних обернень на більш складні випадки пористих середовищ – однозв'язних криволінійних

чотирикутних областей – $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмежених чотирма гладкими кривими: лініями течії ($BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$) та еквіпотенціальними лініями ($AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$).

В основу досліджень покладемо, за традицією, процес руху (зокрема, фільтрації в пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці, і т.п.), який описується за допомогою закону Дарсі (закону Ома) $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ та рівняння нерозривності [156, 175] $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ – швидкість фільтрації; κ – деяка обмежена неперервна в області G_z функція чи тензор функцій другого рангу, що характеризує провідність середовища, його неоднорідність, анізотропію та схильність до деформації; $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал поля, такий, що $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0$ (у випадку ізотропного середовища), $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$; n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі області.

Розв’язок задачі фільтрації в найбільш повному обсязі, як відомо [34, 156, 170, 171, 174, 175, 200], зводиться до побудови гідродинамічної сітки руху, тобто сітки складеної із еквіпотенціальних ліній та ліній течії. Швидкість фільтрації в деякій точці області руху ґрунтового потоку, як відомо [10, 135, 185], визначається формулою $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$, а напрямок співпадає з напрямком дотичної до лінії течії у даній точці.

Отже, розробка нових ефективних алгоритмів розв’язування нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення, що дозволяє врахувати

багато практично важливих факторів, зокрема, таких як складна геометрія області, складна залежність коефіцієнта фільтрації та ін. є актуальною та важливою практичною задачею.

1.1. Числово-аналітичні методи розв'язування нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення

У цьому параграфі викладено методи поетапної параметризації характеристик процесу та середовища для числового розв'язування нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, які реалізовано у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT, що дозволяє провести розрахунки ряду фільтраційних характеристик. Збіжність розроблених алгоритмів проілюстровано за допомогою графіків при різних параметрах розбиття області комплексного потенціалу.

На базі методу почергової параметризації та методу сумарних зображень Г.Положія розроблено комбінований підхід до розв'язування поставлених задач на конформні відображення з використанням відомих переваг останнього методу (запис розв'язку у вигляді аналітичних формул, локалізація нелінійності, можливість вибіркового рахунку та ін.). Запропоновано нові крайові задачі, при розв'язанні яких використано переваги формул сумарних зображень.

1.1.1. Обернені крайові задачі на конформні відображення однозв'язних криволінійних чотирикутних областей

Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в однозв'язній криволінійній

чотирикутній області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, при умовах: $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0$ (де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої) [64, 68]. Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох граничних умов на умови: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$ (Q – невідомий параметр, повна витрата), цю задачу замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ при відповідності чотирьох кутових точок [102, 141, 142, 146] (див. рис. 1.1).

Обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (1.2)$$

Оскільки функції $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ задовольняють умові Коші-Рімана (1.1), то кожна із них є гармонічною в області G_ω , що дозволяє звести дану задачу до розв'язування в G_ω рівнянь

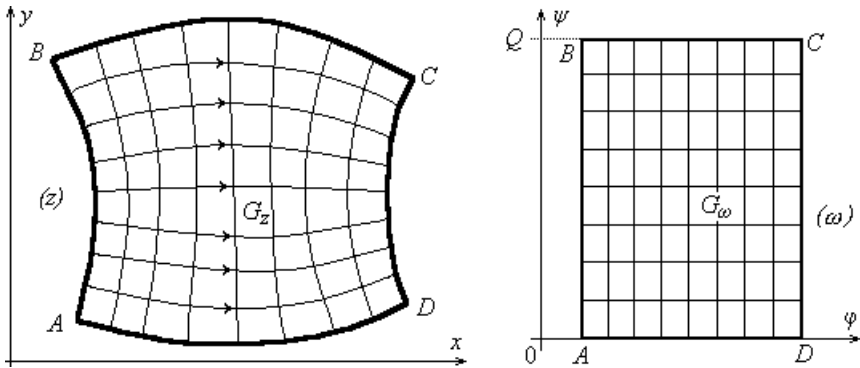


Рис. 1.1. Фізична область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω

Лапласа $\Delta x=0, \Delta y=0$ при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах Коші-Рімана на границі ∂G_ω області G_ω , які в деяких випадках зручно замінити на умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (див., напр., [99])

$$\begin{cases} \text{grad } \psi(x, y) \cdot \text{grad } f_1(x, y) = 0, & (x, y) \in AB, \\ \text{grad } \phi(x, y) \cdot \text{grad } f_2(x, y) = 0, & (x, y) \in BC, \\ \text{grad } \psi(x, y) \cdot \text{grad } f_3(x, y) = 0, & (x, y) \in CD, \\ \text{grad } \phi(x, y) \cdot \text{grad } f_4(x, y) = 0, & (x, y) \in DA. \end{cases} \quad (1.3)$$

Перехід від прямих до обернених задач має низку переваг, а саме:

- 1) обернена задача ставиться в прямокутнику G_ω (пряма – в криволінійному чотирикутнику G_z);
- 2) автоматично вирішується проблема побудови сітки (більше того, сітка в G_z , що відповідає рівномірній сітці в G_ω , є гідродинамічною сіткою руху);
- 3) одночасно із побудовою гідродинамічної сітки руху визначається фільтраційна витрата Q , при цьому, зазначимо, що

нелінійність, яка породжується переходом від прямої задачі до оберненої є локалізованою і суттєво не впливає на хід розрахунку даної задачі;

- 4) при вивченні на фільтраційних полях (фонах) різних процесів і явищ конвекції, масообміну, дифузії та ін. розчинних речовин, що забруднюють область.

Тому, доцільним є побудова конформних ортогональних сіток, які зручні, а іноді і необхідні, для числових методів розв'язування тих чи інших крайових задач математичної фізики.

Для побудови нового ефективного алгоритму числового розв'язування крайових задач на конформні відображення, в області G_ω площини (φ, ψ) визначимо рівномірну ортогональну сітку

$$G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}: \quad \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1};$$

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbf{N}\}, \quad \text{де } \Delta\varphi, \Delta\psi - \text{ кроки}$$

сітки відповідно по φ та ψ .

Для числової побудови відображення прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z (при відповідності кутових точок) запишемо різницевий аналог задачі (1.1), (1.2) у рівномірній сітковій області (сітці) G_ω^γ .

Як відомо [190], кожен із доданків оператора Лапласа $\Delta u = L_1 u + L_2 u$, $(L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2})$ можна апроксимувати триточковими операторами $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ з точністю $O(h_1^2)$ та $O(h_2^2)$ (шаблон “хрест”)

$$L_1 u \sim \Lambda_1 u_j = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta\varphi^2},$$

$$L_2 u \sim \Lambda_2 u_i = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta\psi^2}. \quad (1.4)$$

Але, з метою більш точнішого врахування геометрії області G_z для апроксимації оператора Лапласа використаємо шаблон “ящик” – дев’ятиточкову різницеву симетричну схему з ваговими коефіцієнтами

$$\Delta u \sim \Lambda u = \Lambda_1 (\sigma u_{j+1} + (1-2\sigma)u_j + \sigma u_{j-1}) + \Lambda_2 (\sigma u_{i+1} + (1-2\sigma)u_i + \sigma u_{i-1}). \quad (1.5)$$

Тут і надалі схеми типу (1.5) мають другий порядок апроксимації. Збіжність та стійкість таких схем повністю досліджена в [190, 191].

Тому, рівняння Лапласа для спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінимо, згідно з схемою (1.5), такими різницевими рівняннями

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &\sigma(x_{i+1,j+1} - 2x_{i,j+1} + x_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \\ &+ \sigma(x_{i+1,j-1} - 2x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}) + \gamma^2(\sigma(x_{i+1,j+1} - 2x_{i+1,j} + x_{i+1,j-1}) + \\ &+ (1-2\sigma)(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) + \sigma(x_{i-1,j+1} - 2x_{i-1,j} + x_{i-1,j-1})) \end{aligned} \right\} = 0, \\ \left\{ \begin{aligned} &\sigma(y_{i+1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \\ &+ \sigma(y_{i+1,j-1} - 2y_{i,j-1} + y_{i-1,j-1}) + \gamma^2(\sigma(y_{i+1,j+1} - 2y_{i+1,j} + y_{i+1,j-1}) + \\ &+ (1-2\sigma)(y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}) + \sigma(y_{i-1,j+1} - 2y_{i-1,j} + y_{i-1,j-1})) \end{aligned} \right\} = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1.6)$$

де $\sigma \in [0; 0.5]$ – ваговий коефіцієнт, від вибору якого залежить стійкість, точність та швидкість збіжності різницевої схеми [190, 191].

Тут і надалі $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Крайові умови – функції, що визначають фізичну область G_z – апроксимуємо точково-різнцевими рівняннями, в які входять граничні вузли

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j})=0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})=0, & j=\overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})=0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0})=0, & i=\overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (1.7)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів з граничними вузлами використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (1.3), які апроксимуємо за схемою типу ЧВЦП [14] такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{cases} f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \\ f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \\ i=\overline{0, m+1}, \quad j=\overline{0, n+1}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Конформний інваріант γ криволінійного чотирикутника G_z (відношення сторін прямокутника G_ω) є невідомим (оскільки невідома витрата Q) і визначається в процесі розрахунку. Формулу для наближеного знаходження даної величини одержимо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad (1.9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Тоді фільтраційну витрату знайдемо за формулою

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}. \quad (1.10)$$

Різницева постановка задачі описується системою рівнянь (1.6) – (1.9).

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (1.1), (1.2) різницевою задачею (1.6) – (1.9) в загальному випадку побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ (або значення витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності [14, 19, 24, 168, 201]. А саме, задавши кількість m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (1.7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, за формулою (1.9) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ конформного інваріанта γ . Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) проводимо з допомогою ітераційного методу Зейделя [126, 155] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (1.6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації використаємо лише перший ітераційний крок), а нові наближення величин γ та Q знаходимо за формулами (1.9) та (1.10). Далі, підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи

наближено систему рівнянь, сформовану із (1.7), (1.8), та перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів (згідно з принципом максимуму для систем рівнянь еліптичного типу [147]), фільтраційної витрати та конформності сітки (що підсилює умови ортогональності (1.3)) відносно кроку ітерації відповідно

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j}} \in \partial G_z \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \\ \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де

$$D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}} -$$

усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y .

Якщо умови (1.11) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів за формулою (1.6) і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Дана нев'язка характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику рівне одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності (1.3)).

Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (1.6) – (1.9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [40, 105, 179 – 182] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу

Рімана.

Отже, алгоритм побудуємо таким чином.

1. Задаємо границю фізичної області $G_z = ABCD$:
 $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$,
 $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$.
2. Задаємо кількість m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , значення потенціалів φ_* , φ^* та визначаємо $\Delta\varphi$.
3. Задаємо початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (2.7)).
4. Задаємо початкові наближення координат внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.
5. За формулою (1.9) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомої величини γ .
6. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k=0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою одного кроку ітераційного методу Зейделя за формулами

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \left(\sigma \left(x_{i+1,j+1}^{(k)} - 2x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i-1,j+1}^{(k)} \right) + (1 - 2\sigma) \left(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \sigma \left(x_{i+1,j-1}^{(k+1)} - 2x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i-1,j-1}^{(k+1)} \right) + \gamma^2 \left(\sigma \left(x_{i+1,j+1}^{(k)} - 2x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i+1,j-1}^{(k+1)} \right) + (1 - 2\sigma) \left(x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + \sigma \left(x_{i-1,j+1}^{(k)} - 2x_{i-1,j}^{(k+1)} + x_{i-1,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \right) / \left(2(1 - 2\sigma)(1 + \gamma^2) \right),$$

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \left(\sigma \left(y_{i+1,j+1}^{(k)} - 2y_{i,j+1}^{(k)} + y_{i-1,j+1}^{(k)} \right) + (1 - 2\sigma) \left(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \sigma \left(y_{i+1,j-1}^{(k+1)} - 2y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i-1,j-1}^{(k+1)} \right) + \gamma^2 \left(\sigma \left(y_{i+1,j+1}^{(k)} - 2y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i+1,j-1}^{(k+1)} \right) + (1 - 2\sigma) \left(y_{i,j+1}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + \sigma \left(y_{i-1,j+1}^{(k)} - 2y_{i-1,j}^{(k+1)} + y_{i-1,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \right) / \left(2(1 - 2\sigma)(1 + \gamma^2) \right),$$

$$+(1-2\sigma)\left(y_{i,j+1}^{(k)}+y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)+\sigma\left(y_{i-1,j+1}^{(k)}-2y_{i-1,j}^{(k+1)}+y_{i-1,j-1}^{(k+1)}\right)\Big)\Big/\left(2(1-2\sigma)(1+\gamma^2)\right),$$

$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

7. Знаходимо нові наближення $\gamma^{(k+1)}$ та $Q^{(k+1)}$ величин γ та Q за формулами (1.9) та (1.10) відповідно.
8. Підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь сформовану із (1.7), (1.8).
9. Визначаємо усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y

$$D^{(k+1)} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k+1)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k+1)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(k+1)} - x_{i+1,j}^{(k+1)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(k+1)} - y_{i+1,j}^{(k+1)}\right)^2}}.$$

10. Перевіряємо виконання умов (1.11). Якщо умови справджуються, то обчислюємо нев'язку конформності отриманої гідродинамічної сітки ε_* . У протилежному випадку – повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів – п.б, і т.д.
11. Виводимо значення математичних параметрів та фільтраційних характеристик (кількість кроків ітерації, фільтраційну витрату, нев'язку конформності, координати вузлів фізичної області, обчислюємо швидкості фільтрації та градієнти потенціалів, будуємо гідродинамічну сітку руху та поверхню швидкості).

На основі рівняння руху $\vec{v} = k \cdot \text{grad } \varphi$ та умов Коші-Рімана (1.1), величину швидкості руху знаходимо за такими різницевиими формулами:

- у внутрішніх вузлах сітки

$$v_{i,j} = 2 \frac{\Delta \Psi}{J_{i,j}} \sqrt{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)^2}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n},$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j});$$

- у граничних вузлах сітки на AB

$$v_{0,j} = 2 \frac{\Delta\Psi}{J_{0,j}} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$J_{0,j} = (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j});$$

- у граничних вузлах сітки на BC

$$v_{i,n+1} = \frac{\Delta\Psi}{J_{i,n+1}} \sqrt{(x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 + (y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1})^2}, \quad i = \overline{1, m},$$

$$J_{i,n+1} = (x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - (x_{i,n+1} - x_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1});$$

- у граничних вузлах сітки на CD

$$v_{m+1,j} = 2 \frac{\Delta\Psi}{J_{m+1,j}} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$J_{m+1,j} = (x_{m+1,j} - x_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) - (x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j} - y_{m,j});$$

- у граничних вузлах сітки на DA

$$v_{i,0} = \frac{\Delta\Psi}{J_{i,0}} \sqrt{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})^2 + (y_{i+1,0} - y_{i-1,0})^2}, \quad i = \overline{1, m},$$

$$J_{i,0} = (x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0});$$

- у вершині A

$$v_{0,0} = \frac{\Delta\Psi}{J_{0,0}} \sqrt{(x_{1,0} - x_{0,0})^2 + (y_{1,0} - y_{0,0})^2},$$

$$J_{0,0} = (x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,0}) - (x_{0,1} - x_{0,0})(y_{1,0} - y_{0,0});$$

- у вершині B

$$v_{0,n+1} = \frac{\Delta\Psi}{J_{0,n+1}} \sqrt{(x_{1,n+1} - x_{0,n+1})^2 + (y_{1,n+1} - y_{0,n+1})^2},$$

$$J_{0,n+1} = (x_{1,n+1} - x_{0,n+1})(y_{0,n+1} - y_{0,n}) - (x_{0,n+1} - x_{0,n})(y_{1,n+1} - y_{0,n+1});$$

- у вершині C

$$v_{m+1,n+1} = \frac{\Delta\Psi}{J_{m+1,n+1}} \sqrt{(x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})^2 + (y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1})^2},$$

$$J_{m+1,n+1} = (x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n}) - (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1});$$

- у вершині D

$$v_{m+1,0} = \frac{\Delta\Psi}{J_{m+1,0}} \sqrt{(x_{m+1,0} - x_{m,0})^2 + (y_{m+1,0} - y_{m,0})^2},$$

$$J_{m+1,0} = (x_{m+1,0} - x_{m,0})(y_{m+1,0} - y_{m+1,0}) - (x_{m+1,0} - x_{m+1,0})(y_{m+1,0} - y_{m,0}).$$

Позначимо ці формули через (1.12).

Умови Коші-Рімана (1.1) на границі ∂G_ω області G_ω апроксимуємо у вигляді (див., напр., [190])

$$\begin{cases} x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma(y_{i,1} - y_{i,0}), & y_{i,0} - y_{i+1,0} = \gamma(x_{i,1} - x_{i,0}), & i = \overline{1, m}, \\ x_{1,j} - x_{0,j} = \gamma(y_{0,j+1} - y_{0,j}), & y_{0,j} - y_{1,j} = \gamma(x_{0,j+1} - x_{0,j}), & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Модифікувавши загальну формулу сумарних зображень Г.Положія [150, 151, 173], загальний розв'язок скінченно-різницевої системи рівнянь (1.6) при $\sigma=0$ у внутрішніх і граничних по вертикалі вузлах сіткового прямокутника G_ω^γ запишемо у розгорнутій формі через значення в граничних вузлах по горизонталі [59, 60, 65, 67, 68, 131]

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k + \nu_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k + \nu_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right), \quad (1.14) \\ i &= \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

де $p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$,

$$v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі $A_k, B_k, C_k, D_k, x_{t,0}, y_{t,0}, x_{t,n+1}, y_{t,n+1}$, що входять у (1.14), визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних рівнянь, сформованої з (1.7) та (1.13)

$$f_1 \left(\sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(A_k + B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right) \right) = 0;$$

$$f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0;$$

$$f_3 \left(\sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^{m+1} A_k + v_k^{m+1} B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^{m+1} C_k + v_k^{m+1} D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right) \right) = 0;$$

$$f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0;$$

$$x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma \left(\sum_{k=1}^n p_{1,k} \left(\mu_k^i C_k + v_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right) - y_{i,0} \right);$$

$$y_{i,0} - y_{i+1,0} = \gamma \left(\sum_{k=1}^n p_{1,k} \left(\mu_k^i A_k + v_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right) - x_{i,0} \right);$$

$$\gamma \sum_{k=1}^n (p_{j+1,k} - p_{j,k}) \left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right) = \\ = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left((\mu_k - 1) A_k + (v_k - 1) B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{(\mu_k - 1) v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right);$$

$$\begin{aligned}
& \gamma \sum_{k=1}^n \left(p_{j+1,k} - p_{j,k} \right) \left(A_k + B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right) = \\
& = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left((1 - \mu_k) C_k + (1 - v_k) D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{(1 - \mu_k) v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right); \\
& i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.15}
\end{aligned}$$

де невідома γ представлена за формулою (1.9).

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1.6) при $\sigma = 0$ згідно з загальною формулою сумарних зображень Г. Положіть [150, 151, 173] можна подати ще й у внутрішніх і граничних по горизонталі вузлах сіткового прямокутника G_{ω}^{γ} через значення в граничних вузлах по вертикалі [64, 67]

$$\begin{aligned}
x_{i,j} &= \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(\mu_k^j A_k + v_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right), \\
y_{i,j} &= \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(\mu_k^j C_k + v_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right), \tag{1.16} \\
i &= \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n+1},
\end{aligned}$$

де $p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{ik\pi}{m+1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$, $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$,

$v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$.

У цьому випадку невідомі A_k, B_k, C_k, D_k ,

$x_{0,t}, y_{0,t}, x_{m+1,t}, y_{m+1,t}$ визначаються в результаті розв'язання такої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0;$$

$$f_2 \left(\sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(\mu_k^{n+1} A_k + v_k^{n+1} B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{n+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(\mu_k^{n+1} C_k + v_k^{n+1} D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{n+1-t}}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right) = 0; \\
f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) &= 0; \\
f_4 \left(\sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(A_k + B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right), \right. \\
& \left. \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right) \right) = 0; \\
\sum_{k=1}^m (p_{i,k} - p_{i+1,k}) \left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right) &= \\
= \gamma \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left((\mu_k - 1) A_k + (v_k - 1) B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{(\mu_k - 1) v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right); \\
\sum_{k=1}^m (p_{i+1,k} - p_{i,k}) \left(A_k + B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right) &= \\
= \gamma \sum_{k=1}^m p_{i,k} \left((\mu_k - 1) C_k + (v_k - 1) D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{(\mu_k - 1) v_k^t}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right); \\
\sum_{k=1}^m p_{1,k} \left(\mu_k^j A_k + v_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t}) \right) - x_{0,j} &= \gamma (y_{0,j+1} - y_{0,j}), \\
y_{0,j} - \sum_{k=1}^m p_{1,k} \left(\mu_k^j C_k + v_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k^{-v_k}} (p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t}) \right) &= \gamma (x_{0,j+1} - x_{0,j}), \\
i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, & \quad (1.17)
\end{aligned}$$

де невідома γ представлена за формулою (1.9).

Розв'язок систем (1.15) та (1.17) знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб

число $\alpha = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}$ не перевищувало шуканої витрати Q),

розв'язуємо вибрану систему при заданому значенні γ , наприклад, методом Ньютона [155]. За відповідними формулами сумарних зображень визначаємо координати вузлів області G_z та знаходимо γ за (1.9). В залежності від отриманої нев'язки вибираємо наступне наближення невідомої величини γ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність $|\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}| < \varepsilon$.

Ефективність запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків за умови (1.9), породжених лише граничними умовами (1.7) та умовами Коші-Рімана (1.13).

Таким чином, переваги методу сумарних зображень Г.Положія (запис розв'язку у вигляді формули, можливість вибіркового рахунку та ін.) ефективно використані при розв'язанні крайових задач на обернені конформні відображення криволінійних чотирикутних областей. При розв'язанні задач з використанням методу сумарних зображень більшість невідомих, що входять в різницеву задачу, в рахунку участі не беруть, що приводить до зменшення обсягу обчислювальної роботи. Ця обставина дає можливість позбутися надто великої обчислювальної похибки. Метод сумарних зображень Г.Положія застосовано і до розв'язування задач при дуже великій і навіть необмеженій кількості вузлів сітки для однозв'язних і многузв'язних плоских областей [59, 60, 64, 65, 67, 68, 131]. Так, у роботах [59, 60, 64, 67, 68], використовуючи модифіковані формули сумарних зображень, побудовано розв'язки деяких крайових задач теорії фільтрації при

наявності джерела поперечних збурень MN вихідного потоку (тут M і N довільні точки кривої BC та $\varphi|_{MN} = \varphi^\circ$). Зокрема, у роботах [60, 68] описано алгоритми представлення розв'язків у характерних (за наявністю горизонтальних та вертикальних розрізів) випадках формування ліній розділу фільтраційних потоків у двозв'язних областях G_z , а в [59, 67] – у тризв'язних областях G_z , які матимуть місце в залежності від значення потенціалу φ° . У роботах [65, 131] використано модифіковані формули сумарних зображень при побудові розв'язків крайових задач теорії фільтрації при наявності точкового джерела (особливої точки $M \in BC$, $\varphi|_M = \pm\infty$).

Побудований алгоритм модифіковано до розв'язування нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення криволінійних чотирикутних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

В якості тестового (контрольного) прикладу розглянемо область обмежену двома дугами концентричних кіл радіусами 1 та e і променями, що виходять з початку координат під кутами 0.1 та 1.1 радіан до осі абсцис. Позначатимемо цю область як G_1 .

З допомогою логарифмічної функції $\omega = \ln z - 0.1i$ дана область відображається на прямокутник $[0,1] \times [0,1]$ [141, 142]. Розділивши в оберненій функції $z = e^{\omega+0.1i}$ дійсну і уявну частини, отримаємо аналітичні формули для визначення координат фізичної області G_1 через координати області комплексного потенціалу G_ω

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = e^\varphi \cos(\psi + 0.1), \\ y(\varphi, \psi) = e^\varphi \sin(\psi + 0.1). \end{cases} \quad (1.18)$$

Різницеві аналоги рівнянь (1.18) у рівномірній сітці G_ω^y

мають вигляд

$$\begin{cases} x_{i,j} = e^{i\Delta\varphi} \cos(j\Delta\psi + 0.1), \\ y_{i,j} = e^{i\Delta\varphi} \sin(j\Delta\psi + 0.1). \end{cases} \quad (1.19)$$

Вважатимемо, що розв'язок (1.19) оберненої крайової задачі (1.1), (1.2), отриманий за аналітичними формулами (1.18), є точним.

Знайдемо розв'язок задачі (1.1), (1.2) за алгоритмом АК як розв'язок різницевої задачі (1.6) – (1.9) (тут і надалі у формулах (1.6) взято ваговий коефіцієнт $\sigma = \frac{1}{6}$ [14]).

Крім того, розв'язок задачі (1.1), (1.2) знайдемо за методикою, яка полягає у використанні модифікованих загальних формул сумарних зображень Г.Положія (1.14) чи (1.16).

Таким чином, розрахунок гідродинамічної сітки руху в області G_1 та невідомої фільтраційної витрати Q здійснено за вказаними методиками при $m=n=12$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$ (див. табл. 1.1), де, окрім шуканої витрати Q , знайдено необхідну кількість кроків ітерацій k_M , k_Q , k_D для виконання відповідних умов закінчення процесу (1.11) та нев'язку конформності отриманої гідродинамічної сітки ε_* .

Табл. 1.1. Результати тестового розрахунку

Методика розрахунку	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*
Аналітична формула	–	–	–	1.00024	0.0E+0
Алгоритм АК	274	115	238	1.00044	2.1E-4
Формули Г.Положія	442	117	143	0.99596	7.5E-3

Зауважимо, що аналогічні результати були отримані Б.П.Сидорчуком у дослідженнях процесів осесиметричної

фільтрації та встановлена їх адекватність даним натурних досліджень.

Використовуючи результати розрахунків, обчислимо відносну максимальну і відносну середню похибки значень координат вузлів та відносну похибку фільтраційної витрати за формулами

$$\delta_m = \max_{i,j} \left(\left| \frac{x_{i,j}^m - x_{i,j}}{x_{i,j}^m} \right| \cdot 100\%, \left| \frac{y_{i,j}^m - y_{i,j}}{y_{i,j}^m} \right| \cdot 100\% \right),$$

$$\delta_s = \frac{1}{2(m+1)(n+1)} \sum_{i,j} \left(\left| \frac{x_{i,j}^m - x_{i,j}}{x_{i,j}^m} \right| + \left| \frac{y_{i,j}^m - y_{i,j}}{y_{i,j}^m} \right| \right) \cdot 100\%,$$

$$\delta_Q = \left| \frac{Q^m - Q}{Q^m} \right| \cdot 100\%,$$

де $x_{i,j}^m, y_{i,j}^m, Q^m$ – точні значення, обчислені за аналітичними формулами (1.19), $x_{i,j}, y_{i,j}, Q$ – значення, обчислені за алгоритмом АК та з використанням формул Г.Положія (див. табл. 1.2).

Табл. 1.2. Результати обчислень відносних похибок

Методика розрахунку	δ_m	δ_s	δ_Q
Алгоритм АК	1.71%	0.63%	0.02%
Формули Г.Положія	6.73%	1.28%	0.43%

Розроблений алгоритм розвинуто на випадки порушення умов конформності, як у вершинах криволінійного чотирикутника, так і вздовж кусково-гладких граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній області. Для прикладу розглянемо ще один випадок, коли в області G_z порушена умова конформності сітки у вершині. Наприклад, проведемо розрахунки в області обмеженій прямими

$x=0$, $y=0$, $x=1$ та параболою $y=x^2+1$ [74]. Тут порушена умова конформності у вершині C (див. рис. 1.2). Позначатимемо цю область як G_2 . Числовий розв'язок задачі (1.1), (1.2) у цій області знайдено за алгоритмом АК та із використанням загальних формул сумарних зображень Г.Положія при $m=n=12$, $\varphi_*=0$, $\varphi^*=1$, $\varepsilon=10^{-6}$ (див. табл. 1.3). На основі знайденого розв'язку побудовано розрахункову гідродинамічну сітку руху (рис. 1.2).

Табл. 1.3. Порівняння результатів розрахунку в G_2

Методика розрахунку	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*
Алгоритм АК	289	130	177	1.16447	1.1E-2
Формули Г.Положія	401	20	20	1.15807	4.9E-2

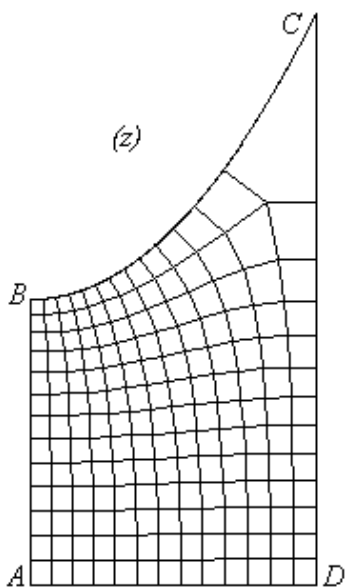


Рис. 1.2. Гідродинамічна сітка в області G_2

Порівнюючи результати розрахунків наведені у таблицях 1.1 – 1.3, очевидними є переваги розробленого авторами алгоритму в порівнянні із методом, де використовуються формули сумарних зображень Г.Положія – він є точнішим в розрахунку гідродинамічної сітки та в знаходженні фільтраційної витрати, а також простішим в реалізації. Тому надалі числові розрахунки проводитимемо за алгоритмом АК, тестування якого проводилося на багаточислових випадках складної геометрії області G_z .

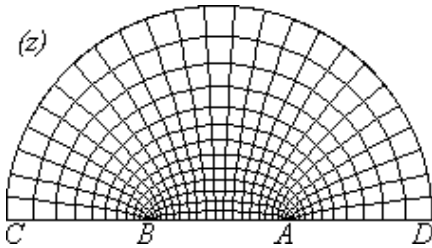


Рис. 1.3. Приклад гідродинамічної сітки у випадку порушення умов ортогональності у вершинах

Так, на рисунку 1.3 зображена гідродинамічна сітка руху в півкрузі радіуса 3 з рівномірно розподіленими на діаметрі вершинами (тут лінії течії не ортогональні еквіпотенціальній лінії AB) [74].

1.1.2. Числова побудова гідродинамічних сіток та поверхонь швидкості руху

Збіжність розробленого алгоритму апробовано шляхом проведення багаточислових числових розрахунків гідродинамічних сіток руху у криволінійних чотирикутних областях G_z складної геометрії при різних значеннях параметрів m та n розбиття області комплексного потенціалу G_ω , при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати для кожної області G_z практично однакові, що підтверджує стійкість розробленого алгоритму, яка є необхідною і достатньою умовою його збіжності [14, 19]; а також шляхом побудови графіків стабілізації ряду розрахункових параметрів відносно кроку ітерації, що ще раз підтверджує збіжність розробленого алгоритму. Для аналітичного обґрунтування збіжності розробленого алгоритму, в основі якого лежить поетапна параметризація величин конформного інваріанта та координат граничних і внутрішніх вузлів сіткової області, використано ідеї методу блочної ітерації [168].

Числові розрахунки проводилися для різних областей G_z при точності наближень $\varepsilon = 10^{-6}$ (див. (1.11)), що не перевищує порядок

$O(|h|^2)$ апроксимації вихідних рівнянь, при заданих граничних потенціалах $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ та при різних значеннях параметрів m та n розбиття області комплексного потенціалу G_ω [74].

Результати розв'язування задачі (1.1), (1.2) в області G_1 подано у таблиці 1.4, а гідродинамічну сітку зображено на рисунку 1.4. На рисунку 1.5 проілюстровано математичну збіжність алгоритму АК для максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Результати обчислень величини швидкості фільтрації за формулами (1.12) (див. рис. 1.6) показали, що найменша розрахункова величина швидкості становить 0.3667 і досягається у вузлі $(i, j) = (25, 25)$, а найбільша – 1.0027 – у вузлі $(i, j) = (0, 13)$.

Розглянемо область фільтрації G_z , обмежену кривими $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y - 25 + 7 \cos \frac{x}{5}$, $f_3(x, y) = x - 10\pi$, $f_4(x, y) = y - 3 - 3 \cos \frac{x}{5}$, яку позначатимемо через G_3 . Розв'язавши задачу (1.1), (1.2) у цій області, знайдено фільтраційну витрату (див. табл. 1.5) та побудовано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 1.7). Збіжність розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.8 для параметрів M , Q та D . Зауважимо, що як і очікувалося (в силу симетрії області G_3) найменша розрахункова величина швидкості фільтрації 0.0077 досягається у вузлах $(i, j) = ((12, 25), (13, 25))$, а найбільша – 0.0697 – у вузлах $(i, j) = ((0, 25), (25, 25))$ (див. рис. 1.9).

Зазначимо, що максимальні нев'язки конформності

Табл. 1.4. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	601	238	506	1.00016	$5.1E-5$	$4.5E-3$
2	24×24	795	309	668	1.00012	$1.5E-5$	$3.2E-3$
3	28×28	1017	385	83	1.00009	$1.2E-5$	$2.4E-3$

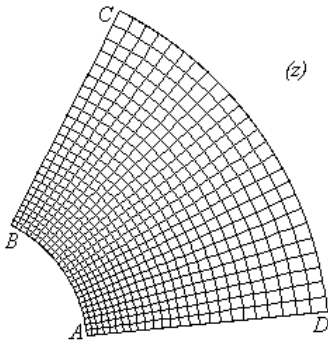


Рис. 1.4. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

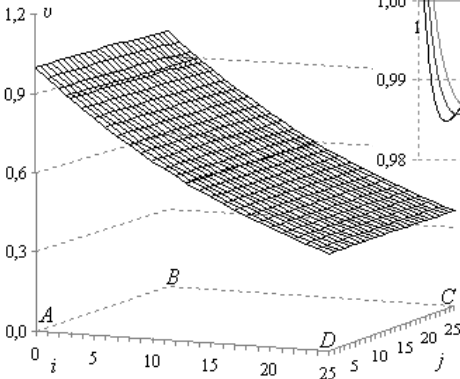


Рис. 1.6. Величина швидкості фільтрації в області G_1

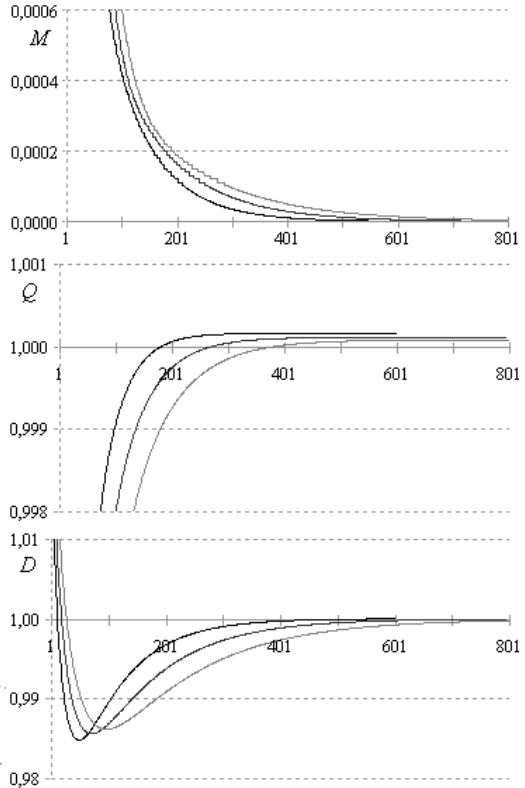


Рис. 1.5. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Табл. 1.5. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	1033	56	107	0.5534	2.4E-3	3.0E-3
2	24×24	1387	78	146	0.5538	1.8E-3	2.1E-3
3	28×28	1772	105	191	0.5542	1.4E-3	1.6E-3

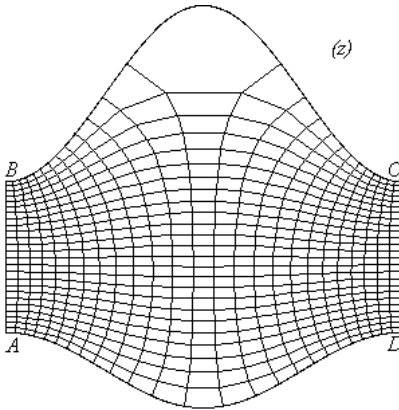


Рис. 1.7. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

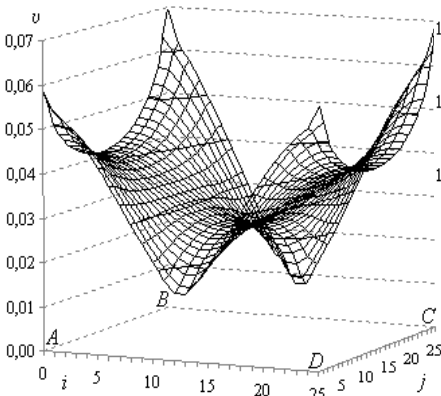


Рис. 1.9. Величина швидкості фільтрації в області G_3

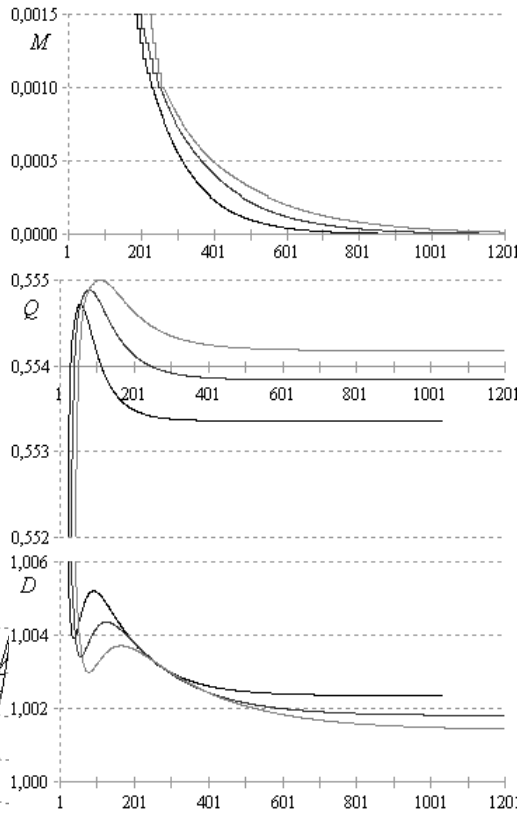


Рис. 1.8. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

отриманих гідродинамічних сіток ε_* мають місце в околі деяких граничних вузлів, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників.

Розроблений алгоритм застосовано до деяких задач теорії фільтрації. Зокрема, його застосовано до розрахунку гідродинамічної сітки руху ідеальної рідини до нескінченної системи горизонтально розміщених дрен. В силу симетрії картини руху розглядатимемо лише один фрагмент такої системи, а саме – фізичну область G_z , де $AB = \{z: 0 \leq x \leq l, y = m\}$, $BC = \{z: f(x, y) = 0\} = \{z: x = l, 0 \leq y \leq m\} \cup \{z: 0 \leq x \leq l, y = 0\} \cup \{z: x = 0, 0 \leq y \leq m - b - r\}$, $CD = \{z: x > 0, x^2 + (y - (m - b))^2 = r^2\}$, $DA = \{z: x = 0, m - b + r \leq y \leq m\}$, CD – зовнішній контур довершеної за характером розкриття пласта дрени радіуса r , b та m – відповідно глибина закладання дренажу та до водоупору, $2l$ – відстань між дренами. Позначатимемо цю область фільтрації при $r = 1$ м, $b = 11$ м, $s = 13$ м, $l = 20$ м як G_4 . Результати розв’язування задачі (1.1), (1.2) у цій області подано у таблиці 1.6, а гідродинамічну сітку руху – на рисунку 1.10. На рисунку 1.11 проілюстровано збіжність алгоритму АК за відповідними математичними параметрами відносно кроку ітерації. Розрахункова величина швидкості фільтрації (див. рис. 1.12) показує, що найменше її значення 0.0123 досягається у вузлі $(i, j) = (6, 25)$, а найбільше – 0.3310 – у вузлі $(i, j) = (25, 10)$.

Розглянемо ще одну фізичну область G_z визначену в першому квадранті та обмежену ортогональними дугами кіл радіусів 0.81 м, 1.6 м та 2 м, центри яких лежать на одній прямій на відстані 2.16 м та 2.56 м один від одного (див. рис. 1.13). Позначатимемо цю область фільтрації як G_5 . Розв’язок задачі (1.1), (1.2) у цій області подано у вигляді гідродинамічної сітки руху (див.

Табл. 1.6. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	605	320	416	0.7453	6.9E-2	3.5E-3
2	24×24	815	418	548	0.7451	7.2E-2	2.5E-3
3	28×28	1046	523	693	0.7449	7.5E-2	1.8E-3

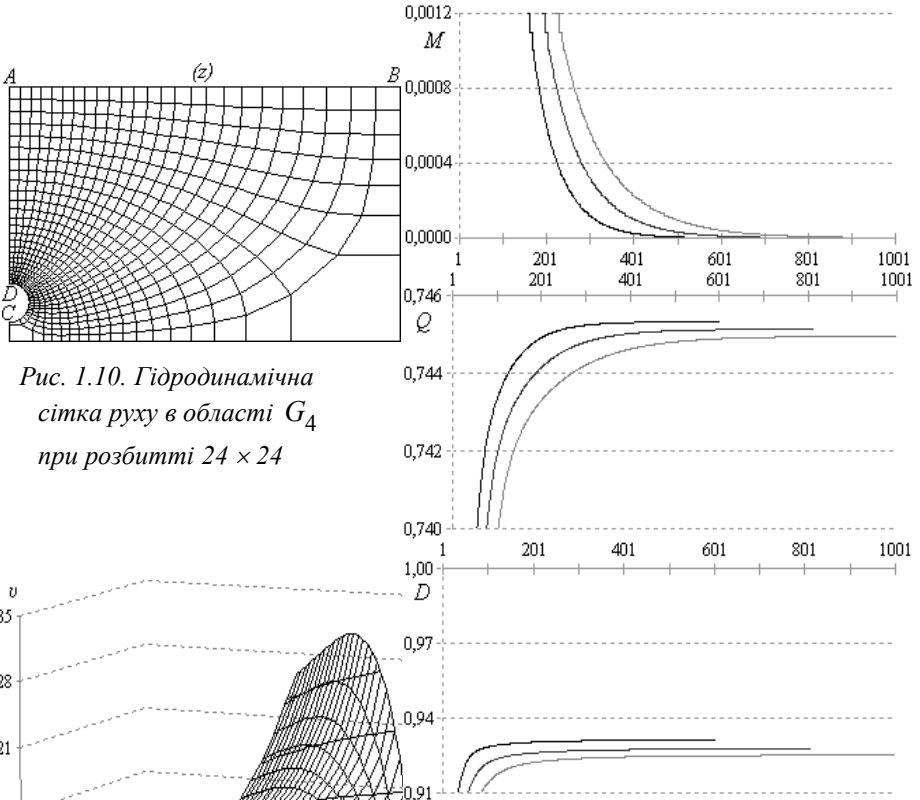


Рис. 1.10. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

Рис. 1.11. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

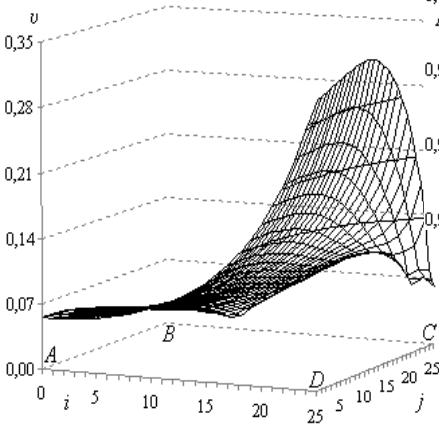


Рис. 1.12. Величина швидкості фільтрації в області G_4

Табл. 1.7. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	765	141	374	1.1686	2.3E-4	5.4E-3
2	24×24	1014	183	462	1.1692	1.6E-4	3.8E-3
3	28×28	1288	227	544	1.1695	1.2E-4	2.8E-3

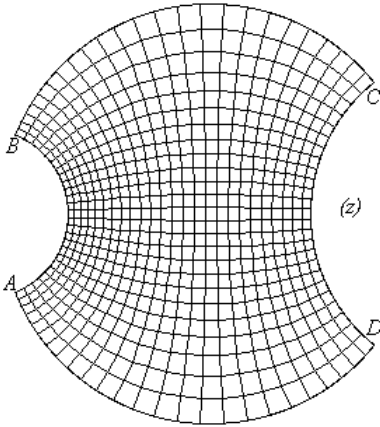


Рис. 1.13. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

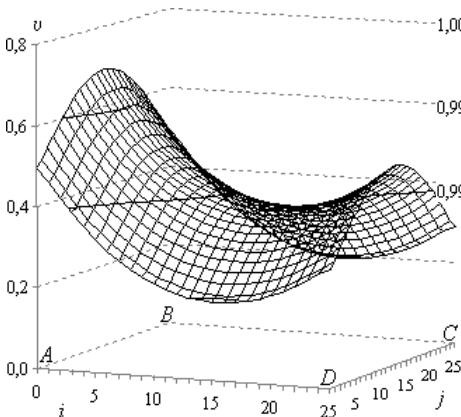


Рис. 1.15. Величина швидкості фільтрації в області G_5

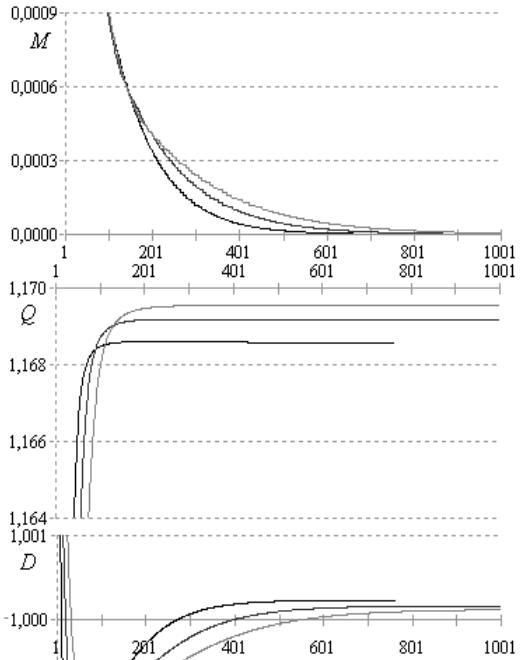


Рис. 1.14. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

рис. 1.13) та таблиці розрахункових значень при різних значеннях параметрів розбиття (табл. 1.7). На рисунку 1.14 проілюстрована ітераційна збіжність розробленого алгоритму для максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D . Розрахункова величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.15, де, як і очікувалося в силу симетрії картини руху, найменше її значення 0.1935 досягається у вузлах $(i, j) = (15, 0) \cup (15, 25)$, а найбільше – 0.6919 – у вузлах $(i, j) = (0, 12) \cup (0, 13)$.

Зауважимо, що розроблений алгоритм застосовано до розв'язування крайових задач у криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями у випадках, коли кожна із граничних ліній течії та екіпотенціальних ліній задаються декількома аналітичними співвідношеннями (див. рис. 1.10), при чому, вздовж даної лінії (на ділянці границі фізичної області) порушується умова конформності, на відміну від випадків її порушення у вершинах криволінійного чотирикутника (див. рис. 1.2 та 1.3). Так, на рисунку 1.16 зображено гідродинамічну сітку руху в області G_2 при деформованій (колом радіуса 0.25) екіпотенціальній лінії CD : а) – шляхом вдавлювання, при цьому область G_2 стискується і фільтраційна витрата зростає від 1.1643 до 1.2475; б) – витягування, область G_2 розширюється і фільтраційна витрата спадає до 1.1363.

1.1.3. Розв'язування обернених крайових задач на квазіконформні відображення в однорідних анізотропних середовищах

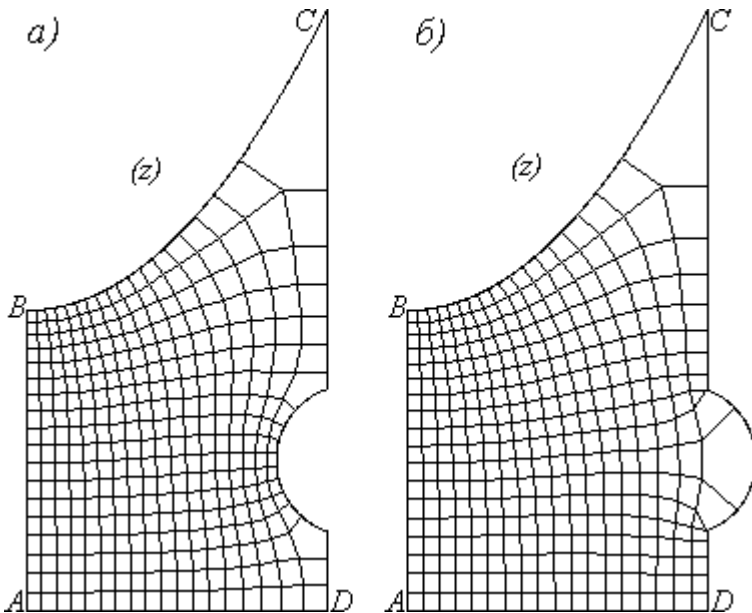


Рис. 1.16. Гідродинамічна сітка руху в області G_2 з деформованою (а) – вдавленням; б) – витягуванням) еквіпотенціальною лінією CD при граничних потенціалах $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ та розбитті 17×17

Розглянемо нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$, де $\kappa_{rs} = \text{const}$ ($r, s = 1, 2$) – величини, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій [58, 74]. Тоді задача

$$\begin{cases} \Psi_y = \kappa_{11}\varphi_x + \kappa_{12}\varphi_y, \\ \Psi_x = -\kappa_{21}\varphi_x - \kappa_{22}\varphi_y, \end{cases} \quad (\varphi, \Psi) \in G_\omega,$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* \end{cases}$$

з допомогою відповідного квазіконформного відображення області G_z на область G_ω , зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left((\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{21} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left((\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{12} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

при заданих нелінійних крайових умовах та умовах

$$\kappa_{11} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.21)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.21) є системою еліптичного типу при виконанні умов

$$(\kappa_{12} + \kappa_{21})^2 - 4\kappa_{11}\kappa_{22} < 0, \quad \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21} > 0. \quad (1.22)$$

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо умови [102, 142]

$$\Theta_M + \tilde{\Theta}_M = \frac{\pi}{2}, \quad (1.23)$$

$$\text{де } \cos \Theta_M = \frac{f_{i-1x}'(M)f_{ix}'(M) + f_{i-1y}'(M)f_{iy}'(M)}{\sqrt{f_{i-1x}'^2(M) + f_{i-1y}'^2(M)} \sqrt{f_{ix}'^2(M) + f_{iy}'^2(M)}},$$

$$\cos \tilde{\Theta}_M = \frac{\kappa_1 f_{jx}^{\prime 2}(M) + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) f_{jx}'(M) f_{jy}'(M) + \kappa_{22} f_{jy}^{\prime 2}(M)}{\sqrt{f_{jx}^{\prime 2}(M) + f_{jy}^{\prime 2}(M)} \sqrt{(\kappa_{11} f_{jx}'(M) + \kappa_{12} f_{jy}'(M))^2 + (\kappa_{21} f_{jx}'(M) + \kappa_{22} f_{jy}'(M))^2}},$$

$$f_0(M) \stackrel{df}{=} f_4(M), \quad j=1 \text{ при } i=1,2 \text{ та } j=3 \text{ при } i=3,4.$$

Умови (1.23) означають, що дотичні до граничних ліній течії

повинні настільки відхилитись від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, наскільки анізотропія відхиляє вектор швидкості від даних нормалей. Є й інший спосіб позбутися особливості у кутових точках M – це, зокрема, досягається, якщо покласти $\angle M = 90^\circ$, $\kappa_{12}(M) = \kappa_{21}(M) = 0$, $\kappa_{11}(M) = \kappa_{22}(M)$.

Врахувавши при цьому, що косинус кута $\tilde{\Theta}$ відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad}\phi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{\kappa_{11}\phi_x'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})\phi_x'\phi_y' + \kappa_{22}\phi_y'^2}{\sqrt{\phi_x'^2 + \phi_y'^2} \sqrt{(\kappa_{11}\phi_x' + \kappa_{12}\phi_y')^2 + (\kappa_{21}\phi_x' + \kappa_{22}\phi_y')^2}}, \quad (1.24)$$

приходимо до умов квазіортогональності (відповідних аналогів умов ортогональності (1.3)) в околах ділянок границі області G_z , які мають вигляд

$$-f_{kx}'(x,y)\frac{\partial y}{\partial \phi} + f_{ky}'(x,y)\frac{\partial x}{\partial \phi} = \sqrt{f_{kx}'^2(x,y) + f_{ky}'^2(x,y)} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \phi} + \frac{\partial y^2}{\partial \phi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_k},$$

$$\cos \Theta_k = \frac{\kappa_{11}f_{kx}'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{kx}'f_{ky}' + \kappa_{22}f_{ky}'^2}{\sqrt{f_{kx}'^2 + f_{ky}'^2} \sqrt{(\kappa_{11}f_{kx}' + \kappa_{12}f_{ky}')^2 + (\kappa_{21}f_{kx}' + \kappa_{22}f_{ky}')^2}},$$

$k=1,3$,

$$f_{lx}'(x,y)\frac{\partial y}{\partial \psi} - f_{ly}'(x,y)\frac{\partial x}{\partial \psi} = \sqrt{f_{lx}'^2(x,y) + f_{ly}'^2(x,y)} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_l},$$

$$\cos \Theta_l = \frac{\kappa_{11}f_{lx}'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{lx}'f_{ly}' + \kappa_{22}f_{ly}'^2}{\sqrt{f_{lx}'^2 + f_{ly}'^2} \sqrt{(\kappa_{11}f_{lx}' + \kappa_{12}f_{ly}')^2 + (\kappa_{21}f_{lx}' + \kappa_{22}f_{ly}')^2}},$$

$$l=2,4. \quad (1.25)$$

Таким чином, маємо нелінійну задачу, де, на відміну від ізотропних середовищ, у сітковій області G_z^y фігурують малі паралелограми замість малих прямокутників.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.20) у рівномірній сітковій області G_ω^y апроксимуємо таким чином. Перший та другий доданки (1.20) апроксимуємо триточковими операторами $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ (1.4). Третій та четвертий доданки (1.20) апроксимуємо відповідно такими різницевиими операторами [190]

$$\begin{aligned} \Lambda_3 u_{i,j} &= \frac{1}{2h_1} \left(a_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2h_2} - a_{i-1,j} \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h_2} \right), \\ \Lambda_4 u_{i,j} &= \frac{1}{2h_2} \left(a_{i,j+1} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h_1} - a_{i,j-1} \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h_1} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

З метою більш точнішого врахування геометрії області G_z , використаємо шаблон “ящик” – дев’ятиточкову різницеву схему з ваговими коефіцієнтами для апроксимації рівнянь (1.20) такими відповідними різницевиими операторами [190]

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 (\sigma u_{j+1} + (1-2\sigma)u_j + \sigma u_{j-1}) + \Lambda_2 (\sigma u_{i+1} + (1-2\sigma)u_i + \sigma u_{i-1}) + \\ &+ \Lambda_3 u_{i,j} - \Lambda_4 u_{i,j}, \quad \Lambda_1 (\sigma u_{j+1} + (1-2\sigma)u_j + \sigma u_{j-1}) + \\ &+ \Lambda_2 (\sigma u_{i+1} + (1-2\sigma)u_i + \sigma u_{i-1}) - \Lambda_3 u_{i,j} + \Lambda_4 u_{i,j}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тому рівняння (1.20) для функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінимо, згідно з схемами (1.27), такими різницевиими рівняннями

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sigma(x_{j+1,j+1} - 2x_{i,j+1} + x_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \\
& + \sigma(x_{j+1,j-1} - 2x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}) + \\
& + \gamma^2 \left(\sigma(b_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j})x_{i+1,j} + b_{i+1,j}x_{i+1,j-1}) + \right. \\
& + (1-2\sigma)(b_{i,j+1}x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j})x_{i,j} + b_{i,j}x_{i,j-1}) + \\
& + \sigma(b_{i-1,j+1}x_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j})x_{i-1,j} + b_{i-1,j}x_{i-1,j-1}) + \\
& + \gamma(c_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) - c_{i-1,j}(x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}) - \\
& - d_{i,j+1}(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}) + d_{i,j-1}(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1})) / 4 = 0, \\
& \sigma(y_{j+1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \\
& + \sigma(y_{j+1,j-1} - 2y_{i,j-1} + y_{i-1,j-1}) + \\
& + \gamma^2 \left(\sigma(b_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j})y_{i+1,j} + b_{i+1,j}y_{i+1,j-1}) + \right. \\
& + (1-2\sigma)(b_{i,j+1}y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j})y_{i,j} + b_{i,j}y_{i,j-1}) + \\
& + \sigma(b_{i-1,j+1}y_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j})y_{i-1,j} + b_{i-1,j}y_{i-1,j-1}) + \\
& + \gamma(-d_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + d_{i-1,j}(y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) + \\
& + c_{i,j+1}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) - c_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1})) / 4 = 0,
\end{aligned} \right. \quad (1.28)$$

де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $b_{i,j} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}$, $c_{i,j} = \kappa_{12}$, $d_{i,j} = \kappa_{21}$.

Різницеві аналоги крайових умов (1.7) залишимо без змін. Приграничні умови квазіортогональності (1.25) (додаткові умови зв'язку між граничними та приграничними вузлами) апроксимуємо за схемою типу ЧВЦП [14] такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{aligned}
& -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \\
& = \sqrt{f_{1x}''^2(x_{0,j}, y_{0,j}) + f_{1y}''^2(x_{0,j}, y_{0,j})} \times \\
& \times \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{10,j}}, \\
& f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{f_{2x}^{\prime 2}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f_{2y}^{\prime 2}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \times \\
&\times \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{2i,n+1}}, \\
&- f_{3x}^{\prime}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + f_{3y}^{\prime}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \\
&= \sqrt{f_{3x}^{\prime 2}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) + f_{3y}^{\prime 2}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})} \times \\
&\times \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}}, \\
&f_{4x}^{\prime}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}^{\prime}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = \\
&= \sqrt{f_{4x}^{\prime 2}(x_{i,0}, y_{i,0}) + f_{4y}^{\prime 2}(x_{i,0}, y_{i,0})} \times \\
&\times \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,0})^2 + (y_{i,1} - y_{i,0})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{4i,0}}, \\
&\quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Квазіконформний інваріант γ криволінійного чотирикутника $G_{\underline{z}}$ визначимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних чотирикутників (паралелограмів) двох областей

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{a_{i,j} + a_{i+1,j}}, \tag{1.30}$$

$$\text{де } \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2}.$$

Алгоритм наближення розв’язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.28), (1.7), (1.29), (1.30) в загальному випадку побудовано аналогічно до п.1.1.1 шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки

G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Відповідно в алгоритм АК внесемо такі зміни:

- в п.5 – початкове наближення невідомої величини γ знаходимо за формулою (1.30);
- в п.6 – уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо з допомогою одного кроку ітераційного методу Зейделя за формулами отриманими шляхом розв’язання (1.28) відносно

$$x_{i,j} \text{ та } y_{i,j};$$

- в п.7 – нове наближення величини γ знаходимо за формулою (1.30).
- в п.8 – координати граничних вузлів підправляємо шляхом розв’язання системи рівнянь сформованої із (1.7), (1.29).
- в п.10 – нев’язку квазіконформності отриманої гідродинамічної сітки руху обчислюємо за формулою

$$\varepsilon_* = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}, \text{ де } \varepsilon_x, \varepsilon_y \text{ – нев’язки апроксимацій рівнянь} \quad (1.21):$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \max_{i,j=1}^{m,n} \left| x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - \left(\kappa_{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right) \gamma \right|, \\ \varepsilon_y = \max_{i,j=1}^{m,n} \left| y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - \left(\kappa_{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right) \gamma \right|. \end{cases} \quad (1.31)$$

Розрахункову величину швидкості фільтрації обчислюватимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ та умов типу Коші-Рімана (1.21).

Числову реалізацію описаного алгоритму розв’язання обернених крайових задач теорії фільтрації у випадку однорідних анізотропних середовищ [58] здійснено в областях G_1, G_3, G_4 та

G_5 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$. З метою закінчення ітераційного процесу блочного розрахунку параметр ε (див. (1.11)) вибирався рівним 10^{-6} , що не перевищує порядок $O(|h|^2)$ апроксимації вихідних рівнянь. При цьому за нульове наближення координат вузлів кожної фізичної області G_z бралися координати вузлів відповідної ортогональної гідродинамічної сітки.

Так, на рисунку 1.17 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, яка побудована в результаті розв'язання задачі в області

G_1 при $\kappa = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$. Числові розрахунки проводилися при різних

значеннях параметрів розбиття (див. таблицю 1.8), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати різняться на величину порядку $O(|h|^2)$, що підтверджує стійкість

розробленого алгоритму. На рисунку 1.18 проілюстрована збіжність ітераційного процесу розрахунку на основі максимального значення відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.000 до 1.341. За формулами (1.12) знайдено величину швидкості в усіх вузлах сітки (див. рис. 1.19). Зазначимо, що найменша розрахункова величина швидкості руху 0.4032 досягається у вузлі $(i, j) = (25, 25)$, а найбільша – 6.3511 – у вузлі $(i, j) = (0, 1)$.

В області G_3 розв'язано задачу при $\kappa = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ -0.1 & 1.1 \end{pmatrix}$. Отримані результати занесено до таблиці 1.9, а гідродинамічну сітку

Табл. 1.8. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	826	23	272	1.3427	1.1E-1	6.4E-3
2	24×24	877	173	280	1.3418	1.1E-1	4.5E-3
3	28×28	1107	933	381	1.3402	1.0E-1	3.3E-3

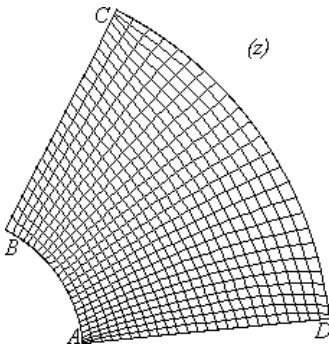


Рис. 1.17. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

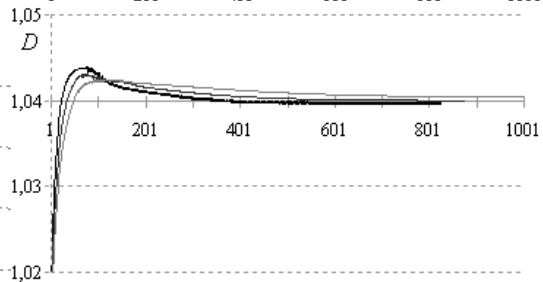
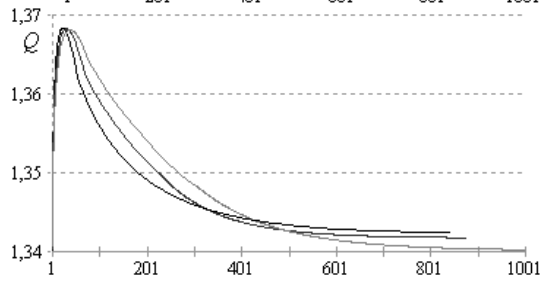
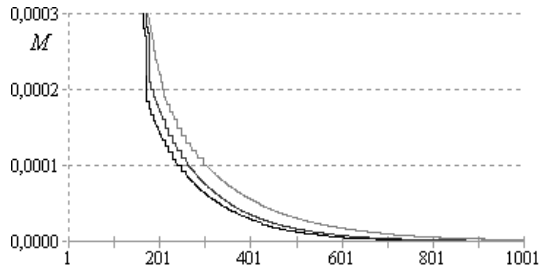


Рис. 1.18. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

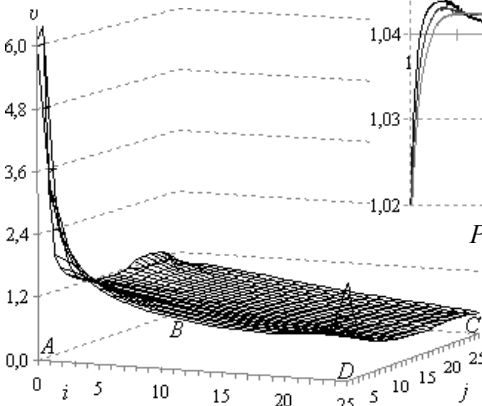


Рис. 1.19. Величина швидкості фільтрації в області G_1

зображено на рисунку 1.20. На рисунку 1.21 проілюстровано математичну збіжність ітераційного процесу для максимального значення відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення фільтраційної витрати Q та відношення діагоналей D криволінійних чотирикутників відносно кроку ітерації. Розрахункову величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.22, де найменше її значення 0.0069 досягається у вузлі $(i,j)=(12,25)$, а найбільше – 0.1498 – у вузлі $(i,j)=(0,0)$. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5607.

В результаті розв'язування задачі в області G_4 при $\kappa = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 1.1 \end{pmatrix}$ та розбитті 24×24 отримано розрахункову гідродинамічну сітку руху (див. рис. 1.23) за нев'язки квазіконформності $\varepsilon_* = 1.4E-1$ (див. табл. 1.10). На рисунку 1.24 проілюстровано збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Розрахункова величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.25 ($0.0134 = v_{7,25} \leq v_{i,j} \leq v_{25,15} = 0.3927$). Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.7904.

На рисунку 1.26 зображена гідродинамічна сітка руху побудована в результаті розв'язання задачі в області G_5 при $\kappa = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix}$. Отримані результати занесено до таблиці 1.11. На рисунку 1.27 зображено графіки збіжності максимального

Табл. 1.9. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	1414	51	728	0.5603	1.8E-1	3.0E-3
2	24×24	1894	70	957	0.5607	1.8E-1	2.1E-3
3	28×28	2466	4	1208	0.5611	1.9E-1	1.6E-3

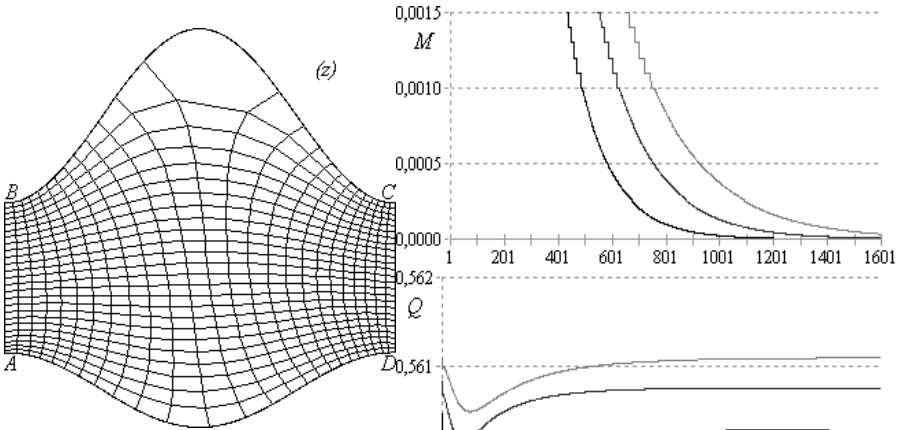


Рис. 1.20. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

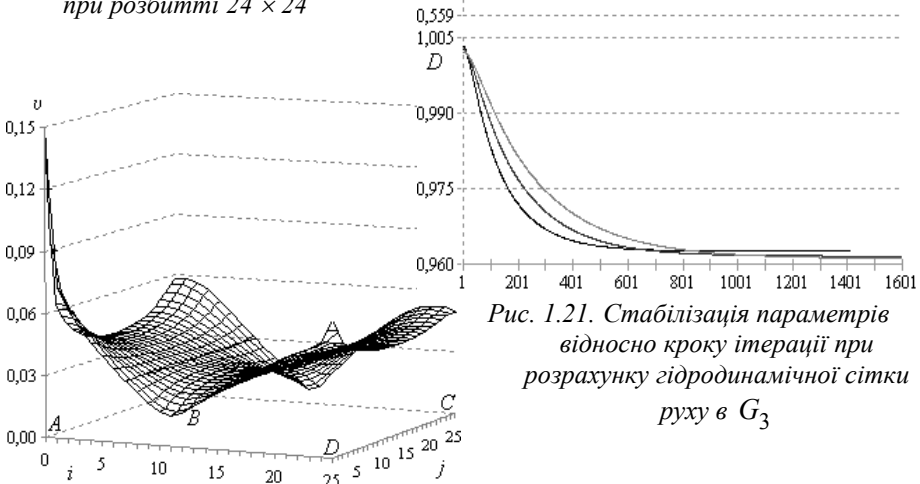


Рис. 1.21. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Рис. 1.22. Величина швидкості фільтрації в області G_3

Табл. 1.10. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	803	32	521	0.7913	1.2E-1	3.7E-3
2	24 × 24	884	34	598	0.7904	1.4E-1	2.6E-3
3	28 × 28	1140	45	758	0.7905	1.7E-1	1.9E-3

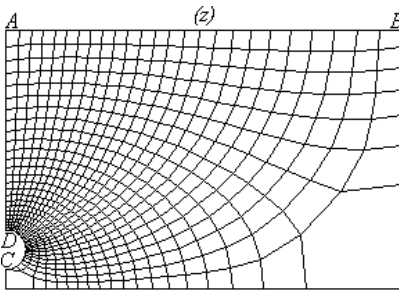


Рис. 1.23. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

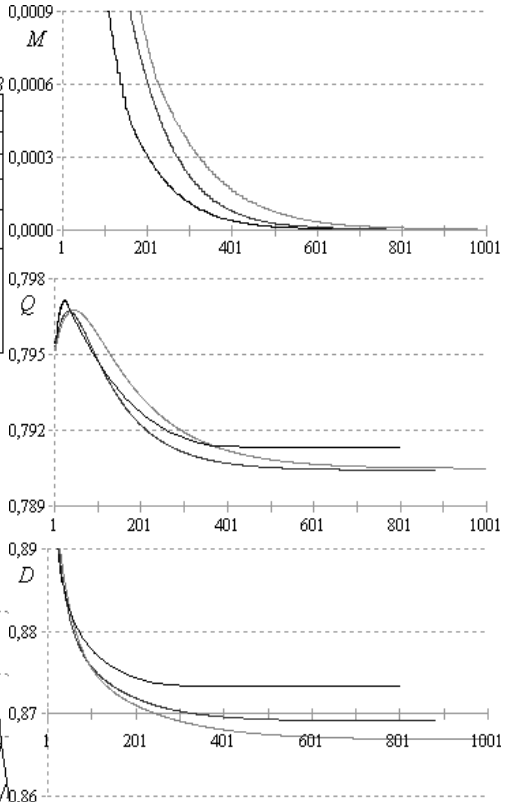


Рис. 1.24. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

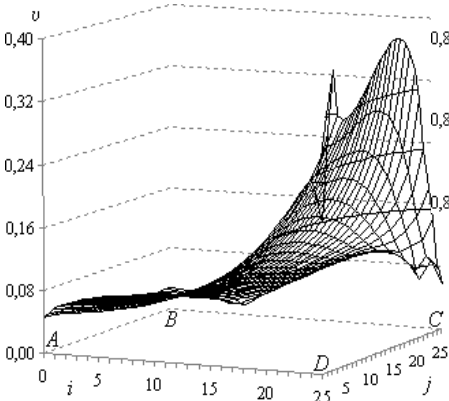


Рис. 1.25. Величина швидкості фільтрації в області G_4

відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Розрахункову величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.28, де найменше значення швидкості руху 0.1925 є у вузлі $(i,j)=(18,0)$, а найбільше – 1.2474 – у вузлі $(i,j)=(25,25)$. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.3314.

Таким чином, перевагами розробленого та апробованого багаточисельними конкретними прикладами числових розрахунків алгоритму розв’язування обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення криволінійних чотирикутних областей на прямокутник (одночасна побудова гідродинамічної сітки, поверхні швидкості, обчислення витрат, ін.) в порівнянні із аналогічними числовими методами є: 1) простота в реалізації; 2) економія машинного часу і прискорення швидкості збіжності процесу вцілому; 3) автоматична побудова гідродинамічної сітки; 4) можливість його застосування до розв’язування нових нелінійних крайових задач.

Зазначимо, що на даний час є деякі інші варіанти числової реалізації ідеї конформного та квазіконформного відображення конкретних типів крайових задач, оскільки динамічні різницеві сітки використовуються і при розв’язанні відповідних крайових задач математичної фізики, і при вивченні наближених методів конформних та квазіконформних відображень із застосуванням їх до дослідження різних процесів та явищ конвекції, масообміну, дифузії та ін. розчинних речовин, що забруднюють область.

Так, у роботах [99 – 101, 158] розроблено підхід до розв’язування досить широкого класу крайових задач в криволінійних чотирикутних областях, многозв’язних областях та

Табл. 1.11. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	633	296	442	1.3298	6.8E-1	6.3E-3
2	24×24	778	393	577	1.3314	5.9E-1	4.4E-3
3	28×28	1006	490	731	1.3326	5.2E-1	3.3E-3

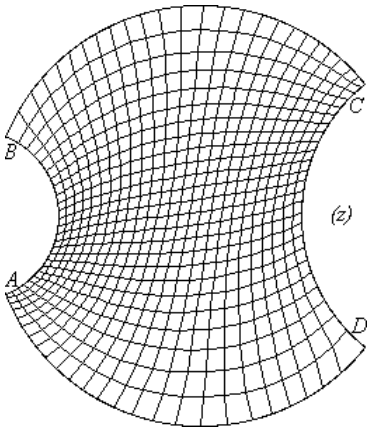


Рис. 1.26. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

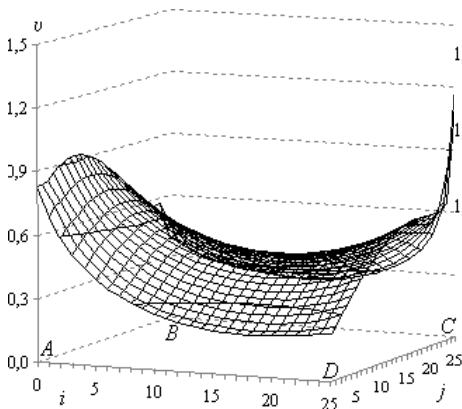


Рис. 1.28. Величина швидкості фільтрації в області G_5

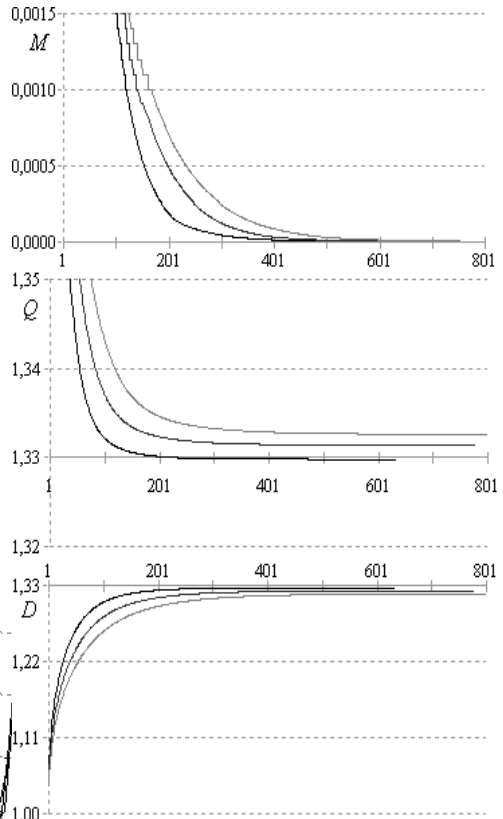


Рис. 1.27. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

областях з вільними межами шляхом числової побудови конформних і квазіконформних відображень даних областей (із розрізами) на параметричні прямокутники. Побудовано і реалізовано на ЕОМ алгоритми числової автоматизованої генерації ортогональних криволінійних координат відповідних конформних і квазіконформних відображень чотирикутних областей з допомогою різницевих сіток з “плаваючими” по фізичному профілю границі вузлами. Наведено приклади розрахунків таких сіток в конкретних областях (у випадку конформного відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник кроки розбиття $\Delta\varphi$ та $\Delta\psi$ задавалися однаковими, а в процесі розв’язування задачі уточнювались параметри розбиття області комплексного потенціалу [99, 158]), а також обґрунтовано застосування запропонованого числового методу автоматизації побудови різницевих сіток для розв’язування задач фільтрації ґрунтових вод і електростатики. Квазіконформні відображення, запропоновані авторами у роботі [99], застосовані до задач керування системою криволінійних координат.

У роботах [40, 105 – 107, 179 – 182] побудовано метод конформного відображення, в загальному, неортогональної сітки в прямокутнику на неортогональну сітку із збереженням кутів у криволінійній області. Але, розроблений метод, за твердженням авторів, є досить громіздким і користуватися ним при розрахунку динамічних сіток незручно, він складає значні труднощі.

Числові методи побудови ортогональних сіток зустрічаються і в ряді зарубіжних авторів при розв’язанні різного роду задач математичної фізики (див., напр., [1, 3]). У роботах [18, 28] динамічні сітки будуються з використанням методу скінчених елементів.

1.2. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації в неоднорідних середовищах

Ідеї поетапної параметризації розвинуто на випадки розв'язування таких нелінійних задач, коли як і коефіцієнт фільтрації, так і компоненти тензора фільтрації залежать і від координат фізичної області фільтрації, і від шуканих функцій течії та потенціалу, а також від градієнту потенціалу. Розроблено відповідні алгоритми і програми числового розв'язування окреслених вище задач. Запропоновано підхід, який дозволяє враховувати фільтраційні деформації в ґрунтах та розроблено нові ефективні алгоритми розв'язування нелінійних крайових задач, які при цьому виникають.

1.2.1. Нелінійні задачі теорії фільтрації у чотирикутних областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями

1.2.1.1. Поетапна параметризація характеристик процесу та середовища. Розглянемо нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa(\varphi, \psi)$ – обмеженою неперервною диференційованою в області G_z функцією, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій [74]. Тоді задача з допомогою відповідного квазіконформного відображення області G_z на область G_ω , зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \kappa(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{\kappa(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.33)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Таким чином, ми маємо перехід від нелінійності вихідної задачі до локалізованої нелінійності оберненої задачі.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.32) у рівномірній сітковій області G_ω^γ апроксимуємо різницеvim оператором (1.5). Тритучкові оператори $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ (1.4) замінимо однорідними консервативними різницеvim схемами з точністю апроксимації $O(h_1^2)$ та $O(h_2^2)$ [190]

$$\begin{aligned} \Lambda_1 u_j &= \frac{1}{h_1} \left(a_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} - a_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1} \right), \\ \Lambda_2 u_i &= \frac{1}{h_2} \left(b_{i,j+1} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2} - b_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2} \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

де кожен із коефіцієнтів $a_{i,j}$ та $b_{i,j}$, згідно із [190], може бути обчислений за однією із формул

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{1}{\kappa_{i-0.5,j}}, \quad a_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j}}{2\kappa_{i,j}\kappa_{i-1,j}}, \quad a_{i,j} = \frac{2}{\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j}}; \\ b_{i,j} &= \kappa_{i,j-0.5}, \quad b_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j-1}}{2}, \quad b_{i,j} = \frac{2\kappa_{i,j}\kappa_{i,j-1}}{\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j-1}}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Тут $\kappa_{i,j} = \kappa(\varphi_i, \psi_j)$.

Тому, рівняння (1.32) (аналог рівнянь Лапласа) для спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінено, згідно з схемою (1.5), (1.34), (1.35), такими різницеvim рівняннями

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sigma \left(a_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) x_{i,j+1} + a_{i,j+1} x_{i-1,j+1} \right) + \\
& + (1-2\sigma) \left(a_{i+1,j} x_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) x_{i,j} + a_{i,j} x_{i-1,j} \right) + \\
& + \sigma \left(a_{i+1,j-1} x_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) x_{i,j-1} + a_{i,j-1} x_{i-1,j-1} \right) + \\
& + \gamma^2 \left(\sigma \left(b_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) x_{i+1,j} + b_{i+1,j} x_{i+1,j-1} \right) + \right. \\
& + (1-2\sigma) \left(b_{i,j+1} x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) x_{i,j} + b_{i,j} x_{i,j-1} \right) + \\
& \left. + \sigma \left(b_{i-1,j+1} x_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) x_{i-1,j} + b_{i-1,j} x_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \\
& \left. \left(\sigma \left(a_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) y_{i,j+1} + a_{i,j+1} y_{i-1,j+1} \right) + \right. \right. \\
& + (1-2\sigma) \left(a_{i+1,j} y_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) y_{i,j} + a_{i,j} y_{i-1,j} \right) + \\
& + \sigma \left(a_{i+1,j-1} y_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) y_{i,j-1} + a_{i,j-1} y_{i-1,j-1} \right) + \\
& + \gamma^2 \left(\sigma \left(b_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) y_{i+1,j} + b_{i+1,j} y_{i+1,j-1} \right) + \right. \\
& + (1-2\sigma) \left(b_{i,j+1} y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) y_{i,j} + b_{i,j} y_{i,j-1} \right) + \\
& \left. \left. + \sigma \left(b_{i-1,j+1} y_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) y_{i-1,j} + b_{i-1,j} y_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \right. \\
& \left. i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \right.
\end{aligned} \right. \quad (1.36)$$

Різницеві аналоги крайових умов (1.7) та приграничних умов ортогональності (1.8) залишимо без змін. А квазіконформний інваріант γ криволінійного чотирикутника G_z визначимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+0.5,j+0.5}} \gamma_{i,j}. \quad (1.37)$$

Алгоритм наближення розв’язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.36), (1.7), (1.8), (1.37) в загальному випадку побудовано аналогічно до п.1.1.1.2 шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Відповідно в алгоритм АК внесено такі зміни:

- в п.5 – початкове наближення невідомої величини γ

знаходимо за формулою (1.37);

- в п.6 – уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо з допомогою одного кроку ітераційного методу Зейделя за формулами отриманими шляхом розв’язання (1.36) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$;
- в п.7 – нове наближення величини γ знаходимо за формулою (1.37).

На основі рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \phi$ та умов типу Коші-Рімана (1.33), знаходимо величину швидкості за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу вказаних законів.

Числову реалізацію описаного алгоритму розв’язування обернених крайових задач теорії фільтрації у випадку неоднорідних ізотропних середовищ [74] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1 , G_3 , G_4 та G_5 . Так, на рисунку 1.29 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв’язання задачі в області G_1 при $\kappa(\phi, \psi) = 1 + 0.5 \sin(\pi\phi + \psi)$ (мінімальне значення коефіцієнта фільтрації становить 0.579м/доб, а максимальне – 1.500м/доб), а розрахункові параметри подано у таблиці 1.12. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 1.2328. Збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації проілюстровано на рисунку 1.30. Розрахункова величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.31, при цьому найменше значення швидкості руху 0.3671 є у вузлі $(i, j) = (25, 25)$, а найбільше – 1.2594 – у вузлі $(i, j) = (0, 12)$.

В області G_3 розв’язано задачу при $\kappa(\phi, \psi) = \phi + \cos \psi$

($\min \kappa_{i,j} = 0.85 \text{ м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 2 \text{ м/доб}$), де розрахункові параметри подано у таблиці 1.13, а гідродинамічну сітку зображено на рисунку 1.32. Збіжність ітераційного процесу у цьому випадку проілюстровано на рисунку 1.33, а розрахункову величину швидкості зображено на рисунку 1.34. Зазначимо, що найменша величина швидкості руху 0.0097 досягається у вузлі $(i,j)=(13,25)$, а найбільша – 0.0954 – у вузлі $(i,j)=(0,25)$; врахування впливу коефіцієнта фільтрації за даним законом викликало збільшення шуканої фільтраційної витрати Q від 0.5538 до 0.7517 .

Задачу розв'язано в G_4 при $\kappa(\varphi, \psi) = e^{0.5\varphi + \psi - 1}$, де мінімальне значення коефіцієнта фільтрації становить 0.368 м/доб , а максимальне – 1.278 м/доб . Розрахункова гідродинамічна сітка зображена на рисунку 1.35, а параметри – подано у таблиці 1.14. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало зменшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.4261 . Збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D з кроком ітерації розробленого алгоритму проілюстрована на рисунку 1.36. Розрахункова величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.37, при цьому найменша величина швидкості руху 0.0081 досягається у вузлі $(i,j)=(6,25)$, а найбільша – 0.1969 – у вузлі $(i,j)=(25,13)$.

Параметри числового розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5 (див. рис. 1.38) при $\kappa(\varphi, \psi) = 1.5 - \sin(\varphi + 2\psi)$ ($\min \kappa_{i,j} = 0.5 \text{ м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 1.696 \text{ м/доб}$) подано у таблиці 1.15. На рисунку 1.39 проілюстровано збіжність ряду величин з кроком ітерації, а на рисунку 1.40 зображено величину швидкості фільтрації ($0.1244 = v_{14,25} \leq v_{i,j} \leq v_{0,2} = 0.5178$). Зазначимо, що

Табл. 1.12. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	647	224	569	1.2325	1.1E-3	5.7E-3
2	24×24	864	310	755	1.2328	9.1E-4	4.0E-3
3	28×28	1096	406	34	1.2330	7.9E-4	3.0E-3

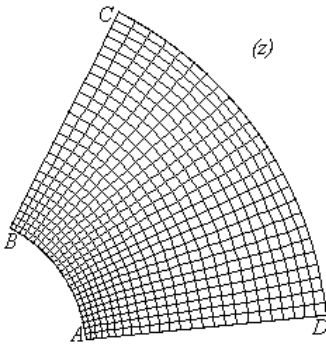


Рис. 1.29. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

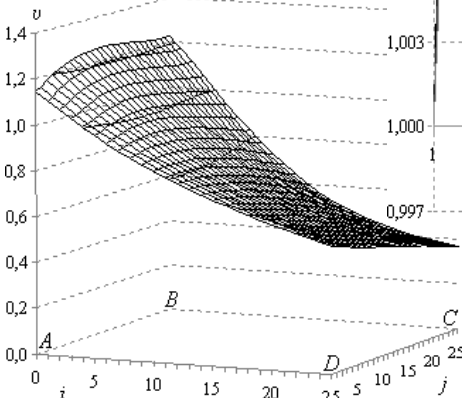


Рис. 1.31. Величина швидкості фільтрації в області G_1

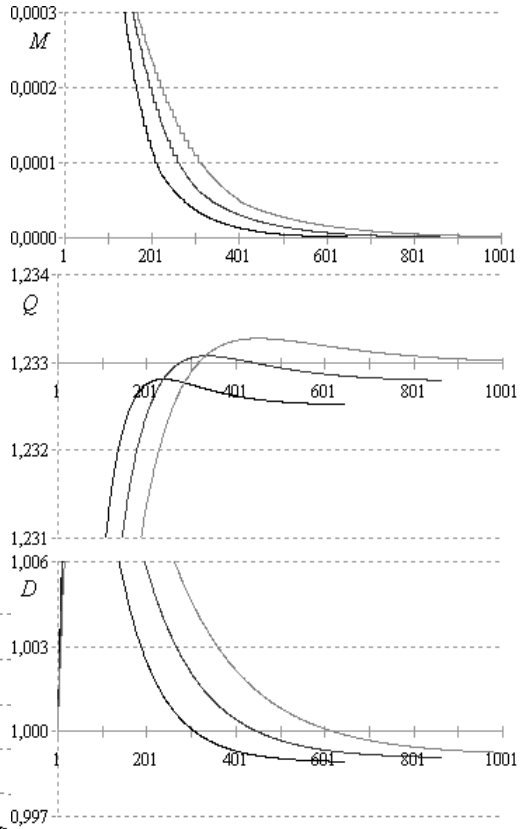


Рис. 1.30. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Табл. 1.13. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	1309	548	691	0.7510	2.6E-2	3.5E-3
2	24 × 24	1759	701	5	0.7517	2.5E-2	2.5E-3
3	28 × 28	2285	22	1140	0.7523	2.5E-2	1.9E-3

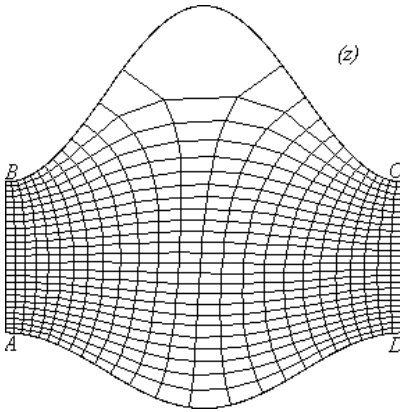


Рис. 1.32. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

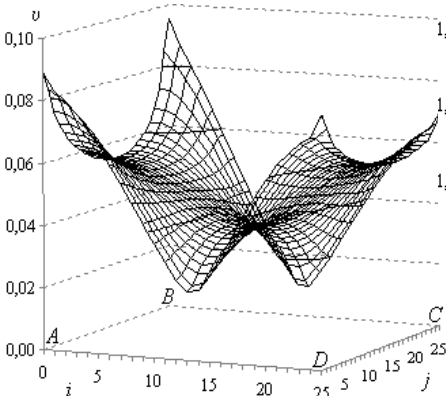


Рис. 1.34. Величина швидкості фільтрації в області G_3

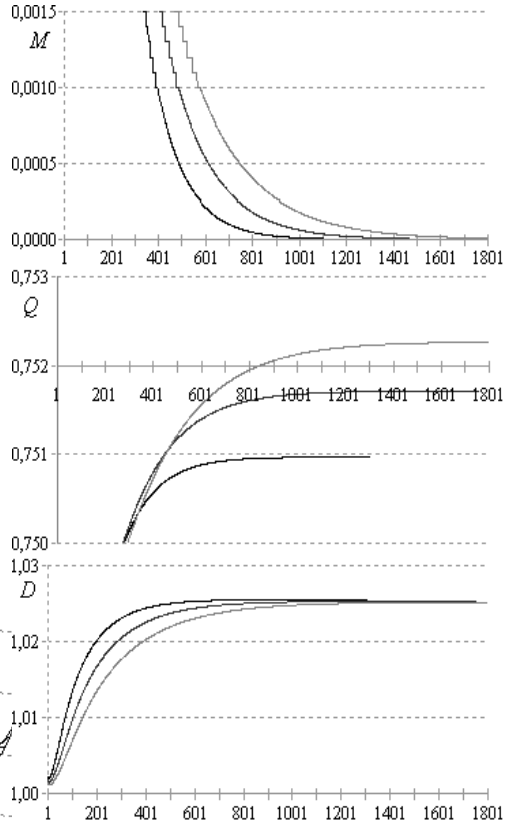


Рис. 1.33. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Табл. 1.14. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	771	495	553	0.4271	6.7E-2	2.7E-3
2	24 × 24	1050	12	743	0.4261	7.0E-2	1.9E-3
3	28 × 28	1368	844	954	0.4254	7.3E-2	1.4E-3

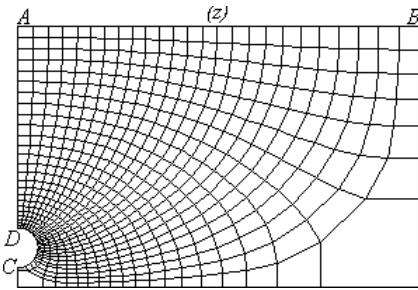


Рис. 1.35. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

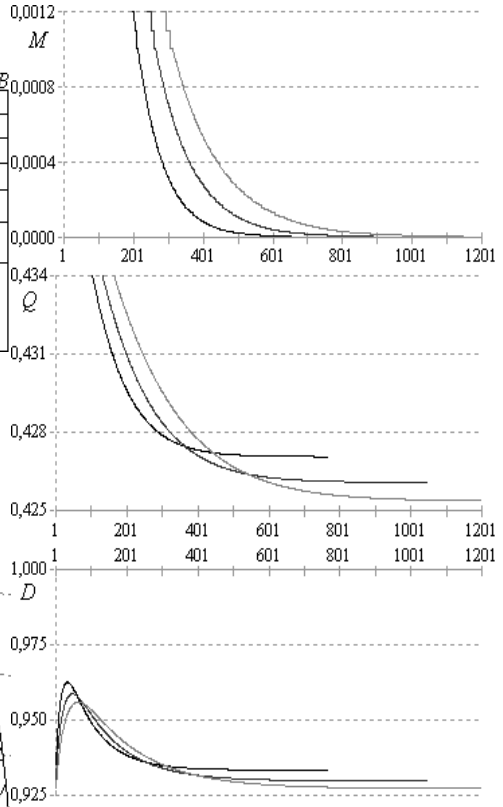


Рис. 1.36. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

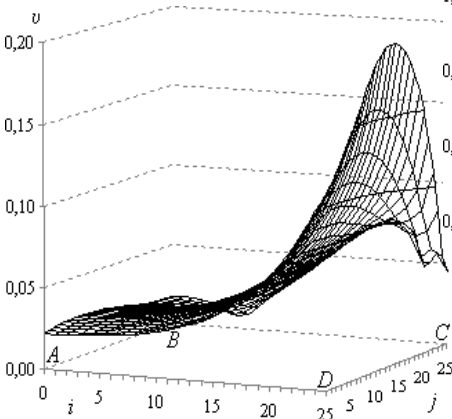


Рис. 1.37. Величина швидкості фільтрації в області G_4

Табл. 1.15. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	937	513	710	0.7492	1.2E-3	3.5E-3
2	24 × 24	1249	656	936	0.7497	9.4E-4	2.5E-3
3	28 × 28	1596	805	1184	0.7500	7.5E-4	1.9E-3

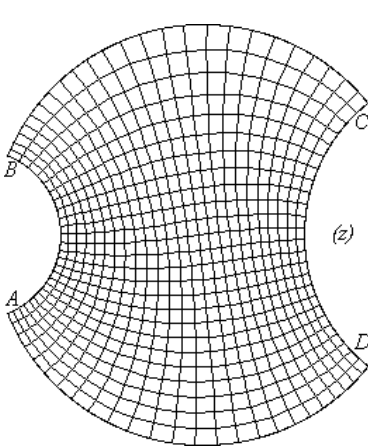


Рис. 1.38. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

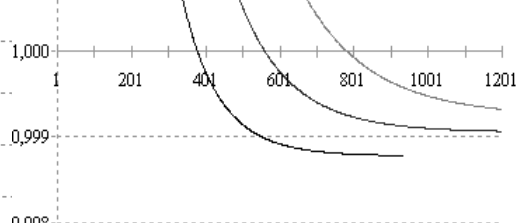
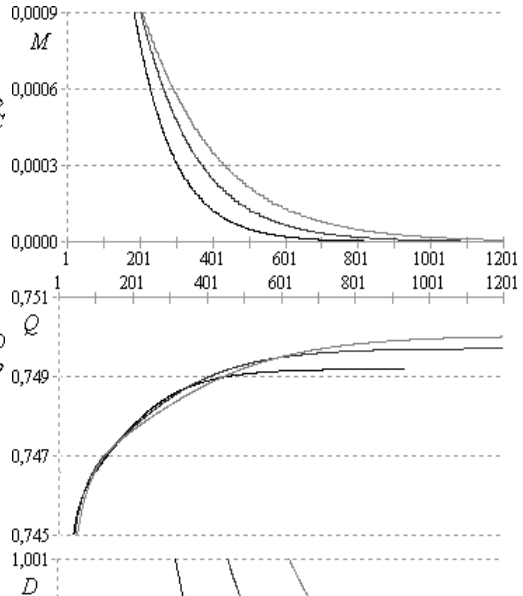


Рис. 1.39. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

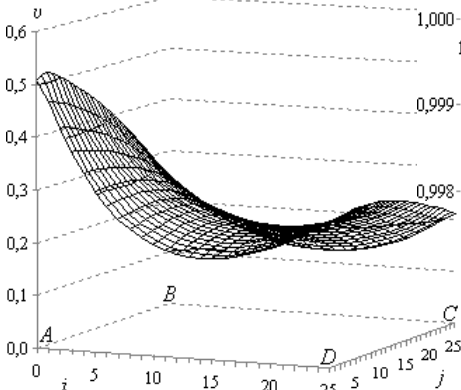


Рис. 1.40. Величина швидкості фільтрації в області G_5

врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом викликало зменшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 0.7497.

Розглянемо тепер нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa(x, y)$ – обмеженою неперервно диференційованою в області G_z функцією, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій [74]. Тоді задача зводиться до розв’язування в G_ω взаємно залежних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \kappa(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.39)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Таким чином, лінійна вихідна задача переходить у суттєво нелінійну обернену до неї задачу.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.38) у рівномірній сітковій області G_ω' апроксимуємо різницеvim оператором (1.5). Тритучкові оператори $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ (1.4) замінимо однорідними консервативними різницеvim схемами (1.34), (1.35), де $\kappa_{i,j} = \kappa(x_{i,j}, y_{i,j}) = \kappa(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))$.

Тому, рівняння (1.38) (аналог рівняння Лапласа) для спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінимо, згідно з схемою (1.5), (1.34), (1.35) різницеvim рівняннями (1.36). Різницеvi аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов

ортогональності (1.8) та квазіконформного інваріанта γ (1.37) залишимо без змін.

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.36), (1.7), (1.8), (1.37) побудовано аналогічно як і у попередньому випадку, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_{ω}^{γ} з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Відмінністю тут є лише те, що послідовні наближення коефіцієнта провідності $\kappa(x, y)$ на даному кроці у (i, j) -вузлах сітки G_{ω}^{γ} знаходимо після наближень відповідних значень $x_{i,j}, y_{i,j}$.

Числове розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації у випадку неоднорідних ізотропних середовищ [74] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1, G_3, G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації знову знаходитимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \phi$ та умов типу Коші-Рімана (1.39).

Так, в області G_1 розв'язано задачу при $\kappa(x, y) = x - \ln y$, де на рисунку 1.41 зображено розподіл заданого коефіцієнта фільтрації вздовж крайніх та середньої ліній течії та еквіпотенціальних ліній, а значення параметрів подано у таблиці 1.16. Збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення витрати Q та відношення діагоналей D за розробленим алгоритмом проілюстровано на рисунку 1.42. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 1.5942 та зміну величини швидкості фільтрації, при цьому, найменше значення розрахункової величини швидкості фільтрації

0.1728 досягається у вузлі $(i, j) = (25, 25)$, а найбільше – 3.4602 – у вузлі $(i, j) = (0, 0)$.

Табл. 1.16. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	648	304	65	1.5947	1.4E-2	8.0E-3
2	24×24	874	421	640	1.5942	1.2E-2	5.7E-3
3	28×28	1127	553	125	1.5938	1.1E-2	4.2E-3

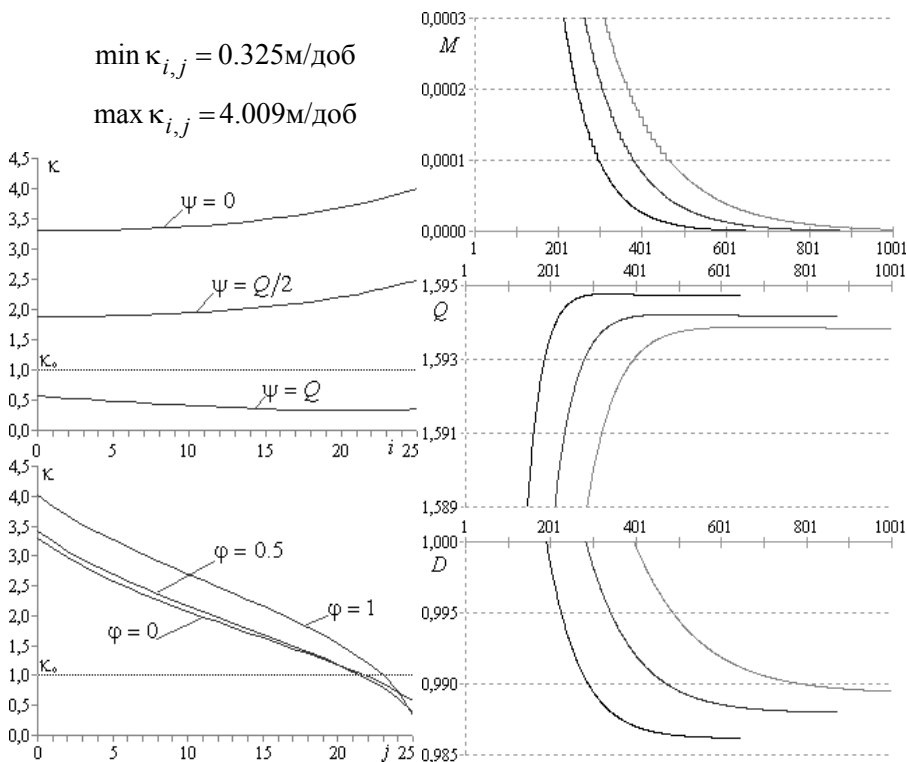


Рис. 1.41. Розподіл коефіцієнта фільтрації $\kappa(x, y) = x - \ln y$ в області G_1 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній

Рис. 1.42. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Значення параметрів розв'язання задачі в області G_3 при $\kappa(x,y)=\ln(x+y)-1$ подано у таблиці 1.17. На рисунку 1.43

Табл. 1.17. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	1061	371	514	1.1970	2.1E-2	5.5E-3
2	24×24	1459	452	675	1.1980	2.1E-2	3.9E-3
3	28×28	1918	526	850	1.1986	2.1E-2	2.9E-3

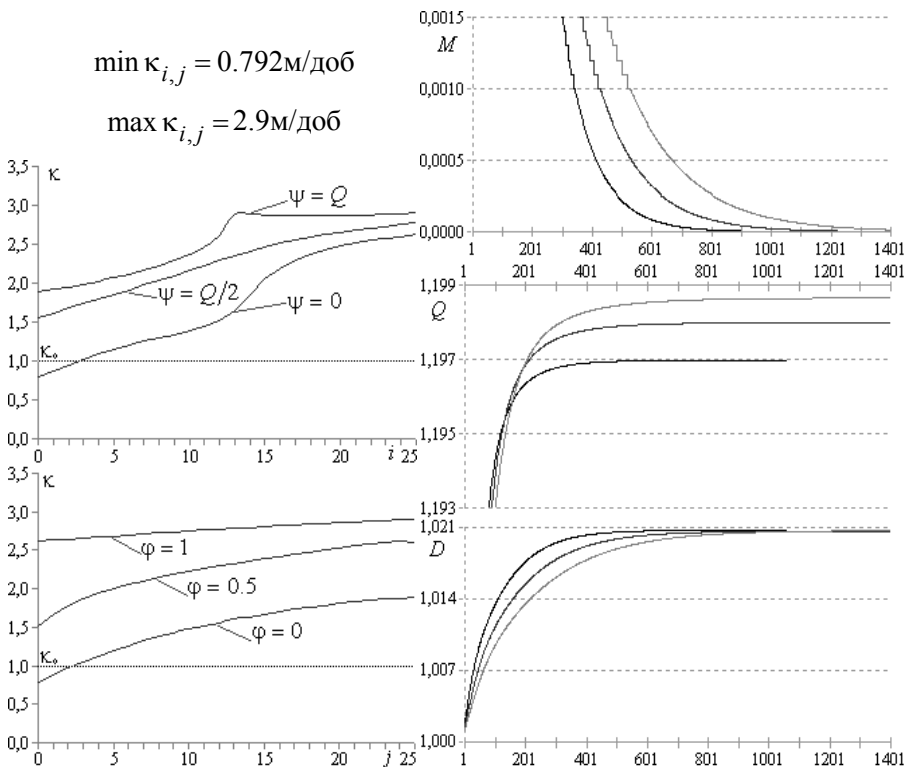


Рис. 1.43. Розподіл коефіцієнта фільтрації $\kappa(x,y)=\ln(x+y)-1$ в області G_3 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній

Рис. 1.44. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

зображено розподіл коефіцієнта фільтрації вздовж деяких ліній течії та еквіпотенціальних ліній, а на рисунку 1.44 проілюстровано збіжність ітераційного процесу. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 1.1980, а розрахункова величина швидкості фільтрації задовольняє нерівності $0.0194 = v_{12,25} \leq v_{i,j} \leq v_{0,25} = 0.2404$.

В області G_4 розв'язано задачу при $\kappa(x,y) = \sin \frac{\pi}{21}x + \cos \frac{\pi}{39}y$, де на рисунку 1.45 зображено розподіл даного коефіцієнта фільтрації вздовж окремих ліній течії та еквіпотенціальних ліній. У таблиці 1.18 подано параметри розрахунку сітки, на рисунку 1.46 – графіки збіжності відповідних величин умов закінчення ітераційного процесу. Вплив коефіцієнта фільтрації за цим законом привів до збільшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 1.0548, та зміни величини швидкості: $\min v_{i,j} = v_{6,25} = 0.0155$, $\max v_{i,j} = v_{25,11} = 0.4562$.

Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за законом $\kappa(x,y) = x + 0.5 \sin y$ (на рисунку 1.47 зображено його розподіл вздовж крайніх та середньої ліній течії та еквіпотенціальних ліній) при розв'язанні задачі в області G_5 викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.9732. На рисунку 1.48 проілюстровано збіжність розробленого алгоритму для максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення витрати Q та відношення діагоналей D криволінійного чотирикутника G_5 , а значення параметрів подано у таблиці 1.19. Зазначимо, що найменша розрахункова величина швидкості

фільтрації 0.2133 досягається у вузлі $(i, j) = (16, 25)$, а найбільша – 1.4455 – у вузлі $(i, j) = (0, 12)$.

Табл. 1.18. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h^2)$
1	20×20	568	198	53	1.0545	4.6E-2	4.8E-3
2	24×24	769	233	79	1.0548	4.8E-2	3.4E-3
3	28×28	994	401	98	1.0549	5.0E-2	2.5E-3

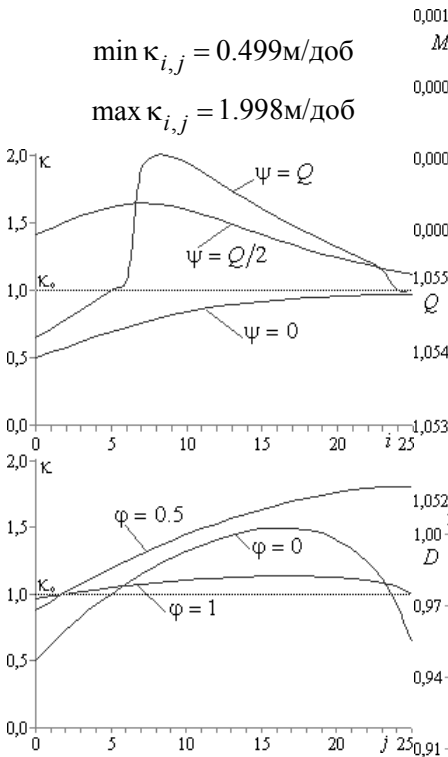


Рис. 1.45. Розподіл коефіцієнта фільтрації $\kappa = \sin \frac{\pi}{21}x + \cos \frac{\pi}{39}y$ в області G_4 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній

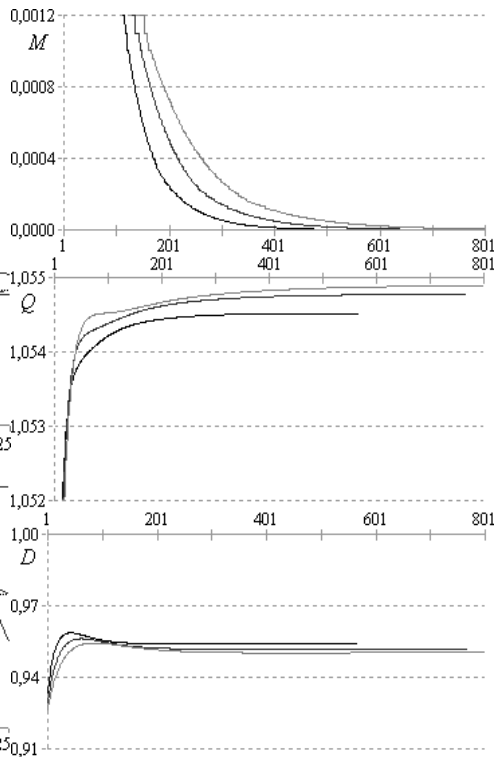


Рис. 1.46. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Табл. 1.19. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	822	218	545	1.9720	$8.1E-4$	$1.1E-2$
2	24×24	1101	318	711	1.9732	$1.5E-3$	$7.8E-3$
3	28×28	1415	429	897	1.9739	$1.9E-3$	$5.8E-3$

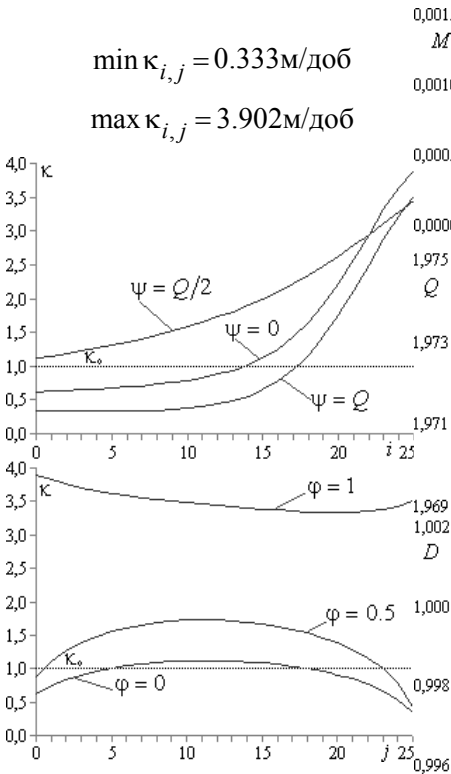


Рис. 1.47. Розподіл коефіцієнта фільтрації $\kappa(x, y) = x + 0.5 \sin y$ в області G_5 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній

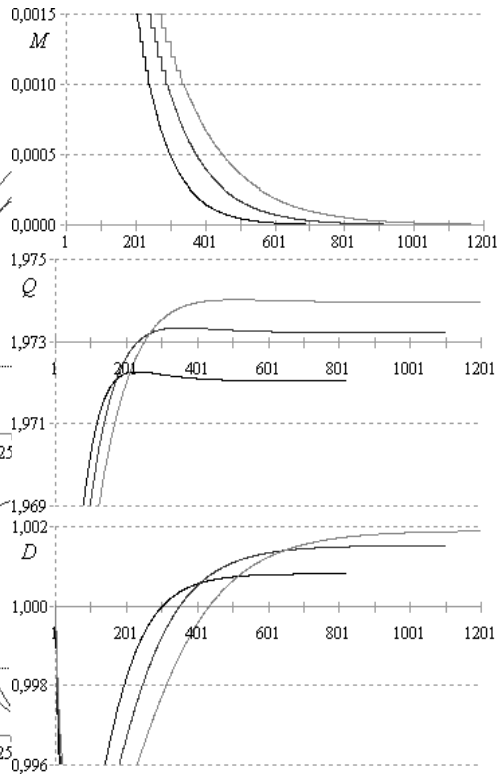


Рис. 1.48. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

1.2.1.2. Особливості побудови гідродинамічних сіток у випадку анізотропних середовищ. Розглянемо нелінійний стаціонарний

процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(\varphi, \psi) & \kappa_{12}(\varphi, \psi) \\ \kappa_{21}(\varphi, \psi) & \kappa_{22}(\varphi, \psi) \end{pmatrix}$, де $\kappa_{rs}(\varphi, \psi)$ ($r, s=1,2$) – функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій [58, 74]. Тоді задача з допомогою відповідного квазіконформного відображення області G_z на область G_ω , зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.41)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.41) є системою еліптичного типу в області G_z при виконанні умов типу (1.22).

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1,4}$, накладаємо умови (1.23). Косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad}\varphi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою (1.24), а відповідні умови квазіортогональності мають вигляд (1.25).

Таким чином, маємо нелінійну пряму задачу, де, на відміну

від ізотропних середовищ, у сітковій області G_z^y фігурують малі паралелограми. Відмінністю від анізотропних однорідних середовищ є те, що подібність “паралелограмів в малому” порушується.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.40) у рівномірній сітковій області G_ω^y апроксимуємо однорідними консервативними схемами (1.27). В результаті одержимо такі різницеві рівняння [190]

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma(\bar{a}_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (\bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i,j+1})x_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+1}x_{i-1,j+1}) + \\ & + (1-2\sigma)(\bar{a}_{i+1,j}x_{i+1,j} - (\bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i,j})x_{i,j} + \bar{a}_{i,j}x_{i-1,j}) + \\ & + \sigma(\bar{a}_{i+1,j-1}x_{i+1,j-1} - (\bar{a}_{i+1,j-1} + \bar{a}_{i,j-1})x_{i,j-1} + \bar{a}_{i,j-1}x_{i-1,j-1}) + \\ & + \gamma^2(\sigma(\bar{b}_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (\bar{b}_{i+1,j+1} + \bar{b}_{i+1,j})x_{i+1,j} + \bar{b}_{i+1,j}x_{i+1,j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(\bar{b}_{i,j+1}x_{i,j+1} - (\bar{b}_{i,j+1} + \bar{b}_{i,j})x_{i,j} + \bar{b}_{i,j}x_{i,j-1}) + \\ & + \sigma(\bar{b}_{i-1,j+1}x_{i-1,j+1} - (\bar{b}_{i-1,j+1} + \bar{b}_{i-1,j})x_{i-1,j} + \bar{b}_{i-1,j}x_{i-1,j-1})) + \\ & + \gamma(\bar{c}_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) - \bar{c}_{i-1,j}(x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}) - \\ & - \bar{d}_{i,j+1}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) + \bar{d}_{i,j-1}(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}))/4 = 0, \\ & \sigma(\bar{a}_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (\bar{a}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i,j+1})y_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+1}y_{i-1,j+1}) + \\ & + (1-2\sigma)(\bar{a}_{i+1,j}y_{i+1,j} - (\bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i,j})y_{i,j} + \bar{a}_{i,j}y_{i-1,j}) + \\ & + \sigma(\bar{a}_{i+1,j-1}y_{i+1,j-1} - (\bar{a}_{i+1,j-1} + \bar{a}_{i,j-1})y_{i,j-1} + \bar{a}_{i,j-1}y_{i-1,j-1}) + \\ & + \gamma^2(\sigma(\bar{b}_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (\bar{b}_{i+1,j+1} + \bar{b}_{i+1,j})y_{i+1,j} + \bar{b}_{i+1,j}y_{i+1,j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(\bar{b}_{i,j+1}y_{i,j+1} - (\bar{b}_{i,j+1} + \bar{b}_{i,j})y_{i,j} + \bar{b}_{i,j}y_{i,j-1}) + \\ & + \sigma(\bar{b}_{i-1,j+1}y_{i-1,j+1} - (\bar{b}_{i-1,j+1} + \bar{b}_{i-1,j})y_{i-1,j} + \bar{b}_{i-1,j}y_{i-1,j-1})) + \\ & + \gamma(-\bar{c}_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \bar{c}_{i-1,j}(y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) + \\ & + \bar{d}_{i,j+1}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) - \bar{d}_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}))/4 = 0, \\ & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (1.42)$$

де кожен із коефіцієнтів, згідно із [190], обчислюється за формулами

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{i,j} &= ac \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), & \hat{b}_{i,j} &= bd \left(\frac{\kappa_{i,j}^{11} \kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21} \kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), & \hat{c}_{i,j} &= ac \left(\frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), & \hat{d}_{i,j} &= bd \left(\frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), \\
\check{a}_{i,j} &= ac \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), & \check{b}_{i,j} &= bd \left(\frac{\kappa_{i,j}^{11} \kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21} \kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), & \check{c}_{i,j} &= ac \left(\frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), & \check{d}_{i,j} &= bd \left(\frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right); \\
ac(k_{i,j}) &= k_{i-0.5,j}, & ac(k_{i,j}) &= \frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2}, & ac(k_{i,j}) &= \frac{2k_{i,j}k_{i-1,j}}{k_{i,j} + k_{i-1,j}}; \\
bd(k_{i,j}) &= k_{i,j-0.5}, & bd(k_{i,j}) &= \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2}, & bd(k_{i,j}) &= \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Значимо, що тут $\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa_{rs}(\varphi_i, \psi_j)$.

Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов квазіортогональності (1.29) та квазіконформного інваріанта γ (1.30) залишимо без змін.

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.42), (1.7), (1.29), (1.30) в загальному випадку побудовано аналогічно до п.1.1.1.2 шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки $G_{\frac{\gamma}{2}}$ з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Відповідно в алгоритм АК внесено такі зміни:

- в п.5 – початкове наближення невідомої величини γ знаходимо за формулою (1.30);
- в п.6 – уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо з допомогою одного кроку ітераційного методу Зейделя за формулами отриманими шляхом розв'язання (1.42) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$;
- в п.7 – нове наближення величини γ знаходимо за формулою (1.30).
- в п.8 – координати граничних вузлів підправляємо шляхом

- розв'язування системи рівнянь сформованої із (1.7), (1.29).
- в п.10 – нев'язку квазіконформності гідродинамічної сітки обчислюємо за формулою $\varepsilon_* = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$, де $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – нев'язки апроксимацій рівнянь типу Коші-Рімана визначаються за формулами (1.31).

Зауважимо, що у формулах (1.22) – (1.25), (1.30), (1.31), (1.40) коефіцієнти κ_{rs} є залежними від шуканих функцій течії та потенціалу, тобто $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(\varphi, \psi)$ ($r, s=1,2$).

Числову реалізацію описаного алгоритму розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації у випадку неоднорідних анізотропних середовищ [58] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1, G_3, G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху та умов типу Коші-Рімана (1.41).

Так, на рисунку 1.49 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв'язання задачі в області G_1

при $\kappa = \begin{pmatrix} \varphi+1 & 0.6\sqrt{\varphi\psi+1} \\ 0.4\sqrt{\varphi\psi+1} & \psi+1 \end{pmatrix}$, а параметри розрахунку подано в

таблиці 1.20. На рисунку 1.50 проілюстрована збіжність ітераційного процесу розрахунку на основі максимального значення відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 1.0001 до 2.2207 та зміну (збільшення) значення розрахункової величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.51 ($\min v_{i,j} = v_{25,11} = 0.7179$, $\max v_{i,j} = v_{0,1} = 19.5266$).

Табл. 1.20. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	594	132	118	2.2350	1.6E-1	1.4E-2
2	24×24	811	169	122	2.2207	1.3E-1	9.5E-3
3	28×28	1044	212	128	2.2024	1.2E-1	6.9E-3

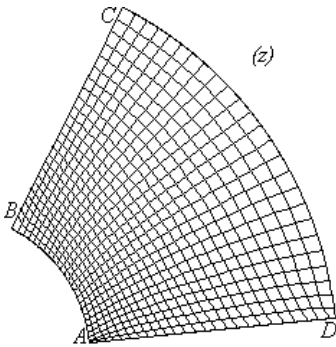


Рис. 1.49. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

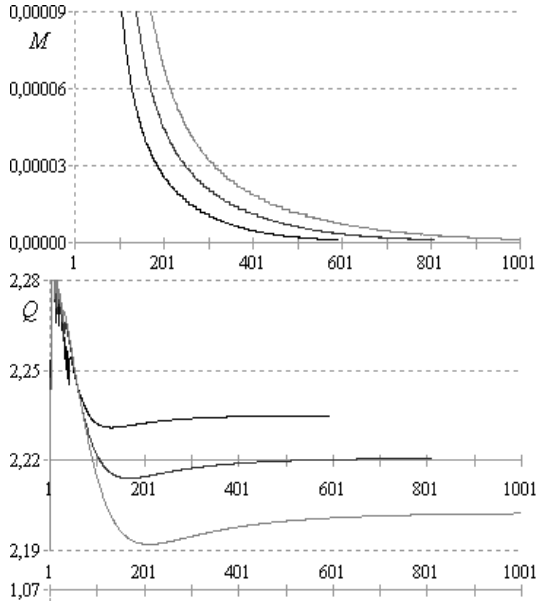


Рис. 1.50. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

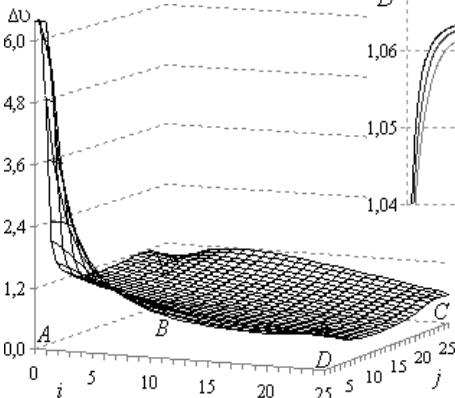


Рис. 1.51. Величина швидкості фільтрації в області G_1

Гідродинамічну сітку, побудовану в результаті розв'язання задачі в області G_3 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.5\varphi} & 0.1\psi \\ 0.2\varphi & e^{0.25\psi} \end{pmatrix}$, зображено на рисунку

1.52. Її числові розрахунки проводилися при різних значеннях параметрів розбиття (див. таблицю 1.21), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати різняться на величину порядку $O(|h|^2)$, що говорить про стійкість розробленого алгоритму. Збіжність ітераційного процесу розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.53. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 0.5538 до 0.6934 та зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.54 ($0.0091 = v_{12,25} \leq v_{i,j} \leq v_{25,0} = 0.1596$).

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки (див. рис. 1.55) в області G_4 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.25\psi} & 0.2\psi \\ -0.25\varphi & e^{0.5\varphi} \end{pmatrix}$ подано в таблиці 1.22. На рисунку 1.56 зображено графіки збіжності максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення фільтраційної витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 0.7451 до 0.8950 та зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.57. У цьому випадку найменше розрахункове значення величини швидкості фільтрації 0.0152 досягається у вузлі $(i,j)=(6,25)$, а найбільше – 0.3883 – у вузлі $(i,j)=(25,9)$.

Збіжність параметрів розрахунку (див. табл. 1.23)

Табл. 1.21. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	620	271	81	0.6933	2.4E-1	3.4E-3
2	24×24	884	348	110	0.6943	2.2E-1	2.4E-3
3	28×28	1174	428	144	0.6951	2.0E-1	1.8E-3

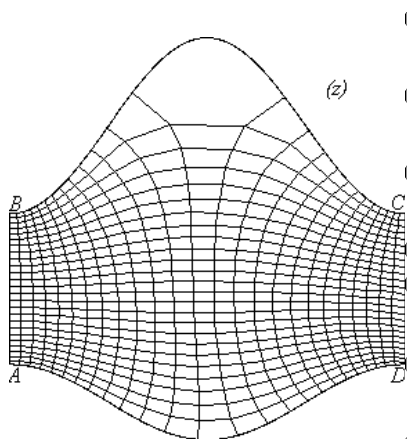


Рис. 1.52. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

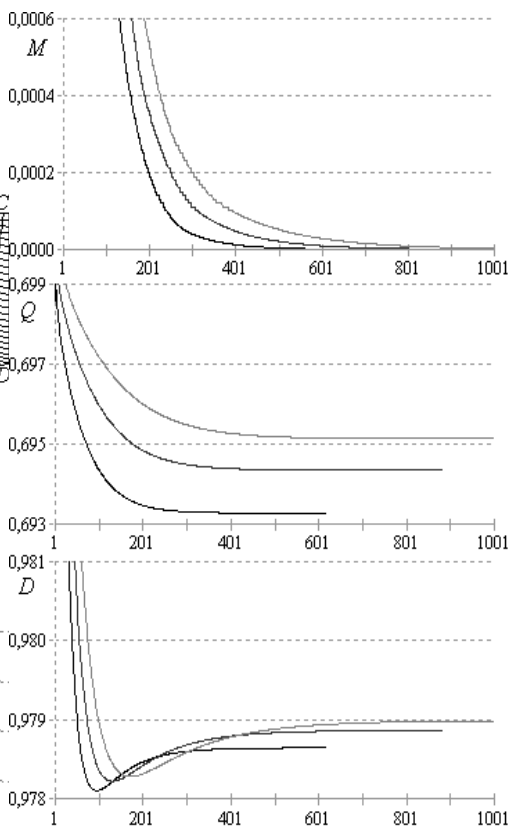


Рис. 1.53. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

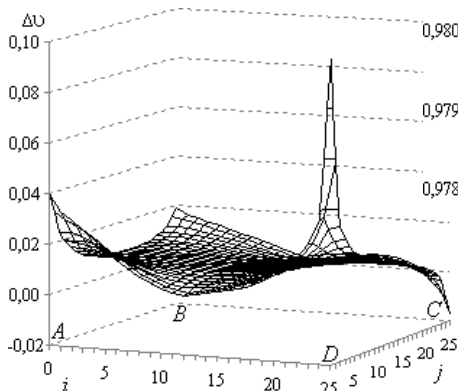


Рис. 1.54. Величина швидкості фільтрації в області G_3

Табл. 1.22. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	655	398	391	0.8966	3.1E-1	4.1E-3
2	24 × 24	894	192	519	0.8950	2.9E-1	2.9E-3
3	28 × 28	1163	676	656	0.8939	2.7E-1	2.1E-3

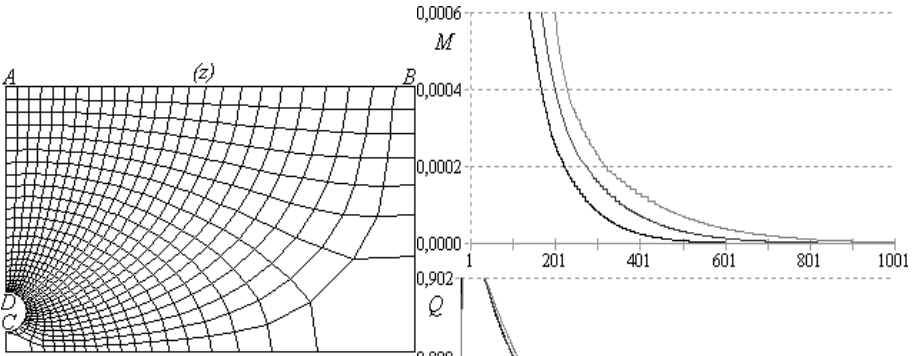


Рис. 1.55. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

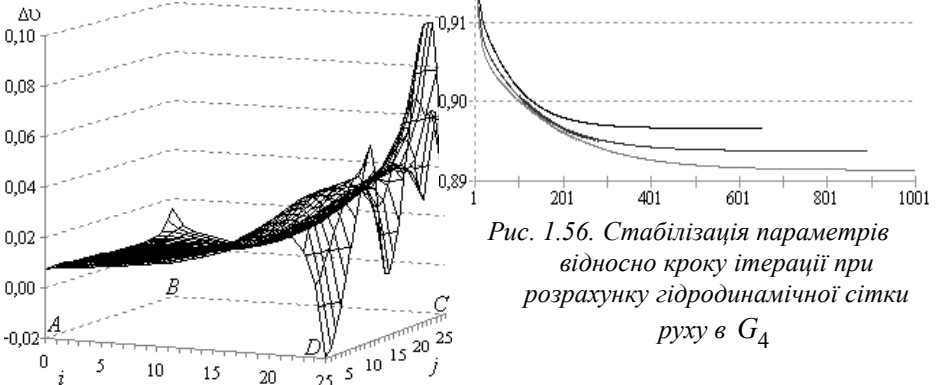


Рис. 1.56. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Рис. 1.57. Величина швидкості фільтрації в області G_4

гідродинамічної сітки в області G_5 при $\kappa = \begin{pmatrix} \varphi+1 & 0.6\sqrt{\varphi\psi+1} \\ 0.4\sqrt{\varphi\psi+1} & \psi+1 \end{pmatrix}$

(див. рис. 1.58) проілюстровано на рисунку 1.59. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 1.1692 до 1.4576 та зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.60. Найменша розрахункова величина швидкості фільтрації 0.0961 досягається у вузлі $(i, j) = (24, 0)$, а найбільша – 7.9882 – у вузлі $(i, j) = (2, 2)$.

Розглянемо тепер нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(x, y) & \kappa_{12}(x, y) \\ \kappa_{21}(x, y) & \kappa_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \text{ де } \kappa_{rs}(x, y) \ (r, s=1,2) \text{ – функції, що}$$

характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій [58, 74]. Тоді задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку (1.40) при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\kappa_{11}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa_{21}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.44)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.44) є системою еліптичного типу в області G_z при виконанні умов типу (1.22).

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо умови (1.23). Косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad}\varphi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою (1.24), а відповідні умови квазіортогональності мають вигляд (1.25).

Табл. 1.23. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	821	679	393	1.4560	1.3E-1	7.1E-3
2	24×24	943	768	216	1.4576	1.2E-1	5.0E-3
3	28×28	1182	802	269	1.4593	1.0E-1	3.7E-3

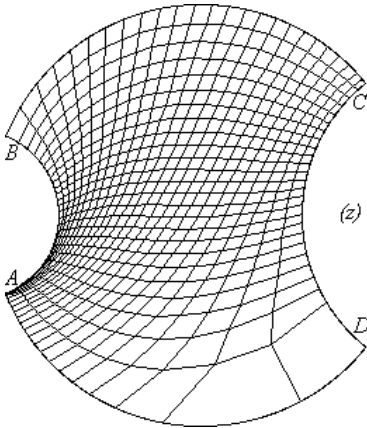


Рис. 1.58. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

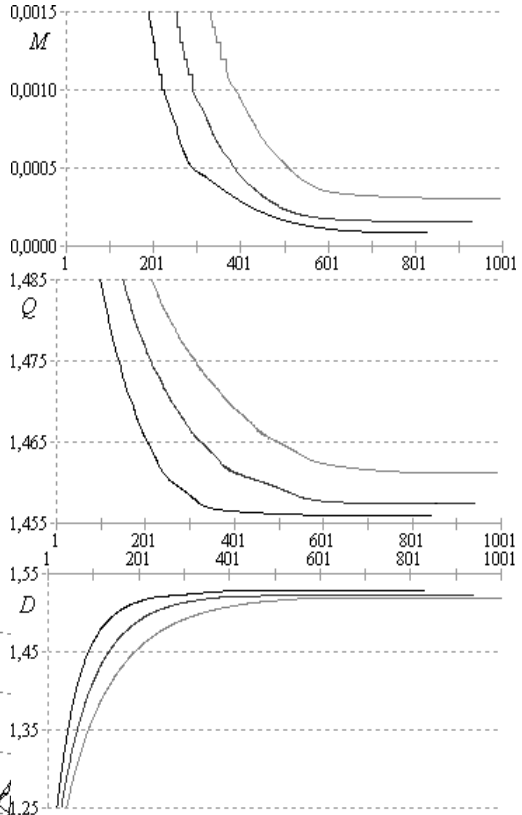


Рис. 1.59. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

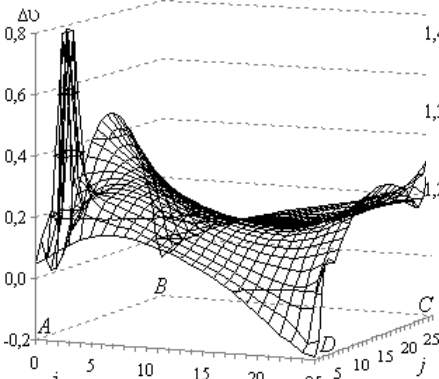


Рис. 1.60. Величина швидкості фільтрації в області G_5

Таким чином, ми маємо суттєво нелінійну обернену задачу, де подібність “паралелограмів в малому” порушується.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_{ω} на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.40) у рівномірній сітковій області G_{ω}^{γ} , як і раніше, апроксимуємо різницевиими рівняннями (1.42), де кожен із коефіцієнтів обчислюємо за формулами (1.43) лише з тою відмінністю, що $\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa_{rs}(x_{i,j}, y_{i,j}) = \kappa_{rs}(x(\phi_i, \psi_j), y(\phi_i, \psi_j))$. Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов квазіортогональності (1.29) та квазіконформний інваріант γ (1.30) залишимо без змін.

Алгоритм наближення розв’язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.42), (1.7), (1.29), (1.30) в загальному випадку побудовано аналогічно як і у попередньому випадку, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^{γ} з використанням ідей методу блочної ітерації [103]. Відмінністю тут є те, що у формулах (1.22) – (1.25), (1.30), (1.31), (1.40) коефіцієнти κ_{rs} є залежними від координат фізичної області, тобто $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y)$ ($r, s = 1, 2$). Тому в алгоритмі наближення розв’язку задачі, послідовні наближення тензора провідності $\kappa_{rs}(x, y)$ на k -кроці у (i, j) -вузлах сітки G_{ω}^{γ} знаходяться лише після наближень відповідних значень координат $x_{i,j}, y_{i,j}$, а саме $\kappa_{i,j}^{rs(k)} = \kappa_{rs}(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$.

Числову реалізацію описаного алгоритму розв’язування обернених крайових задач теорії фільтрації у цьому випадку неоднорідних анізотропних середовищ [7] здійснено за умов

описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1 , G_3 , G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \phi$ та умов типу Коші-Рімана (1.44).

Так, на рисунку 1.61 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв'язання задачі в області G_1

при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.1x} & 0.1x^2 \\ 0.2x & 0.1(x+10) \end{pmatrix}$. Числові розрахунки проводилися при

різних значеннях параметрів розбиття (див. таблицю 1.24), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної

витрати різняться на величину порядку $O(|h|^2)$, що підтверджує

стійкість розробленого алгоритму, а його збіжність проілюстрована на рисунку 1.62. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 1.0001 до 1.2862 та зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.63 ($0.3242 = v_{25,25} \leq v_{i,j} \leq v_{25,0} = 48.0685$).

Розв'язування задачі в області G_3 проводилося при

$\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.01y} & 0.005y \\ 0.005x & e^{0.01x} \end{pmatrix}$ та різних параметрах розбиття області

комплексного потенціалу (див. таблицю 1.25). Розрахункову гідродинамічну сітку зображено на рисунку 1.64, а збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення фільтраційної витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації проілюстровано на рисунку 1.65. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.6320 та

Табл. 1.24. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	933	807	701	1.2846	4.1E-2	6.0E-3
2	24×24	1060	932	743	1.2862	3.2E-2	4.3E-3
3	28×28	1182	1021	830	1.2880	2.3E-2	3.2E-3

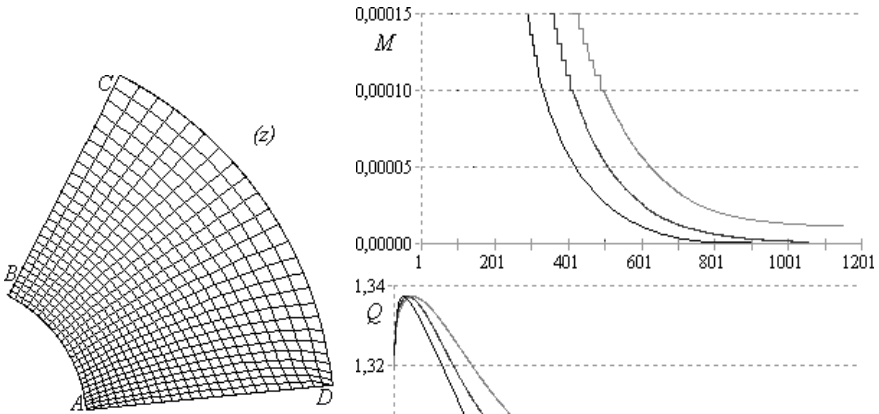


Рис. 1.61. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

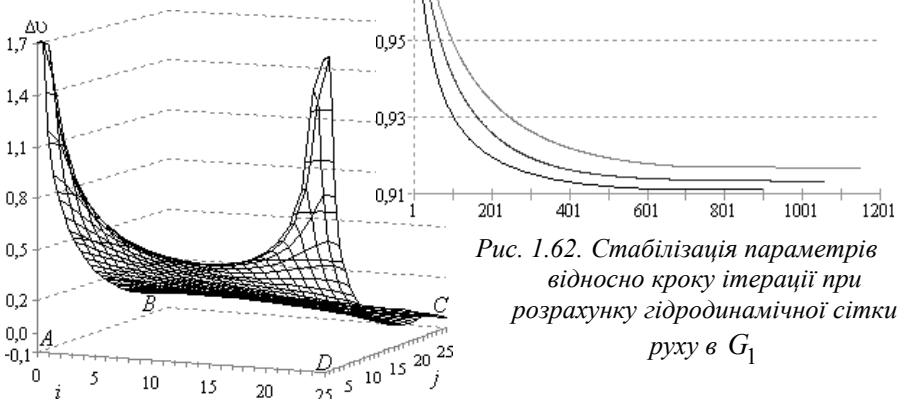


Рис. 1.62. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Рис. 1.63. Величина швидкості фільтрації в області G_1

Табл. 1.25. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	1294	492	701	0.6316	2.4E-1	3.2E-3
2	24 × 24	1683	600	885	0.6320	2.3E-1	2.2E-3
3	28 × 28	2138	711	1089	0.6323	2.1E-1	1.7E-3

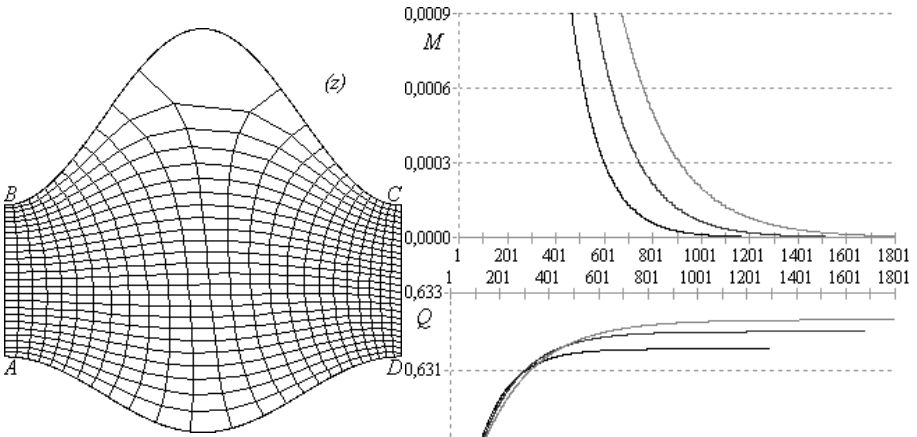


Рис. 1.64. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

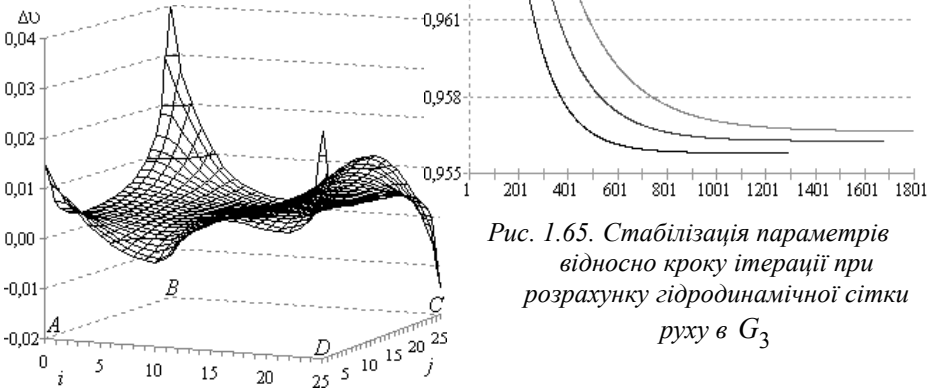


Рис. 1.65. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Рис. 1.66. Величина швидкості фільтрації в області G_3

зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.66. У цьому випадку найменше розрахункове значення величини швидкості руху 0.0085 досягається у вузлі $(i, j) = (12, 25)$, а найбільше – 0.1128 – у вузлі $(i, j) = (0, 25)$.

Збіжність параметрів розрахунку (див. табл. 1.26) гідродинамічної сітки в області G_4 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.01x} & 0.01x \\ 0.005x & e^{0.02x} \end{pmatrix}$ (див.

рис. 1.67) проілюстровано на рисунку 1.68. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 0.7451 до 0.8096 та зміну величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.69. У цьому випадку $0.0165 = v_{6,25} \leq v_{i,j} \leq v_{25,14} = 0.3926$.

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області G_5 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.2x} & 0.1x \\ 0.1x & 0.1(x+10) \end{pmatrix}$ (див. рис. 1.70) подано у таблиці 1.27.

Збіжність розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.71, а зміну величини швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.72, де найменше розрахункове значення величини швидкості руху 0.2275 досягається у вузлі $(i, j) = (20, 0)$, а найбільше – 0.9523 – у вузлі $(i, j) = (0, 13)$. Врахування впливу цього коефіцієнта фільтрації викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.5692.

1.2.2. Моделювання процесів фільтрації в ізотропних середовищах схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу

Розглянемо нелінійні стаціонарні процеси фільтрації в середовищі схильному до деформацій під дією градієнтів

Табл. 1.26. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	715	440	503	0.8102	3.6E-1	3.8E-3
2	24×24	976	588	673	0.8096	3.3E-1	2.6E-3
3	28×28	1267	751	861	0.8092	3.1E-1	2.0E-3

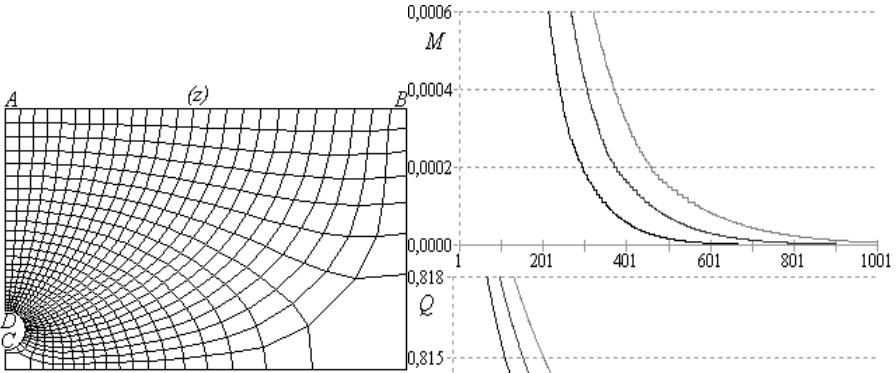


Рис. 1.67. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

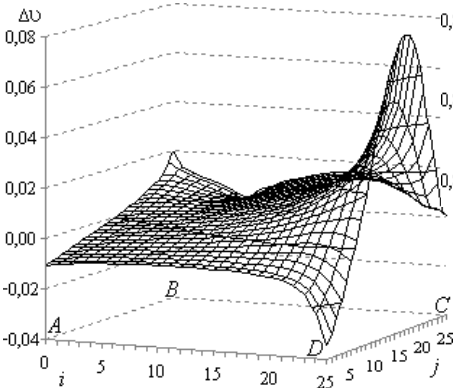


Рис. 1.69. Величина швидкості фільтрації в області G_4

Рис. 1.68. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Табл. 1.27. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	805	423	309	1.5676	1.0E-1	7.9E-3
2	24×24	1079	523	397	1.5692	9.4E-2	5.5E-3
3	28×28	1375	654	549	1.5703	8.4E-2	4.1E-3

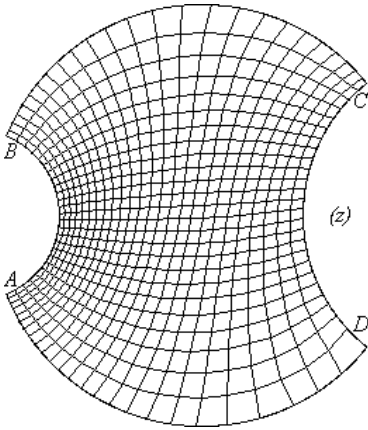


Рис. 1.70. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

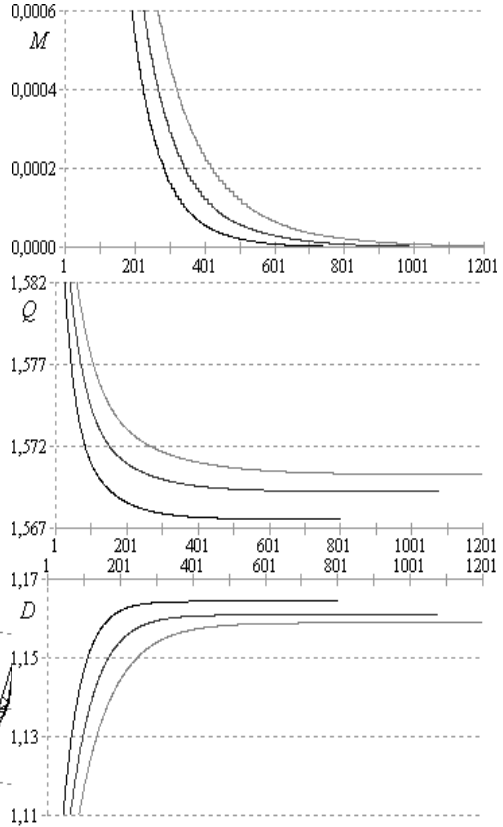


Рис. 1.71. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

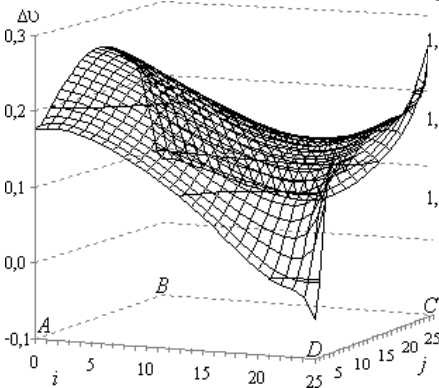


Рис. 1.72. Величина швидкості фільтрації в області G_5

квазіпотенціалу, тобто, коефіцієнт провідності κ є залежним від градієнту потенціалу.

Нехай коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa = \kappa(\text{grad } \varphi) = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$, де $\kappa(\varphi_x, \varphi_y)$ – обмежена неперервно диференційована в області G_z функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації [57]. Тоді задача з допомогою відповідного квазіконформного відображення області G_z на область G_ω , якобіан якого $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi}$,

зводиться до розв’язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.46)$$

на границі ∂G_ω області G_ω .

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.45) у рівномірній сітковій області G_ω' апроксимуємо різницеvim оператором (1.5), де триточкові оператори $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ (1.4) замінимо однорідними консервативними різницеvim схемами (1.34), (1.35), в яких $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$,

$$\kappa_{i,j} = \kappa \left(\frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}}, \frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right), \quad (1.47)$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})$.

Тому, рівняння (1.45) (аналог рівняння Лапласа) для спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінимо, згідно з схемою (1.5), (1.34), (1.35) різницевиими рівняннями (1.36). Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов ортогональності (1.8) та квазіконформного інваріанта γ (1.37) залишено без змін.

Алгоритм наближення розв'язку цієї оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.36), (1.7), (1.8), (1.37) побудовано аналогічно як і у розглядуваних раніше випадках, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_{Σ}^{γ} з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Зокрема, в алгоритм АК внесено зміни описані в п.1.2.1.1, з тою лише відмінністю, що коефіцієнти $\kappa_{i,j}$ визначатимуться за формулою (1.47).

Числову реалізацію методу розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації в ізотропних середовищах схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1 , G_3 , G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху та умов типу Коші-Рімана (1.46).

Розрахунок гідродинамічної сітки руху в області G_1 проводиться при $\kappa(\text{grad}\varphi) = e^{\varphi_x + \varphi_y}$, де мінімальне значення коефіцієнта фільтрації становить 1м/доб, а максимальне – 3.996м/доб. На рисунку 1.73 зображено розподіл швидкості фільтрації вздовж крайніх і середньої ліній течії та еквіпотенціальних ліній до (штрихові) і після (суцільні) деформації.

Числові розрахунки проводилися при різних значеннях параметрів розбиття (див. таблицю 1.28), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати різняться на величину порядку $O(|h|^2)$, що підтверджує стійкість розробленого алгоритму, а його збіжність проілюстрована на рисунку 1.74. Таким чином, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом привело до збільшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 2.2306.

$$\min v_{i,j} = v_{25,0} = 0.6839$$

$$\max v_{i,j} = v_{0,17} = 2.3890$$

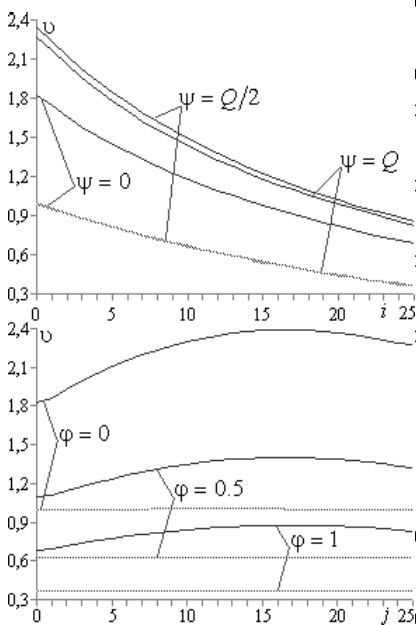


Рис. 1.73. Розподіл швидкості фільтрації в області G_1 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

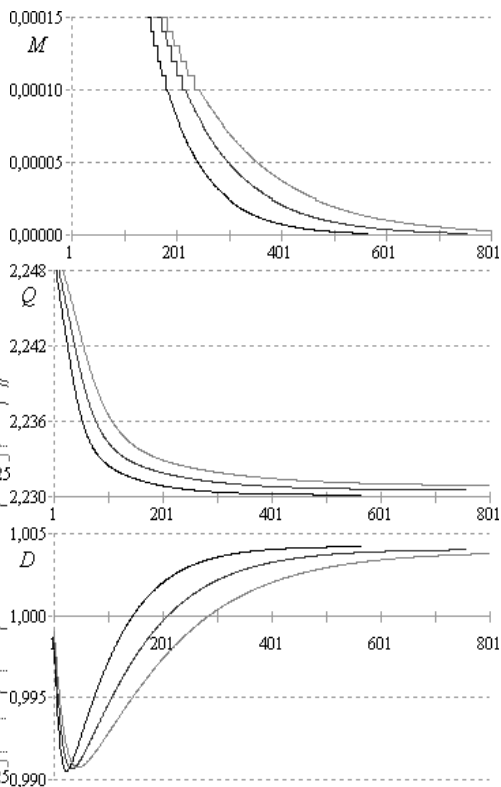


Рис. 1.74. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Табл. 1.28. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	566	385	491	2.2302	4.2E-3	1.0E-3
2	24×24	758	496	649	2.2306	4.0E-3	9.6E-4
3	28×28	975	613	40	2.2309	3.9E-3	7.1E-4

Результати розв'язування задачі в області G_3 при $\kappa(\text{grad}\varphi) = \varphi_x + \varphi_y + 1$ ($\min \kappa_{i,j} = 0.997\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 1.082\text{м/доб}$) подано у таблиці 1.29. На рисунку 1.75 зображено розподіл швидкості фільтрації вздовж деяких ліній до (штрихові) і після (суцільні) фільтраційної деформації середовища. На рисунку 1.76 проілюстровано збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації. Зазначимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом зумовило збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5719.

Розподіл швидкості фільтрації вздовж деяких ліній течії та еквіпотенціальних ліній до (штрихові) і після (суцільні) фільтраційної деформації в області G_4 при $\kappa(\text{grad}\varphi) = \varphi_y + 2e^{0.01\varphi_x}$ ($\min \kappa_{i,j} = 1.701\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 2.111\text{м/доб}$) подано на рисунку 1.77. На рисунку 1.78 подано графіки збіжності величин M, Q, D відносно кроку ітерації, а параметри розрахунку подано у таблиці

Табл. 1.29. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	827	14	65	0.5714	1.2E-3	3.0E-3
2	24×24	1117	18	87	0.5719	7.6E-4	2.1E-3
3	28×28	1427	20	110	0.5722	3.1E-4	1.6E-3

1.30. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним законом призвело до збільшення витрати Q від 0.7451 до 1.4334.

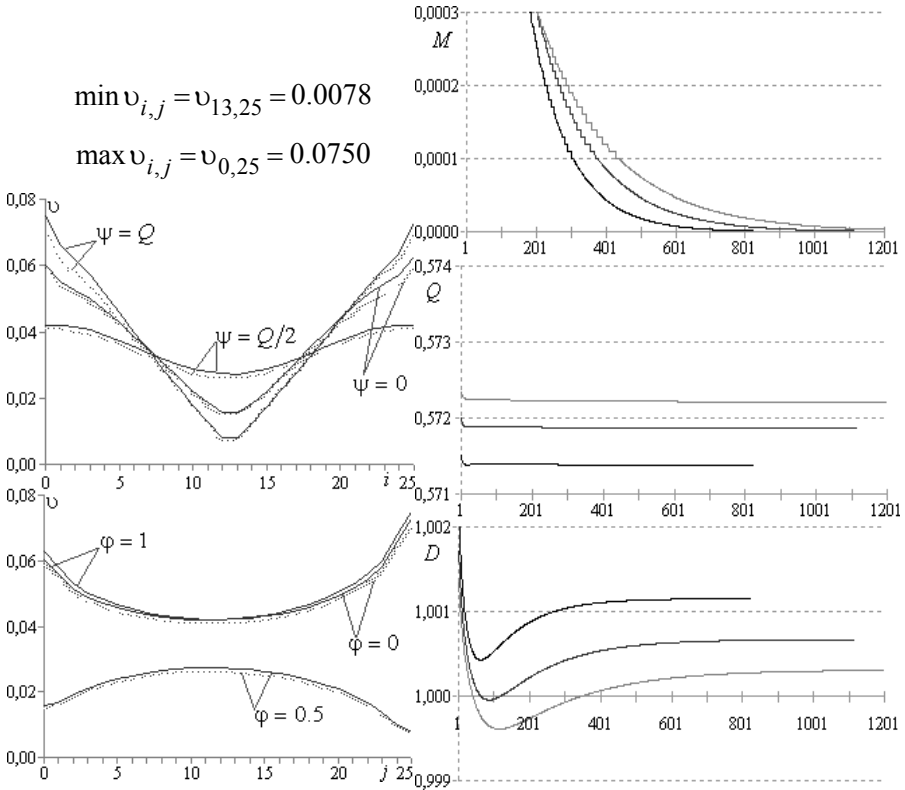


Рис. 1.75. Розподіл швидкості фільтрації в області G_3 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

Рис. 1.76. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Табл. 1.30. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	563	309	360	1.4341	7.1E-2	6.9E-3
2	24 × 24	768	412	23	1.4334	7.5E-2	4.9E-3
3	28 × 28	996	521	30	1.4329	7.7E-2	3.6E-3

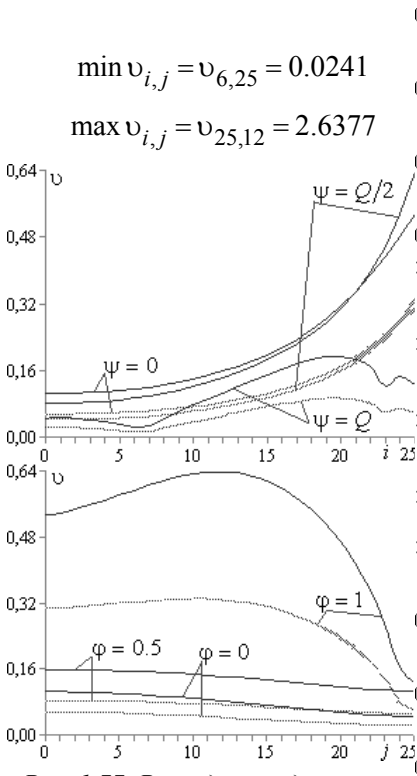


Рис. 1.77. Розподіл швидкості фільтрації в області G_4 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

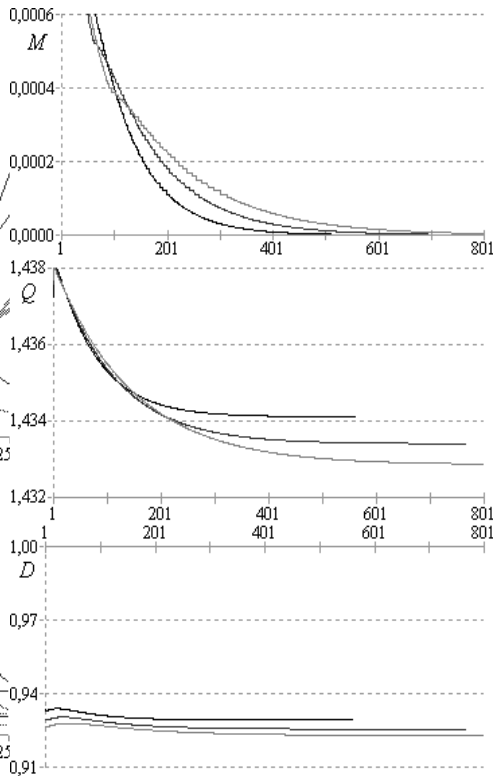


Рис. 1.78. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області G_5 при $\kappa(\text{grad}\varphi) = \varphi_x \varphi_y + 1$ ($\min \kappa_{i,j} = 0.827 \text{ м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 1.173 \text{ м/доб}$) подано у таблиці 1.31. На рисунку 1.79 зображено розподіл швидкості фільтрації до та після деформації, а на рисунку 1.80 – збіжність параметрів M , Q та D відносно кроку ітерації. Зауважимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало зменшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.1587.

Табл. 1.31. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	325	121	38	1.1573	1.2E-3	5.3E-3
2	24×24	602	7	53	1.1587	1.4E-3	3.8E-3
3	28×28	1186	695	715	1.1596	1.7E-3	2.8E-3

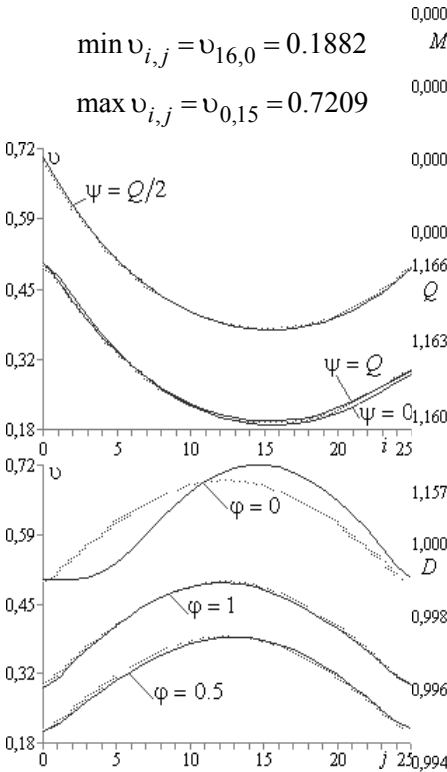


Рис. 1.79. Розподіл швидкості фільтрації в області G_5 вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

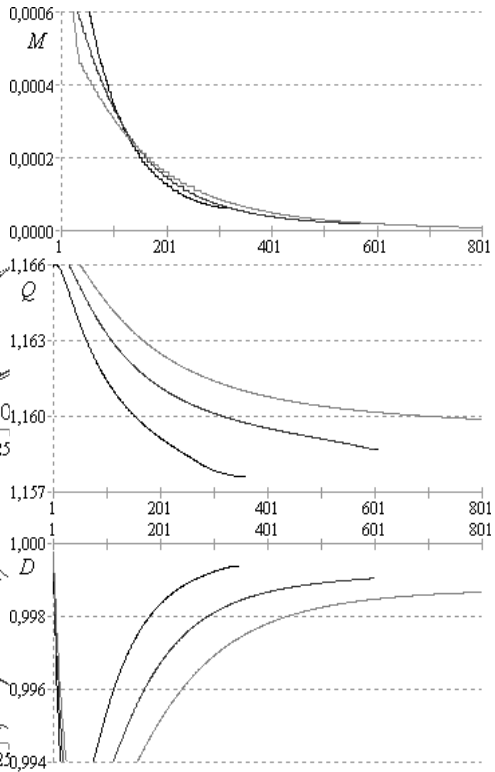


Рис. 1.80. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

Нехай тепер коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa = \kappa(|\text{grad}\varphi|) = \kappa(I)$, де $\kappa(I)$ – обмежена неперервно

диференційована в області G_z функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації [57]. Тоді задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}, \quad \kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (1.49)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Таким чином, лінійна вихідна задача переходить у суттєво нелінійну обернену до неї задачу.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.48) у рівномірній сітковій області G_ω^y апроксимовано різницеvim оператором (1.5), де триточкові оператори $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$ (1.4) замінено однорідними консервативними різницеvими схемами (1.34), (1.35), при

$$\kappa_{i,j} = \kappa \left(\frac{2\Delta\phi}{J_{i,j}} \sqrt{\left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1} \right)^2 + \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1} \right)^2} \right), \quad (1.50)$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})$,
 $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Тому, рівняння (1.48) (аналог рівняння Лапласа) для

спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінено, згідно з схемою (1.5), (1.34), (1.35) різницевиими рівняннями (1.36). Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов ортогональності (1.8) та квазіконформного інваріанта γ (1.37) залишено без змін.

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.36), (1.7), (1.8), (1.37) побудовано аналогічно як і у попередньому випадку, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Відмінністю тут є лише те, що коефіцієнти $\kappa_{i,j}$ визначаються за формулою (1.50).

Числово реалізацію алгоритму розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації в ізотропних середовищах, що деформуються під впливом градієнтів потенціалу [57] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1 , G_3 , G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху та умов типу Коші-Рімана (1.49).

Числові розрахунки гідродинамічної сітки руху в області G_1 проводилися при $\kappa(\|\text{grad}\varphi\|) = e^{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}$ ($\min \kappa_{i,j} = 1.451\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 2.735\text{м/доб}$), що привело до зміни величини швидкості фільтрації, яку зображено на рисунку 1.81 вздовж крайніх і середньої ліній течії та еквіпотенціальних ліній. Отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати (див. таблицю 1.32) майже однакові, що підтверджує стійкість розробленого алгоритму, а його збіжність проілюстровано на

рисунок 1.82. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення фільтраційної витрати Q від 1.0001 до 1.8435.

Табл. 1.32. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	299	235	161	1.8439	8.4E-5	9.9E-3
2	24×24	400	310	193	1.8435	5.7E-5	7.0E-3
3	28×28	512	392	220	1.8432	4.0E-5	5.2E-3

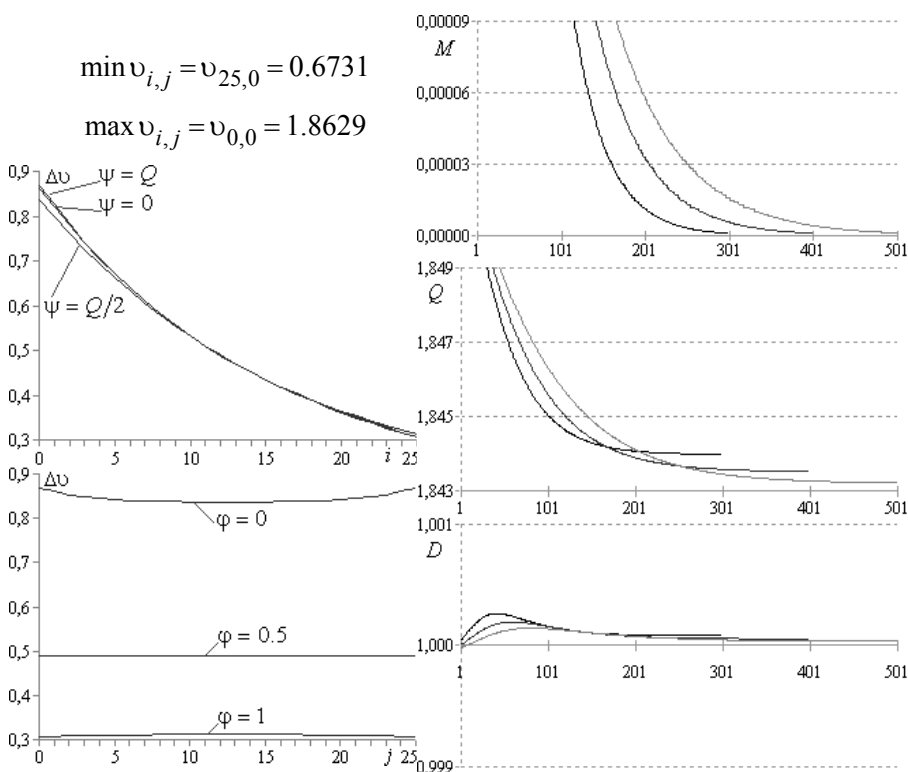


Рис. 1.81. Розподіл зміни величини швидкості фільтрації вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до i після деформації

Рис. 1.82. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Розв'язування задачі в області G_3 проводилося при коефіцієнті $\kappa(|\text{grad}\varphi|) = 1 + 0.2\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ ($\min \kappa_{i,j} = 1.002\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 1.014\text{м/доб}$), результати якого подано у таблиці 1.33. Зміну швидкості фільтрації, яка при цьому виникає, зображено на рисунку 1.83. На рисунку 1.84 проілюстровано збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно

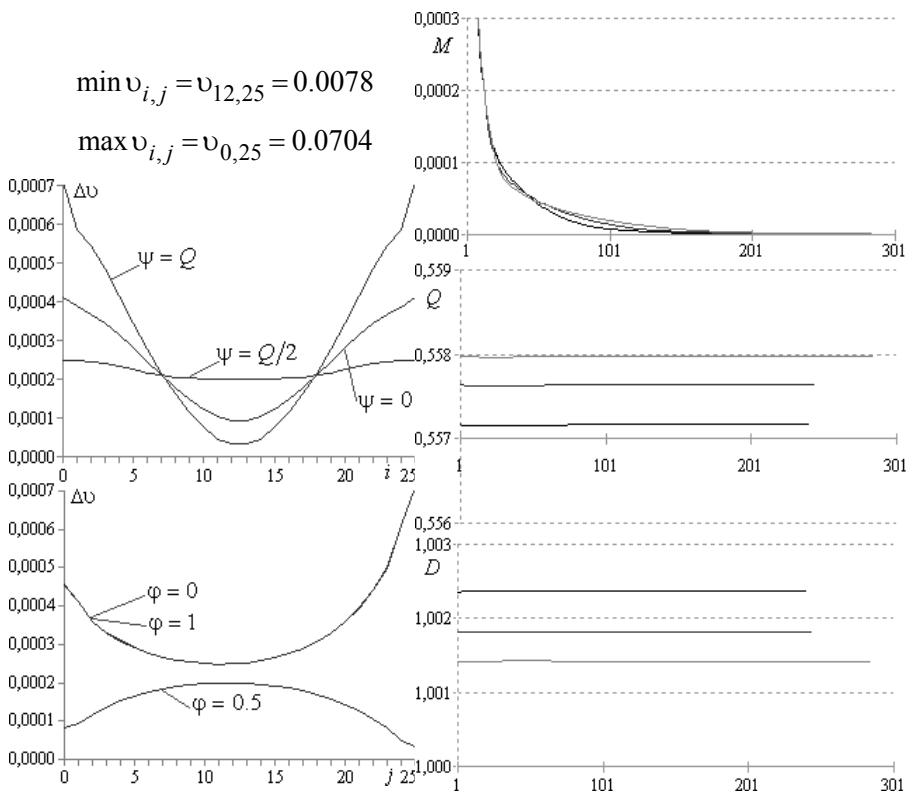


Рис. 1.83. Розподіл зміни величини швидкості фільтрації вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

Рис. 1.84. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Табл. 1.33. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	241	6	6	0.5572	2.4E-3	3.0E-3
2	24 × 24	245	6	2	0.5576	1.8E-3	2.1E-3
3	28 × 28	285	9	7	0.5580	1.4E-3	1.6E-3

кроку ітерації. Зазначимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом зумовило збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5576.

Зміну величини швидкості фільтрації, яка виникає в області G_4 при $\kappa(|\text{grad}\phi|) = e^{2\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}$ ($\min \kappa_{i,j} = 1.031\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 1.819\text{м/доб}$), зображено на рисунку 1.85 вздовж окремих ліній течії та екіпотенціальних ліній. Збіжність розробленого алгоритму у цьому випадку проілюстровано на рисунку 1.86 при різних значеннях параметрів розбиття (табл. 1.34). Отже, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом призвело до збільшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.9044.

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області G_5 при $\kappa(|\text{grad}\phi|) = \phi_x^2 + \phi_y^2 + 2$ ($\min \kappa_{i,j} = 2.041\text{м/доб}$, $\max \kappa_{i,j} = 2.427\text{м/доб}$) подано у таблиці 1.35. Зміну швидкості

Табл. 1.34. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	532	46	405	0.9053	5.1E-2	4.1E-3
2	24 × 24	722	71	12	0.9044	5.6E-2	2.9E-3
3	28 × 28	938	103	17	0.9038	5.9E-2	2.2E-3

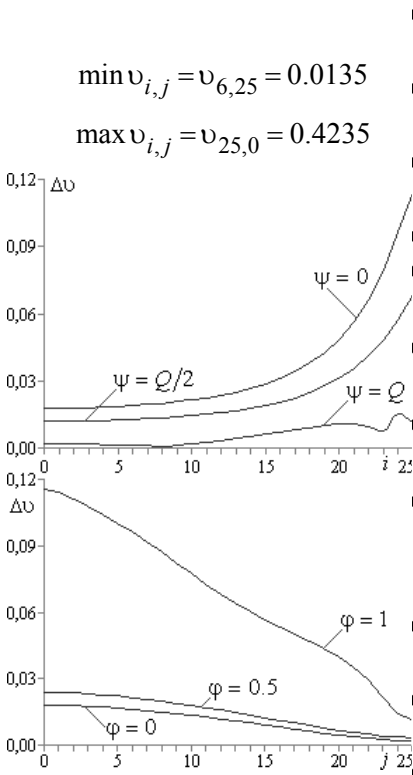


Рис. 1.85. Розподіл зміни величини швидкості фільтрації вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

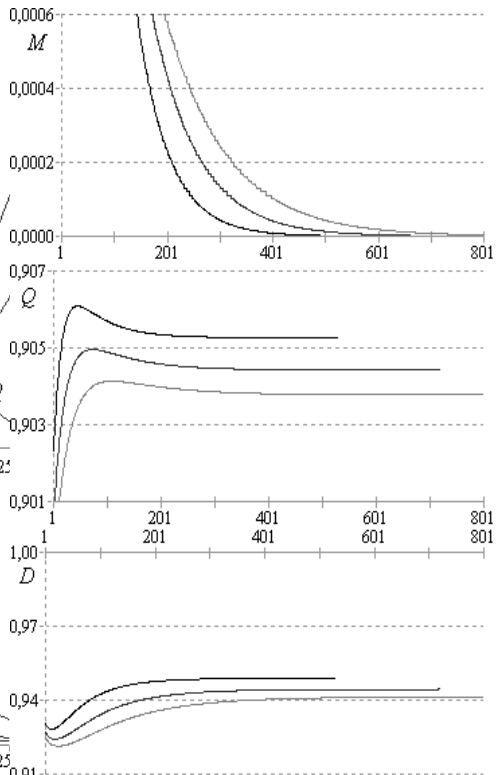


Рис. 1.86. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Табл. 1.35. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ϵ_*	$O(h ^2)$
1	20×20	448	162	1	2.5143	$2.7E-4$	$1.7E-2$
2	24×24	580	181	1	2.5149	$1.9E-4$	$1.2E-2$
3	28×28	721	193	1	2.5152	$1.5E-4$	$8.7E-3$

фільтрації, що при цьому виникає, зображено на рисунку 1.87 вздовж деяких ліній. На рисунку 1.88 проілюстровано збіжність параметрів M , Q та D відносно кроку ітерації. Зауважимо, що

врахування впливу коефіцієнта фільтрації за цим законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 2.5149.

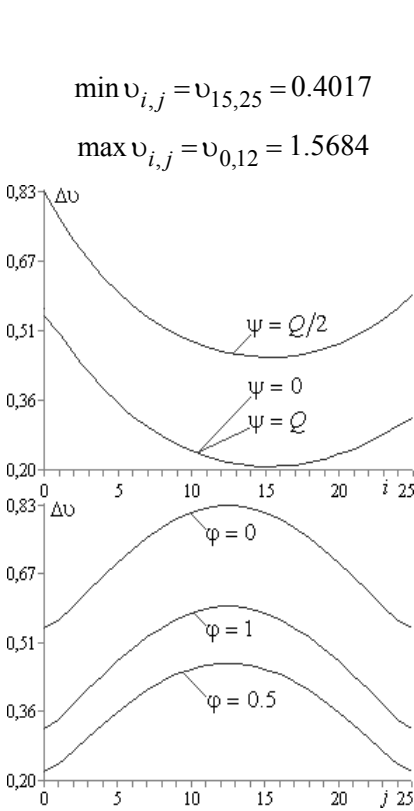


Рис. 1.87. Розподіл зміни величини швидкості фільтрації вздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній до і після деформації

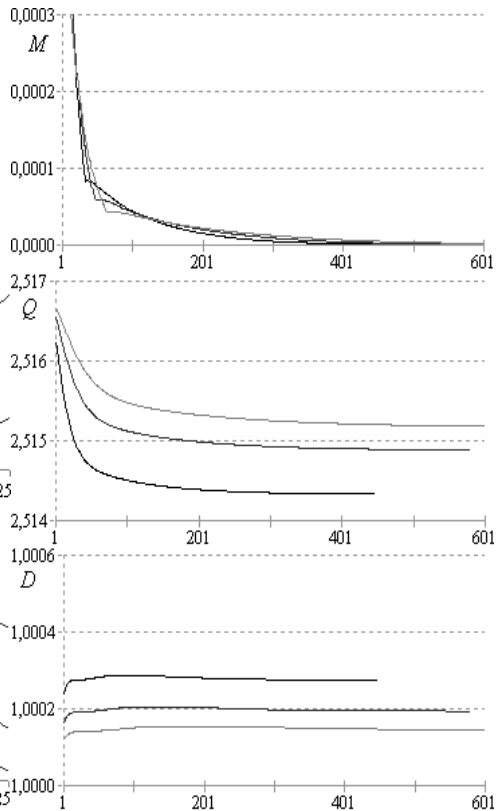


Рис. 1.88. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

1.2.3. Моделювання фільтраційних деформацій анізотропного середовища

Розглянемо нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності k визначається залежністю

$\kappa = \kappa(\text{grad } \varphi) = \begin{pmatrix} \kappa(\varphi_x) \\ \kappa(\varphi_y) \end{pmatrix}$, де $\kappa(\varphi_x), \kappa(\varphi_y)$ – обмежені неперервно

диференційовані в області G_z функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій [132]. Тоді задача з допомогою відповідного квазіконформного відображення області G_z на область G_ω , зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (1.52)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.51) є системою еліптичного типу в області G_z при виконанні умови $\kappa(\varphi_x)\kappa(\varphi_y) > 0$ [147].

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо умови (1.23), де $\kappa_{11} = \kappa(\varphi_x)$, $\kappa_{22} = \kappa(\varphi_y)$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$. Косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad } \varphi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою (1.24), а відповідні умови квазіортогональності мають вигляд (1.25).

Таким чином, ми маємо нелінійну пряму задачу, де, на відміну від ізотропних середовищ, у сітковій області G_z^y фігурують

малі паралелограми з порушеною їх подібністю в малому.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z , рівняння (1.51) у рівномірній сітковій області G_ω^y апроксимуємо різницеvim оператором (1.5) з однорідними консервативними різницеvими схемами (1.34), (1.35) для $\Lambda_1 u_j$ та $\Lambda_2 u_i$, де

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j} &= \kappa \left(\frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right) \text{ для коефіцієнтів } a_{i,j}, \\ \kappa_{i,j} &= \kappa \left(\frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}} \right) \text{ для коефіцієнтів } b_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Тому, рівняння (1.51) (аналог рівняння Лапласа) для спряжених гармонічних функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ замінено, згідно з схемою (1.5), (1.34), (1.35) різницеvими рівняннями (1.36). Різницеvі аналоги крайових умов (1.7), умов квазіортогональності (1.29) та квазіконформний інваріант γ (1.30) залишено без змін.

Алгоритм наближення розв'язку цієї оберненої диференціальної задачі різницеvою задачею (1.36), (1.7), (1.29), (1.30) побудовано аналогічно як і у розглядуваних раніше випадках, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^y з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Зокрема, в алгоритм АК внесено зміни описані в п.1.2.1.2, з тою лише відмінністю, що компоненти тензора u (1.23) – (1.25), (1.29) – (1.31) $\kappa_{11} = \kappa(\varphi_x)$, $\kappa_{22} = \kappa(\varphi_y)$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$ та визначаються за (1.53).

Числово реалізацію алгоритму розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації у випадку анізотропних середовищах схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу [132] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1 , G_3 , G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху $\bar{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ та умов типу Коші-Рімана (1.52).

Так, на рисунку 1.89 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв'язання задачі в області G_1 при $\kappa(\tau) = 1 - 0.1\tau$. Числові розрахунки проводилися при різних значеннях параметрів розбиття (див. таблицю 1.36), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати практично однакові, що підтверджує стійкість розробленого алгоритму, а його збіжність проілюстрована на рисунку 1.90. Розрахункова величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.91, де $\min v_{i,j} = v_{25,1} = 0.3343$, $\max v_{i,j} = v_{0,18} = 0.9937$. Таким чином, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом привело до зменшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 0.9494.

Розв'язування задачі в області G_3 проводилося при $\kappa(\tau) = 1 + \tau$ та різних параметрах розбиття області комплексного потенціалу (див. табл. 1.37). Розрахункову гідродинамічну сітку зображено на рисунку 1.92, а збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації – на рисунку 1.93. На рисунку 1.94 зображено величину швидкості фільтрації, при цьому $\min v_{i,j} = v_{12,25} = 0.0079$, $\max v_{i,j} = v_{25,25} = 0.1505$. Зазначимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за

Табл. 1.36. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	509	105	428	0.9494	1.0E-4	4.3E-3
2	24×24	704	128	593	0.9494	4.6E-4	3.0E-3
3	28×28	925	149	783	0.9492	9.2E-4	2.3E-3

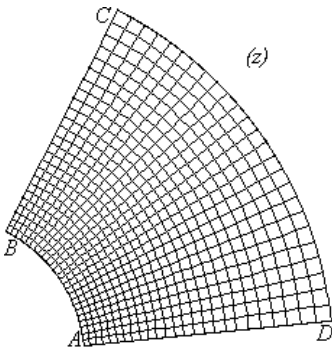


Рис. 1.89. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

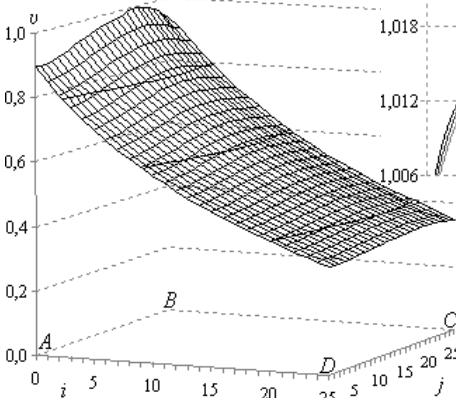


Рис. 1.91. Величина швидкості фільтрації в області G_1

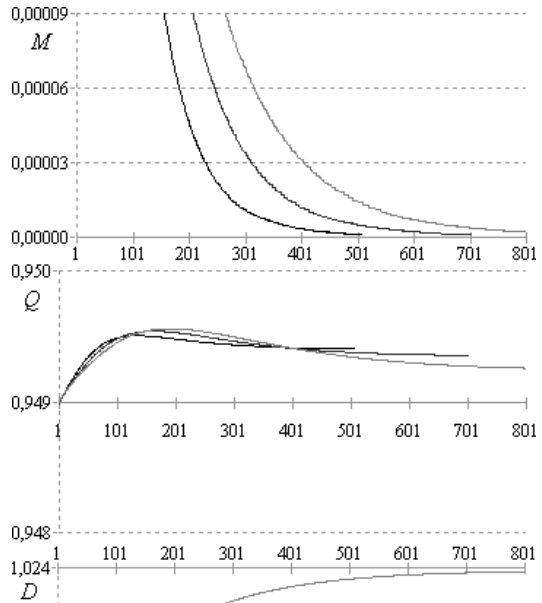


Рис. 1.90. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Табл. 1.37. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	883	163	368	0.5684	1.1E-1	3.0E-3
2	24×24	1222	246	108	0.5681	1.1E-1	2.1E-3
3	28×28	1603	349	129	0.5673	1.1E-1	1.6E-3

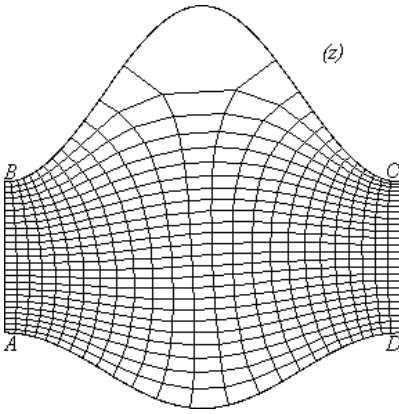


Рис. 1.92. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

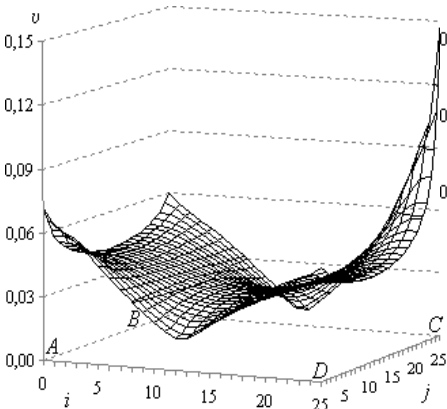


Рис. 1.94. Величина швидкості фільтрації в області G_3

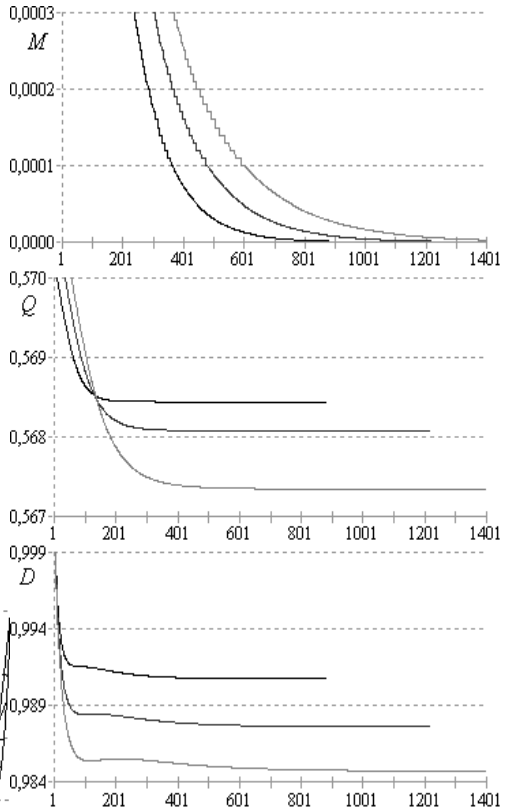


Рис. 1.93. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

вказаним вище законом зумовило збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5681.

Збіжність параметрів розрахунку (див. табл. 1.38) гідродинамічної сітки в області G_4 при $\kappa(\tau) = e^{0.1\tau}$ (див. рис. 1.95) проілюстровано на рисунку 1.96, а величину швидкості фільтрації – на рисунку 1.97, де $\min v_{i,j} = v_{6,25} = 0.0122$, $\max v_{i,j} = v_{25,11} = 0.3216$. Отже, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом призвело до зменшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.7393.

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області G_5 при $\kappa(\tau) = 10 + \sin 2\tau$ (див. рис. 1.98) подано у таблиці 1.39. Збіжність розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.199 а величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.100, де $\min v_{i,j} = v_{15,0} = 1.9909$, $\max v_{i,j} = v_{0,11} = 7.6353$. Зауважимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 12.3352.

Розглянемо нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю

$$\kappa = \kappa(\text{grad}\varphi) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(\varphi_x, \varphi_y) & \kappa_{12}(\varphi_x, \varphi_y) \\ \kappa_{21}(\varphi_x, \varphi_y) & \kappa_{22}(\varphi_x, \varphi_y) \end{pmatrix}, \text{ де } \kappa_{rs}(\varphi_x, \varphi_y) \ (r, s = 1, 2) \text{ –}$$

обмежені неперервно диференційовані в області G_z функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій. Тоді задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку (1.40) при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

Табл. 1.38. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	439	58	204	0.7394	7.0E-2	3.5E-3
2	24 × 24	592	69	250	0.7393	7.4E-2	2.5E-3
3	28 × 28	767	82	290	0.7392	7.6E-2	1.8E-3

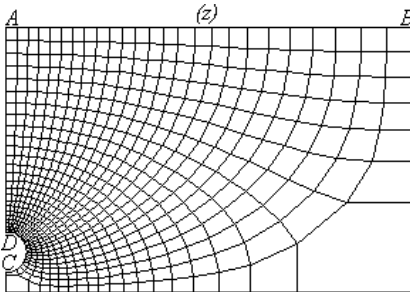


Рис. 1.95. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

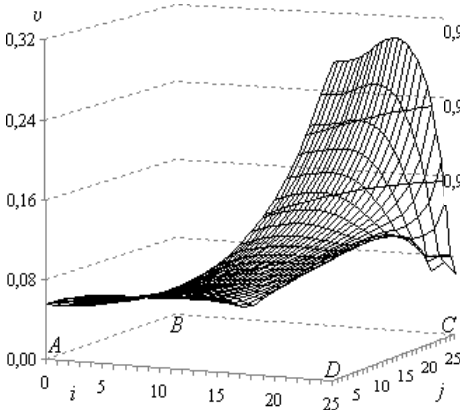


Рис. 1.97. Величина швидкості фільтрації в області G_4

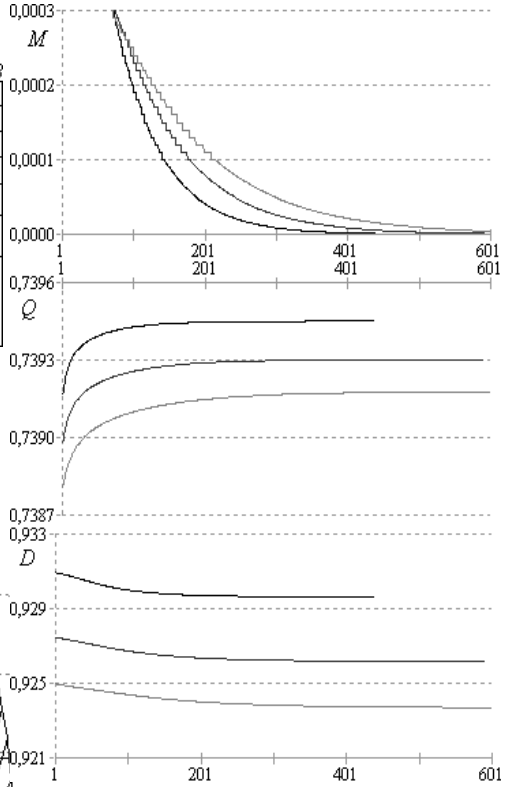


Рис. 1.96. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Табл. 1.39. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	464	203	32	12.3262	7.7E-1	3.5E-1
2	24×24	595	15	42	12.3351	6.5E-1	2.4E-1
3	28×28	733	271	51	12.3409	5.7E-1	1.8E-1

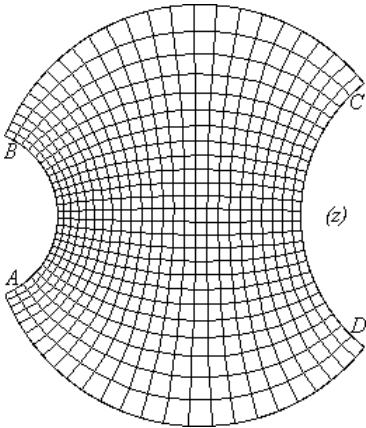


Рис. 1.98. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

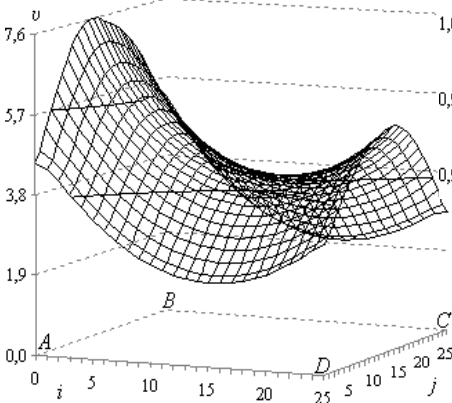


Рис. 1.100. Величина швидкості фільтрації в області G_5

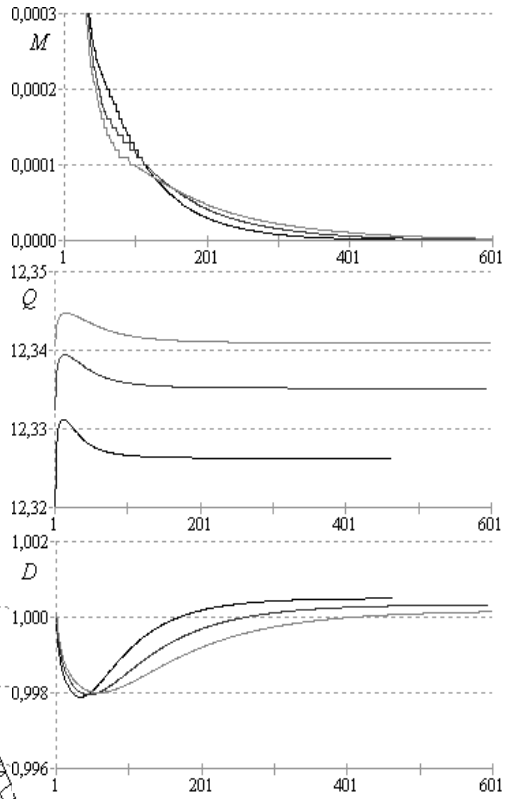


Рис. 1.99. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

$$\begin{aligned} \kappa_{11} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.54)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.54) є системою еліптичного типу в області G_z при виконанні умов типу (1.22) [147].

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо умови (1.23). Косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad}\varphi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою (1.24), а відповідні умови квазіортогональності мають вигляд (1.25).

Таким чином, ми маємо суттєво нелінійну обернену задачу, де подібність “паралелограмів в малому” порушується.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z рівняння (1.40) у рівномірній сітковій області G_ω^y апроксимовано різницевиими рівняннями (1.42), де кожен із коефіцієнтів обчислюємо за формулами (1.43). Зазначимо, що у цьому випадку

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j}^{rs} &= \kappa_{rs} \left(\frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}}, \frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right), \\ J_{i,j} &= (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\ i &= \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов квазіортогональності (1.29) та квазіконформний інваріант γ криволінійного чотирикутника G_z (1.30) залишено без змін.

Алгоритм наближення розв'язку цієї оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.42), (1.7), (1.29), (1.30) побудовано аналогічно як і у розглянутих раніше випадках, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_{ω}^{γ} з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Зокрема, в алгоритм АК внесено зміни описані в п.1.2.1.2, з тою лише відмінністю, що компоненти тензора у (1.22) – (1.25), (1.29) – (1.31), (1.9) $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(\varphi_x, \varphi_y)$ ($r, s = 1, 2$). Відповідно в алгоритмі наближення розв'язку задачі, послідовні наближення компонент тензора провідності $\kappa_{rs}(\varphi_x, \varphi_y)$ на k -кроці у (i, j) -вузлах сітки G_{ω}^{γ} знаходяться лише після наближень відповідних значень координат $x_{i,j}, y_{i,j}$ за (1.55).

Числову реалізацію алгоритму розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації у цьому випадку анізотропних середовищ схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1, G_3, G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху та умов типу Коші-Рімана.

Так, на рисунку 1.101 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв'язання задачі в області G_1 при $\kappa = \begin{pmatrix} 1 + e^{\varphi_x} & 0.1\varphi_y \\ 0.5\varphi_x & 1 + \varphi_y \end{pmatrix}$. Числові розрахунки проводилися при різних значеннях параметрів розбиття G_{ω} (див. табл. 1.40), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати різняться на величину порядку $O(|h|^2)$, що

Табл. 1.40. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	604	595	496	2.2853	1.7E-1	9.4E-3
2	24×24	816	801	55	2.2862	1.4E-1	8.0E-3
3	28×28	1050	1031	75	2.2870	1.3E-1	7.4E-3

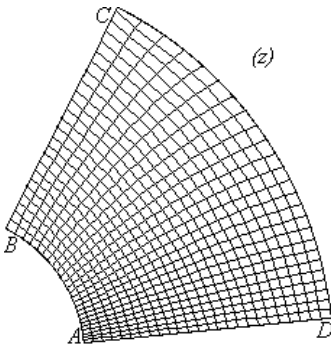


Рис. 1.101. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

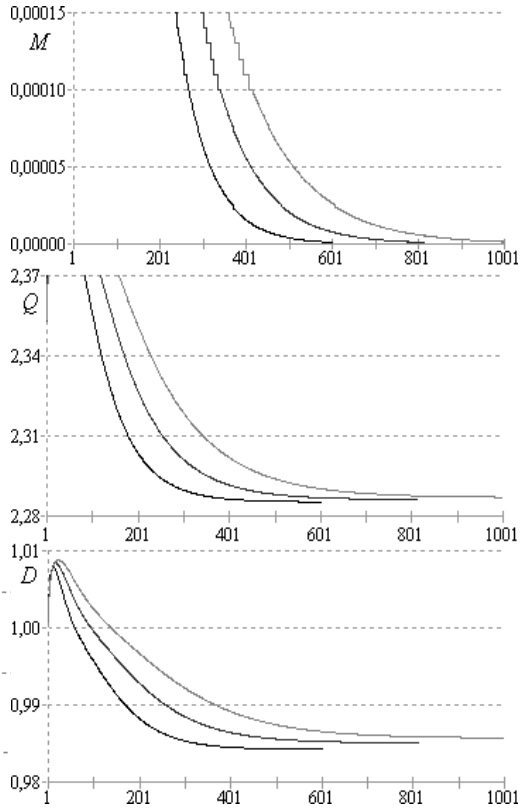


Рис. 1.102. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

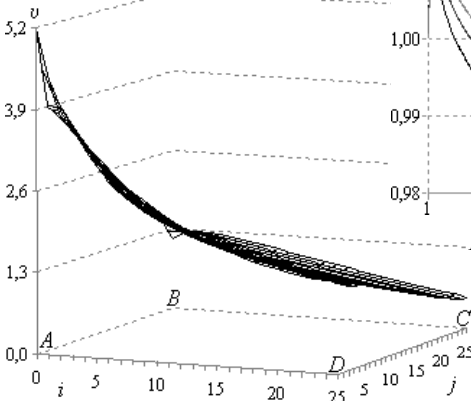


Рис. 1.103. Величина швидкості фільтрації в області G_1

підтверджує стійкість розробленого алгоритму, а його збіжність проілюстрована на рисунку 1.102. Величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.103, де $\min v_{i,j} = v_{25,25} = 0.4843$, $\max v_{i,j} = v_{0,0} = 5.2190$. Таким чином, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом привело до збільшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 2.2862.

Розв'язування задачі в області G_3 проводилося при

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_x^2 & 0.1\varphi_x\varphi_y \\ 0.5(\varphi_x + \varphi_y) & 1 + \varphi_y^2 \end{pmatrix} \text{ та різних значеннях параметрів розбиття}$$

G_ω (див. табл. 1.41). Розрахункову гідродинамічну сітку зображено на рисунку 1.104, а збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення фільтраційної витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації – на рисунку 1.105. Величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.106 ($\min v_{i,j} = v_{12,25} = 0.0078$, $\max v_{i,j} = v_{25,25} = 0.0796$). Зазначимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом зумовило збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5552.

Збіжність параметрів розрахунку (див. табл. 1.42)

$$\text{гідродинамічної сітки в області } G_4 \text{ при } \kappa = \begin{pmatrix} e^{\varphi_y} & 0.1\varphi_x \\ 0.1\varphi_y & 1 + \varphi_x \end{pmatrix} \text{ (див.}$$

рис. 1.107) проілюстровано на рисунку 1.108. На рисунку 1.109 зображено величину швидкості фільтрації, де $\min v_{i,j} = v_{6,25} = 0.0121$, $\max v_{i,j} = v_{25,14} = 0.3275$. Отже, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом призвело до зменшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.7169.

Табл. 1.41. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	896	7	39	0.5548	1.4E-1	3.0E-3
2	24 × 24	1220	10	53	0.5552	1.4E-1	2.1E-3
3	28 × 28	1575	13	69	0.5555	1.4E-1	1.6E-3

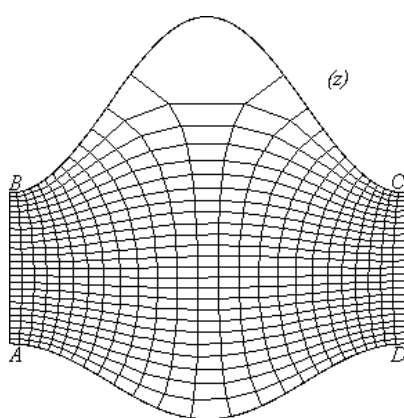


Рис. 1.104. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

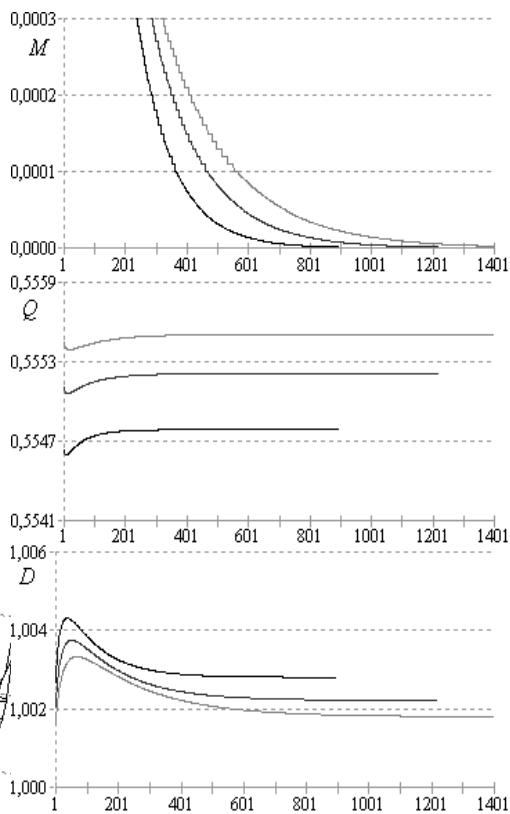


Рис. 1.105. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

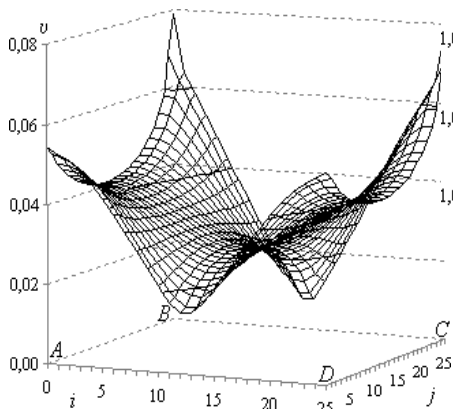


Рис. 1.106. Величина швидкості фільтрації в області G_3

Табл. 1.42. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	554	235	356	0.7176	4.4E-1	3.4E-3
2	24 × 24	752	13	469	0.7169	4.1E-1	2.4E-3
3	28 × 28	971	16	5	0.7163	3.8E-1	1.8E-3

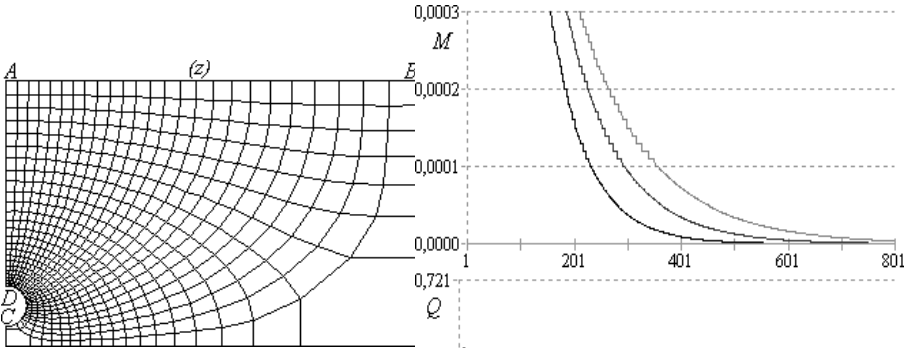


Рис. 1.107. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

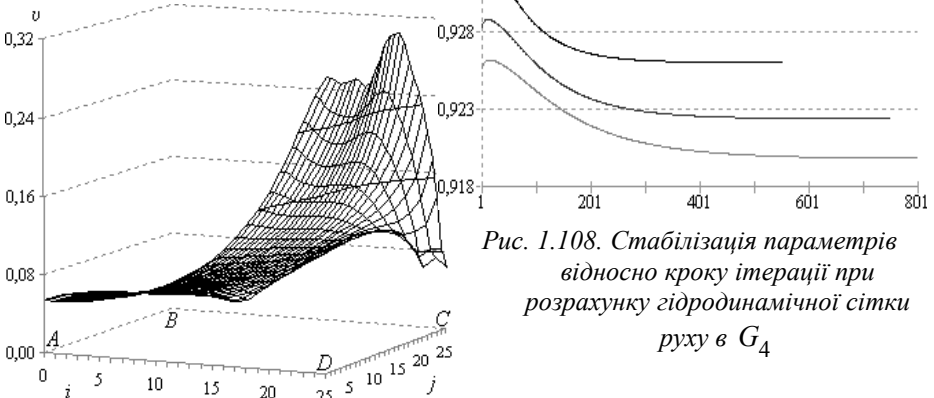


Рис. 1.108. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

Рис. 1.109. Величина швидкості фільтрації в області G_4

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області

$$G_5 \text{ при } \kappa = \begin{pmatrix} e^{0.1\varphi_y} & 0.1\varphi_x \\ 0.1\varphi_y & e^{0.1\varphi_x} \end{pmatrix} \text{ (див. рис. 1.110) подано у таблиці 1.43.}$$

Збіжність розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.111, а величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.112 ($\min v_{i,j} = v_{16,0} = 0.1888$, $\max v_{i,j} = v_{0,15} = 0.7218$). Зауважимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.1736.

Розглянемо тепер нелінійний стаціонарний процес фільтрації, коли коефіцієнт провідності κ визначається залежністю $\kappa = \kappa(|\text{grad}\varphi|) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(I) & \kappa_{12}(I) \\ \kappa_{21}(I) & \kappa_{22}(I) \end{pmatrix}$, де $\kappa_{rs}(I)$ ($r, s = 1, 2$) – обмежені неперервно диференційовані в області G_z функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій. Тоді задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь другого порядку (1.40) при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та умовах

$$\begin{aligned} \kappa_{11} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.56)$$

на границі ∂G_ω області G_ω . Зауважимо, що система рівнянь (1.56) є системою еліптичного типу в області G_z при виконанні умов типу (1.22).

Табл. 1.43. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	660	316	433	1.1731	1.8E-2	5.4E-3
2	24×24	866	400	567	1.1736	1.5E-2	3.8E-3
3	28×28	1090	486	712	1.1739	1.3E-2	2.8E-3

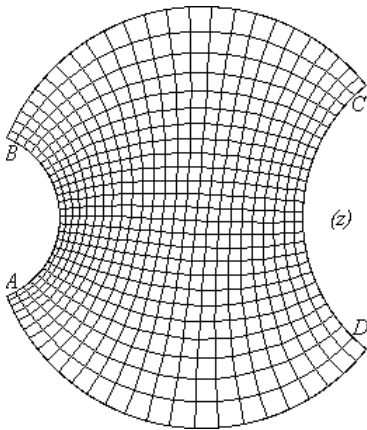


Рис. 1.110. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

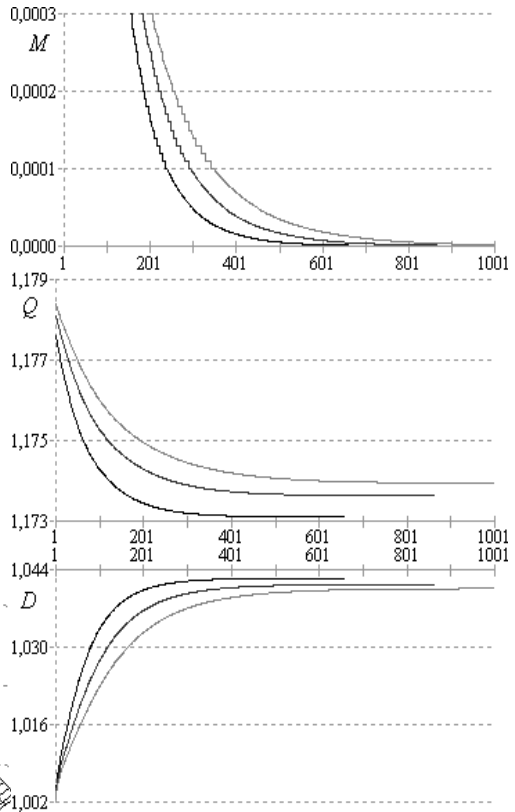


Рис. 1.111. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

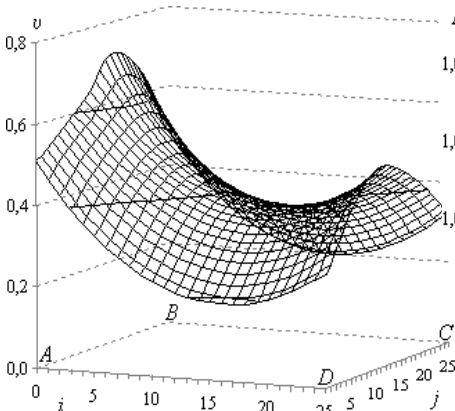


Рис. 1.112. Величина швидкості фільтрації в області G_5

З метою забезпечення гладкості даного квазіконформного відображення у кутових точках $M = \{A, B, C, D\}$ на відповідні функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо умови (1.23). Косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $\text{grad}\phi$ в довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою (1.24), а відповідні умови квазіортогональності мають вигляд (1.25).

Таким чином, ми маємо суттєво нелінійну обернену задачу, де подібність “паралелограмів в малому” порушується.

Для числової побудови відображення параметричного прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z рівняння (1.40) у рівномірній сітковій області G_ω^γ апроксимуємо різницевами рівняннями (1.42), де кожен із коефіцієнтів обчислюватимемо за формулами (1.43). Зазначимо, що у цьому випадку

$$\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa_{rs} \left(\frac{2\Delta\phi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2} \right), \quad (1.57)$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}),$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Різницеві аналоги крайових умов (1.7), приграничних умов квазіортогональності (1.29) та квазіконформного інваріанта γ (1.30) залишено без змін.

Алгоритм наближення розв’язку цієї оберненої диференціальної задачі різницевою задачею (1.42), (1.7), (1.29), (1.30) побудовано аналогічно як і у розглядуваних раніше випадках, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації [168]. Зокрема, в алгоритм АК внесено зміни описані в

п.1.2.1.2, з тою лише відмінністю, що компоненти тензора у (1.22) – (1.25), (1.29) – (1.31), (1.40) $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(I)$ ($r, s=1,2$). Відповідно в алгоритмі наближення розв’язку задачі, послідовні наближення компонент тензора провідності $\kappa_{rs}(I)$ на k -кроці у (i,j) -вузлах сітки G_ω^Y знаходяться лише після наближень відповідних значень координат $x_{i,j}, y_{i,j}$ за (1.57).

Числову реалізацію алгоритму розв’язування обернених крайових задач теорії фільтрації у цьому випадку анізотропних середовищ схильних до деформацій під дією градієнтів потенціалу здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 в областях G_1, G_3, G_4 та G_5 . Величину швидкості фільтрації визначатимемо за різницевиими формулами (1.12), які не змінять свого вигляду в силу рівняння руху та умов типу Коші-Рімана.

Так, на рисунку 1.113 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху, побудовану в результаті розв’язання задачі в області G_1 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.2I} & 0.1I \\ -0.2I & I \end{pmatrix}$. Числові розрахунки проводилися при різних значеннях параметрів розбиття області квазікомплексного потенціалу G_ω (див. табл. 1.44), при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати практично однакові, що підтверджує стійкість розробленого алгоритму, збіжність якого проілюстрована на рисунку 1.114. Величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.115, де $\min v_{i,j} = v_{25,25} = 0.1971$, $\max v_{i,j} = v_{0,18} = 1.1968$. Таким чином, врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом привело до зменшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 0.9358.

Табл. 1.44. Значення параметрів розрахунку сітки в G_1

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	335	93	7	0.9359	6.3E-2	4.3E-3
2	24×24	472	136	6	0.9358	5.8E-2	3.0E-3
3	28×28	659	187	520	0.9358	5.4E-2	2.2E-3

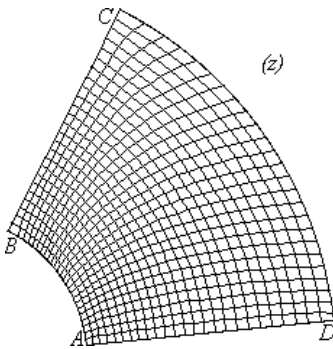


Рис. 1.113. Гідродинамічна сітка руху в області G_1 при розбитті 24×24

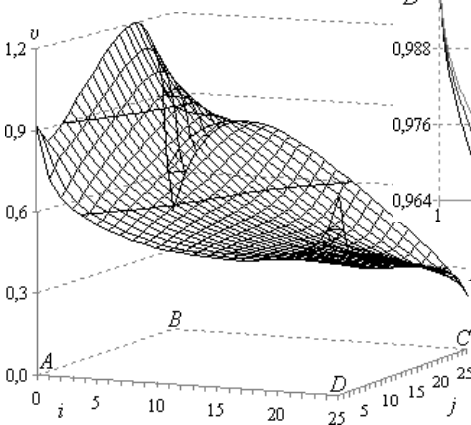


Рис. 1.115. Величина швидкості фільтрації в області G_1

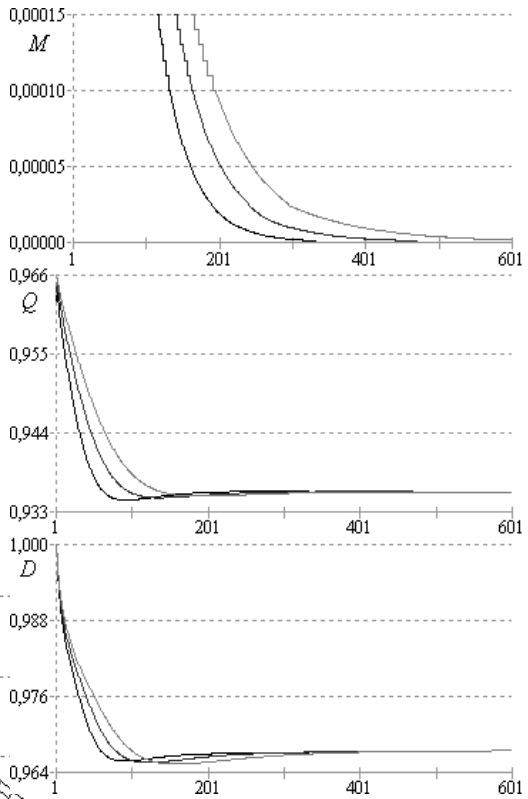


Рис. 1.114. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_1

Розв'язування задачі в області G_3 проводилося при $\kappa = \begin{pmatrix} 1+0.1I & 0.2I \\ 0.1I & 1+0.2I \end{pmatrix}$ та різних значеннях параметрів розбиття області G_ω (див. табл. 1.45). Розрахункову гідродинамічну сітку руху зображено на рисунку 1.116, а збіжність максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , значення фільтраційної витрати Q та відношення діагоналей D відносно кроку ітерації – на рисунку 1.117. Величину швидкості фільтрації при даному коефіцієнті зображено на рисунку 1.118 ($\min v_{i,j} = v_{12,25} = 0.0077$, $\max v_{i,j} = v_{0,25} = 0.0733$). Зазначимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом зумовило збільшення шуканої витрати Q від 0.5538 до 0.5559.

Збіжність параметрів розрахунку (див. табл. 1.46) гідродинамічної фільтраційної сітки руху в області G_4 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^I & 0.2I \\ 0.1I & 1+I \end{pmatrix}$ (див. рис. 1.119) проілюстровано на рисунку 1.120 при різних значеннях параметрів розбиття області квазікомплексного потенціалу G_ω . Величина швидкості фільтрації зображена на рисунку 1.121, причому розрахункові екстремальні значення становлять $\min v_{i,j} = v_{6,25} = 0.0129$, $\max v_{i,j} = v_{25,8} = 0.3840$. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом призвело до збільшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.8228.

Параметри розрахунку гідродинамічної сітки руху в області G_5 при $\kappa = \begin{pmatrix} e^{0.1I} & -0.1I \\ 0.1I & e^{0.2I} \end{pmatrix}$ (див. рис. 1.122) подано у таблиці 1.47.

Табл. 1.45. Значення параметрів розрахунку сітки в G_3

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	752	2	226	0.5555	1.3E-1	3.0E-3
2	24×24	1015	2	267	0.5559	1.4E-1	2.1E-3
3	28×28	1300	2	299	0.5563	1.4E-1	1.6E-3

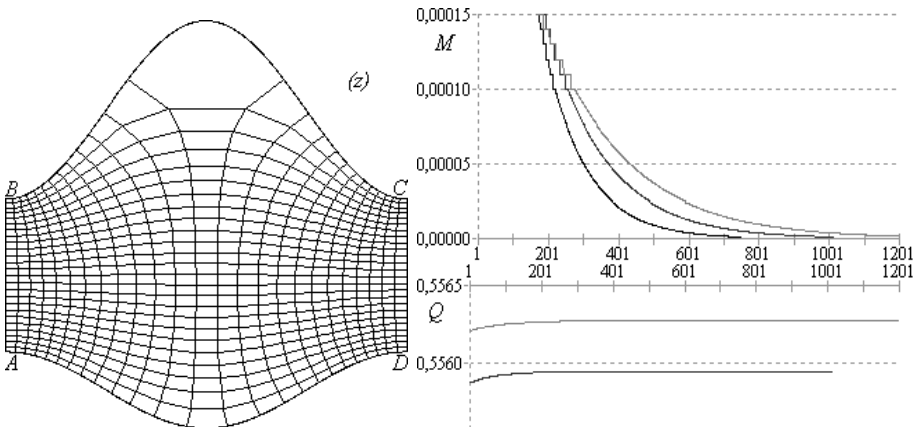


Рис. 1.116. Гідродинамічна сітка руху в області G_3 при розбитті 24×24

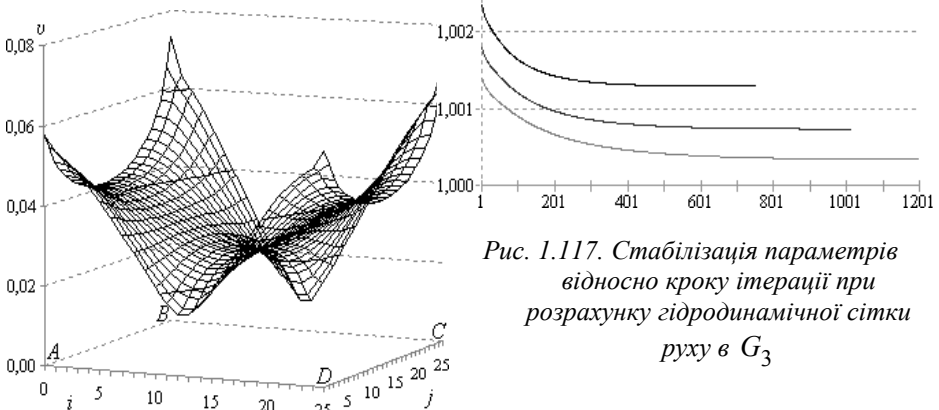


Рис. 1.117. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_3

Рис. 1.118. Величина швидкості фільтрації в області G_3

Табл. 1.46. Значення параметрів розрахунку сітки в G_4

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20 × 20	520	48	338	0.8229	3.8E-1	3.8E-3
2	24 × 24	705	72	489	0.8228	3.7E-1	2.7E-3
3	28 × 28	910	103	620	0.8225	3.5E-1	2.0E-3

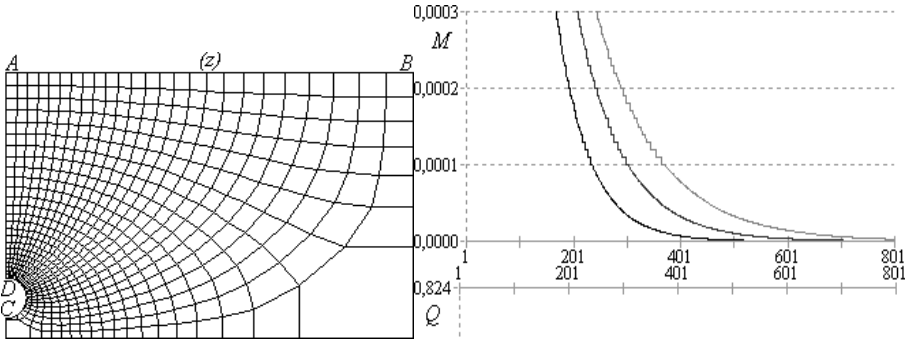


Рис. 1.119. Гідродинамічна сітка руху в області G_4 при розбитті 24×24

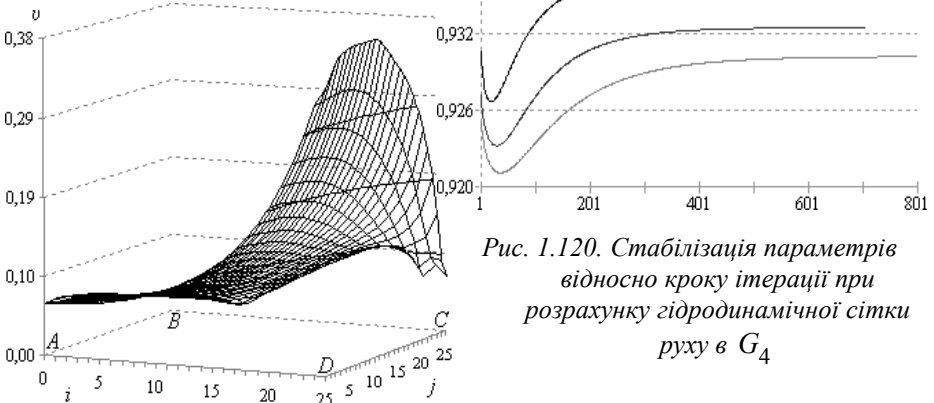


Рис. 1.120. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_4

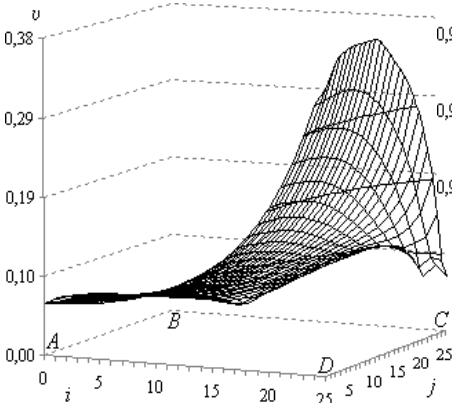


Рис. 1.121. Величина швидкості фільтрації в області G_4

Збіжність розробленого алгоритму проілюстровано на рисунку 1.123 для максимального відхилення наближень координат граничних вузлів M , шуканого значення фільтраційної витрати Q та відношення D діагоналей криволінійного чотирикутника. Величину швидкості фільтрації зображено на рисунку 1.124, причому розрахункові екстремальні значення становлять $\min v_{i,j} = v_{16,25} = 0.1940$, $\max v_{i,j} = v_{0,10} = 0.7516$. Зауважимо, що врахування впливу коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої фільтраційної витрати Q від 1.1692 до 1.2148.

1.3. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища і процесу

У попередніх пунктах розділу за розробленою методологією одержані розв'язки модельних нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіквзіпотенціальними лініями (математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок тощо в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах), зокрема, і для випадків, коли компоненти тензора провідності (фільтрації) залежать як від координат біжучої точки області, так і від шуканих функцій течії і потенціалу. Як уже зазначалось, досить важливими і маловивченими є задачі моделювання впливу градієнтів (зокрема, великих, які перевищують критичні їх значення) на вихідні характеристики середовища (в першу чергу, на коефіцієнт провідності), що виникають при моделюванні нелінійних процесів фільтрації з урахуванням суфозійних явищ.

Табл. 1.47. Значення параметрів розрахунку сітки в G_5

№	$m \times n$	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	20×20	635	293	419	1.2143	3.0E-1	5.6E-3
2	24×24	832	370	52	1.2148	2.5E-1	4.0E-3
3	28×28	1049	448	70	1.2150	2.2E-1	2.9E-3

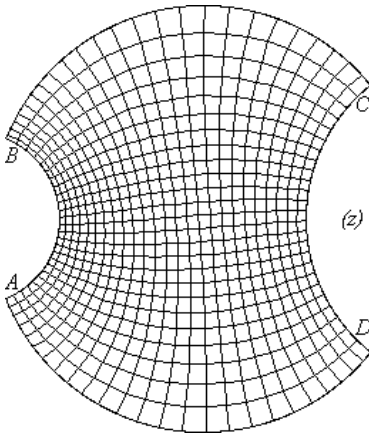


Рис. 1.122. Гідродинамічна сітка руху в області G_5 при розбитті 24×24

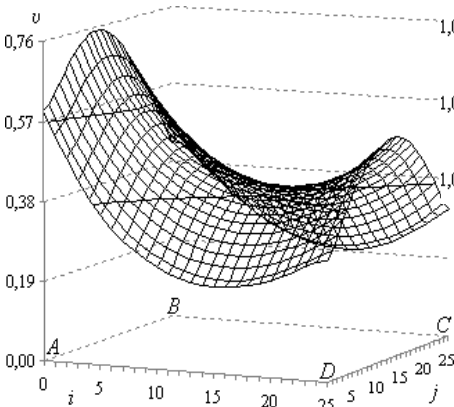


Рис. 1.124. Величина швидкості фільтрації в області G_5

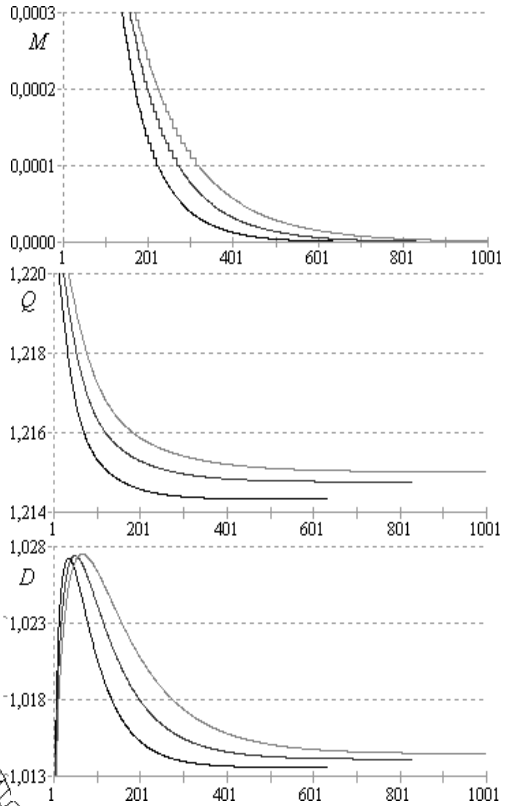


Рис. 1.123. Стабілізація параметрів відносно кроку ітерації при розрахунку гідродинамічної сітки руху в G_5

Тут нами ставиться задача перенесення запропонованого раніше на прикладах осесиметричної фільтрації [49, 202] підходу до моделювання окреслених вище процесів на випадки середовищ більш складної геометрії.

1.3.1. Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації

У середовищах із широким діапазоном значень діючих градієнтів потенціалу нелінійність процесу фільтрації зумовлюється деформаціями всередині пористого середовища, які виникають при перевищенні діючими градієнтами їх критичного значення для даного ґрунту. Так, у ділянках середовища, де діють великі градієнти потенціалу (більші за критичні значення), відбуваються суфозійні деформації ґрунту, що приводять до зміни коефіцієнта фільтрації, а отже, впливають на значення фільтраційної витрати.

З метою врахування впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації, у ізотропних середовищах із широким діапазоном їх значень, коефіцієнт фільтрації k визначатимемо залежністю [57]

$$k = k \left(\text{grad} \varphi \right) = \begin{cases} k_o + \mu(I - I_{kp}), & \text{при } I > I_{kp}, \\ k_o, & \text{при } I \leq I_{kp}. \end{cases} \quad (1.58)$$

Тоді, задача зводиться до розв'язування в G_ω різницевих рівнянь другого порядку (1.48) чи (1.45) у тих ділянках області G_z , де значення діючих градієнтів потенціалу є більшими за їх критичні значення для даного типу ґрунту та різницевих рівнянь Лапласа (1.6) у інших ділянках області G_z при заданих нелінійних крайових умовах (1.2) та відповідних умовах типу Коші-Рімана на границі ∂G_ω області G_ω .

Для числової побудови відображення параметричного

прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z використаємо алгоритм описаний у пункті 1.2.2 з тою відмінністю, що коефіцієнти $\kappa_{i,j}$ визначатимуться так:

$$\kappa_{i,j} = \begin{cases} \kappa_o + \mu(I_{i,j} - I_{kp}), & \text{при } I_{i,j} > I_{kp}, \\ \kappa_o, & \text{при } I_{i,j} \leq I_{kp}, \end{cases}$$

$$\text{де } I_{i,j} = \frac{2\Delta\varphi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2}.$$

Числову реалізацію алгоритму розв'язування обернених крайових задач теорії фільтрації в ізотропних середовищах із широким діапазоном значень діючих градієнтів потенціалу [57] здійснено за умов описаних у п.1.1.3.2 та при $\kappa_o = 1$ в областях G_1 , G_3 та G_5 . Зазначимо, що в якості нового наближення шуканого квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ взято наближений розв'язок задачі на квазіконформне відображення, отриманий на попередній розрахунковій стадії процесу k . Величину швидкості фільтрації у цьому випадку також визначатимемо за різницевиими формулами (1.12).

В області G_1 із діапазоном значень діючих градієнтів потенціалу $[0.3570; 1.0537]$ розв'язано цю задачу при параметрах $\mu = 0.5$ та $I_{kp} = 0.8$. Отримані результати, які ілюструють збіжність розробленого алгоритму у цьому випадку, подано у таблиці 1.48, а зони збурення зображено на рисунку 1.125. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації при вказаних параметрах привело до збільшення шуканої витрати Q від 1.0001 до 1.0090. На рисунку 1.126 пунктирними, штриховими та суцільними лініями зображено залежності $I = I_k(\varphi, \psi)$ та $\kappa = \kappa_k(\varphi, \psi)$ (на середній лінії течії $\psi(x, y) = Q/2 = 0.5045$) відповідно при початкових ($k = 0$ та $k = 1$)

стадіях та на стадії стабілізації процесу ($I_\infty \approx I_7$, $\kappa_\infty = \kappa_7$).

Табл. 1.48. Результати розрахунків в області G_1

k	k_M	k_Q	k_D	Q
0	795	309	668	1.0001
1	403	128	8	1.0125
2	325	39	6	1.0077
3	243	18	3	1.0095
4	153	3	1	1.0089
5	41	1	1	1.0091
6	6	1	1	1.0090
7	1	1	1	1.0090

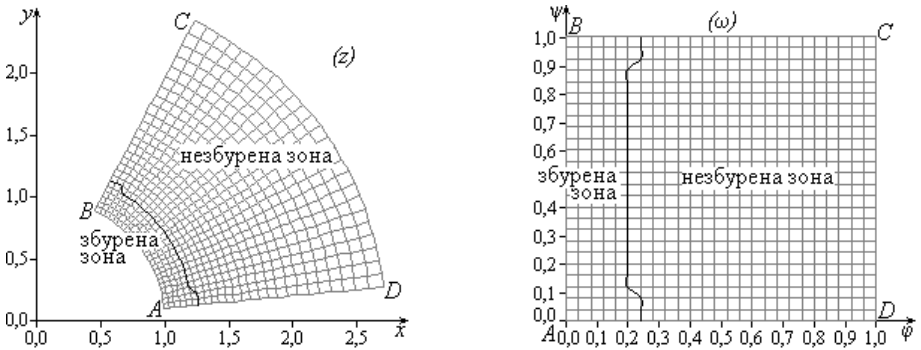


Рис. 1.125. Збурена та незбурена зони у фізичній області G_1 та відповідній області комплексного потенціалу

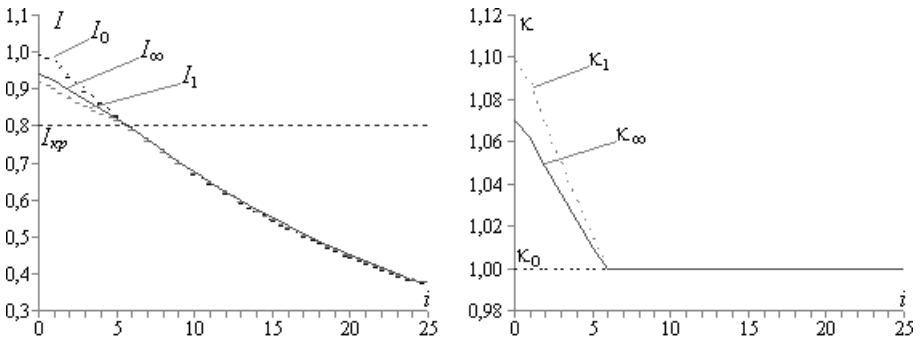


Рис. 1.126. Розподіл градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії $\psi(x, y) = Q/2$ у фізичній області G_1

Величину швидкості даного поля при початковій ($k=0$) ітерації зображено на рисунку 1.6, а на стадії стабілізації процесу ($k=7$) – на рисунку 1.127. Зазначимо, що найбільше значення величини швидкості на початковій стадії 1.0027 у вузлі (0,13) змінюється до 1.0113 у вузлі (0,0) на стадії стабілізації процесу, а найменше її значення на початковій стадії та на стадії стабілізації процесу є у вузлі (25,25) та змінюється від 0.3667 до 0.3700.

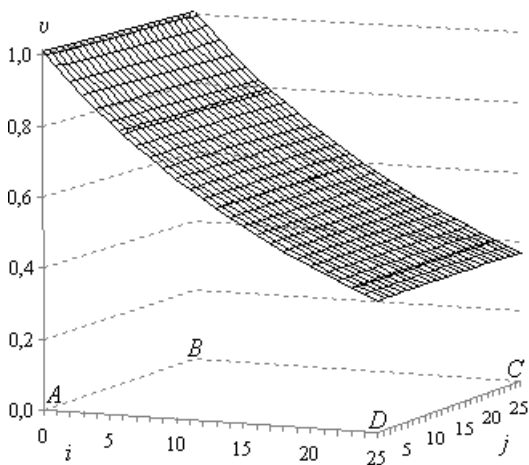


Рис. 1.127. Величина швидкості в області G_1 при $\mu=0.5$ та $I_{kp}=0.8$

Наявність великих (більших за критичні) значень градієнтів потенціалу на ділянках входу та виходу фільтраційної течії в області G_3 забезпечується вибором граничних кривих (діпазоном значень діючих градієнтів потенціалу $[0.0075; 0.0772]$). Збіжність параметрів розрахунку гідродинамічної сітки в G_3 при $\mu=3$ та $I_{kp}=0.04$ подано у таблиці 1.49, а зони збурення зображено на рисунку 1.128. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації при вказаних параметрах зумовило збільшення шуканої фільтраційної витрати Q від 0.5538 до 0.5575.

На рисунку 1.129 пунктирними, штриховими та суцільними лініями зображено залежності $I=I_k(\varphi, \psi)$ та $\kappa=\kappa_k(\varphi, \psi)$ (на середній лінії течії $\psi(x, y)=Q/2=0.2788$) відповідно при

початкових ($k=0$ та $k=1$) стадіях та на стадії стабілізації процесу ($I_\infty \approx I_5$, $\kappa_\infty = \kappa_5$). Величину швидкості цього поля при початковій

Табл. 1.49. Результати розрахунків в області G_3

k	k_M	k_Q	k_D	Q
0	1387	78	146	0.5538
1	568	97	6	0.5578
2	249	1	1	0.5575
3	87	1	1	0.5575
4	7	1	1	0.5575
5	1	1	1	0.5575

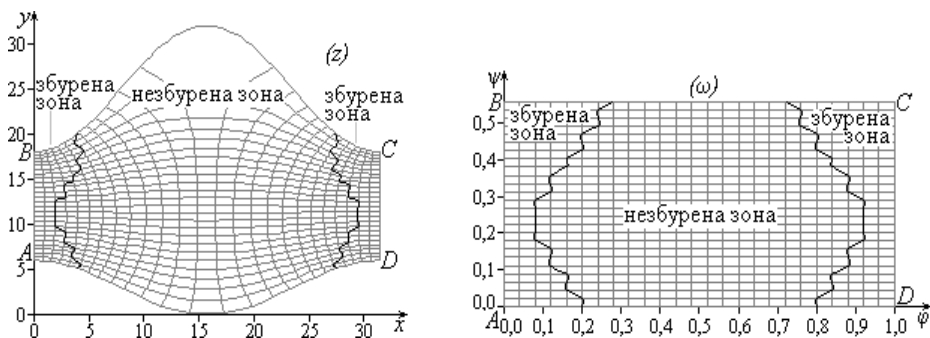


Рис. 1.128. Збурена та незбурена зони у фізичній області G_3 та відповідній області комплексного потенціалу

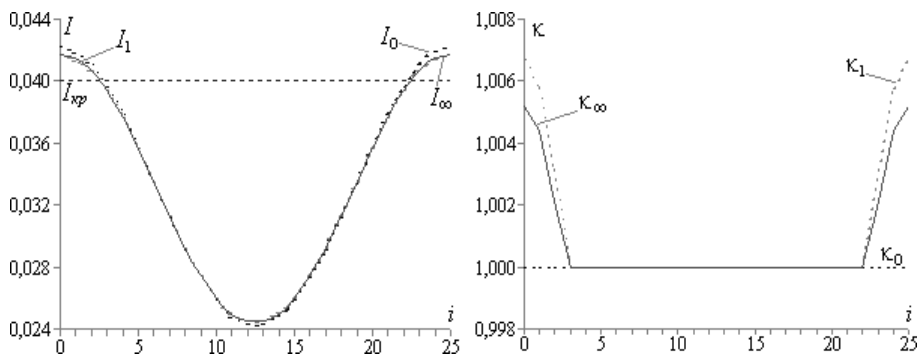


Рис. 1.129. Розподіл градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії $\psi(x, y) = Q/2$ у фізичній області G_3

($k=0$) ітерації зображено на рисунку 1.9, а на стадії стабілізації процесу ($k=5$) – на рисунку 1.130. Зазначимо, що найбільша величина швидкості ϵ у вузлах (25,25) та (0,25) і змінюється від 0.0697 на початковій стадії до 0.0750 на стадії стабілізації процесу, а найменша величина швидкості на початковій стадії та на стадії стабілізації процесу лишається однаковою 0.0077 у вузлах (12,25) та (13,25).

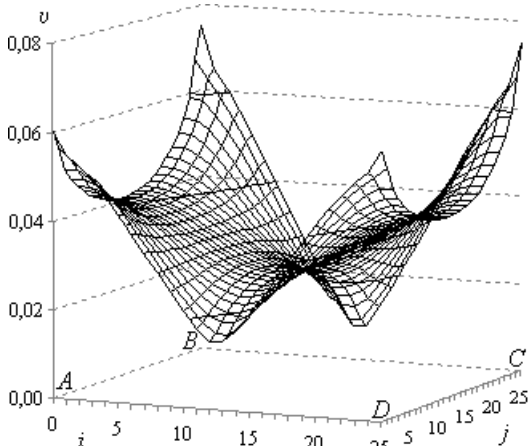


Рис. 1.130. Величина швидкості в області G_3 при $\mu=3$ та $I_{kp}=0.04$

Діапазон значень діючих градієнтів потенціалу в області G_5 становить $[0.1777; 0.6775]$. Зони збурення спричинені великими градієнтами потенціалу при $\mu=1$ та $I_{kp}=0.47$ зображено на рисунку 1.131.

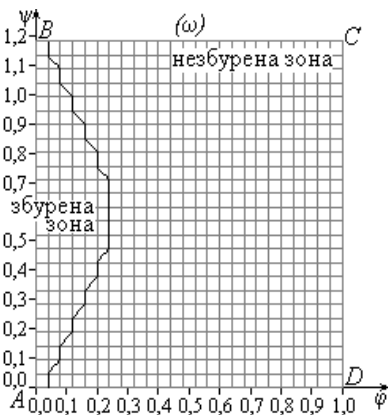
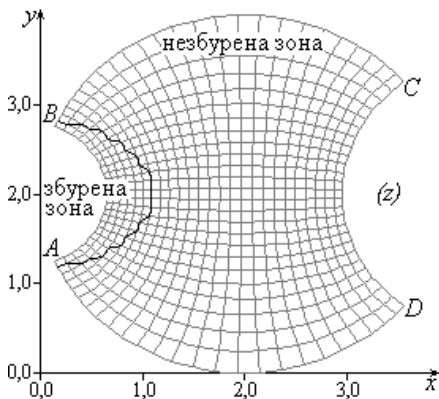


Рис. 1.131. Збурена та незбурена зони у фізичній області G_5 та відповідній області комплексного потенціалу

Розрахункові значення фільтраційної витрати на кожній розрахунковій стадії подано у таблиці 1.50. Врахування впливу коефіцієнта фільтрації при вказаних параметрах викликало збільшення шуканої витрати Q від 1.1692 до 1.1809. На рисунку 1.132 пунктирними, штриховими та суцільними лініями зображено залежності $I=I_k(\varphi, \psi)$ та $\kappa=\kappa_k(\varphi, \psi)$ (на середній лінії течії $\psi(x, y)=Q/2=0.5905$) відповідно при початкових ($k=0$ та $k=1$)

Табл. 1.50. Результати розрахунків в області G_5

k	k_M	k_Q	k_D	Q
0	1014	183	462	1.1692
1	805	217	2	1.1868
2	696	50	1	1.1783
3	591	39	1	1.1822
4	482	17	1	1.1804
5	369	9	1	1.1812
6	244	3	1	1.1808
7	75	1	1	1.1810
8	13	1	1	1.1809
9	2	1	1	1.1809
10	1	1	1	1.1809

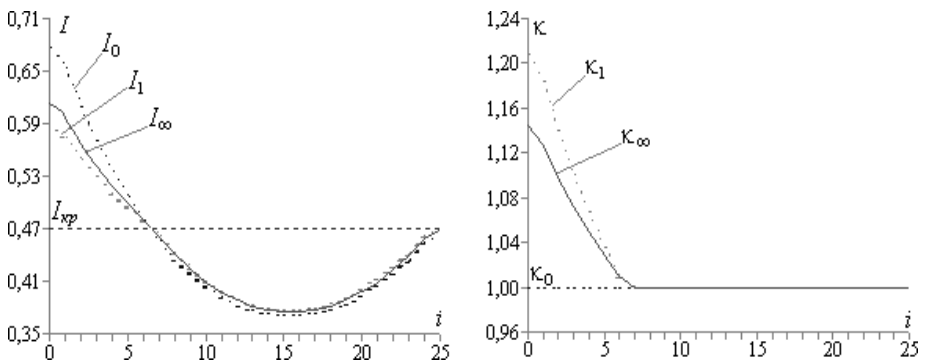


Рис. 1.132. Розподіл градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії $\psi(x, y)=Q/2$ у фізичній області G_5

стадіях та на стадії стабілізації процесу ($I_{\infty} \approx I_{10}$, $\kappa_{\infty} = \kappa_{10}$).

Величину швидкості даного поля при початковій ($k=0$) ітерації зображено на рисунку 1.15, а на стадії стабілізації процесу ($k=10$) – на рисунку 1.133. Зазначимо, що найбільше розрахункове значення величини швидкості фільтрації досягається у вузлах (0,12) та (0,13) і змінюється від 0.6919 на початковій стадії до 0.7140 на стадії стабілізації процесу, а найменше – у вузлах (15,0) та (15,25) і змінюється від 0.1935 на початковій стадії до 0.1951 на стадії стабілізації процесу.

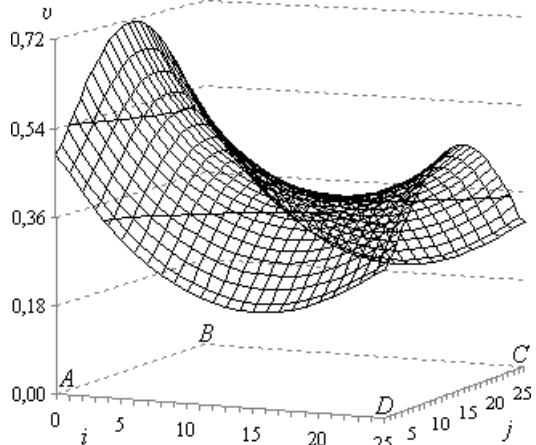


Рис. 1.133. Величина швидкості в області G_5 при $\mu=1$ та $I_{kp}=0.47$

1.3.2. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу

При перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) їх значення для даного ґрунту, в навколдренному середовищі відбувається втрата фільтраційної міцності ґрунтів, що зумовлює зміну коефіцієнта фільтрації. Незважаючи на те, що розміри зони, де градієнти потенціалу перевищують критичні їх значення, порівняно із міждренними відстанями, досить малі, зміни, що відбуваються у ґрунті даної зони впливають на коефіцієнт фільтрації. Характер і розвиток цих змін ґрунту досить складний і

дрен. У випадку притоку до дрени, із зони де діючі градієнти перевищують критичні значення, відбувається вимив суфозійних частинок в порожнину дрени, а, отже, притік до дрени зростатиме.

На основі розроблених алгоритмів здійснимо розрахунок параметрів процесу фільтрації до нескінченного горизонтального дренажу (нескінченної системи горизонтально розміщених дрен). В силу симетрії картини руху (див. рис. 1.134) розглянемо один фрагмент фізичної області фільтрації обмеженої лініями течії та еквіпотенціальними лініями при таких його геометричних розмірах: $r=1$ дм – радіус зовнішнього контура CD довершеної за характером розкриття пласта дрени, $b=11$ дм та $s=13$ дм – відповідно глибина закладання дренажу та до водоупору, $2l=40$ дм – відстань між дренами. У цьому випадку діапазон значень діючих градієнтів потенціалу становить $[0.0101; 0.3370]$.

Врахування впливу коефіцієнта фільтрації за законом (1.58) при параметрах $\mu=3$ та $I_{kp}=0.1$, як і очікувалося, призвело до збільшення шуканої витрати Q від 0.7451 до 0.7958 (на 7%). Розрахункові результати, які ілюструють збіжність розробленого алгоритму, подано у таблиці 1.51, а зони збурення, спричинені великими градієнтами потенціалів, зображено на рисунку 1.135. На рисунку 1.136 пунктирними, штриховими та суцільними лініями

Табл. 1.51. Результати розрахунків

k	k_M	k_Q	k_D	Q
0	815	418	548	0.7451
1	709	219	440	0.8057
2	507	1	8	0.7725
3	308	1	4	0.7968
4	69	1	1	0.7958
5	4	1	1	0.7958
6	1	1	1	0.7958

зображено залежності $I = I_k(\varphi, \psi)$ та $\kappa = \kappa_k(\varphi, \psi)$ (на середній лінії течії $\psi(x, y) = Q/2 = 0.3979$) відповідно при початкових ($k=0$ та $k=1$) стадіях та на стадії стабілізації процесу ($I_\infty \approx I_6$, $\kappa_\infty = \kappa_6$).

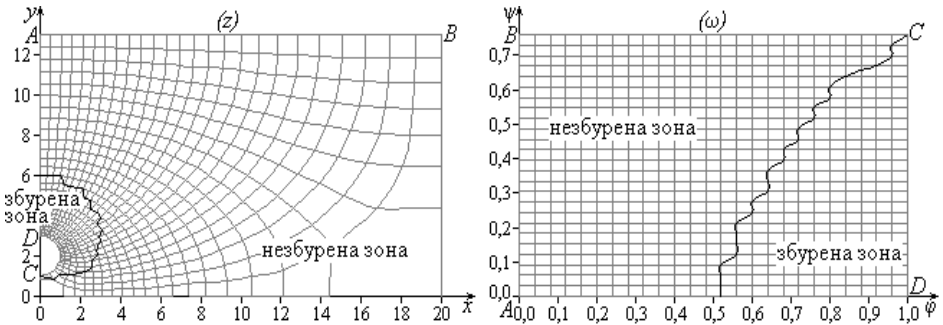


Рис. 1.135. Збурена та незбурена зони у фізичній області G_4 та відповідній області комплексного потенціалу

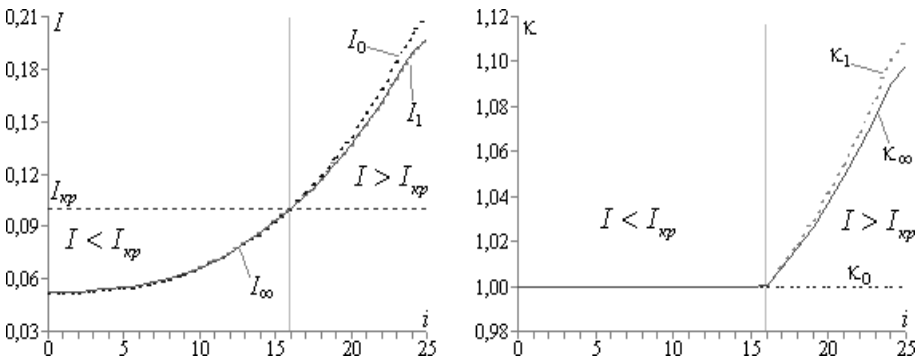


Рис. 1.136. Розподіл градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії $\psi(x, y) = Q/2$ у фізичній області G_4

На рисунку 1.137 зображено ділянки збільшення ($\Delta v > 0$) та зменшення ($\Delta v < 0$) значення швидкості фільтрації при врахуванні описаного вище взаємовпливу градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації. При цьому зауважимо, що найбільше розрахункове значення величини швидкості фільтрації на початковій стадії 0.3310 у вузлі (25,10) зростає до 0.3408 у вузлі (25,9) на стадії стабілізації

процесу, а найменше її розрахункове значення – на початковій стадії та на стадії стабілізації процесу лишається однаковою 0.0123 у вузлі (6,25). Найбільше величина швидкості фільтрації зростає у вузлі (25,0) (точка D) на величину 0.0224, а найбільше спала – у вузлі (20,25) (точка на водоупорі) на 0.0012 (див. рис. 1.137).

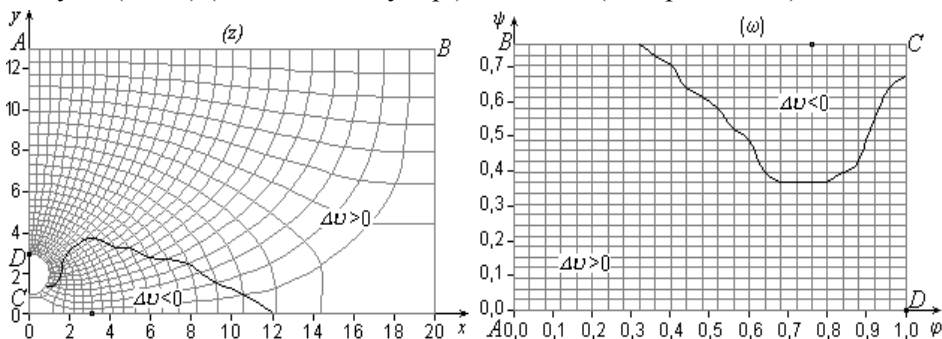


Рис. 1.137. Зони збурення швидкості фільтрації у фізичній області G_4 та відповідній області комплексного потенціалу

Таким чином, на основі розробленого алгоритму вперше:

- здійснено розрахунок параметрів процесу фільтрації до нескінченного горизонтального дренажу (нескінченної системи горизонтально розміщених дрен);
- встановлено величину зміни фільтраційної витрати, зони великих (більших за їх критичні значення) градієнтів потенціалу та зони збурення швидкості фільтрації при врахуванні взаємовпливу градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації;
- здійснено порівняння фільтраційних витрат, градієнтів потенціалу, коефіцієнтів фільтрації, швидкості фільтрації до та після деформації середовища;
- знайдено точки найбільшої та найменшої швидкості фільтрації до та після деформації середовища, а також знайдено точки максимального збільшення та зменшення швидкості фільтрації;
- отримано розрахункові залежності $I(\varphi, \psi)$ та $k(\varphi, \psi)$ при

фільтраційно-суфозійних деформаціях, які враховують винесення суфозійних частинок під дією великих градієнтів потенціалу.

1.3.3. Моделювання суфозійних зон за умов взаємовпливу градієнтів квазіпотенціалу та коефіцієнта провідності середовища

Моделювання зон мінімального насичення, відриву (вимивання), затримки суфозійних частинок та незбуреної ділянки середовища G_z (відповідно G_ω) в залежності від значень градієнта напору $I(\varphi, \psi)$ проведемо за законами

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_3, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_3)(I - I_6), & I_3 < I < I_n, \\ \kappa^*, & I \geq I_n, \end{cases} \quad \text{якщо } I'_\varphi < 0;$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_1, \\ \kappa_0 + \mu_0(I - I_1), & I_1 < I < I_2, \\ \kappa^0, & I \geq I_2, \end{cases} \quad \text{якщо } I'_\varphi \geq 0,$$

де I_n – значення градієнту потенціалу, при якому має місце мінімальне насичення суфозійних частинок в ґрунті на вході фільтраційного потоку (в область G_z), I_6 , I_3 – критичні його значення, при якому мають місце відповідно відрив та максимальне осідання (максимальна затримка) суфозійних частинок у порах ґрунту, а коефіцієнт μ , що характеризує ступінь їх впливу на провідність середовища, знаходиться в результаті розв'язання рівняння $\kappa(I_n, \mu) = \kappa^*$, κ^* – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок (з останніх співвідношень можемо також визначити і мінімальне

значення коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_*$, що досягається на деякій ділянці зони осідання частинок, де має місце максимально можливе заповнення пор суфозійними частинками); I_1, I_2 – критичні значення градієнту потенціалу ($I'_{1\phi} > 0, I'_{2\phi} > 0$), при яких має місце вимив суфозійних частинок з ґрунту, коефіцієнт μ_0 знаходиться в результаті розв'язання рівняння $\kappa(I_2, \mu_0) = \kappa^0$, де κ^0 – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок на виході фільтраційного потоку.

Тестування розробленого алгоритму виконано для області G_3 , оскільки такий вибір граничних кривих забезпечує наявність великих (більших за критичні) значень градієнтів потенціалу на ділянках входу та виходу фільтраційної течії [132].

Так, на рисунку 1.138 зображені розрахункові динамічна сітка та зони збурення згідно описаної вище моделі при $\mu = \mu_0 = 1$, $\kappa^* = 1.005$, $\kappa^0 = 1.04$, $I_3 = 0.3$, $I_e = 0.35$, $I_n = 0.4$, $I_1 = 0.37$, $I_2 = 0.41$. Врахування відповідних факторів збурення приводить до збільшення значення шуканої витрати Q від 5.53839 (без врахування суфозії) до 5.581554 (з врахуванням зміни провідності ділянок середовища за рахунок суфозійних деформацій).

На рис. 1.139 пунктирними, точковими та суцільними лініями зображені графіки залежностей $I = I_k(x, y)$ та $\kappa = \kappa_k(x, y)$ (на лінії течії $\psi(x, y) = Q/2 = 2.791$) відповідно при початкових ($k=0$ та $k=1$) ітераціях та на стадії стабілізації ітераційного процесу ($I_\infty \approx I_7$, $\kappa_\infty = \kappa_7$), а на рис. 1.140 зображені відповідні скалярні поля швидкості фільтраційної течії.

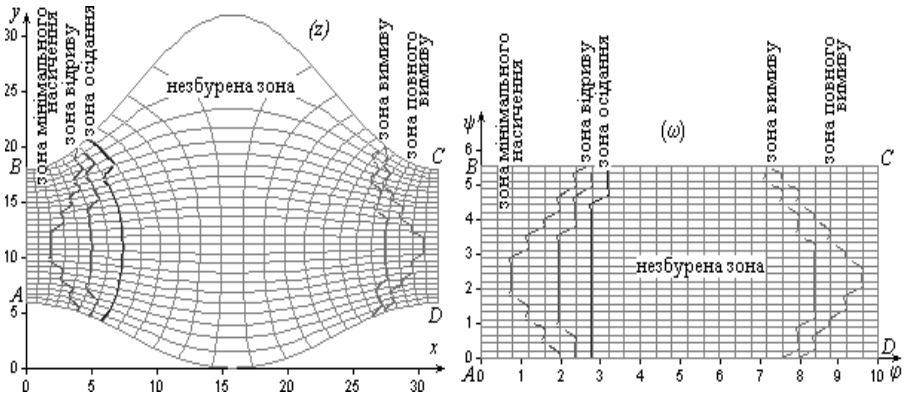


Рис. 1.138. Збурені та незбурена зони у фізичній області та області комплексного потенціалу

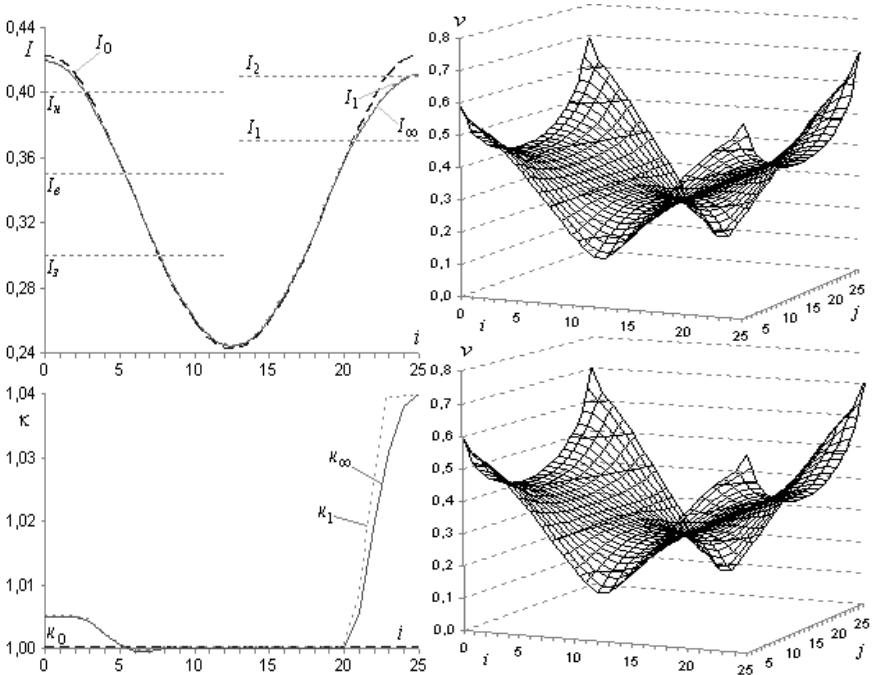


Рис. 1.139. Розподіл градієнта напору та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії $\psi(x, y) = Q/2$ у фізичній області G_3

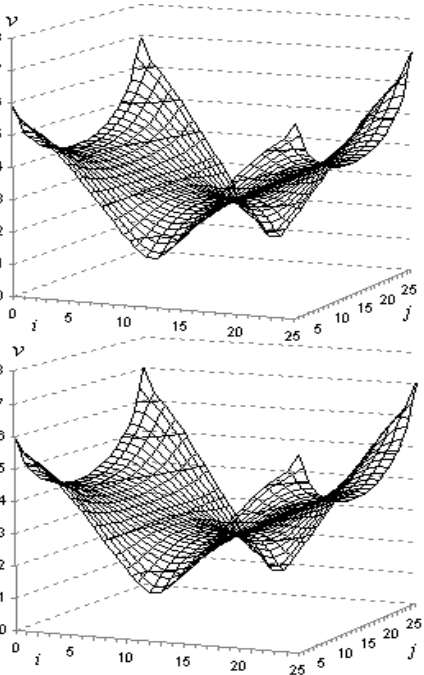


Рис. 1.140. Скалярні поля швидкості на стадіях: початку ($k=0$) та стабілізації ($k=7$) ітераційного процесу

Проведені в рамках цієї моделі числові розрахунки підтверджують факт збільшення величини фільтраційної витрати за рахунок зворотного впливу великих градієнтів квазіпотенціалу на провідність середовища (формування зон вимивання, осідання частинок та мінімального насичення ними пор ґрунту). При цьому, особливо відзначимо ефективність використання ідеї почергового “замороження” характеристик середовища та течії для опису розвитку даного процесу в часі та його стабілізації.

1.4. Проблеми системного дослідження збурення процесів типу “фільтрація-конвекція”

Як уже зазначалось, задачі побудови динамічної сітки потенційних полів (різного роду крилових профілів), поля швидкості з паралельним розрахунком витрат шляхом уведення функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до шуканого потенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x, y)$, в областях, наприклад, обмежених двома лініями течії і двома екіпотенціальними лініями, зводяться до конформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області на прямокутник – область комплексного потенціалу. Особливий інтерес представляють модельні задачі, що описують випадки, коли на деякій ділянці однієї із граничних ліній течії фізичної чотирикутної області поміщено джерело збурення вихідної течії [55, 60, 62]. При цьому області комплексного потенціалу, що відповідають різним значенням потенціалу збурення, можуть відрізнятися не тільки невідомими параметрами, але і формою. Отже, разом з побудовою алгоритмів наближеного розв’язку відповідної нелінійної оберненої задачі в кожному з конкретних випадків формування течії у

фізичній області виникає проблема її вибору, адже невідомо, яку з усіляких конфігурацій області G_ω потрібно вибирати.

Аналогічна проблема має місце при дослідженні збурень ідеальних та квазіідеальних полів у двозв'язних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями, шляхом введення внутрішніх замкнених еквіпотенціальних контурів [59, 67].

1.4.1. Моделювання збурень ідеальних полів в криволінійних чотирикутних областях обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями

Розглянемо однозв'язну криволінійну чотирикутну область $G_z = ABCD$ (див. п. 1.1.1, рис. 1.1). Нехай тепер M та N – довільні точки кривої BC . Покладемо $\varphi|_{MN} = \varphi^\circ$ [55, 60, 62]. В залежності від значення потенціалу φ° матимуть місце різні випадки формування структури течії в області G_z (див. рис. 1.141 – 1.144), які характеризуються положенням ліній розділу ділянок фільтраційних потоків, що при цьому утворюються ($K^\circ K$, $K^\circ KK^*$ і т.д.). На основі евристичних міркувань із наступним логічним обґрунтуванням нами встановлено, що при різних скінченних значеннях φ° можливі 23 таких випадки формування течії, а отже, і відповідних їм областей комплексного потенціалу. Зокрема, якщо φ° пробігатиме всеможливі значення від $-\infty$ до $+\infty$, то відповідна межева точка розділу фільтраційних потоків K , положення якої можна характеризувати натуральним параметром $s = s(\varphi^\circ)$, пробіжить всю границю заданої області G_z за стрілкою годинника починаючи з деякої точки $K_\infty \in AD$, що відповідає випадкам, коли $\varphi^\circ = \pm\infty \mp 0$ ($0 < s < L$, s – відстань від точки K_∞ до

точки K, L – довжина ∂G_z) (див. рис. 1.144).

Отже, при наявності джерела поперечних збурень MN вихідного потоку не маємо можливості безпосередньо перейти до оберненої задачі (не відомо, яку із областей G_ω слід вибирати). Зокрема, різним нескінченним значенням потенціалу φ° відповідають різні точки $K \in \underline{K}K_\infty\bar{K}$, де \underline{K} – точка, що відповідає найбільшій із “від’ємних нескінченностей” (тобто, коли при всіх $K \in \underline{K}A$ відповідні значення φ° є скінченими), а \bar{K} – точка, що відповідає найменшій із “додатних нескінченностей” (див. рис. 1.144).

З метою вибору одного із 23 варіантів (див. рис. 1.141 – 1.143) та розв’язку відповідної оберненої задачі за заданими скінченими значеннями φ_* , φ^* , $\varphi^\circ = \varphi_\circ^\circ$ побудуємо відповідний алгоритм вибору наступним чином.

1) Перевіряємо виконання умов $\varphi_\circ^\circ = \varphi_*$ та $\varphi_\circ^\circ = \varphi^*$. Якщо одна із них виконується, то, відповідно, розв’язуємо задачу (1.141.8) чи (1.143.1).

2) Перевіряємо належність φ_\circ° до одного із проміжків $(-\infty, \varphi_*)$, (φ_*, φ^*) , $(\varphi^*, +\infty)$. Нехай, наприклад, $\varphi_\circ^\circ < \varphi_*$ (при $\varphi_* < \varphi_\circ^\circ < \varphi^*$ чи $\varphi_\circ^\circ > \varphi^*$ алгоритм продовжується аналогічно). Тоді розв’язуємо допоміжну (“ключову”) задачу (1.141.4) (для випадків $\varphi_* < \varphi_\circ^\circ < \varphi^*$ та $\varphi_\circ^\circ > \varphi^*$ в якості “ключових” будуть відповідно задачі (1.142.4) та (1.143.5)), де значення φ° знаходиться в процесі розв’язання даної задачі при додатковій (“компенсаційній”) умові $\psi|_A = \psi|_B$ (позначимо це значення φ° через $\varphi_{1.4}^\circ$).

3) Перевіряємо належність φ_\circ° до одного із проміжків $(-\infty, \varphi_{1.4}^\circ)$, $(\varphi_{1.4}^\circ, \varphi_*)$ (у випадку $\varphi_\circ^\circ = \varphi_{1.4}^\circ$ задача є розв’язаною).

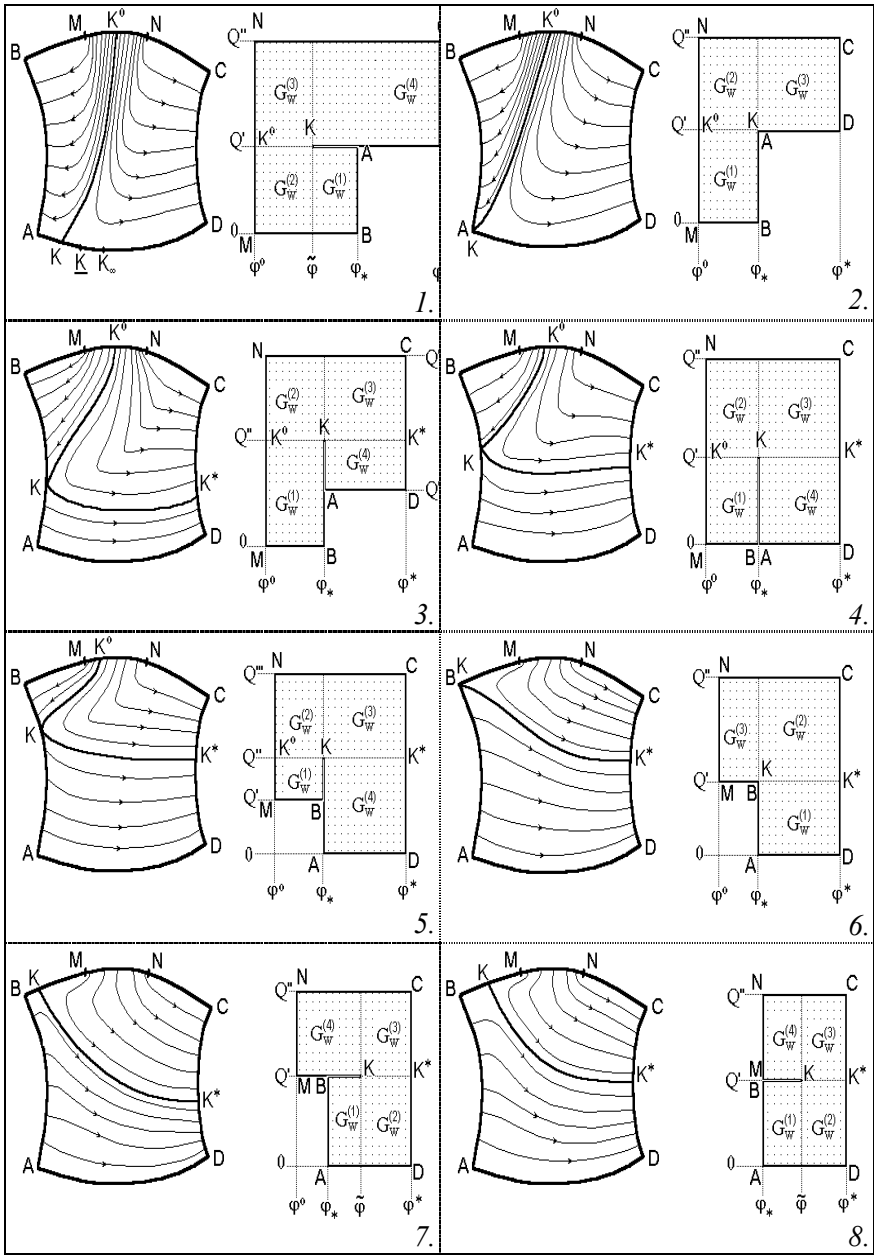


Рис. 1.141. Формування течії при $-\infty < \varphi \leq \varphi_*$

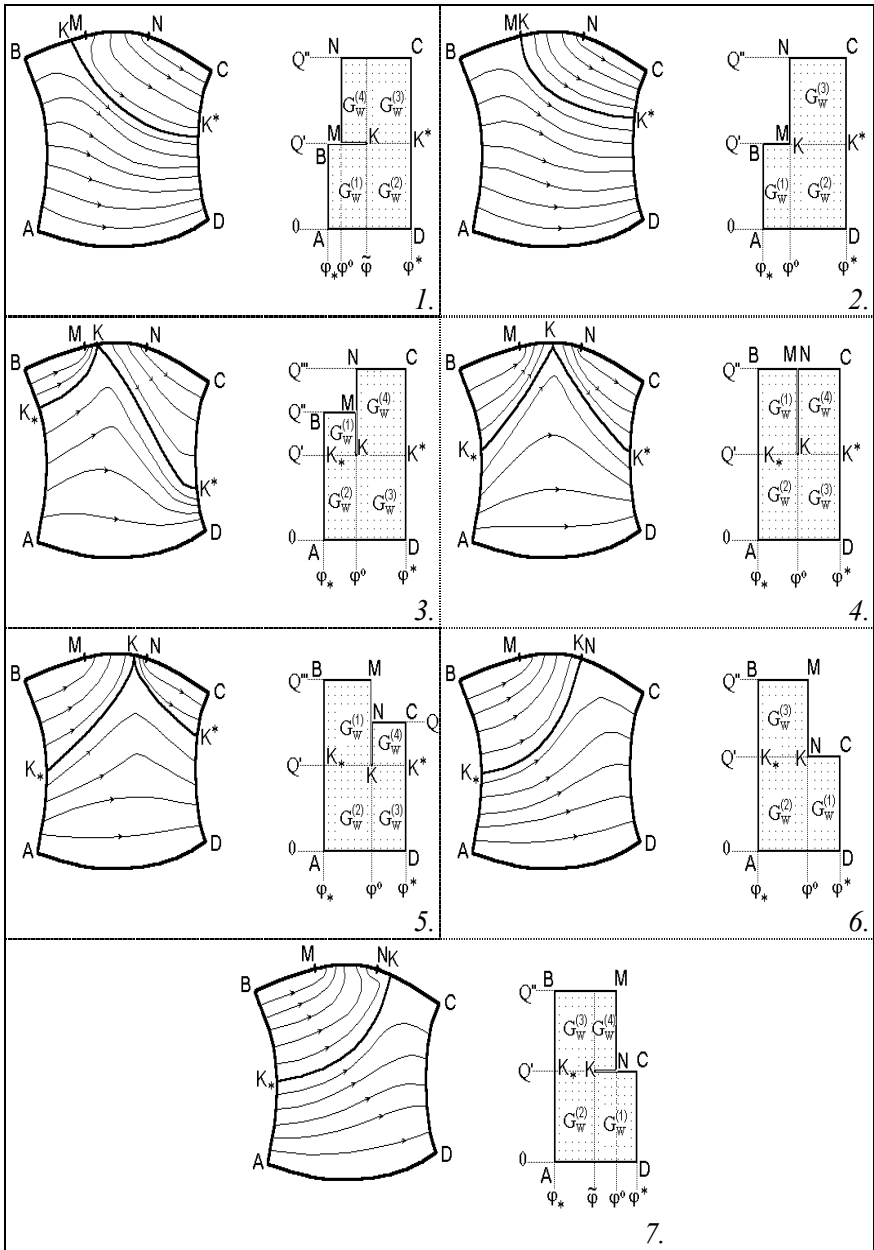


Рис. 1.142. Формування течії при $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$

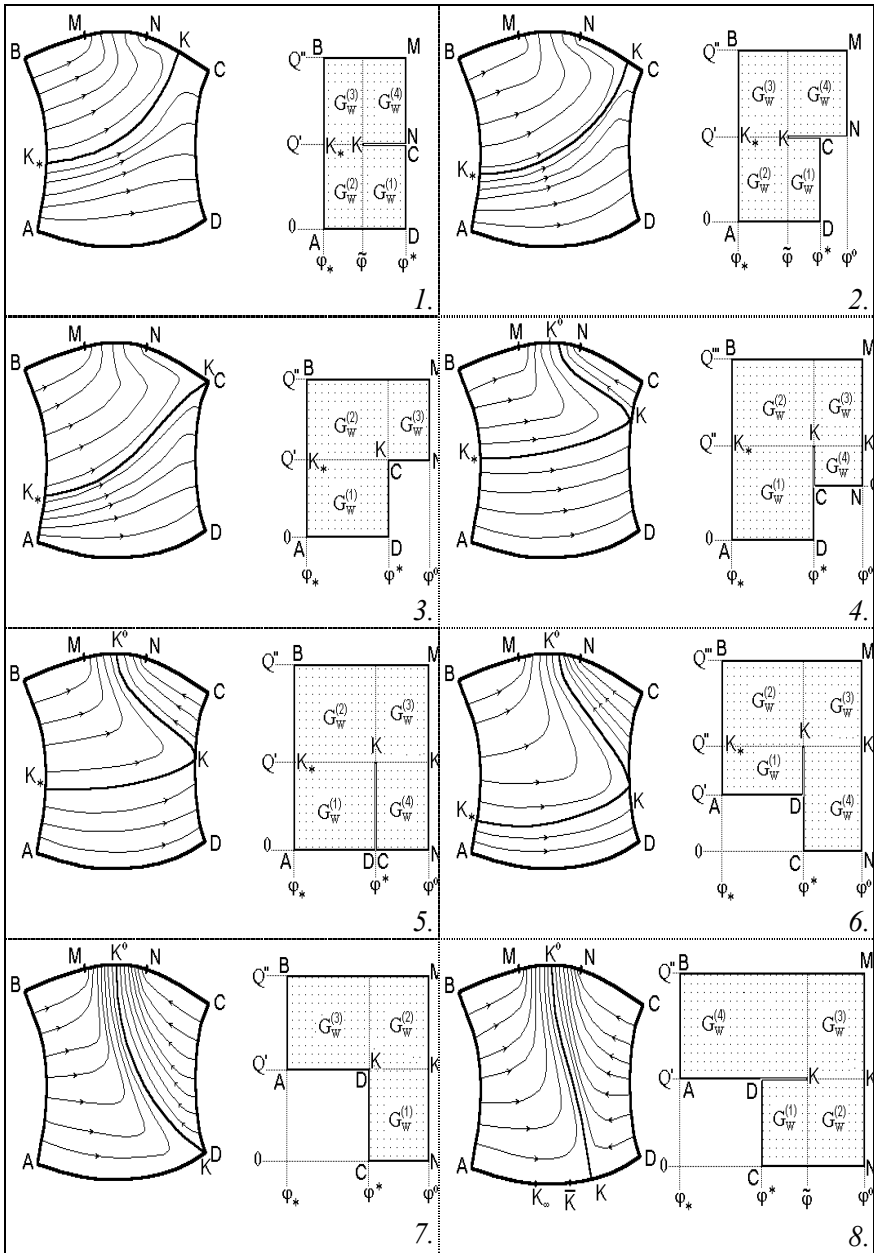


Рис. 1.143. Формування течії при $\varphi^* \leq \varphi^\circ < +\infty$

Якщо $\varphi^\circ < \varphi_{1.4}^\circ$, то розв'язуємо задачу (1.141.2), де $K = A$ (“компенсаційна умова”) і знаходимо відповідне значення $\varphi^\circ = \varphi_{1.2}^\circ$ (при $\varphi^\circ > \varphi_{1.4}^\circ$ в якості “ключової” розв'язуємо задачу (1.141.6)).

4) Якщо задане значення $\varphi^\circ < \varphi_{1.2}^\circ$ ($\varphi^\circ > \varphi_{1.2}^\circ$), то розв'язуємо задачу (1.141.1) при невідомих значеннях Q' , Q'' , $\tilde{\varphi}$ ((1.141.3) при невідомих значеннях Q' , Q'' , Q''').

Нижче наведемо приклади розв'язання різних конкретних “ключових” та “проміжних” задач.

1. Побудуємо алгоритм розв'язування поставленої задачі при великих значеннях потенціалу φ° , а саме, коли $K \in CD$, $\varphi^* < \varphi^\circ$ та $\psi|_D < \psi|_C$ (див. задачу (1.143.4)). При цьому область комплексного потенціалу має вертикальний розріз. Крайова задача на конформне відображення області G_ω на область G_z при невідомих Q' , Q'' , Q''' , φ° запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''', \\ f_2(x(\varphi, Q'''), y(\varphi, Q''')) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^\circ, \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = 0, \quad Q''' \geq \psi \geq Q', \\ f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, \quad \varphi^\circ \geq \varphi \geq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q' \leq \psi \leq Q'', \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q'' \geq \psi \geq 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_*. \end{array} \right.$$

де Q''' – сумарний потік, що входить в область G_z через ділянку AB , Q'' – потік, що виходить із неї через ділянку KD ($Q'' - Q'$ –

потік, що входить в область G_2 через ділянку KC , а $Q''' - Q'$ – потік, що виходить із G_2 через ділянку MN).

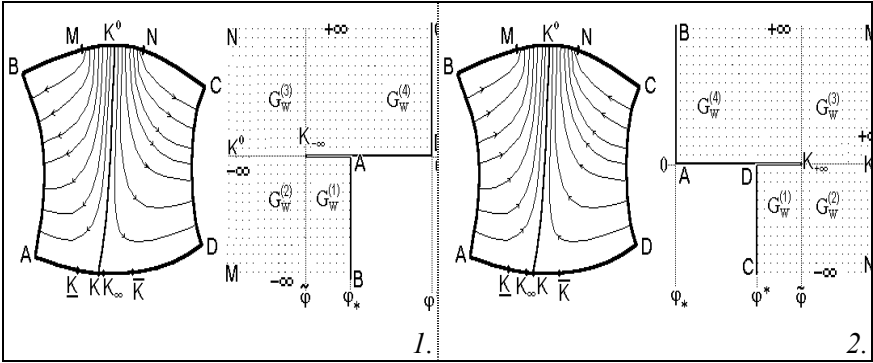


Рис. 1.144. Приклади формування течії при $\varphi^0 = \pm\infty$

Різницевий аналог цієї задачі у сітковій області $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}$,

де $G_\omega^{(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Phi_p + h_\varphi(i - a_1), \quad i = \overline{a_1, a_2};$

$\psi_j = \Psi_p + h_\psi(j - b_1), \quad j = \overline{b_1, b_2}; \quad h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1}, \quad h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1}, \quad \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi}\}$, а

параметри $\Phi_p, \Phi_k, a_1, a_2, \Psi_p, \Psi_k, b_1, b_2$, в залежності від значення l , визначаються згідно з таблицею 1.52, запишемо, наприклад, у вигляді:

Таблиця 1.52

l	Φ_p	Φ_k	a_1	a_2	Ψ_p	Ψ_k	b_1	b_2
1	φ_*	φ^*	0	m_0	0	Q''	0	n_1
2	φ_*	φ^*	0	m_0	Q''	Q'''	n_1	$n+1$
3	φ^*	φ^0	m_0	$m+1$	Q''	Q'''	n_1	$n+1$
4	φ^*	φ^0	m_0	$m+1$	Q'	Q''	n_0	n_1

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^{(l)2})x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^{(l)2})y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ i = \overline{a_1+1, a_2-1}, \quad j = \overline{b_1+1, b_2-1}, \quad l = \overline{1,4}; \end{cases} \quad (1.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f_3(x_{m_0,j}^{(1)}, y_{m_0,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \\ f_1(x_{0,j}^{(2)}, y_{0,j}^{(2)}) = 0, \quad f_2(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{n_1, n+1}, \\ f_3(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}) = 0, \quad f_2(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{n_0, n_1}, \\ f_4(x_{i,0}^{(1)}, y_{i,0}^{(1)}) = 0, \quad f_2(x_{i,n+1}^{(2)}, y_{i,n+1}^{(2)}) = 0, \quad i = \overline{0, m_0}, \\ f_2(x_{i,n_0}^{(4)}, y_{i,n_0}^{(4)}) = 0, \quad f_2(x_{i,n+1}^{(3)}, y_{i,n+1}^{(3)}) = 0, \quad i = \overline{m_0, m+1}; \end{array} \right. \quad (1.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i-1,n+1}^{(l)} = \gamma^{(l)}(y_{i,n+1}^{(l)} - y_{i,n}^{(l)}) \\ y_{i-1,n+1}^{(l)} - y_{i,n+1}^{(l)} = \gamma^{(l)}(x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i,n}^{(l)}) \end{array} \right\} \quad i = \overline{a_1+1, a_2-1}, \\ \left. \begin{array}{l} x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} = \gamma^{(l)}(y_{m+1,j}^{(l)} - y_{m+1,j-1}^{(l)}) \\ y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} = \gamma^{(l)}(x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m+1,j-1}^{(l)}) \end{array} \right\} \quad j = \overline{b_1+1, b_2-1}, \\ \left. \begin{array}{l} x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0-1,j}^{(1)} = \gamma^{(1)}(y_{m_0,j}^{(1)} - y_{m_0,j-1}^{(1)}) \\ y_{m_0-1,j}^{(1)} - y_{m_0,j}^{(1)} = \gamma^{(1)}(x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0,j-1}^{(1)}) \end{array} \right\} \quad j = \overline{1, n_1-1}; \end{array} \right. \quad (1.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{m_0,j}^{(2)} = x_{m_0,j}^{(3)}, \quad y_{m_0,j}^{(2)} = y_{m_0,j}^{(3)}, \quad j = \overline{n_1+1, n}, \\ \left. \begin{array}{l} \gamma^{(2)}(x_{m_0,j}^{(2)} - x_{m_0-1,j}^{(2)}) = \gamma^{(3)}(x_{m_0+1,j}^{(3)} - x_{m_0,j}^{(3)}) \\ \gamma^{(2)}(y_{m_0,j}^{(2)} - y_{m_0-1,j}^{(2)}) = \gamma^{(3)}(y_{m_0+1,j}^{(3)} - y_{m_0,j}^{(3)}) \end{array} \right\} \quad j = \overline{n_1, n+1}, \\ \left. \begin{array}{l} x_{i,n_1}^{(l_1)} = x_{i,n_1}^{(l_2)}, \quad y_{i,n_1}^{(l_1)} = y_{i,n_1}^{(l_2)}, \quad i = \overline{a_1+1, a_2-1}, \\ \gamma^{(l_2)}(x_{i,n_1}^{(l_1)} - x_{i,n_1-1}^{(l_1)}) = \gamma^{(l_1)}(x_{i,n_1+1}^{(l_2)} - x_{i,n_1}^{(l_2)}) \\ \gamma^{(l_2)}(y_{i,n_1}^{(l_1)} - y_{i,n_1-1}^{(l_1)}) = \gamma^{(l_1)}(y_{i,n_1+1}^{(l_2)} - y_{i,n_1}^{(l_2)}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} l_1 = \overline{2, 3}, \quad l_2 = \overline{1, 4}, \\ i = \overline{a_1, a_2}; \end{array} \end{array} \right. \quad (1.62)$$

$$\gamma^{(l)} = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \times \quad (1.63)$$

$$\times \sum_{i,j=a_1, b_1}^{a_2-1, b_2-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)})^2}},$$

$$x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(l)}, \quad l = \overline{1, 4}.$$

Загальний розв'язок скінченно-різницевого рівнянь (1.59) у внутрішніх і граничних по вертикалі вузлах сіткового прямокутника G_ω^γ через значення в граничних вузлах по горизонталі згідно з формулами сумарних зображень Г. Положого [150, 151, 173], запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=b_1+1}^{b_2-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k^{(l)} + v_k^i B_k^{(l)} + \right. \\ \left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=a_1+1}^{a_2-1} \frac{v_k^{|t-l|}}{\mu_k^{-v_k}} \left(p_{b_1+1,k} x_{t,b_1}^{(l)} + p_{b_2-1,k} x_{t,b_2}^{(l)} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=b_1+1}^{b_2-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k^{(l)} + v_k^i D_k^{(l)} + \right. \\ \left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=a_1+1}^{a_2-1} \frac{v_k^{|t-l|}}{\mu_k^{-v_k}} \left(p_{b_1+1,k} y_{t,b_1}^{(l)} + p_{b_2-1,k} y_{t,b_2}^{(l)} \right) \right), \end{array} \right. \quad (1.64)$$

де $i = \overline{a_1, a_2}, \quad j = \overline{b_1+1, b_2-1}, \quad p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{b_2-b_1}} \sin \frac{(i-b_1)(k-b_1)\pi}{b_2-b_1},$

$$\eta_k = 1 + \gamma^{(l)2} - \gamma^{(l)2} \cos \frac{(k-b_1)\pi}{b_2-b_1}, \quad l = \overline{1, 4}, \quad \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1},$$

$$v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих параметрів $A_k^{(l)}, B_k^{(l)}, C_k^{(l)}, D_k^{(l)}, x_{i,b_1}^{(l)}, x_{i,b_2}^{(l)}, y_{i,b_1}^{(l)}, y_{i,b_2}^{(l)}$ ($l = \overline{1, 4}$) формується на основі рівнянь (1.60), (1.61) із додавкою умов склеювання (1.62) та використанням формул сумарних зображень (1.64) і умов (1.63). При її розв'язанні умовою закінчення

процесу може бути нерівність: $\sum_{l=1}^4 \left| \gamma^{(l)} - \gamma^{(k)} \right| < \varepsilon.$

2. Якщо ж область G_ω задана, тобто величини $\varphi_* < \varphi^* < \varphi^\circ$ і

$0 < Q' < Q'' < Q'''$ відомі, та допускається її покриття рівномірною сіткою, а G_z – вільна, а саме $BC = \{z: f_2(x, y) = \rho\}$, $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ – плаваючі точки на вільній кривій $BMNC$, де $f_2(x, y)$ задана гладка функція, ρ , x_M , x_N – невідомі параметри, тоді обернена крайова задача на конформне відображення області G_ω на G_z , що має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''', \\ f_2(x(\varphi, Q'''), y(\varphi, Q''')) = \rho, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^\circ, \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = \rho, \quad Q''' \geq \psi \geq Q', \\ f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = \rho, \quad \varphi^\circ \geq \varphi \geq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q' \leq \psi \leq Q'', \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q'' \geq \psi \geq 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_*; \end{array} \right.$$

зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих крайових умовах та умовах Коші-Рімана на границі ∂G_ω області G_ω .

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega' = G_\omega' \cup G_\omega'' = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + h_\varphi i, \quad i = \overline{0, m_0}, \quad \psi_j = h_\psi j, \quad j = \overline{0, n+1} \right\} \cup \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi^* + h_\varphi (i - m_0), \quad i = \overline{m_0, m+1}, \quad \psi_j = Q' + h_\psi (j - n_0), \quad j = \overline{n_0, n+1} \right\}$$

де
$$h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1} = \frac{\varphi^\circ - \varphi_*}{m_0} = \frac{\varphi^* - \varphi^\circ}{m+1 - m_0} \quad \text{та}$$

$$h_{\psi} = \frac{Q'''}{n+1} = \frac{Q''}{n_1} = \frac{Q'}{n_0} = \frac{Q''' - Q''}{n+1-n_1} = \frac{Q''' - Q'}{n+1-n_0} = \frac{Q'' - Q'}{n_1 - n_0} \quad \left(\gamma = \frac{h_{\varphi}}{h_{\psi}} \right),$$

запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \\ \text{якщо } \omega \in G'_{\omega}, \text{ то } \quad i=\overline{1, m_0 - 1}, \quad j=\overline{1, n}, \\ \text{якщо } \omega \in G''_{\omega}, \text{ то } \quad i=\overline{m_0 + 1, m}, \quad j=\overline{n_0 + 1, n}, \end{array} \right. \quad (1.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x'_{0,j}, y'_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad f_2(x'_{i,n+1}, y'_{i,n+1}) = \rho, \quad i = \overline{0, m_0}, \\ f_2(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}) = \rho, \quad i = \overline{m_0, m+1}, \quad f_2(x''_{m+1,j}, y''_{m+1,j}) = \rho, \quad j = \overline{n_0, n+1}, \\ f_2(x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}) = \rho, \quad i = \overline{m_0, m+1}, \quad f_3(x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}) = 0, \quad j = \overline{n_0, n_1}, \\ f_3(x'_{m_0,j}, y'_{m_0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \quad f_4(x'_{i,0}, y'_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m_0}; \end{array} \right. \quad (1.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x'_{i,n+1} - x'_{i-1,n+1} = \gamma(y'_{i,n+1} - y'_{i,n}) \\ y'_{i-1,n+1} - y'_{i,n+1} = \gamma(x'_{i,n+1} - x'_{i,n}) \end{array} \right\} \quad i = \overline{1, m_0 - 1}, \\ \left. \begin{array}{l} x'_{m_0,j} - x'_{m_0-1,j} = \gamma(y'_{m_0,j} - y'_{m_0,j-1}) \\ y'_{m_0-1,j} - y'_{m_0,j} = \gamma(x'_{m_0,j} - x'_{m_0,j-1}) \end{array} \right\} \quad j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \left. \begin{array}{l} x''_{i,n+1} - x''_{i-1,n+1} = \gamma(y''_{i,n+1} - y''_{i,n}) \\ y''_{i-1,n+1} - y''_{i,n+1} = \gamma(x''_{i,n+1} - x''_{i,n}) \end{array} \right\} \quad i = \overline{m_0 + 1, m}, \\ \left. \begin{array}{l} x''_{m+1,j} - x''_{m,j} = \gamma(y''_{m+1,j} - y''_{m+1,j-1}) \\ y''_{m,j} - y''_{m+1,j} = \gamma(x''_{m+1,j} - x''_{m+1,j-1}) \end{array} \right\} \quad j = \overline{n_0 + 1, n}, \end{array} \right. \quad (1.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{m_0,j} = x''_{m_0,j}, \quad y'_{m_0,j} = y''_{m_0,j}, \quad j = \overline{n_0 + 1, n}, \\ \left. \begin{array}{l} x'_{m_0,j} - x'_{m_0-1,j} = x''_{m_0+1,j} - x''_{m_0,j}, \\ y'_{m_0,j} - y'_{m_0-1,j} = y''_{m_0+1,j} - y''_{m_0,j} \end{array} \right\} \quad j = \overline{n_0, n+1}, \end{array} \right. \quad (1.68)$$

$$\text{де } \begin{cases} x'_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), & y'_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), & (\varphi_i, \psi_j) \in G'_\omega, \\ x''_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), & y''_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), & (\varphi_i, \psi_j) \in G''_\omega. \end{cases}$$

Розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1.65) у внутрішніх і граничних по вертикалі вузлах сіткового прямокутника G'_ω через значення в граничних вузлах по горизонталі знаходимо згідно загальних формул сумарних зображень Г. Положого [150, 151, 173], а саме

$$\begin{cases} x'_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k + v_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{m_0-1} \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x'_{t,0} + p_{n,k} x'_{t,n+1}) \right), \\ y'_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k + v_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{m_0-1} \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y'_{t,0} + p_{n,k} y'_{t,n+1}) \right), \end{cases} \quad (1.69)$$

$$i = \overline{0, m_0}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1}.$$

$$\begin{cases} x''_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k + v_k^i B_k + \right. \\ \left. + \gamma^2 \sum_{t=m_0+1}^m \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{n_0+1,k} x''_{t,n_0} + p_{n,k} x''_{t,n+1}) \right), \\ y''_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k + v_k^i D_k + \right. \\ \left. + \gamma^2 \sum_{t=m_0+1}^m \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{n_0+1,k} y''_{t,n_0} + p_{n,k} y''_{t,n+1}) \right), \end{cases} \quad (1.70)$$

$$i = \overline{m_0, m+1}, \quad j = \overline{n_0+1, n}, \quad \text{де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1-n_0}} \sin \frac{(j-n_0)(k-m_0)\pi}{n+1-n_0},$$

$$\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{(k-n_0)\pi}{n+1-n_0}, \quad \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі $A_k, B_k, C_k, D_k, x'_{i,0}, y'_{i,0}, x'_{i,n+1}, y'_{i,n+1}, x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}, x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}$ визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (1.66) – (1.68), де $x'_{0,j}, y'_{0,j}, x''_{m,j}, y''_{m,j}, x''_{m+1,j}, y''_{m+1,j}, x'_{i,n}, y'_{i,n}, x''_{i,n}, y''_{i,n}, x''_{m_0+1,j}, y''_{m_0+1,j}, x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}, x'_{m_0,j}, y'_{m_0,j}, x'_{m_0-1,j}, y'_{m_0-1,j}$ представлені за формулами (1.69), (1.70) (система (1.71)). Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин $\rho, x_N = x_{m+1,n_0}, x_M = x_{m+1,n+1}$. Розв'язуємо систему (1.71), наприклад, за методом Ньютона [155] та перевіряємо виконання умов:

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_0+1} \sum_{i=0}^{m_0} f_2(x'_{i,n+1}, y'_{i,n+1}) + \frac{1}{m-m_0+2} \sum_{i=m_0}^{m+1} f_2(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}) + \frac{1}{m-m_0+2} \sum_{i=m_0}^{m+1} f_2(x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}) + \frac{1}{n-n_0+2} \sum_{j=n_0}^{n+1} f_2(x''_{m+1,j}, y''_{m+1,j}) \right),$$

$$x_M = \frac{\gamma x_{m,n+1} + x_{m+1,n}}{1 + \gamma}, \quad x_N = \frac{x_{m+1,n_0} + \gamma x_{m,n_0}}{1 + \gamma}.$$

Умовою закінчення процесу може бути нерівність:

$$\left| \rho^{(k+1)} - \rho^{(k)} \right| + \left| x_M^{(k+1)} - x_M^{(k)} \right| + \left| x_N^{(k+1)} - x_N^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

3. У випадку, коли область комплексного потенціалу G_ω має горизонтальний розріз (див., напр., задачу (1.142.7)) загальний розв'язок системи скінченно-різницевих рівнянь типу (1.59) отримуємо за формулами сумарних зображень у внутрішніх і граничних по горизонталі вузлах сіткового прямокутника через значення в граничних вузлах по вертикалі у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k} \left(\mu_k^j A_k^{(l)} + v_k^j B_k^{(l)} + \right. \\ &\left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k^{-v_k}} \left(p_{a_1+1,k} x_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} x_{a_2,t}^{(l)} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k} \left(\mu_k^j C_k^{(l)} + v_k^j D_k^{(l)} + \right. \\ &\left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{v_k^{|j-t|}}{\mu_k^{-v_k}} \left(p_{a_1+1,k} y_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} y_{a_2,t}^{(l)} \right) \right), \end{aligned} \right.$$

$$i = \overline{a_1+1, a_2-1}, \quad j = \overline{b_1, b_2}, \quad l = \overline{1, 4},$$

де
$$p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{a_2-a_1}} \sin \frac{(i-a_1)(k-a_1)\pi}{a_2-a_1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^{(l)2} - \gamma^{(l)2} \cos \frac{(k-a_1)\pi}{a_2-a_1},$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi}, \quad h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1}, \quad h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1},$$

а параметри $\Phi_p, \Phi_k, a_1, a_2, \Psi_p, \Psi_k, b_1, b_2$, в залежності від значення l , визначаються згідно з таблицею 1.53.

Таблиця 1.53

l	Φ_p	Φ_k	a_1	a_2	Ψ_p	Ψ_k	b_1	b_2
1	$\tilde{\varphi}$	φ^*	M_0	$m+1$	0	\underline{Q}'	0	n_0
2	φ_*	$\tilde{\varphi}$	0	m_0	0	\underline{Q}'	0	n_0
3	φ_*	$\tilde{\varphi}$	0	m_0	\underline{Q}'	\underline{Q}''	n_0	$n+1$
4	$\tilde{\varphi}$	φ°	M_0	m_1	\underline{Q}'	\underline{Q}''	n_0	$n+1$

Зауважимо, що знаючи основний проміжок, до якого належить φ° (наприклад, $\phi_* < \varphi^\circ < \varphi^*$), для розв'язку поставленої задачі потрібно розв'язати ще щонайбільше дві “ключові” задачі.

1.4.2. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з криванням у граничних умовах

У попередньому параграфі показано, що при наявності

джерела поперечних збурень MN вихідного потоку не маємо можливості безпосередньо перейти до оберненої задачі (не відомо, яку із областей G_ω слід вибирати). Тобто, разом з побудовою алгоритмів знаходження наближеного розв'язку відповідної нелінійної оберненої задачі в кожному конкретному випадку формування течії у фізичній області виникає проблема її вибору.

Разом з цим, на такі задачі можна дивитись як на проблеми іншого роду, що пов'язані із знаходженням тих значень параметра φ° , при яких має місце той або інший з можливих випадків. Тобто, має сенс говорити про них як про задачі з керуванням в широкому розумінні цього терміну. Як покажемо далі, накладаючи певні умови, можна при цьому перейти і до загальноприйнятих постановок задач на оптимізацію та керування.

Особливий інтерес представляють випадки, що визначаються єдиним значенням φ° (названі нами «ключовими» або «оптимізаційними»). Відповідні їм математичні постановки задач можуть бути сформульовані як безпосередньо, виходячи з фізичного і геометричного змістів задачі, так і з точки зору оптимізації певних функціоналів (перетоків) відносно φ° як параметра керування.

У цьому параграфі процедуру вибору (визначення відповідного варіанта), а також постановки «ключових» задач, як задач оптимізації і керування представимо на прикладах формування течії для характерних випадків (які характеризуються положенням ліній розділу окремих ділянок цієї течії), що виникають, коли потенціал φ° на «ділянці збурення» пробігає всеможливі значення, які не перевищують значення меншого із заданих потенціалів на вихідних граничних еквіпотенціальних лініях.

Можливі випадки формування течії і відповідних областей комплексного потенціалу, коли $-\infty < \varphi^\circ \leq \varphi_*$, зображені на рис. 1.141. Зокрема, на рис. 1.141.1 і 1.141.2 представлені ті з них, для яких ділянка MN границі BC є лінією втоку, а AB і CD – лініями витоку. Випадок, зображений на рис. 1.141.2, є ключовим у тому розумінні, що точка розгалуження K лінії розділу течії збігається з точкою A ($K = A$). На рис. 1.141.3 – 1.141.5 зображені випадки, коли частина границі AK є лінією втоку в область, а BK – лінією витоку, причому на рис. 1.141.4 зображений ключовий випадок у тому розумінні, що витрати втоку і витоку є рівними (сумарний потік через даний контур дорівнює нулю). На рис. 1.141.6 – 1.141.8 зображені форми областей $G_{\underline{z}}$ і G_{ω} , для яких значення φ° є таким, що відсутнє перетікання речовини між MN і AB . При цьому на рис. 1.141.6 зображений ключовий із таких випадків у тому розумінні, що $K = B$.

З метою вибору одного з 8 випадків (див. рис. 1.141) і розв'язання відповідної оберненої задачі за заданими граничними значеннями потенціалу φ_* , φ^* , $\varphi^\circ = \varphi_\circ^\circ$ побудуємо загальний алгоритм у такий спосіб: розв'язуємо допоміжну ключову задачу (1.141.4), де значення φ° знаходиться в процесі розв'язання даної задачі при додатковій «компенсаційній» умові $\psi|_A = \psi|_B$ (позначимо це значення φ° через $\varphi_{1.4}^\circ$). Потім перевіримо належність φ_\circ° одному з проміжків $(-\infty, \varphi_{1.4}^\circ)$, $(\varphi_{1.4}^\circ, \varphi_*)$. У випадку $\varphi_\circ^\circ = \varphi_{1.4}^\circ$ задача є розв'язаною. Якщо $\varphi_\circ^\circ < \varphi_{1.4}^\circ$, то розв'язуємо задачу (1.141.2), де $K = A$ (компенсаційна умова) і визначаємо відповідне значення $\varphi^\circ = \varphi_{1.2}^\circ$, при $\varphi_\circ^\circ > \varphi_{1.4}^\circ$ в якості ключової розв'язуємо задачу (1.144.6) при компенсаційній умові $K = B$. Якщо $\varphi_\circ^\circ < \varphi_{1.2}^\circ$, то

розв'язуємо задачу (1.141.1) при невідомих значеннях Q' , Q'' , $\tilde{\varphi}$, якщо ж $\varphi_0^\circ > \varphi_{1,2}^\circ$, то – (1.141.3) при невідомих Q' , Q'' , Q''' . При $\varphi_0^\circ < \varphi_{1,6}^\circ$ – (1.141.5) з невідомими Q' , Q'' , Q''' , а при $\varphi_0^\circ > \varphi_{1,6}^\circ$ – (1.141.7) з невідомими Q' , Q'' , $\tilde{\varphi}$. Якщо ж $\varphi^\circ = \varphi_*$, то розв'язуємо задачу (1.141.8).

Зауважимо, що розглянута вище задача вибору визначеного випадку, у першу чергу – ключового, формування течії в залежності від значення потенціалу φ° і запропонований вище алгоритм вибору представляють як допоміжне до розв'язання загальної задачі значення, так і самостійний інтерес. Описані тут «ключові» випадки є одночасно різного роду оптимізаційними варіантами для функціоналів виду $Q = \int_L -v_y dx + v_x dy$, де L – визначені ділянки границі області.

Перейдемо тепер до безпосереднього опису умов оптимізації і керування для кожного з ключових (оптимізаційних) випадків. Як уже вказувалося кожний з них може бути описаний виходячи з різних умов. Так, у випадку відсутності перетікання від AB до CD (задачі (1.141.1) і (1.141.2)), де граничні точки K^0 , K лінії розділу течії K^0K належать відповідно MN і AD , розглянутий процес можна характеризувати з однієї сторони відсутністю вертикального розрізу в області комплексного потенціалу при наявності правостороннього горизонтального розрізу, або рівністю

$$Q_{MN} = Q_{BA} + Q_{DC}, \text{ або ж умовами } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{AB} \leq 0 \text{ і } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CD} \geq 0. \text{ При цьому}$$

ключовий випадок (рис. 1.141.2) можна характеризувати з однієї сторони геометричною умовою співпадання точок $K = A$ (тобто, коли невизначений раніше параметр $\alpha = \alpha(K)$, що характеризує положення точки K на границі розглянутої області переходить у

ранг відомих параметрів), так і умовою мінімуму функціонала $Q = Q_{MN} = Q_{MN}(\varphi^\circ)$ – витрати через ділянку MN ($Q_{MN} = \int_{MN} -v_y dx + v_x dy \rightarrow \min$). З іншої сторони (виходячи з задач (1.141.2) – (1.141.8)) такий оптимізаційний варіант можемо характеризувати умовою мінімуму перетікання від AB до CD .

Аналогічно на рис. 1.141.6 – 1.141.8 зображені випадки відсутності перетікання від AB до MN , де (1.141.6) – «граничний» з них, коли $Q_{MN} \rightarrow \min$, а, виходячи з (1.141.5), (1.141.6): $Q_{MN} \rightarrow \max$ (або $Q_{MK^0} \rightarrow \min$).

На рис. 1.141.4 зображено течію у випадку, коли сумарна витрата через AB дорівнює нулеві. Відзначимо при цьому, що аналогічно можна керувати процесом за допомогою витрат Q через окремі ділянки границі області, що розглядається, а також за допомогою параметра $\alpha = \alpha(K) = \alpha(\varphi^\circ)$ – довжини дуги границі області G_z починаючи від деякої точки K_* до точки K , що пробігає значення інтервалу $\alpha \in (0, \alpha(\varphi_*)]$, де значення $\alpha = 0 = \alpha(K_*)$ відповідає значенню $\varphi^\circ = -\infty$ за умови $\max(\varphi_* - \tilde{\varphi})$ (на рис. 1.141.1 точка \underline{K} відповідає випадку $\min(\varphi_* - \tilde{\varphi})$ при $\varphi^\circ = -\infty$).

Для випадку (1.141.5) (в області комплексного потенціалу наявний вертикальний розріз, що відповідно до формул сумарних зображень [150, 151, 173] вимагає запису загального розв'язку різницевих рівнянь Лапласа у внутрішній і граничних по вертикалі вузлах через значення $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ й $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ у граничних вузлах по горизонталі) відповідна обернена нелінійна крайова задача на конформне відображення області G_ω на область G_z при невідомих Q' , Q'' , Q''' у диференціальній формі є такою:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''; \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q' \leq \psi \leq Q''; \\ f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi_*; \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = 0, \quad Q' \leq \psi \leq Q''; \\ f_2(x(\varphi, Q'''), y(\varphi, Q''')) = 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi^*; \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''; \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{array} \right.$$

де Q''' – сумарний потік, що виходить з області G_z через ділянку границі CD , Q'' – потік, що входить у неї через ділянку границі AK ($Q''' - Q'$ – потік, що входить в область G_z через ділянку границі MN , а $Q'' - Q'$ – потік, що виходить з G_z через ділянку границі KB).

Різницевий аналог цієї задачі у відповідній сітковій області

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}, \quad \text{де } G_\omega^{(l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Phi_p + h_\varphi (i - a_1), \quad i = \overline{a_1, a_2}; \right. \\ \left. \psi_j = \Psi_p + h_\psi (j - b_1), \quad j = \overline{b_1, b_2}; \quad h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1}, \quad h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1}, \right. \\ \left. \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi} \right\}, \quad \text{при } l=1: \Phi_p = \varphi^\circ, \Phi_k = \varphi_*, a_1 = 0, a_2 = m_0, \Psi_p = Q', \\ \Psi_k = Q'', b_1 = n_0, b_2 = n_1; l=2: \Phi_p = \varphi^\circ, \Phi_k = \varphi_*, a_1 = 0, a_2 = m_0, \\ \Psi_p = Q'', \Psi_k = Q''', b_1 = n_1, b_2 = n+1; l=3: \Phi_p = \varphi^\circ, \Phi_k = \varphi^*, \\ a_1 = m_0, a_2 = m+1, \Psi_p = Q'', \Psi_k = Q''', b_1 = n_1, b_2 = n+1; l=4: \\ \Phi_p = \varphi_*, \Phi_k = \varphi^*, a_1 = m_0, a_2 = m+1, \Psi_p = 0, \Psi_k = Q'', b_1 = 0,$$

$b_2 = n_1$ записуємо у вигляді

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2} (x_{i,j-1}^{(l)} - 2x_{i,j}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2} (y_{i,j-1}^{(l)} - 2y_{i,j}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ \overline{i=a_1+1, a_2-1}, \quad \overline{j=b_1+1, b_2-1}, \quad \overline{l=1,4}; \end{cases} \quad (1.72)$$

$$\begin{cases} f_2(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, & f_1(x_{m_0,j}^{(1)}, y_{m_0,j}^{(1)}) = 0, & \overline{j=n_0, n_1}, \\ f_2(x_{0,j}^{(2)}, y_{0,j}^{(2)}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}) = 0, & \overline{j=n_1, n+1}, \\ f_1(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, & \overline{j=0, n_1}, \\ f_4(x_{i,0}^{(4)}, y_{i,0}^{(4)}) = 0, & f_2(x_{i,n+1}^{(3)}, y_{i,n+1}^{(3)}) = 0, & \overline{i=m_0, m+1}, \\ f_2(x_{i,n_0}^{(1)}, y_{i,n_0}^{(1)}) = 0, & f_2(x_{i,n+1}^{(2)}, y_{i,n+1}^{(2)}) = 0, & \overline{i=0, m_0}; \end{cases} \quad (1.73)$$

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i-1,n+1}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (y_{i,n+1}^{(l)} - y_{i,n}^{(l)}) \\ y_{i-1,n+1}^{(l)} - y_{i,n+1}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i,n}^{(l)}) \end{aligned} \right\} & \overline{i=a_1+1, a_2-1}, \\ & \overline{l=2,3}, \\ \left. \begin{aligned} x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (y_{m+1,j}^{(l)} - y_{m+1,j-1}^{(l)}) \\ y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m+1,j-1}^{(l)}) \end{aligned} \right\} & \overline{j=b_1+1, b_2-1}, \\ & \overline{l=3,4}, \\ \left. \begin{aligned} x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0-1,j}^{(1)} &= \gamma^{(1)} (y_{m_0,j}^{(1)} - y_{m_0,j-1}^{(1)}) \\ y_{m_0-1,j}^{(1)} - y_{m_0,j}^{(1)} &= \gamma^{(1)} (x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0,j-1}^{(1)}) \end{aligned} \right\} & \overline{j=n_0+1, n_1-1}; \end{cases} \quad (1.74)$$

$$\begin{cases} x_{m_0,j}^{(2)} = x_{m_0,j}^{(3)}, & y_{m_0,j}^{(2)} = y_{m_0,j}^{(3)}, & \overline{j=n_1+1, n}, \\ \left. \begin{aligned} \gamma^{(3)} (x_{m_0,j}^{(2)} - x_{m_0-1,j}^{(2)}) &= \gamma^{(2)} (x_{m_0+1,j}^{(3)} - x_{m_0,j}^{(3)}) \\ \gamma^{(3)} (y_{m_0,j}^{(2)} - y_{m_0-1,j}^{(2)}) &= \gamma^{(2)} (y_{m_0+1,j}^{(3)} - y_{m_0,j}^{(3)}) \end{aligned} \right\} & \overline{j=n_1, n+1}, \\ x_{i,n_1}^{(4)} = x_{i,n_1}^{(2)}, & y_{i,n_1}^{(4)} = y_{i,n_1}^{(2)}, & \overline{i=a_1+1, a_2-1}, \\ \left. \begin{aligned} \gamma^{(4)} (x_{i,n_1+1}^{(4)} - x_{i,n_1}^{(4)}) &= \gamma^{(2)} (x_{i,n_1}^{(2)} - x_{i,n_1-1}^{(2)}) \\ \gamma^{(4)} (y_{i,n_1+1}^{(4)} - y_{i,n_1}^{(4)}) &= \gamma^{(2)} (y_{i,n_1}^{(2)} - y_{i,n_1-1}^{(2)}) \end{aligned} \right\} & \overline{(l_1, l_2) = (2,1), (3,4)}, \\ & & \overline{i=a_1, a_2}; \end{cases} \quad (1.75)$$

$$\gamma^{(l)} = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \sum_{i,j=a_1,b_1}^{a_2-1,b_2-1} \frac{s_j + s_{j+1}}{t_i + t_{i+1}}, \quad (1.76)$$

де $x_{i,j}^{(l)} = x^{(l)}(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y^{(l)}(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(l)}$, $l = \overline{1, 4}$,

$$s_j = \sqrt{(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2}, \quad t_i = \sqrt{(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2}.$$

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1.72), відповідно до формул сумарних зображень, запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=b_1+1}^{b_2-1} p_{j,k} \left(\mu_k^j A_k^{(l)} + \nu_k^j B_k^{(l)} + \right. \\ \left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=a_1+1}^{a_2-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{b_1+1,k} x_{t,b_1}^{(l)} + p_{b_2-1,k} x_{t,b_2}^{(l)}) \right), \\ y_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=b_1+1}^{b_2-1} p_{j,k} \left(\mu_k^j C_k^{(l)} + \nu_k^j D_k^{(l)} + \right. \\ \left. + \gamma^{(l)2} \sum_{t=a_1+1}^{a_2-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{b_1+1,k} y_{t,b_1}^{(l)} + p_{b_2-1,k} y_{t,b_2}^{(l)}) \right), \end{array} \right. \quad (1.77)$$

де $i = \overline{a_1, a_2}$, $j = \overline{b_1+1, b_2-1}$, $l = \overline{1, 4}$,

$$p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{b_2 - b_1}} \sin \frac{(i - b_1)(k - b_1)\pi}{b_2 - b_1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^{(l)2} - \gamma^{(l)2} \cos \frac{(k - b_1)\pi}{b_2 - b_1},$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих параметрів $A_k^{(l)}$, $B_k^{(l)}$, $C_k^{(l)}$, $D_k^{(l)}$, $x_{i,b_1}^{(l)}$, $x_{i,b_2}^{(l)}$, $y_{i,b_1}^{(l)}$, $y_{i,b_2}^{(l)}$ ($l = \overline{1, 4}$) формується на основі рівнянь (1.73) – (1.75) з використанням формул сумарних зображень (1.77) і рівняння (1.76). При її розв'язанні умовою закінчення процесу може бути

$$\text{нерівність: } \sum_{l=1}^4 \left| \gamma^{(k+1)} - \gamma^{(l)} \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Задача на конформне відображення області G_ω на область G_z при невідомих Q' , Q'' , φ° у ключовому (оптимальному) випадку (1.141.4) записується у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q'; \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''; \\ f_2(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi_*; \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''; \\ f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) = 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi^*; \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q''; \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{array} \right.$$

де Q'' – сумарний потік, що входить в область G_z через ділянку MN границі BC і виходить з неї через ділянку границі CD (Q' – потік, що виходить з області G_z через ділянку границі BK і входить у неї через ділянку границі AK).

Переходячи до відповідної сіткової області $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}$, де

$$G_\omega^{(l)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Phi_p + h_\varphi (i - a_1), \quad i = \overline{a_1, a_2}; \quad \psi_j = \Psi_p + h_\psi (j - b_1), \right. \\ \left. j = \overline{b_1, b_2}; \quad h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1}, \quad h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1}, \quad \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi} \right\}, \quad \text{при } l=1: \Phi_p = \varphi^\circ,$$

$\Phi_k = \varphi_*$, $a_1 = 0$, $a_2 = m_0$, $\Psi_p = 0$, $\Psi_k = Q'$, $b_1 = 0$, $b_2 = n_0$; $l = 2$:
 $\Phi_p = \varphi^\circ$, $\Phi_k = \varphi_*$, $a_1 = 0$, $a_2 = m_0$, $\Psi_p = Q'$, $\Psi_k = Q''$, $b_1 = n_0$,
 $b_2 = n + 1$; $l = 3$: $\Phi_p = \varphi_*$, $\Phi_k = \varphi^*$, $a_1 = m_0$, $a_2 = m + 1$, $\Psi_p = Q'$,
 $\Psi_k = Q''$, $b_1 = n_0$, $b_2 = n + 1$; $l = 4$: $\Phi_p = \varphi_*$, $\Phi_k = \varphi^*$, $a_1 = m_0$,
 $a_2 = m + 1$, $\Psi_p = 0$, $\Psi_k = Q'$, $b_1 = 0$, $b_2 = n_0$, різницевий аналог цієї

задачі запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2} (x_{i,j-1}^{(l)} - 2x_{i,j}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2} (y_{i,j-1}^{(l)} - 2y_{i,j}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ i = \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, \quad j = \overline{b_1 + 1, b_2 - 1}, \quad l = \overline{1, 4}; \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\begin{cases} f_2(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, & f_1(x_{m_0,j}^{(1)}, y_{m_0,j}^{(1)}) = 0, & j = \overline{0, n_0}, \\ f_2(x_{0,j}^{(2)}, y_{0,j}^{(2)}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}) = 0, & j = \overline{n_1, n + 1}, \\ f_1(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, & j = \overline{0, n_0}, \\ f_4(x_{i,0}^{(4)}, y_{i,0}^{(4)}) = 0, & f_2(x_{i,n+1}^{(3)}, y_{i,n+1}^{(3)}) = 0, & i = \overline{m_0, m + 1}, \\ f_2(x_{i,0}^{(1)}, y_{i,0}^{(1)}) = 0, & f_2(x_{i,n+1}^{(2)}, y_{i,n+1}^{(2)}) = 0, & i = \overline{0, m_0}; \end{cases} \quad (1.79)$$

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i-1,n+1}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (y_{i,n+1}^{(l)} - y_{i,n}^{(l)}) \\ y_{i-1,n+1}^{(l)} - y_{i,n+1}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (x_{i,n+1}^{(l)} - x_{i,n}^{(l)}) \end{aligned} \right\} & i = \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, & l = \overline{2, 3}, \\ \left. \begin{aligned} x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (y_{m+1,j}^{(l)} - y_{m+1,j-1}^{(l)}) \\ y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)} (x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m+1,j-1}^{(l)}) \end{aligned} \right\} & j = \overline{b_1 + 1, b_2 - 1}, & l = \overline{3, 4}, \\ \left. \begin{aligned} x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0-1,j}^{(1)} &= \gamma^{(1)} (y_{m_0,j}^{(1)} - y_{m_0,j-1}^{(1)}) \\ y_{m_0-1,j}^{(1)} - y_{m_0,j}^{(1)} &= \gamma^{(1)} (x_{m_0,j}^{(1)} - x_{m_0,j-1}^{(1)}) \end{aligned} \right\} & j = \overline{1, n_0}; \end{cases} \quad (1.80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_{m_0,j}^{(2)} = x_{m_0,j}^{(3)}, \quad y_{m_0,j}^{(2)} = y_{m_0,j}^{(3)}, \quad j = \overline{n_0 + 1, n}, \\
\left. \begin{array}{l}
\gamma^{(3)} \left(x_{m_0,j}^{(2)} - x_{m_0-1,j}^{(2)} \right) = \gamma^{(2)} \left(x_{m_0+1,j}^{(3)} - x_{m_0,j}^{(3)} \right) \\
\gamma^{(3)} \left(y_{m_0,j}^{(2)} - y_{m_0-1,j}^{(2)} \right) = \gamma^{(2)} \left(y_{m_0+1,j}^{(3)} - y_{m_0,j}^{(3)} \right)
\end{array} \right\} \quad j = \overline{n_0, n+1}, \\
x_{i,n_1}^{(4)} = x_{i,n_1}^{(l_2)}, \quad y_{i,n_1}^{(4)} = y_{i,n_1}^{(l_2)}, \quad i = \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, \\
\left. \begin{array}{l}
\gamma^{(4)} \left(x_{i,n_1+1}^{(4)} - x_{i,n_1}^{(4)} \right) = \gamma^{(l_2)} \left(x_{i,n_1}^{(l_2)} - x_{i,n_1-1}^{(l_2)} \right) \\
\gamma^{(4)} \left(y_{i,n_1+1}^{(4)} - y_{i,n_1}^{(4)} \right) = \gamma^{(l_2)} \left(y_{i,n_1}^{(l_2)} - y_{i,n_1-1}^{(l_2)} \right)
\end{array} \right\} \quad \begin{array}{l}
(l_1, l_2) = (2, 1), (3, 4), \\
i = \overline{a_1, a_2};
\end{array} \\
\gamma^{(l)} = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \sum_{i,j=a_1,b_1}^{a_2-1,b_2-1} \frac{s_j + s_{j+1}}{t_i + t_{i+1}}.
\end{array} \quad (1.82)$$

Тут $x_{i,j}^{(l)} = x^{(l)}(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y^{(l)}(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(l)}$, $l = \overline{1, 4}$,

$$s_j = \sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2}, \quad t_i = \sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2}.$$

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1.78) записуємо у вигляді (1.77). Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих параметрів формується на основі рівнянь (1.79) – (1.81) з використанням формул сумарних зображень (1.77) і рівняння (1.82).

На основі отриманих значень $z_{i,j} = x_{i,j} + i y_{i,j}$ характеристичної функції струму $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$, легко обчислити значення компонентів v_x і v_y вектора швидкості даного поля \vec{v} у внутрішніх вузлах побудованої динамічної сітки:

$$v_{x_{i,j}} = v_x(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1} (x_{i+1,j} - x_{i,j}) \Delta \psi,$$

$$v_{y_{i,j}} = v_y(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1} (y_{i+1,j} - y_{i,j}) \Delta \psi,$$

$$\text{де } J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j}).$$

При цьому відмітимо, що в околі точки розгалуження (розділу течії) K (де швидкість близька до нуля), а також точок нескінченно

великих швидкостей M і N , де порушується конформність відображення, одержуваний за допомогою описаного вище методу чисельний розв'язок стає нестійким. Тому при обчисленні швидкості в даних околах доцільніше замість записаних формул користуватися, наприклад, відомими методами інтерполяції (екстраполяції). В околах інших кутових точок відповідні граничні лінії течії і еквіпотенціальні лінії є ортогональними, тому тут конформність не порушується.

Таким чином, для того, щоб побудувати алгоритм (програмний комплекс) розв'язку поставленої задачі при будь-якому значенні керуючого потенціалу φ° ($-\infty < \varphi^\circ \leq \varphi_*$) необхідно мати алгоритми розв'язання кожної з виділених вище задач (рис. 4.1) на конформні відображення $G_{\omega_0} \rightarrow G_z$, серед яких – чотири є ключовими (на оптимізацію тих або інших параметрів). Причому розв'язок кожної з ключових задач є одночасно розв'язком відповідної вихідної задачі з керуванням. А для розв'язування кожної з «проміжних» задач ((1.141.1), (1.141.3), (1.141.5), (1.141.7)), як і для інших проміжків ($\varphi_* < \varphi^\circ \leq \varphi^*$, $\varphi^* < \varphi^\circ \leq +\infty$), необхідно додатково розв'язати не більше двох ключових задач.

1.4.3. Побудова обчислювальних алгоритмів розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування

В цьому параграфі розглянемо задачу знаходження найменшого (оптимізаційного) зі значень керуючого потенціалу φ° при якому відсутній перетік від ділянки збурення MN до ділянки DC виходу течії з даної області (для задачі (1.142.7)), а також значень Q' , $Q'' - Q'$ перетоків відповідно від ділянки входу течії

AB до MN і до DC , побудови динамічної сітки і поля швидкості такого процесу. А саме у плоскій однозв'язній криволінійній області G_z (рис. 1.142.7) розглянемо модельну крайову задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{MN} = \varphi^\circ, \quad \psi|_{AD} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{BM \cup NC} = 0, \quad (\psi|_{BM} = Q'', \quad \psi|_{NC} = Q') \end{aligned} \quad (1.84)$$

де $Q'' - Q'$, Q' – невідомі значення величин втоків відповідно в ділянку збурення MN лінії течії BC і в ділянку CD виходу течії з даної області, φ° – керуючий потенціал ($\varphi_* < \varphi^\circ < \varphi^*$).

Така задача при заданому значенні φ° зводиться до конформного відображення $\omega = \omega(z)$ області G_z з невідомим розрізом уздовж ліній розділу течії K^*K на відповідну область комплексного потенціалу G_ω або до задачі на обернене конформне відображення $z = z(\omega)$ при відповідності кутових точок з паралельним обчисленням невідомих параметрів – витрат і ін. Ми тут за умови відсутності перетоків від MN до CD (рис. 1.142.7) ставимо ще вимогу мінімізації втоку $Q'' - Q'$ в ділянку збурення MN (останнє рівносильне знаходженню мінімального зі значень φ° при якому перетік від MN до CD відсутній, тобто, коли гранична точка K лінії розділу течії в даній області G_z співпадає з точкою N) (рис. 1.142.7).

Приймаючи в уваги умови мінімізації функціонала $Q'' - Q'$, відповідну (1.83), (1.84) обернену крайову задачу (рис. 1.142.7) при

невідомих φ° , Q' , Q'' у диференціальній формі запишемо так

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (1.85)$$

$$G_\omega = \bigcup_{l=1}^3 G_\omega^{(l)}, \quad G_\omega^{(3)} = \{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^\circ, 0 < \psi < Q'' \},$$

$$G_\omega^{(1)} = \{ (\varphi, \psi) : \varphi^\circ < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q' \},$$

$$G_\omega^{(2)} = \{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^\circ, 0 < \psi < Q' \};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 < \psi < Q'', \\ f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) = 0, \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^\circ, \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = 0, \quad Q' < \psi < Q'', \\ f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, \quad \varphi^\circ < \varphi < \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 < \psi < Q', \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*. \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Останню задачу зведено до розв'язання в області G_ω рівнянь Лапласа для функцій $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, залишивши умови Коші-Рімана лише в околі границі даної області. Її різницевий аналог у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega = \bigcup_{l=1}^3 G_\omega^{(l)}$, де

$$G_\omega^{(1)} = \{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi^\circ + \Delta\varphi^{(1)} \cdot (i - m_0), \quad i = \overline{m_0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi^{(1)} \cdot j, \quad j = \overline{0, n_0}; \quad \Delta\varphi^{(1)} = \frac{\varphi^* - \varphi^\circ}{m+1-m_0}, \quad \Delta\psi^{(1)} = \frac{Q'}{n_0}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{\Delta\varphi^{(1)}}{\Delta\psi^{(1)}}, \quad m_0, m, n_0 \in \mathbf{N} \},$$

$$G_\omega^{(2)} = \{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi^{(2)} \cdot i, \quad i = \overline{0, m_0}; \quad \psi_j = \Delta\psi^{(2)} \cdot j, \quad j = \overline{0, n_0};$$

$$\Delta\varphi^{(2)} = \frac{\varphi^\circ - \varphi_*}{m_0}, \quad \Delta\psi^{(2)} = \frac{Q'}{n_0}, \quad \gamma^{(2)} = \frac{\Delta\varphi^{(2)}}{\Delta\psi^{(2)}}, \quad m_0, n_0 \in \mathbf{N}\},$$

$$G_\omega^{\gamma^{(3)}} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi^{(3)} \cdot i, \quad i = \overline{0, m_0}; \quad \psi_j = \Delta\psi^{(3)} \cdot (j - n_0), \right.$$

$$\left. j = \overline{n_0, n+1}; \quad \Delta\varphi^{(3)} = \frac{\varphi^\circ - \varphi_*}{m_0}, \quad \Delta\psi^{(3)} = \frac{Q'' - Q'}{n+1-n_0}, \quad \gamma^{(3)} = \frac{\Delta\varphi^{(3)}}{\Delta\psi^{(3)}}, \right.$$

$m_0, n_0, n \in \mathbf{N}\}$ }, запишем так:

$$\begin{cases} \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{a_{ij}} + \frac{x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}}{b_{ij}} = 0, & x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \\ \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{a_{ij}} + \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{b_{ij}} = 0, & y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \end{cases} \quad (1.87)$$

де $a_{ij} = \Delta\varphi^{(1)2}$, $b_{ij} = \Delta\psi^{(1)2}$ при $i = \overline{m_0+1, m}$, $j = \overline{1, n_0-1}$,

$a_{ij} = \Delta\varphi^{(1)}\Delta\varphi^{(2)}$, $b_{ij} = \Delta\psi^{(1)}\Delta\psi^{(2)}$ при $i = m_0$, $j = \overline{1, n_0-1}$,

$a_{ij} = \Delta\varphi^{(2)2}$, $b_{ij} = \Delta\psi^{(2)2}$ при $i = \overline{1, m_0-1}$, $j = \overline{1, n_0-1}$,

$a_{ij} = \Delta\varphi^{(2)}\Delta\varphi^{(3)}$, $b_{ij} = \Delta\psi^{(2)}\Delta\psi^{(3)}$ при $i = \overline{1, m_0-1}$, $j = n_0$,

$a_{ij} = \Delta\varphi^{(3)2}$, $b_{ij} = \Delta\psi^{(3)2}$ при $i = \overline{1, m_0-1}$, $j = \overline{n_0+1, n}$;

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{0, m_0}, \\ f_2(x_{m_0,j}, y_{m_0,j}) = 0, & j = \overline{n_0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n_0}, y_{i,n_0}) = 0, & i = \overline{m_0, m+1}, \\ f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n_0}, \\ f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (1.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
f'_{1x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f'_{1y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\
j = \overline{0, n+1}, \\
f'_{2x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - f'_{2y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n+1} - x_{i,n}) = 0, \\
i = \overline{0, m_0}, \\
f'_{2x}(x_{m_0,j}, y_{m_0,j})(y_{m_0,j} - y_{m_0-1,j}) - f'_{2y}(x_{m_0,j}, y_{m_0,j})(x_{m_0,j} - x_{m_0-1,j}) = 0, \\
j = \overline{n_0, n+1}, \\
f'_{2x}(x_{i,n_0}, y_{i,n_0})(y_{i,n_0} - y_{i,n_0-1}) - f'_{2y}(x_{i,n_0}, y_{i,n_0})(x_{i,n_0} - x_{i,n_0-1}) = 0, \\
i = \overline{m_0, m+1}, \\
f'_{3x}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m+1,j} - y_{m,j}) - f'_{3y}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m+1,j} - x_{m,j}) = 0, \\
j = \overline{0, n_0}, \\
f'_{4x}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,0} - y_{i,1}) - f'_{4y}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,0} - x_{i,1}) = 0, \\
i = \overline{0, m+1}.
\end{array} \right. \quad (1.89)$$

Тут (1.89) – умови ортогональності (замість умов Коші-Рімана) для граничних і приграничних вузлів сіткової області. Співвідношення для визначення значень параметрів $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ одержимо на підставі умов “конформної подібності в малому” елементарних прямокутників із G_ω та відповідних їм криволінійних чотирикутників із G_z :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\gamma^{(1)} = \frac{1}{(m+1-m_0)n_0} \sum_{i=m_0}^m \sum_{j=0}^{n_0-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma^{(2)} = \frac{1}{m_0 n_0} \sum_{i=0}^{m_0-1} \sum_{j=0}^{n_0-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma^{(3)} = \frac{1}{(n+1-n_0)m_0} \sum_{i=0}^{m_0-1} \sum_{j=n_0}^n \gamma_{i,j},
\end{array} \right. \quad (1.90)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Виходячи з пропонованої в роботі методології, яка ґрунтується на почерговій параметризації величин $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z^y з використанням ідей методу блочної ітерації, представимо тут один із відповідних алгоритмів побудови чисельного розв'язання останньої задачі, що складається з таких основних моментів:

– маючи рівняння границі області G_z (у т.ч. координати точок M і N) та значення φ_*, φ^* , задаємо параметри сіткової області G_ω^y :

m_0, m, n_0, n (обчислюємо $\Delta\varphi^{(1)} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}$) і параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку;

– задаємо початкові наближення координат граничних вузлів (таким чином, щоб виконувалися умови (1.88)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів;

– за формулою (1.90) знаходимо початкові наближення $\gamma^{(l)} = \gamma^{(l)}(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомих параметрів $\gamma^{(l)}$, $l = \overline{1,3}$;

– визначаємо: $\Delta\psi^{(1)} = \frac{\Delta\varphi^{(1)}}{\gamma^{(1)}}$; $\Delta\psi^{(2)} = \Delta\psi^{(1)}$; $\Delta\varphi^{(2)} = \gamma^{(2)}\Delta\psi^{(2)}$;

$$\Delta\psi^{(3)} = \frac{\Delta\varphi^{(3)}}{\gamma^{(3)}};$$

– уточнюємо координати внутрішніх вузлів підобласті $G_\omega^{(1)}$ і на відріжку $i = m_0$ (за відповідними співвідношеннями (1.87));

– уточнюємо $\gamma^{(1)}$ (згідно (1.90)) і визначаємо $\Delta\varphi^{(1)} = \gamma^{(1)}\Delta\psi^{(1)}$, $\Delta\psi^{(2)} = \Delta\psi^{(1)}$;

– уточнюємо координати внутрішніх вузлів $G_{\omega}^{(2)}$ і на відрізку $j = n_0$ (згідно (1.87));

– відповідно до (1.90) знаходимо $\gamma^{(2)}$ і визначаємо $\Delta\varphi^{(2)} = \gamma^{(2)}\Delta\psi^{(2)}$, $\Delta\varphi^{(3)} = \Delta\varphi^{(2)}$;

– згідно з (1.87) уточнюємо координати внутрішніх вузлів області $G_{\omega}^{(3)}$;

– з (1.90) знаходимо $\gamma^{(3)}$ і визначаємо $\Delta\psi^{(3)} = \frac{\Delta\varphi^{(3)}}{\gamma^{(3)}}$,

$$\Delta\psi^{(1)} = \frac{\Delta\varphi^{(1)}}{\gamma^{(1)}};$$

– знаходимо нові наближення (у циклі) невідомих величин φ°, Q', Q'' за формулами

$$\varphi^{0(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\varphi_* + \varphi^* + \Delta\varphi_{(k)}^{(2)} m_0 - \Delta\varphi_{(k)}^{(1)} (m+1 - m_0) \right),$$

$$Q'^{(k+1)} = \Delta\psi^{(2)} n_0, \quad Q''^{(k+1)} = \Delta\psi^{(2)} n_0 + \Delta\psi^{(3)} (n+1 - n_0) \quad (k -$$

номер ітерації);

– уточнюємо координати граничних вузлів шляхом наближеного розв'язання системи рівнянь (1.88), (1.89);

– перевіряємо виконання умов:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \quad (1.91)$$

$$\left| \varphi^{\circ(k+1)} - \varphi^{\circ(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| Q'^{(k+1)} - Q'^{(k)} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| Q''^{(k+1)} - Q''^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Якщо умови (1.91) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо “похибку конформності” отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = \left| 1 - D^{(k+1)} \right|$, де D – осереднене по області G_z відношення

діагоналей її складових чотирикутників.

При необхідності підвищення порядку точності наближення розв'язку (зменшення похибки ε) збільшуємо параметри m_0, m, n_0, n і розв'язуємо задачу спочатку (оптимальне співвідношення між m_0, m, n_0, n досягається аналогічно до [40, 105, 179 – 182] шляхом мінімізації функціоналів типу Рімана). Значення компонентів вектора швидкості руху речовини знаходимо за формулами

$$v_{xi,j} = v_x(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j} - x_{i,j}) \Delta \psi,$$

$$v_{yi,j} = v_y(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j} - y_{i,j}) \Delta \psi,$$

де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})$.

Умовою закінчення ітераційного процесу обчислень може бути умова $\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} < \delta$, де $\delta_1 = \max_{i,j} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|$, $\delta_2 = \max_{i,j} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|$.

На рис. 1.145 зображена розрахункова динамічна сітка ідеального поля отримана за $k_M = 809$, $k_{Q1} = 302$, $k_{Q2} = 302$, $k_\varphi = 429$, $k_D = 93$ кроків ітерації (згідно формул (1.91)) з “похибкою конформності” $\varepsilon_* = 10^{-2}$ в області G_z при $f_1 = x - 1 - \sin \frac{y}{2}$, $f_2 = y - 18 - e^{\sin 0.5x}$, $f_3 = x - 20 - \cos \frac{y}{2}$, $f_4 = y - 1 - \cos \frac{x}{3}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $m_0 = 22$, $m = 30$, $n_0 = 13$, $n = 17$ і відповідна їй сіткова область комплексного потенціалу G_ω .

Як бачимо, одержаний нами розв'язок ключової задачі (1.78) (рис. 1.142) є фактично розв'язком вихідної задачі оптимізації втоку в ділянку збурення граничної лінії течії за умов відсутності

перетоку з останньої ділянки до границі виходу течії з даної області.

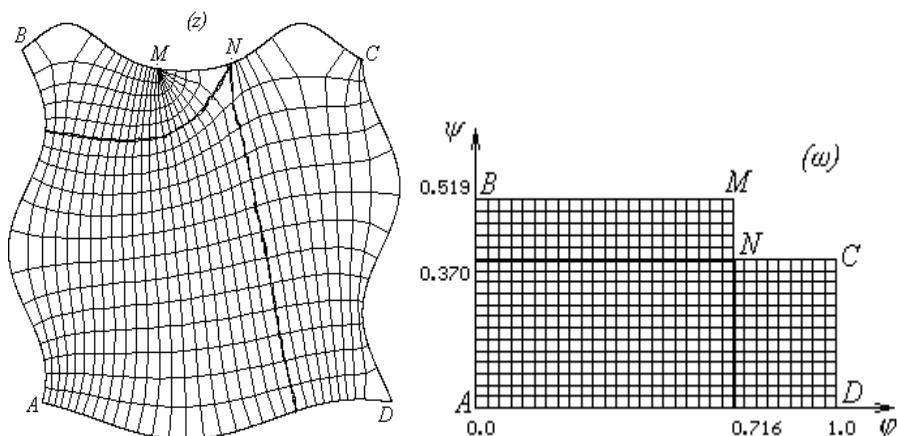


Рис. 1.145. Розрахункова динамічна сітка та відповідна їй область комплексного потенціалу

Особливістю представленого тут методу є можливість зупинки процесу обчислень при виконанні деяких з “умов зупинки” з автоматичним визначенням тих ділянок області G_z , де мають місце похибки більші заданої точності відносно інших умов, що дозволяє більш економно використовувати машинний час.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ДВО- ТА ТРИЗВ'ЯЗНИХ ПОРИСТИХ ПЛАСТАХ

У розділі перенесено методику математичного моделювання фільтраційних деформацій ґрунту, запропоновану Бомбою А.Я. та Хлапуком М.М., на випадки областей фільтрації складнішої геометрії (багатозв'язні криволінійні області), вирішено проблему врахування роздвоєння лінії течії при переході від багатозв'язної області фільтрації до однозв'язної при математичному моделюванні фільтраційних процесів у пористих пластах, розроблено ефективний числовий алгоритм розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних областей на основі відомого методу почергової параметризації характеристик процесу та середовища при моделюванні суфозійних явищ у ґрунтах, вирішено проблему вибору форми області комплексного потенціалу з множини усіх можливих у випадку тризв'язної модельної області фільтрації та розроблений відповідний евристичний алгоритм вибору, вперше, на основі результатів числових розрахунків, встановлено співвідношення між характеристиками середовища і процесу до та після деформації для випадків, коли фізична область фільтрації є багатозв'язною.

2.1. Нелінійні крайові задачі теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних модельних областей

2.1.1. Обернені крайові задачі на конформні відображення. Проблема вибору природного розрізу та врахування роздвоєння відповідної лінії течії у випадку двозв'язної модельної області

2.1.1.1. Математична постановка задачі. Розглянемо модельну задачу на знаходження гармонічної функції $\phi = \phi(x, y)$ (потенціалу) в двозв'язній криволінійній області G_Z , ($z = x + iy$), обмеженій двома гладкими замкненими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (або $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – внутрішнім, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – зовнішнім, при умовах: $\phi|_{L_*} = \phi_*$, $\phi|_{L^*} = \phi^*$, $-\infty < \phi_* < \phi^* < +\infty$ [53,71,73,81,100] (див. рис. 2.1).

Ввівши гармонічно спряжену до $\phi = \phi(x, y)$ функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, зафіксувавши на внутрішньому контурі L_* деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії (через AD та BC на рис. 2.1 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) переходимо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ [53,73,82] утвореної при цьому однозв'язної області $G_Z^0 = G_Z / \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \phi + i\psi : \phi_* < \phi < \phi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром Q (повною витратою) при відповідності чотирьох кутових точок (рис. 2.1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2.1)$$

$$\phi|_{AB} = \phi_*, \quad \phi|_{CD} = \phi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q.$$

Через геометричну складність області G_z^0 (криволінійний чотирикутник) та тривіальність відповідної їй області комплексного потенціалу G_ω (прямокутник) ми розглядатимемо замість прямої задачі на конформне відображення обернену до неї. Перехід до

оберненого відображення автоматично вирішує проблему побудови сітки при використанні сіткових чисельних методів, дозволяє побудувати гідродинамічну сітку руху речовини в області G_z , визначити фільтраційну витрату Q , що є суттєвим при вивченні різних процесів і явищ конвекції, масообміну, дифузії та ін. розчинних речовин, що забруднюють область, на фільтраційних полях (фонах).

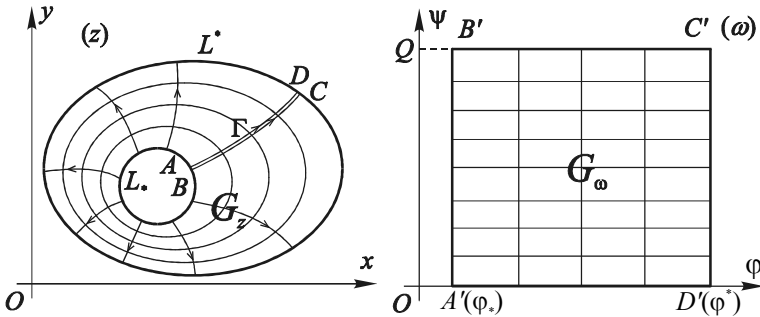


Рис. 2.1. Фізична область та відповідна їй область квазікомплексного потенціалу

Відповідна до (2.1) обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\phi, \psi) + iy(\phi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 при невідомій витраті Q та природному розрізі Γ запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \phi}, \quad (\phi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.2)$$

$$f^*(x(\phi_*, \psi), y(\phi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\phi^*, \psi), y(\phi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (2.3)$$

$$x(\phi, 0) = x(\phi, Q), \quad y(\phi, 0) = y(\phi, Q), \quad \phi_* \leq \phi \leq \phi^*,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\phi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\phi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \phi_* \leq \phi \leq \phi^*, \quad (2.4)$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\phi, \psi)}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\phi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \phi_* \leq \phi \leq \phi^*.$$

Останню задачу ми і будемо розв'язувати. Модифікуємо її для більшої зручності комп'ютерної реалізації алгоритму розв'язування. Той факт, що функції $x = x(\phi, \psi)$ та $y = y(\phi, \psi)$ задовольняють умовам Коші-Рімана (2.2), а, отже кожна з них окремо є гармонічною в області G_ω , дозволяє звести дану задачу до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, які є значно зручнішими при розв'язуванні на комп'ютері, при заданих нелінійних крайових умовах (2.3), (2.4) та умовах Коші-Рімана на ділянках $A'B'$ та $C'D'$ границі ∂G_ω області G_ω . Останні крайові умови зручно замінити на умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області [53,82,176]:

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi(x, y) \cdot \text{grad}f_*(x, y) &= 0, & (x, y) \in AB, \\ \text{grad}\psi(x, y) \cdot \text{grad}f^*(x, y) &= 0, & (x, y) \in CD. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Довільність вибору точки A та вибір розрізу вздовж відповідної лінії течії дозволяє також замінити умови (2.4) більш прийнятними для комп'ютерної реалізації рівняннями Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$.

2.1.1.2. Різницевий аналог задачі та алгоритм чисельного розв'язування.

Введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\phi_i, \psi_j) : \phi_i = \phi_* + i \cdot \Delta\phi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = \overline{0, m}; \quad \Delta\phi = \frac{\phi^* - \phi_*}{n}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\phi}\}$, де $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\phi, \Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по змінним ϕ та ψ .

Рівняння Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ будемо апроксимувати дво-яко: використовуючи в одному випадку п'ятиточковий шаблон типу

“хрест”, а в другому – дев’ятиточкий шаблон типу “ящик” [155,190]. Отримаємо системи сіткових рівнянь (2.6) та (2.7) відповідно, які будемо розв’язувати у внутрішності сіткової області G_ω та розрізі Γ :

$$\begin{cases} x_{i,j-1} - 2(1 + \gamma^2)x_{i,j} + x_{i,j+1} + \gamma^2(x_{i-1,j} + x_{i+1,j}) = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ y_{i,j-1} - 2(1 + \gamma^2)y_{i,j} + y_{i,j+1} + \gamma^2(y_{i-1,j} + y_{i+1,j}) = 0, & j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} x_{i,j} = \alpha(x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \beta(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) + \\ \quad + \frac{(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j+1})}{20}, & i = \overline{1, n-1}, \\ y_{i,j} = \alpha(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \beta(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) + \\ \quad + \frac{(y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j+1} + y_{i+1,j+1})}{20}, & j = \overline{0, m-1}, \\ \alpha = 3\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 / 5 / (\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 + \Delta\varphi^4\Delta\psi^2) - 0.1, \\ \beta = 3\Delta\varphi^4\Delta\psi^2 / 5 / (\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 + \Delta\varphi^4\Delta\psi^2) - 0.1, \end{cases} \quad (2.7)$$

де $x_{i,j} = x(\phi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\phi_i, \psi_j)$.

Використані числові схеми мають другий порядок апроксимації. Їх збіжність та стійкість повністю досліджена в [190,191].

Умови ортогональності (2.5) у сітковій області G_ω^γ записуються [73,81,176] у вигляді:

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0,$$

$$j = \overline{1, m-1};$$

$$\begin{aligned} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Відповідні (2.3) сіткові рівняння записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Невідому витрату Q будемо знаходити за формулою $Q = m\Delta\phi \cdot \gamma$, де γ – конформний інваріант області G_z^0 (відношення сторін прямокутника G_w), який можна одержати на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{nm} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \gamma_{i,j}, \quad (2.10)$$

$$\text{де } \gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}.$$

Отже, різницєва постановка задачі описується системою рівнянь (2.6) – (2.10). Система умовно складається з чотирьох груп рівнянь:

- апроксимованих рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ (2.6) та (2.7);
- різницєвих аналогів умов ортогональності ізоліній до границі фізичної області (2.8);
- умов відповідності граничних вузлів двох областей та умов періодичності (2.9);
- рівняння для наближеного знаходження величини γ (2.10).

Кожній з перелічених груп рівнянь (окрім передостанньої) відповідає своя група невідомих: координати внутрішніх вузлів сітки G_z^y для першої групи, граничних вузлів сітки G_z^y – для другої та значення витрати Q – для (2.10). Група рівнянь (2.9) може бути автоматично виключена з системи різницєвих рівнянь за рахунок використання параметричного задання контурів L_* та L^* , що обмежують область G_z , замість неявного способу їх задання та зберігання значень невідомих координат вузлів розрізу Γ при комп’ютерній реалізації алгоритму в одних і тих же комірках пам’яті ЕОМ. Алгоритм знаходження наближеного розв’язку різни-

цевої задачі (2.6) – (2.10) побудуємо шляхом поетапної параметризації з використанням ідей методу блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності [166]. Це означає, що ми будемо ітераційно “підправляти” невідомі з однієї групи, розв’язуючи групу рівнянь, що їм відповідає, фіксуючи при цьому невідомі з інших груп (параметризуючи їх).

Лише перша група рівнянь, а саме (2.6) та (2.7), є лінійною (за умови фіксації γ). Причому матриці різницевих рівнянь Лапласа є симетричними, додатно визначеними та володіють властивістю діагональної переваги як по рядкам так і по стовпцям, що дає можливість застосувати для розв’язання даних систем ітераційний метод Зейделя. Як відомо, цей метод за даних умов характеризується повільною збіжністю для великих n та m (кількість ітерацій порядку $O(n^2+m^2)$). Щоб пришвидшити його збіжність, як це було зроблено в [99], згідно із відомим методом релаксації [39,155], введемо деякий параметр $0 < \tau < 2$, яким можна буде регулювати швидкість збіжності методу Зейделя:

$$u^{(k+1)} = \tau \cdot u^{-(k+1)} + (1 - \tau) \cdot u^{(k)}, \quad (2.11)$$

де $u^{(k)}$, $u^{(k+1)}$ – відповідно вектори k -го та $(k+1)$ -го наближення розв’язку систем (2.6), (2.7); τ – релаксаційний параметр; $u^{-(k+1)}$ – вектори, які обчислюються за ітераційними формулами (2.12) чи (2.13).

$$\begin{cases} x_{i,j}^{-(k+1)} = \frac{1}{2(\gamma^2 + 1)} (\gamma^2 (x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k)}) + (x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)})), & i = \overline{1, n-1}, \\ y_{i,j}^{-(k+1)} = \frac{1}{2(\gamma^2 + 1)} (\gamma^2 (y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k)}) + (y_{i,j+1}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k)})), & j = \overline{0, m-1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Як відомо, при оптимальному своєму значенні $\tau = \tau_{\text{опт}}$ кількість ітерацій буде порядку $O(n+m)$, тобто на порядок меншою ніж при використанні звичайного методу Зейделя. Останнє дає значне при-

швидшення на великих сітках.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j}^{-(k+1)} = \alpha(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k)}) + \beta(x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)}) + \\ \quad + \frac{(x_{i-1,j-1}^{(k)} + x_{i+1,j-1}^{(k)} + x_{i-1,j+1}^{(k)} + x_{i+1,j+1}^{(k)})}{20}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ y_{i,j}^{-(k+1)} = \alpha(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k)}) + \beta(y_{i,j+1}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k)}) + \\ \quad + \frac{(y_{i-1,j-1}^{(k)} + y_{i+1,j-1}^{(k)} + y_{i-1,j+1}^{(k)} + y_{i+1,j+1}^{(k)})}{20}, \quad j = \overline{0, m-1}, \\ \alpha = 3\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 / 5 / (\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 + \Delta\varphi^4\Delta\psi^2) - 0.1, \\ \beta = 3\Delta\varphi^4\Delta\psi^2 / 5 / (\Delta\varphi^2\Delta\psi^4 + \Delta\varphi^4\Delta\psi^2) - 0.1. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Наближене значення τ_{opt} будемо знаходити в процесі послідовної верхньої релаксації ($1 < \tau < 2$). Процес вибору оптимального параметра релаксації виглядає так: початкові ітерації проводимо з параметром $\tau=1$, в процесі ітерацій знаходимо наближено таке значення $\rho_1 = \rho^{(k_1)}$, де k_1 – мінімальне число, для якого виконується умова:

$$\left| \frac{\rho^{(k_1)}}{\rho^{(k_1-1)}} - 1 \right| \leq \delta_1 \quad (2.14)$$

з заданою точністю δ_1 . Причому $\rho^{(k)}$ визначаються за формулою:

$$\rho^{(k)} = \frac{\|u^{(k)} - u^{(k-1)}\|_2}{\|u^{(k-1)} - u^{(k-2)}\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^{n-1,m-1} (u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)})^2}{\sum_{i,j=1}^{n-1,m-1} (u_{i,j}^{(k-1)} - u_{i,j}^{(k-2)})^2}}. \quad (2.15)$$

Визначивши величину ρ_1 , наближення оптимального значення параметра релаксації – деяке τ_0 знайдемо за формулою:

$$\tau_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_1^2}}. \quad (2.16)$$

Для всіх подальших ітерацій будемо використовувати вже

знайдений нами релаксаційний параметр τ_0 .

Для розв'язування системи нелінійних рівнянь ортогональності можна використовувати різноманітні чисельні методи (метод Ньютона, метод поділу відрізка пополам, і т.п. [39,155]). В нашому випадку для знаходження (підправки) параметрів вузлів на границях G_Z в силу того, що межі їх знаходження відомі заздалегідь, був обраний метод поділу відрізка пополам.

Алгоритм поетапної параметризації для розв'язання різницевої задачі (2.6)–(2.10) можна представити у вигляді послідовності кроків:

0. Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z або неявно ($L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$) або, що зручніше для реалізації на ЕОМ, параметрично ($L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$); кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного потенціалу G_ω деякої сіткової області G_ω^y (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_i , $i = \overline{1,3}$ та рівень конформності δ_* відображення, яке ми хочемо побудувати.
1. Вибираємо на внутрішньому контурі точку A та задаємо початкове наближення шуканих координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$ та $y_{i,j}^{(0)}$, так щоб виконувалися умови (2.9). У випадку параметричного задання границі області дана умова виконується автоматично, що спрощує реалізацію алгоритму на ЕОМ.
2. Задаємо початкові наближення шуканих координат внутрішніх вузлів динамічної сітки ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$) та початкове наближення втрати Q (для цього розв'язуються рівняння (2.6) або (2.7) та ви-

користовується формули $Q = m\Delta\phi \cdot \gamma$ та (2.10)). $k := 0$.

3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ за ітераційними схемами (2.11), (2.12) або (2.11), (2.13), враховуючи при цьому періодичність шуканих функцій. Уточнення найкраще проводити, використовуючи багатосіткові методи [22,27], які дозволяють значно ефективніше використовувати процесорний час. В п.3 алгоритму достатньо проводити або одну або невелику кількість ітерацій багатосіткового методу, адже алгоритм передбачає багаторазове виконання даної операції.
4. “Підправляємо” граничні вузли, розв’язуючи систему рівнянь ортогональності ліній течії до границі області.
5. Знаходимо нове наближення $Q^{(k)}$ величини Q , використовуючи значення конформного інваріанту $\gamma^{(k)}$, знайдене за формулою (2.10).
6. Якщо зміна невідомої величини Q за останню проведену ітерацію більша за ε_3 , то переходимо до п.3
7. Знаходимо величину зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$. Якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до п.3
8. Перевіряємо максимальне зміщення за нормою \mathfrak{R}_2 внутрішніх вузлів за останню проведену ітерацію алгоритму. Якщо вона більша за ε_1 , то продовжуємо ітераційний процес з п.3.
9. Оцінюємо ступінь конформності (2.17) отриманого відображення області комплексного потенціала на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії. Якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^y (для цього збільшуємо параметри

n , m , оптимальність співвідношення між якими досягається аналогічно до [99,100,105,106,179] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана) та переходимо до п.3, інакше – кінець роботи алгоритму: задача розв’язана із необхідною точністю.

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad (2.17)$$

$$\text{де } \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})| - \text{нев'язки апроксима-$$

цій рівнянь (2.2).

Слід зауважити, що умовою застосування наведеного вище алгоритму є достатньо близьке початкове наближення координат граничних вузлів та невідомої величини Q до шуканого розв’язку. Крім того відображення $F: Q^{(k-1)} \rightarrow Q^{(k)}$, яке відповідає загальній ітерації алгоритму, повинно бути стискаючим. Лише в цьому випадку слід очікувати збіжності запропонованого алгоритму. Надалі будемо розв’язувати задачі, що задовольняють вище вказаним умовам. Як показує практика, клас таких задач є достатньо широким. Крім того, зауважимо, що при фіксованих n , m в результаті розв’язання задачі ми будемо конформне відображення не області G_Z на G_ω , а деякої області G'_Z (спотвореної G_Z) на G_ω . Через це прямим граничним кутам області G_Z можуть відповідати гострі чи тупі граничні кути області G'_Z . Це в свою чергу порушить конформність, отриманої в результаті розв’язку задачі, сітки. Тому для досягнення більшої конформності шуканої сітки в таких випадках необхідно буде збільшити кількість вузлів розбиття ортогональної сітки – величини n та m . Окреслюється цілий клас задач, розв’язування яких є ефективним оберненими методами, які розглядаються в даній роботі (відображення $G_\omega \rightarrow G_Z$). Це клас за-

дач, для яких G'_Z мало відрізняється від G_Z . Для інших класів задач більше підходять прямі методи (відображення $G_Z \rightarrow G_\omega$).

2.1.1.3. Побудова поля швидкостей на основі динамічної сітки.

На основі побудованої за раніше описаним алгоритмом динамічної сітки, рівняння руху та умов Коші-Рімана (2.1), для подальшого використання результатів чисельних розрахунків при розв'язуванні задач типу “фільтрація-конвекція” та “фільтрація-дифузія” неважко знайти вектор швидкості у кожній точці побудованої динамічної сітки за формулами:

для внутрішніх вузлів сітки –

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\phi\Delta\psi};$$

для вузлів сітки на розрізі Γ –

$$(v_x, v_y)_{i,m} = (v_x, v_y)_{i,0} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\phi\Delta\psi};$$

для граничних вузлів сітки на L_* –

$$(v_x, v_y)_{0,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\phi\Delta\psi};$$

для граничних вузлів сітки на L^* –

$$(v_x, v_y)_{n,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\varphi\Delta\psi};$$

для точок A та B –

$$(v_x, v_y)_{0,0} = (v_x, v_y)_{0,m} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{0,m}} (y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1}),$$

$$J_{0,m} = \frac{(x_{1,m} - x_{0,m})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,m} - y_{0,m})}{2\Delta\varphi\Delta\psi};$$

для точок C та D –

$$(v_x, v_y)_{n,0} = (v_x, v_y)_{n,m} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{n,m}} (y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1}),$$

$$J_{n,m} = \frac{(x_{n,m} - x_{n-1,m})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,m} - y_{n-1,m})}{2\Delta\varphi\Delta\psi}.$$

2.1.1.4. Тестові приклади. В якості тестового (контрольного) прикладу для перевірки коректності запропонованої методики розглянемо область G_1 , обмежену двома концентричними колами радіусами 1 та 2:

$$L_* = \{z : x = x_*(t) = \cos(t), y = y_*(t) = \sin(t), t \in [0, 2\pi)\}, \varphi_* = 0,$$

$$L^* = \{z : x = x^*(t) = 2\cos(t), y = y^*(t) = 2\sin(t), t \in [0, 2\pi)\}, \varphi^* = \ln 2.$$

Шукане конформне відображення параметричного прямокутника $[0, \ln 2] \times [0, Q]$, де $Q = 2\pi$, на область G_1 без розрізу вздовж осі ox , здійснюється за допомогою функції [142]:

$$z = z(\omega) = x(\phi, \psi) + i \cdot y(\phi, \psi) = e^\omega = e^{\phi + i\psi} = e^\phi \cdot \cos(\psi) + i \cdot e^\phi \cdot \sin(\psi). \quad (2.18)$$

Результати розв'язання поставленої задачі з різними n та m на ПК з процесором AMD Am586-160(4×40) MHz в реальному (RM86) режимі із застосуванням компілятора “Borland C++ v3.1” приведені на рис. 2.2 та в табл. 2.1 (при розв'язуванні використову-

вались параметри точності $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=10^{-6}$, N_{iter} – кількість загальних ітерацій алгоритму, t – час його виконання, δ – нев'язка рівнянь Коші-Рімана).

Відносні максимальні похибки значень координат вузлів, а також відносна похибка фільтраційної витрати, наведені у табл. 2.1, знаходилися за формулами:

$$\delta_m = \max_{i,j} \left(\left| \frac{x_{i,j}^m - x_{i,j}}{x_{i,j}} \right|, \left| \frac{y_{i,j}^m - y_{i,j}}{y_{i,j}} \right| \right), \quad \delta_Q = \left| \frac{Q^m - Q}{Q^m} \right|,$$

де $x_{i,j}^m$, $y_{i,j}^m$, Q^m – точні значення, обчислені за аналітичними формулами (2.18), $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, Q – значення, обчислені за розробленим алгоритмом.

Табл. 2.1. Результати тестового розрахунку для області G_1

n	m	N_{iter}	$t, \text{мс}$	Q	δ_Q	δ_m	δ
5	45	236	3290	6,28813	0,00494	0,009897	0,00482
7	63	236	5158	6,28571	0,00252	0,005054	0,00183
10	91	183	7843	6,28445	0,00126	0,002533	0,00065
15	134	187	17515	6,28372	0,00054	0,001084	0,00023
20	181	182	34169	6,28349	0,00031	0,000950	0,00012
30	272	173	95674	6,28332	0,00013	0,001291	0,00009

Як бачимо з табл. 2.1, при збільшенні n та m збільшується і точність розв'язку, що отримується. Це дозволяє говорити про комп'ютерну збіжність алгоритму до точного розв'язку задачі. Незначне погіршення точності знаходження координат вузлів динамічної сітки для останнього випадку викликано недостатньо малими параметрами точності ε_1 , ε_2 , та ε_3 для заданих фіксованих n та m (слід зазначити, що кількість рівнянь та невідомих в цьому

випадку – 16927).

Розглянемо ще випадки, коли точний розв’язок задачі на конформне відображення є невідомим (тестова область G_2), і немає можливості порівняти результати роботи розробленого алгоритму із точним розв’язком задачі:

$$L_* = \{z: x = x_*(t) = \cos(t), y = y_*(t) = 0.5 \sin(t), t \in [0, 2\pi]\}, \varphi_* = 0,$$

$$L^* = \{z: x = x^*(t) = 2 \cos(t), y = y^*(t) = 2 \sin(t), t \in [0, 2\pi]\}, \varphi^* = 0,5.$$

Результати розв’язання поставленої задачі з різними n та m приведені в табл. 2.2. На рис.2.3 зображена знайдена динамічна сітка (при розв’язуванні використовувались параметри точності $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-6}$).

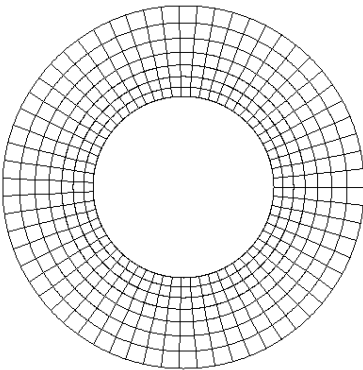


Рис. 2.2. Гідродинамічна сітка, побудована для області G_1

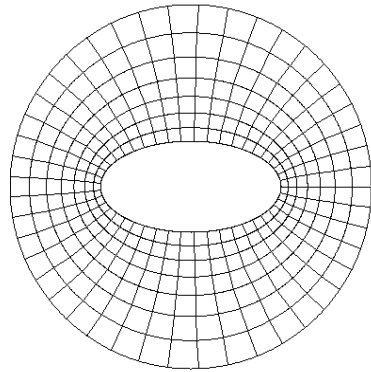


Рис. 2.3. Гідродинамічна сітка, побудована для області G_2

Числові розрахунки для області фільтрації G_3 , яка геометрично описується рівняннями $L_* = \{z: x = x_*(t) = \cos(t), y = y_*(t) = \sin(t), t \in [0, 2\pi]\}$, $L^* = \{z: x = x^*(t) = 4 \cos(t), y = y^*(t) = 2 \sin(t), t \in [0, 2\pi]\}$ при заданих на границях області потенціалах $\varphi_* = 0$ та $\varphi^* = 1$ для різних n та m приведені у табл.2.3.

Табл. 2.2. Результати тестового розрахунку для області G_2

n	m	N_{iter}	$t, \text{мс}$	Q	δ
5	32	465	4784	3,222679	0,020850
7	45	539	8843	3,220361	0,008287
11	64	640	18422	3,219085	0,003107
15	97	569	42616	3,218436	0,000971
20	129	588	89342	3,218195	0,000436
25	161	577	168451	3,218085	0,000241

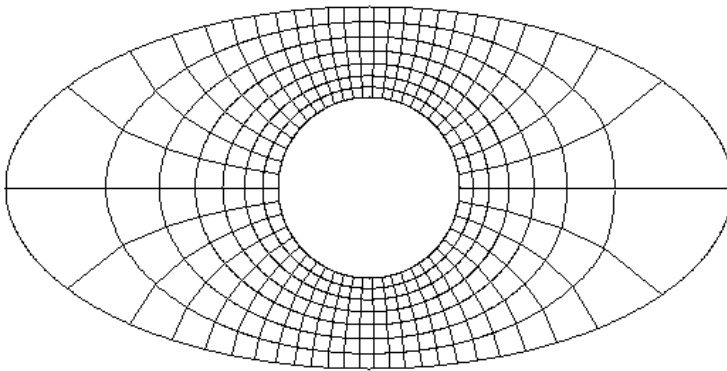


Рис. 2.4. Гідродинамічна сітка, побудована для тестової області G_3

Табл. 2.3. Результати тестового розрахунку для області G_3

n	m	N_{iter}	$t, \text{мс}$	Q	δ
5	35	402	4877	7,134510	0,348244
7	50	537	11034	7,131942	0,413245
10	71	651	25699	7,129470	0,178098
20	143	990	200572	7,127630	0,070841

На рис.2.4 зображена знайдена гідродинамічна сітка, при побудові якої використовувались параметри точності роботи алгорит-

му $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-6}$.

Комп'ютерну збіжність розробленого алгоритму додатково апробовано шляхом проведення великої кількості числових розрахунків гідродинамічних сіток руху у двозв'язних областях G_z складної геометрії при різних значеннях параметрів m та n розбиття області комплексного потенціалу G_w , при цьому отримані розрахункові значення величини фільтраційної витрати для кожної області G_z практично однакові, що підтверджує комп'ютерну стійкість розробленого алгоритму. Також нами побудовані графіки стабілізації ряду розрахункових параметрів відносно кроку ітерації, які додатково підтверджують збіжність розробленого алгоритму.

2.1.2. Обернені крайові задачі на квазіконформні відображення для двозв'язних областей та їх розв'язування

Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у анізотропному неоднорідному середовищі, провідність якого моделюється за допомогою симетричного тензора другого рангу $(\kappa_{rs})_{2 \times 2}$, де $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y, \phi, \psi)$ – обмежені неперервно диференційовані функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій. Позначимо через $\kappa = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}$.

Подібно до випадку ідеального середовища, задача на знаходження квазігармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в двозв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій двома замкненими гладкими екіпотенціальними контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (або $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – внутрішнім, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy :$

$x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi$) – зовнішнім, зводиться до задачі на квазіконформне відображення області квазікомплексного потенціалу на фізичну область із умовним природним розрізом (рис. 2.1). При цьому пряма задача на квазіконформне відображення однозв'язної області $G_Z^0 = G_Z / \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \phi + i\psi : \phi_* < \phi < \phi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром Q (повною витратою) записується у вигляді:

$$\begin{cases} \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \kappa_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, & \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \end{cases} \quad (2.19)$$

Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_Z^0 записується у вигляді:

$$\begin{cases} \kappa_{11} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \kappa_{22} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), & y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (2.21)$$

При цьому, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ (аналогі рівнянь Лапласа для випадку, коли $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1, \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\kappa_{11}^{-1} (x_\varphi + \kappa_{12} x_\psi)) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\kappa_{11}^{-1} ((\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12} \kappa_{21}) x_\psi - \kappa_{21} x_\varphi)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\kappa_{22}^{-1} (y_\varphi - \kappa_{21} y_\psi)) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\kappa_{22}^{-1} ((\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12} \kappa_{21}) y_\psi + \kappa_{12} y_\varphi)) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

в силу залежності $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)$, є взаємозв'язаними.

Різницеві аналоги рівнянь (2.22) та крайових умов (2.21) у

відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) :$

$$\varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = \overline{0, m}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n},$$

$$\Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} \left. \vphantom{\Delta\psi} \right\} \text{ записуються у вигляді:}$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \kappa^{i,j}(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) + \frac{\gamma}{4}(\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - \\ & - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \frac{\kappa_{11}^{i,j}}{4} \left((x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{21}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}} \right) \right) + \right. \\ & \left. + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \left(\left(\frac{\kappa_{11}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{11}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}} \right) + \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i+1,j}}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{12}^{i-1,j}}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\kappa_{rs}^{i,j} = \kappa_{rs}(x_{i,j}, y_{i,j}, \phi_i, \psi_j),$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \kappa^{i,j}(y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}) + \frac{\gamma}{4}(\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - \\ & - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \frac{\kappa_{22}^{i,j}}{4} \left((y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{12}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}} \right) \right) + \right. \\ & \left. + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \left(\left(\frac{\kappa_{22}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{22}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i+1,j}}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{21}^{i-1,j}}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0, \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (аналогі умов ортогональності для випадку $\kappa_{11} = \kappa_{22}$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$) виводяться аналогічно до випадку, що розглядався у попередніх параграфах, і у сітковій області G_ω^γ замінюються рівняннями:

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(\kappa_{22}^{0,j}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) - \kappa_{21}^{0,j}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1})) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(\kappa_{11}^{0,j}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - \kappa_{12}^{0,j}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1})) = 0, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(\kappa_{22}^{n,j}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) - \kappa_{21}^{n,j}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1})) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(\kappa_{11}^{n,j}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - \kappa_{12}^{n,j}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1})) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \quad (2.25)$$

Формулу для знаходження величини γ , (а, отже, і Q) одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{nm} \sum_{i,j=0}^{n-1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2}. \quad (2.26)$$

Алгоритм розв’язування задач для випадку анізотропного середовища в цілому повторює відповідний алгоритм для розв’язування задач в однорідних середовищах і може бути словесно описаний так:

Задавши кількість вузлів розбиття області G_ω n та m , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність роботи алгоритму розв’язання відповідної (2.23) – (2.24) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{n,j}^{(0)}$, $y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.24)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за формулою (2.26) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ .

Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційної схеми:

$$\gamma^2(x_{i+1,j}^{(k-1)} - 2x_{i,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k-1)}) + \kappa^{i,j}(x_{i,j+1}^{(k-1)} - 2x_{i,j}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k-1)}) + \frac{\gamma}{4}(\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j})(x_{i+1,j+1}^{(k-1)} + x_{i-1,j-1}^{(k-1)} -$$

$$\begin{aligned}
& -x_{i+1,j-1}^{(k-1)} - x_{i-1,j+1}^{(k-1)} + \frac{\kappa_{11}^{i,j}}{4} \left(\left(x_{i+1,j}^{(k-1)} - x_{i-1,j}^{(k-1)} \right) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{21}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left(x_{i,j+1}^{(k-1)} - x_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \left(\left(\frac{\kappa_{12}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{12}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}} \right) + \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i+1,j}}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{12}^{i-1,j}}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0, \\
& \gamma^2 (y_{i+1,j}^{(k-1)} - 2y_{i,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k-1)}) + \kappa^{i,j} (y_{i,j+1}^{(k-1)} - 2y_{i,j}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k-1)}) + \frac{\gamma}{4} (\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j}) (y_{i+1,j+1}^{(k-1)} + y_{i-1,j-1}^{(k-1)} - \\
& - y_{i+1,j-1}^{(k-1)} - y_{i-1,j+1}^{(k-1)}) + \frac{\kappa_{22}^{i,j}}{4} \left(\left(y_{i+1,j}^{(k-1)} - y_{i-1,j}^{(k-1)} \right) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{12}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{i,j+1}^{(k-1)} - y_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \left(\left(\frac{\kappa_{21}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{21}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i+1,j}}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{21}^{i-1,j}}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв’язуючи наближено систему рівнянь (2.25), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ ((i,j) – індекси координат граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (2.26) та умовою зв’язку між ними: $Q = m\Delta\phi \cdot \gamma$. Якщо зміна невідомої витрати $|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}|$ більша за ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев’язку “квазіконформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.20):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{11}^{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{12}^{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa_{21}^{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{22}^{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|. \end{cases}$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо n і m та розв'язуємо задачу заново (оптимальність співвідношення між n та m досягається аналогічно до конформного випадку шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Комп'ютерна збіжність та точність алгоритму перевірялися за допомогою тестових прикладів. Результати розв'язування задачі на конформне відображення ($\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$) кільця $1 \leq |z| \leq 2$ з розрізом вздовж осі Ox на відповідну йому область комплексного потенціалу $G_\omega = \{(\phi, \psi) : 0 = \phi_* \leq \phi \leq \phi^* = \ln 2, 0 \leq \psi \leq Q = 2\pi\}$ (тут і надалі в таблицях: N_{iter} – кількість проведених ітерацій, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ – параметри точності, eQ – абсолютна похибка величини Q , eX – максимальне відхилення вузлів знайденої динамічної сітки від своїх точних положень за евклідовою нормою) наведені в табл. 2.4. Як можна побачити, результати повністю співпадають із результатами роботи алгоритму, описаного у попередньому параграфі, для тестової області G_1 .

Табл. 2.4. Результати розв'язання задачі для однорідного кільця

n	m	N_{iter}	Q	eQ	eX	δ
5	45	236	6,288134	0,00494	0,009897	0,00482
7	63	236	6,285713	0,00252	0,005054	0,00183
10	91	183	6,284452	0,00126	0,002533	0,00065
15	134	187	6,283728	0,00054	0,001084	0,00023
20	181	182	6,283499	0,00031	0,000950	0,00012
30	272	173	6,283325	0,00013	0,001291	0,00009

Результати розв'язання задачі для фізичної області

складнішої геометрії ($\varphi_* = 0, \varphi^* = 1, x_*(t) = 5 \cos(t) - 2, y_*(t) = \sin(t) + 1, x^*(t) = 10 \cos(t), y^*(t) = 20 \sin(t)$) подані на рис.2.5 та у табл.2.5. Коефіцієнт фільтрації при цьому брався таким: $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1, \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$. На рис.2.6 та у відповідній таблиці відображені результати розв'язання задачі фільтрації в анізотропному середовищі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = \ln 2, \\ x_*(t) = \cos(t), \quad y_*(t) = \sin(t), \\ x^*(t) = 2 \cos(t), \quad y^*(t) = 2 \sin(t), \end{array} \right. \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

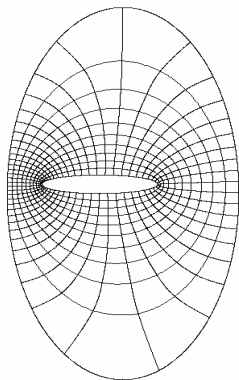


Рис. 2.5. Динамічна сітка, побудована в асиметричній області

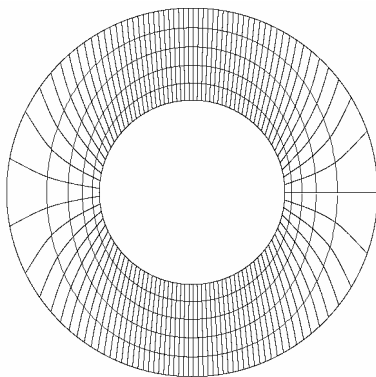


Рис. 2.6. Динамічна сітка для випадку анізотропного середовища

У табл. 2.7 та на рис. 2.7 наведені результати розв'язання суттєво нелінійної задачі у неоднорідному середовищі:

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1 + 8 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1,5 \right)^2, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1,$$

$$x_*(t) = 0.2 \cos(t), \quad y_*(t) = 0.2 \sin(t), \quad x^*(t) = \cos(t) + 0.1 \cos(3t),$$

$$y^*(t) = \sin(t) - 0.1 \sin(3t).$$

Табл. 2.5. Результати розв'язання задачі в асиметричній області

N	m	ε	N_{iter}	Q	eQ
5	25	0.00001	29188	4.932979	5.1603
7	35	0.00001	44045	4.933791	3.2081
10	49	0.00001	10741	4.932266	2.6237

Табл. 2.6. Результати розв'язання задачі в анізотропному середовищі

n	m	ε	Q	eQ
5	109	0.00001	15.12538762	0.150418206
7	152	0.00001	15.15567393	0.094118353
10	218	0.00001	15.18639923	0.052520183
12	261	0.00001	15.19937984	0.037183302
15	327	0.00001	15.21231227	0.023420691

Табл. 2.7. Результати розрахунків для суто нелінійного випадку

N	m	ε	Q	eQ
5	25	0.0001	10.77752169	0.320320703
7	35	0.0001	10.74609428	0.245874774
10	50	0.0001	10.72966959	0.133183247
15	75	0.0001	10.72090360	0.120490995

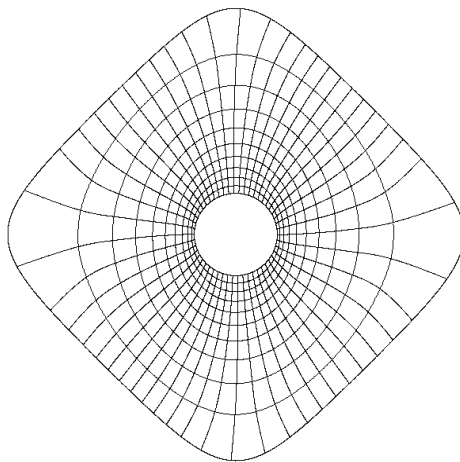


Рис.2.7. Динамічна сітка для суто нелінійного випадку.

2.1.3. Задачі на знаходження потенціалу одного з контурів за відомою повною витратою

Раніше нами було розглянуто модельну задачу на знаходження потенціалу у двозв'язній області, обмеженій двома екіпотенціальними лініями. При цьому граничні потенціали вважалися відомими, а невідомою була повна витрата Q . Не менш важливими для практичного застосування є задачі на знаходження одного з граничних потенціалів при відомій витраті. До них зводяться, наприклад, модельні задачі на розрахунки процесів фільтрації в пластах при відомих заборах із свердловини чи подачах рідини у пласт. Саме в таких задачах якнайяскравіше проявляються всі переваги переходу до обернених задач на конформні відображення. Звичайно, їх чисельний розв'язок може бути одержаний шляхом розв'язання низки задач на знаходження Q за заданими φ_* та φ^* описаним вище алгоритмом. Більш економним (з огляду на можливі витрати машинного часу), звичайно, є підхід із застосуванням спеціально адаптованого до розв'язування алгоритму.

Розглянемо в деякій двозв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (або $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – внутрішнім, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – зовнішнім, процес руху частинок (зокрема, фільтрації в пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці, і т.п.), який описується за допомогою рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$ – швидкість

руху частинок, $\kappa = (\kappa^{rs}(x, y, \varphi_x, \varphi_y))_{2 \times 2}$ – тензор провідності (фільтрації, електричної провідності, і.т.п.), $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$) при відомій кількісній мірі речовини, що виходить із фізичної області за одиницю часу (повній витраті $Q = \oint_L -v_y dx + v_x dy$).

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазікомплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$), зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії (через AD та BC на рис.2.8 та рис.2.9 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z / \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим потенціалом φ^* :

$$\begin{cases} \kappa^{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_x + \kappa^{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_y = \psi_y, & \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \\ \kappa^{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_x + \kappa^{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_y = -\psi_x, & \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \end{cases} \quad (2.27)$$

Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \kappa^{11}(x, y, \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa^{12}(x, y, \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa^{21}(x, y, \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa^{22}(x, y, \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \\ (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa^{11}} (x_\varphi + \kappa^{12} x_\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa^{11}} (\kappa \cdot x_\psi - \kappa^{21} x_\varphi) \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa^{22}} (y_\varphi - \kappa^{21} y_\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa^{22}} (\kappa \cdot y_\psi + \kappa^{12} y_\varphi) \right) = 0, \\ \kappa = \kappa^{11} \kappa^{22} - \kappa^{12} \kappa^{21}. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі будеється аналогічно до §2.1.2. А саме, різницеві аналоги рівнянь (2.30) та крайових умов (2.29) у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = \overline{0, m}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\}$ записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}^{11}} - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}^{11}} \right) + \frac{\gamma}{4} \left(\frac{\kappa_{i+1/2,j}^{12}}{\kappa_{i+1/2,j}^{11}} (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j-1} - x_{i+1,j-1}) - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa_{i-1/2,j}^{12}}{\kappa_{i-1/2,j}^{11}} (x_{i,j+1} + x_{i-1,j+1} - x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1}) + \frac{\kappa_{i,j-1/2}^{21}}{\kappa_{i,j-1/2}^{11}} (x_{i+1,j} + x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j} - \right. \\ & \left. - x_{i-1,j-1}) - \frac{\kappa_{i,j+1/2}^{21}}{\kappa_{i,j+1/2}^{11}} (x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j} - x_{i-1,j+1}) \right) + \frac{\kappa_{i,j+1/2}^{12}}{\kappa_{i,j+1/2}^{11}} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \\ & \left. - \frac{\kappa_{i,j-1/2}^{12}}{\kappa_{i,j-1/2}^{11}} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = 0, \quad \gamma^2 \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}^{22}} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}^{22}} \right) + \frac{\gamma}{4} \left(\frac{\kappa_{i-1/2,j}^{21}}{\kappa_{i-1/2,j}^{22}} \times \right. \\ & \left. \times (y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1} - y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}) - \frac{\kappa_{i+1/2,j}^{21}}{\kappa_{i+1/2,j}^{22}} (y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} - y_{i,j-1} - \right. \\ & \left. - y_{i+1,j-1}) + \frac{\kappa_{i,j+1/2}^{12}}{\kappa_{i,j+1/2}^{22}} (y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}) - \frac{\kappa_{i,j-1/2}^{12}}{\kappa_{i,j-1/2}^{22}} (y_{i+1,j} + y_{i+1,j-1} - \right. \end{aligned}$$

$$-y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}) + \frac{\kappa_{i,j+1/2}}{\kappa_{i,j+1/2}^{22}}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \frac{\kappa_{i,j-1/2}}{\kappa_{i,j-1/2}^{22}}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) = 0, \quad (2.31)$$

$$\text{де } \kappa_{i+1/2,j}^{rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j} + y_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2,j}}, \right. \\ \left. \frac{x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2,j}} \right), \quad \kappa_{i-1/2,j}^{rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i-1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i-1,j} + y_{i,j}}{2}, \right. \\ \left. \frac{y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2,j}}, \frac{x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2,j}} \right),$$

$$\kappa_{i,j+1/2}^{rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i,j+1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j+1/2}}, \frac{x_{i,j} - x_{i,j+1}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j+1/2}} \right),$$

$$\kappa_{i,j-1/2}^{rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i,j-1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j-1} + y_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}} \right),$$

$$J_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j}) \times \\ \times (x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1})),$$

$$J_{i-1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + \\ + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1})),$$

$$J_{i,j+1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) - (x_{i,j+1} - \\ - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1})),$$

$$J_{i,j-1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + \\ + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j}) - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1})),$$

та відповідно:

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності у випадку конформного відображення) у сітковій області G_ω^Y записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(\kappa_{0,j}^{22}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{21}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1})) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - \\ & - y_{2,j})(\kappa_{0,j}^{11}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{12}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1})) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \\ & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{22}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) - \kappa_{n,j}^{21}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1})) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - \\ & - 4y_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{11}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - \kappa_{n,j}^{12}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1})) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\text{де } \kappa_{i,j}^{rs} = \kappa^{rs} \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right),$$

$$J_{0,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})),$$

$$J_{n,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})).$$

Формула для знаходження величини γ отримується на підставі умови “квазіконформної подібності” елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{nm} \sum_{i,j=0}^{n-1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}, \quad (2.34)$$

$$a_{i,j} = \sqrt{\left(\kappa_{i,j}^{-11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{i,j}^{-12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2 + \left(\kappa_{i,j}^{-21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{i,j}^{-22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2},$$

$$\text{де } \kappa_{i,j}^{-rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4} \right),$$

$$\left. \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2\Delta\psi \cdot \bar{J}_{i,j}}, \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot \bar{J}_{i,j}} \right),$$

$$\bar{J}_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j})).$$

Відповідний алгоритм представимо так: задаємо кількість вузлів розбиття області G_ω n та m , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність наближеного розв'язку відповідної (2.28)-(2.29) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{n,j}^{(0)}$, $y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.32)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за формулою (2.34) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ та $\varphi_*^{(0)} = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma^{(0)}$. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв'язання (2.31) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому, необхідні значення градієнту напору та функцій κ^{rs} у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації.

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.33). Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} \quad ((i, j) - \text{індекси координат})$$

граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення $\varphi_*^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин φ_* і γ за формулою (2.34) та умовою зв'язку між ними: $\varphi_* = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma$. Якщо зміна невідомого потенціалу $|\varphi_*^{(L)} - \varphi_*^{(L-1)}|$ більша за ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку “квазіконформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.28):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{i,j}^{11} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{i,j}^{12} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa_{i,j}^{21} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{i,j}^{22} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|, \end{cases}$$

$$\text{де } \kappa_{i,j}^{rs} = \kappa^{rs} \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right), \quad J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \times (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо n і m та розв'язуємо задачу повторно (оптимальність співвідношення між n та m досягається аналогічно до [100,105] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Описаний вище алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT. Перевірка його збіжності та точності проводилась за наступною схемою. Спочатку за алгоритмом з §2.1.1 чисельно розв'язувалися задачі на знаходження повної витрати Q за потенціалами $\varphi_* = 0$ та $\varphi^* = 1$, заданими на внутрішньому та зовнішньому контурах даної області, при різних параметрах розбиття області n та m . Отримані

наближені значення повної витрати Q разом із заданим значенням $\varphi^* = 1$ приймалися як вхідні параметри при розв'язанні поставлених задач на знаходження φ_* за відомими φ^* та Q . На рис. 2.8 та у табл. 2.8 наведені результати чисельного розв'язання задачі фільтрації в ізотропному деформівному пласті ($\kappa^{11} = \kappa^{22} = 1 + 0.5\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$, $\kappa^{12} = \kappa^{21} = 0$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0.25 \cdot \cos 2t)$, $y^*(t) = 10(\sin t - 0.25 \sin 2t)$, $x_*(t) = \cos t$, $y_*(t) = \sin t$). Результати чисельного розв'язання задачі у випадку анізотропії деформівного середовища ($\kappa^{12} = \kappa^{21} = 0$, $\kappa^{rr} = 1 + 0.25r\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$, $r = \overline{1, 2}$, $x_*(t) = \cos t$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0.2 \cdot \sin 5t)$, $y_*(t) = \sin t$, $y^*(t) = 10(\sin t + 0.1 \cdot \cos 2t)$) відображені на рис. 2.9 та у табл. 2.9.

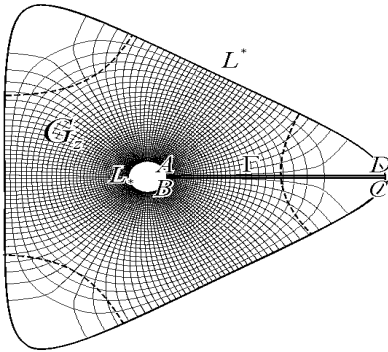


Рис. 2.8. Свердловина в ізотропному деформівному трикутному пласті із заокругленими кутами.

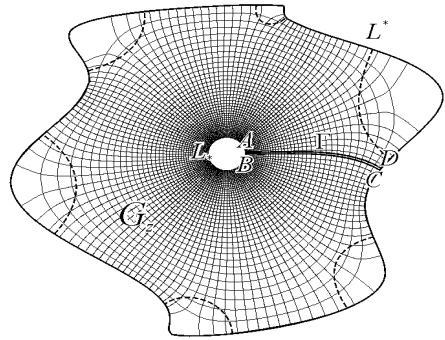


Рис. 2.9. Свердловина в криволінійному анізотропному деформівному пласті.

Як видно з таблиць 2.8 та 2.9, із збільшенням параметрів розбиття сітки n і m знайдені наближення потенціалу внутрішнього контура $\tilde{\varphi}_*$ наближаються до свого точного значення $\varphi_* = 0$, а нев'язка "квазіконформності" δ отриманої динамічної сітки зменшується, що підтверджує комп'ютерну збіжність

побудованого алгоритму. Пунктирними лініями на рис. 2.8 та рис. 2.9 відокремлені зони найбільших за абсолютною величиною нев'язок $\delta_{i,j}$ (так звані "застійні" зони).

Табл. 2.8. Результати розрахунків

n	m	Q	φ^*	δ
30	87	3,2279	0,0041	3,161
40	116	3,2222	0,0030	2,716
60	174	3,2159	0,0011	2,067
80	232	3,2134	0,0004	1,611

Табл. 2.9. Результати розрахунків

n	m	Q	φ^*	δ
30	84	2,9904	0,0017	2,221
40	112	2,9857	0,0002	1,936
60	168	2,9848	0,0001	1,478
80	224	2,9853	0,0001	1,307

Запропонований алгоритм із незначними змінами може бути застосований для розв'язання задач на знаходження невідомого потенціалу φ^* за відомою повною витратою Q та заданим на внутрішньому контурі потенціалом φ_* (для цього вирази $\varphi_*^{(0)} = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma^{(0)}$, $\varphi_* = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma$ та $\varphi_*^{(L)}$ необхідно змінити на $\varphi_*^{(0)} = \varphi_* + n \cdot \Delta\psi / \gamma^{(0)}$, $\varphi^* = \varphi_* + n \cdot \Delta\psi / \gamma$ та $\varphi_*^{(L)}$ відповідно) та ряду інших квазістаціонарних задач.

2.1.4. Моделювання фільтраційних деформацій ґрунту у випадку двозв'язної модельної області

Розглянемо фільтраційний процес, враховуючи при цьому суфозійні явища, які відбуваються у ґрунті під дією гідродинамічного фільтраційного потоку, як один із варіантів моделювання взаємовпливу коефіцієнта фільтрації k та градієнта $I = \partial h / \partial r$ напору $h = h(r)$ ($r_0 < r < R_0$) при осесиметричній фільтрації від свердловини радіуса r_0 в круговому пласті радіуса R_0 . Даний випадок проілюстровано на рис.2.10. Запропонована у [45] математична модель для даного випадку передбачає поділ

області фільтрації на три зони залежно від значення градієнта напору ($[r_3, R_0]$ – незбурена зона ($\kappa = \kappa_0$), $[r_0, r_6]$ – зона відриву частинок ($\kappa = \kappa_6 > \kappa_0$), $[r_6, r_3]$ – зона осідання частинок ($\kappa = \kappa_3 < \kappa_0$), r_6 і r_3 є розв’язками рівнянь $I(r) = I_6$ та $I(r) = I_3$ відповідно (I_6, I_3 – критичні значення градієнта напору стосовно відриву та затримки частинок)). Значення κ_6 та κ_3 знаходяться, виходячи з наступних міркувань [45]: нехай при пористості ґрунту n величини m_{ck} та m_c відповідно дорівнюють об’єму частинок, що утворюють скелет (під скелетом тут розуміється така структура ґрунту, частинки якої не переміщуються у просторі під дією будь-якого з градієнтів напору), та об’єму суфозійних частинок, які містяться в одиниці об’єму ґрунту ($n + m_c + m_{ck} = 1$, див. рис.2.10). Тоді за умов лінійної залежності коефіцієнта фільтрації κ від пористості n ($\kappa = an$, де a - деякий коефіцієнт пропорційності), повного вимивання суфозійних частинок із зони $[r_0, r_6]$, об’єм яких $\pi m_c (r_6^2 - r_0^2)$, і рівномірного розподілу їх в об’ємі ґрунту $\pi (r_3^2 - r_6^2)$ зони затримки, матимемо: $\kappa_6 = a(1 - m_{ck})$, $\kappa_3 = a(1 - m_{ck} - m_c (r_3^2 - r_0^2)(r_3^2 - r_6^2)^{-1})$.

У випадку неосесиметричної фільтрації та моделювання в умовах неповних даних зон відриву та затримки частинок, а також ділянки насичення при збереженні неперервності коефіцієнта фільтрації κ та градієнта напору I будемо використовувати іншу модель. В цьому випадку моделювання взаємозалежності характеристик середовища та процесу проводитемо наступним способом: $\kappa = \kappa^*$ при $I \geq I_n$; $\kappa = \kappa_0 + \mu \sum_{i=1}^M a_i (I - I_3)^i (I - I_6)^i$ при $I_3 < I < I_n$; $\kappa = \kappa_0$ при $I < I_3$ (рис. 2.11), де $a_1 = 1$, a_2, \dots, a_M – малі

(в порівнянні з 1) параметри, що підбираються виходячи з умов гладкості κ при $I = I_n, I_3$ та з фізичного експерименту, коефіцієнт μ є розв'язком рівняння $\kappa(I_n, \mu) = \kappa^*$, I_n – значення градієнта напору, при якому має місце максимальний вимив суфозійних частинок з ґрунту, κ^* – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок. Очевидно, що даною формулою також визначається і мінімальне значення коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_*$ (в зоні затримки частинок), яке відповідає максимально можливому заповненню пор суфозійними частинками.

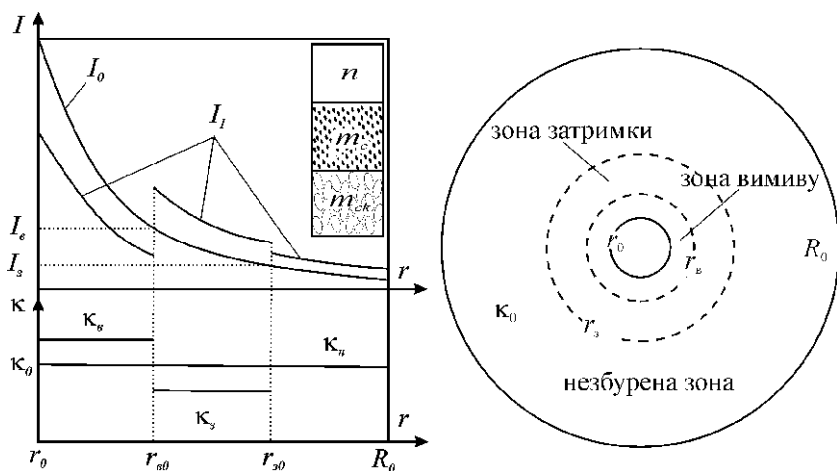


Рис. 2.10. Ілюстрація взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта осесиметричної фільтрації при наявності двох зон збурення

Алгоритм розв'язування задач фільтрації в двозв'язних криволінійних областях G_2 , обмежених двома замкненими гладкими екіпотенціальними лініями, який можна застосовувати для обох вище вказаних моделей із врахуванням явищ типу суфозії, побудуємо по аналогії до попередніх параграфів. Коефіцієнт

фільтрації запишемо у загальному: $\kappa = \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$.

Як і раніше, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазікомплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$), зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії (на рис. 2.11б через AD та BC позначено відповідно його верхній та нижній береги), приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_Z^0 = G_Z \setminus \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром – повною витратою $Q = \int_{L_*} v_x dy - v_y dx : \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \varphi_x = \psi_y, \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \varphi_y = -\psi_x,$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q.$$

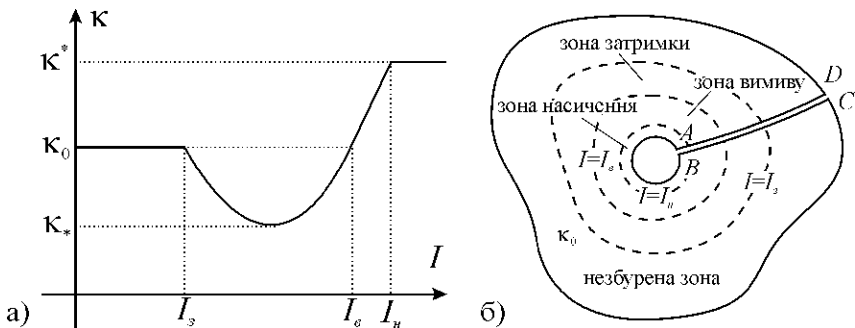


Рис 2.11. Ілюстрація взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації при наявності трьох зон збурення

Обернена їй крайова задача на квазіконформне відображення області G_ω на G_Z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишуться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})y_\psi = x_\varphi, \\ \kappa(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})x_\psi = -y_\varphi, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{array} \quad (2.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\kappa^{-1}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \cdot x_\varphi \right)_\varphi + \left(\kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \cdot x_\psi \right)_\psi = 0, \\ \left(\kappa^{-1}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \cdot y_\varphi \right)_\varphi + \left(\kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \cdot y_\psi \right)_\psi = 0. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Для побудови алгоритму чисельного розв'язання поставленої задачі різницеві аналоги рівнянь (2.35), крайових умов (2.36) а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:

$$\varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = \overline{0, m}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n},$$

$$\Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} \left. \vphantom{\Delta\psi} \right\} \text{ запишемо відповідно у вигляді:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 (\kappa_{i+1/2, j}^{-1}(x_{i+1, j} - x_{i, j}) - \kappa_{i-1/2, j}^{-1}(x_{i, j} - x_{i-1, j})) + \kappa_{i, j+1/2}(x_{i, j+1} - \\ - x_{i, j}) - \kappa_{i, j-1/2}(x_{i, j} - x_{i, j-1}) = 0, \quad \gamma^2 (\kappa_{i+1/2, j}^{-1}(y_{i+1, j} - y_{i, j}) - \\ - \kappa_{i-1/2, j}^{-1}(y_{i, j} - y_{i-1, j})) + \kappa_{i, j+1/2}(y_{i, j+1} - y_{i, j}) - \kappa_{i, j-1/2}(y_{i, j} - y_{i, j-1}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.38)$$

де:

$$\kappa_{i+1/2, j} = \kappa \left((x_{i+1, j} + x_{i, j}) / 2, (y_{i+1, j} + y_{i, j}) / 2, (y_{i+1, j+1} + y_{i, j+1} - y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}) / \right. \\ \left. / (4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2, j}), (x_{i+1, j-1} + x_{i, j-1} - x_{i+1, j+1} - x_{i, j+1}) / (4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2, j}) \right),$$

$$\kappa_{i-1/2, j} = \kappa \left((x_{i-1, j} + x_{i, j}) / 2, (y_{i-1, j} + y_{i, j}) / 2, (y_{i-1, j+1} + y_{i, j+1} - y_{i-1, j-1} - y_{i, j-1}) / \right. \\ \left. / (4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2, j}), (x_{i-1, j-1} + x_{i, j-1} - x_{i-1, j+1} - x_{i, j+1}) / (4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2, j}) \right),$$

$$\kappa_{i, j+1/2} = \kappa \left((x_{i, j+1} + x_{i, j}) / 2, (y_{i, j+1} + y_{i, j}) / 2, (y_{i, j+1} - y_{i, j}) / (\Delta\psi \cdot J_{i, j+1/2}), (x_{i, j} - \right.$$

де

$$\kappa_{i,j}^* = \kappa \left((x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}) / 4, (y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}) / 4, (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) / (2\Delta\psi J_{i,j}^*), (x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}) / (2\Delta\psi J_{i,j}^*) \right),$$

$$J_{i,j}^* = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\phi} ((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j})).$$

Для розв'язання задачі задаємо кількість вузлів розбиття області G_ω n та m , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (2.35)-(2.36) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{n,j}^{(0)}$, $y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.39)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$); знаходимо за формулою (2.41) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв'язання (2.38) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні значення градієнта напору та функції κ у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації.

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.40). Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію

$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ ((i, j) – індекси координат граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (2.41) та умовою зв'язку між ними: $Q = m\Delta\phi \cdot \gamma$. Якщо зміна невідомої витрати $|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}|$ більша за ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку “квазіконформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.35):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \kappa_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \end{cases}$$

де $\kappa_{i,j} = \kappa \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right)$,

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\phi} ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \times (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо синхронно n і m та розв'язуємо задачу заново.

Описаний алгоритм взагалі кажучи має меншу швидкість збіжності в порівнянні із попередніми, оскільки передбачає додатковий розрахунок змін коефіцієнтів фільтрації у області залежно від змін градієнтів напору на кожній загальній ітерації алгоритму.

2.2. Нелінійні крайові задачі теорії фільтрації на конформні та квазіконформні відображення для тризв'язних модельних областей

2.2.1. Постановки задач. Алгоритм “вибору” та узагальнений алгоритм розв'язування задач для тризв'язних областей

У тризв'язній криволінійній області G_z ($z=x+iy$), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, розглянемо модельну крайову задачу на знаходження потенціалу $\varphi : \Delta\varphi = 0$, $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $-\infty < \varphi_0 < +\infty$, де φ_0 – керуючий потенціал (L_0 – відповідний контур-носій керуючого потенціалу).

Як відомо, шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно-спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$) та умовного розрізу Γ області G_z вздовж однієї з ліній розділу течії, ця задача зводиться до конформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області $G_z \setminus \Gamma$ (при невідомих ділянках її границі) на відповідну область комплексного потенціалу G_ω або до задачі на обернене конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$, $G_\omega \rightarrow G_z \setminus \Gamma$ при відповідності кутових точок з одночасним обчисленням невідомих параметрів-витрат [44,54,79,80].

В залежності від співвідношення граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 область комплексного потенціалу G_ω набуває різної геометричної конфігурації. На основі евристичних міркувань з

наступним логічним обґрунтуванням нами встановлено 23 можливі випадки формування течії, які зображені на рис.2.12–2.14. Кожен із можливих випадків (їх надалі “іменуватимемо” як $p.q$, де p – номер відповідного рисунка у розділі, $p = \overline{1,3}$, q – порядковий номер випадку на рисунку) характеризується тим чи іншим набором перетоків між контурами, що обмежують модельну область. Так, наприклад, для випадків 1.1 та 1.2 характерним є те, що L_0 є лінією витоку, а контури L^* та L_* – лініями втоку. Випадок 1.2 є ключовим у тому розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає із деякою точкою A внутрішнього контуру L_* , а величина перетоку від L_0 до L_* (надалі позначатимемо: $L_0 \rightarrow L_*$, де L_0 – контур-джерело, а L_* – контур-приймач) є мінімальною за умови відсутності перетоку $L_* \rightarrow L^*$.

При подальшому зростанні потенціалу керування φ_0 (випадки 1.3–1.5), до двох наявних перетоків додається третій ($L_* \rightarrow L^*$). Особливістю випадку 1.4 є те, що сумарний потік через контур L_* дорівнює нулю.

На рис. 2.12.6-2.12.8, 2.13.1, 2.13.2 зображені ситуаційні стани у випадках відсутності перетоків між внутрішніми контурами. Випадок 1.6 є ключовим у тому розумінні, що точка H розгалуження перетоків (рис. 2.12.6) співпадає з деякою точкою A внутрішнього контуру L_* (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L^*$ досягає свого мінімального значення, а $L_0 \rightarrow L^*$ – максимального). Особливістю випадку 1.8 є те, що потенціали внутрішніх контурів рівні, а ключового випадку 2.2 – те, що точка H розгалуження потоків співпадає з деякою точкою B внутрішнього контуру L_0 (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L^*$ є максимальною, а $L_0 \rightarrow L^*$

– мінімальною за умови відсутності перетоку між внутрішніми контурами).

На рис. 2.13.3-2.13.5 зображені ситуаційні стани за умов наявності перетоків $L_* \rightarrow L_0$ та $L_0 \rightarrow L^*$. Особливістю випадку 2.4 є те, що загальний потік через L_0 дорівнює нулю.

За умови відсутності перетоку $L^* \rightarrow L_0$ (2.6–2.7, 3.1–3.3) випадки 2.6 і 3.3 є ключовими у тому розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає в першому випадку з точкою B внутрішнього контуру L_0 (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого мінімального значення), а у другому – з точкою C зовнішнього контуру L^* (величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого максимального значення).

Далі зображені у певному сенсі “зворотні” відносно 1.1–1.8 ситуаційні стани. Так, на рис 3.3.4–3.3.6 зображені випадки наявності трьох перетоків (“зворотних” по відношенню до 1.3–1.5). При цьому, особливістю 3.5 є рівність величин витоку в контур L^* та витоку з нього. Випадок 3.7 є ключовим за умов відсутності перетоку з L_* до L^* у тому розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає з точкою C зовнішнього контуру L^* , а величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого локального мінімуму.

У кожному з 23-х випадків формування течії, область комплексного потенціалу є багатокутником, сторони якого паралельні осям координат. Неповна визначеність геометричної конфігурації області комплексного потенціалу G_ω (а саме, її залежність від співвідношення величин граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів числового розв’язання задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і “алгоритму вибору”, призначеного для вибору одного з описаних

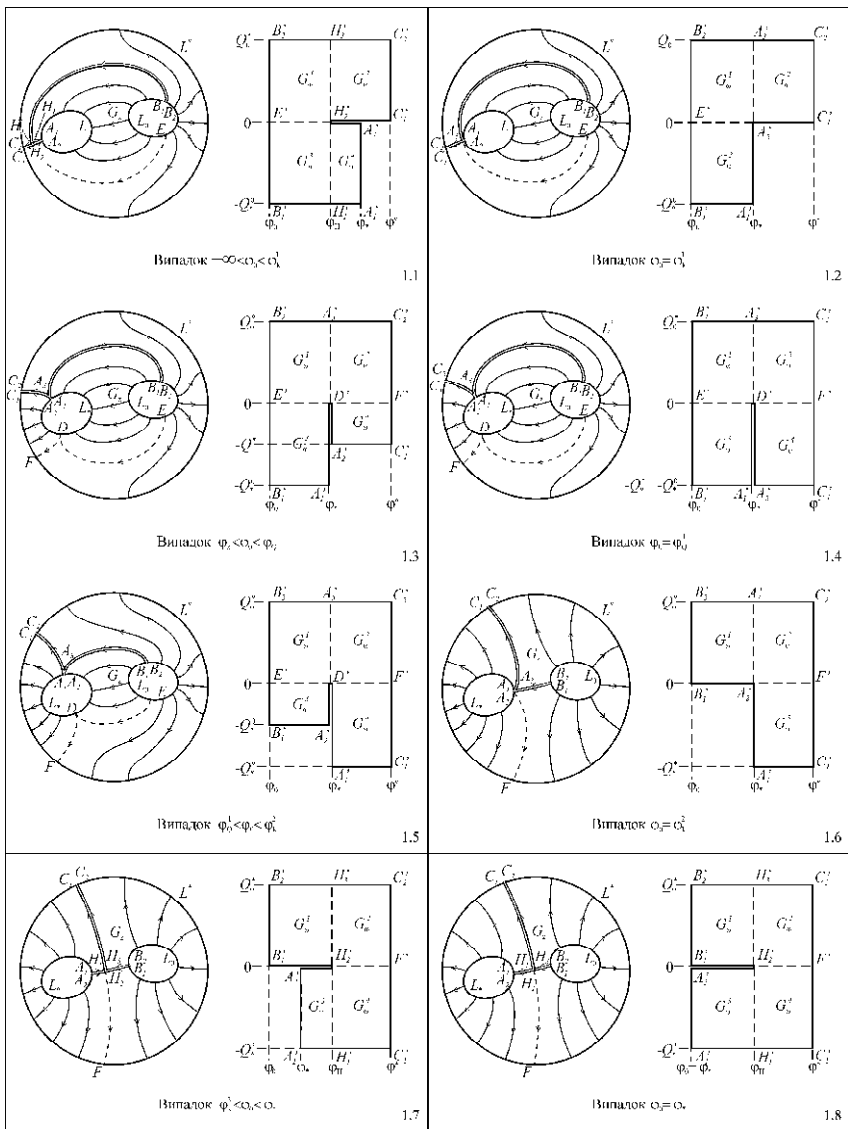


Рис.2.12. Всі можливі випадки для $-\infty < \varphi_0 \leq \varphi_* < \varphi^*$

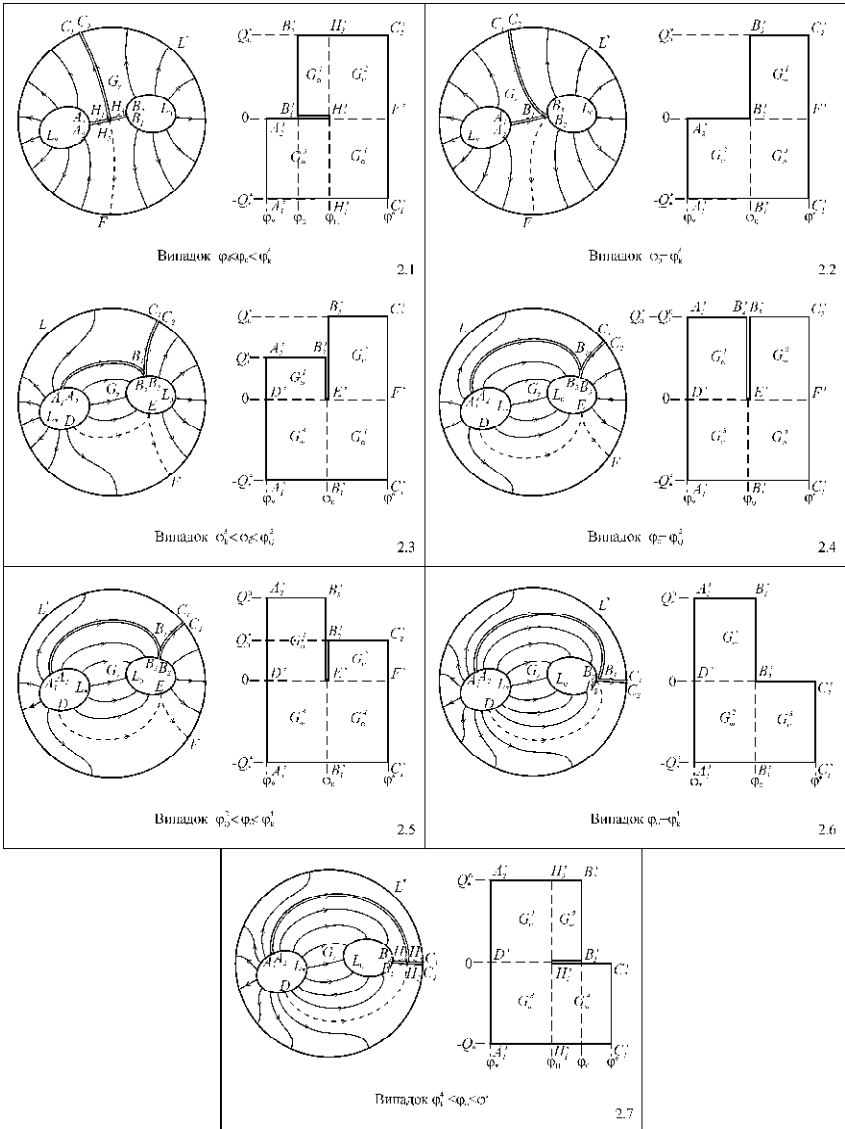


Рис.2.13. Всі можливі випадки для $\varphi_* < \varphi_0 < \varphi^*$

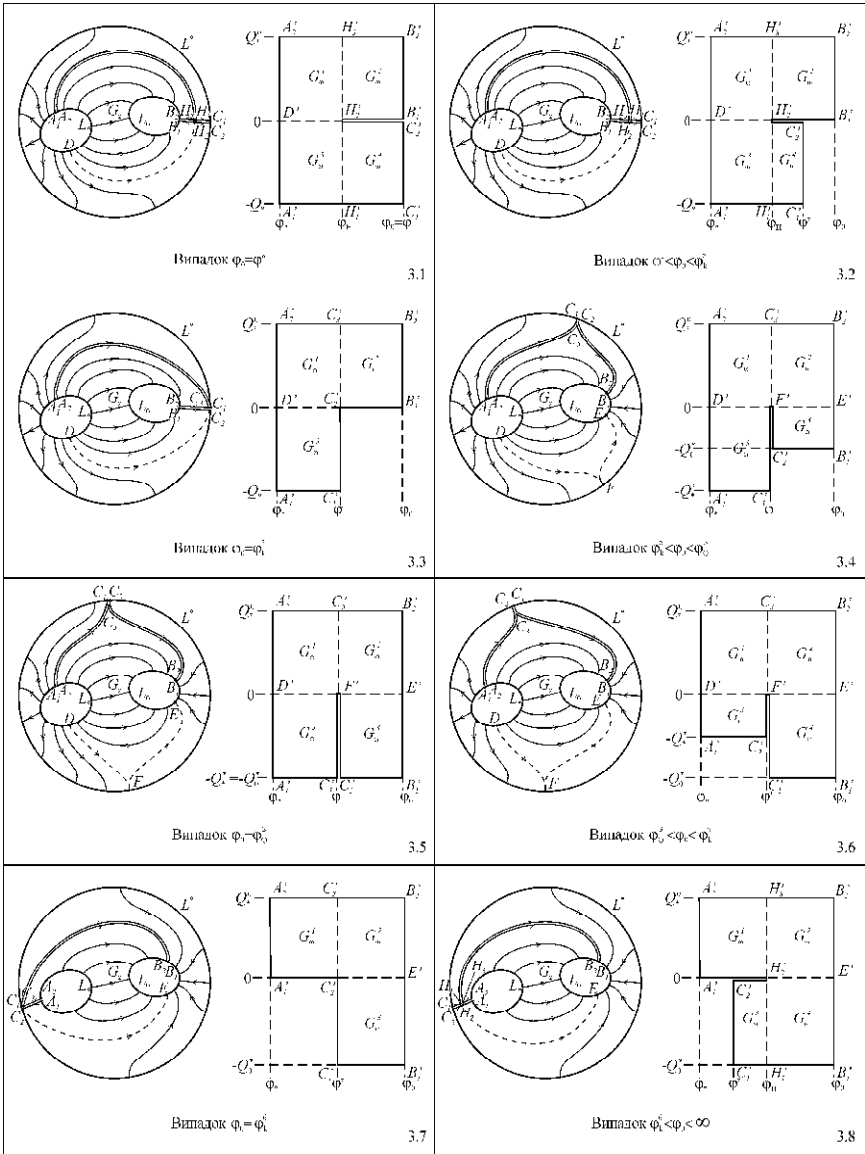


Рис.2.14. Всі можливі випадки для $\varphi_* < \varphi^* \leq \varphi_0 < \infty$

вище випадків. Головним моментом при вирішенні цієї проблеми в цілому є розв'язування в першу чергу ключових (оптимізаційних) задач ($q = \overline{1,6}$), що визначаються додатковою умовою на знаходження того із значень потенціалу керування $\varphi_0 = \varphi_k^q$, при якому досягається мінімум або максимум величини одного із перетоків. Таких допоміжних задач під час виконання “алгоритму вибору” необхідно буде розв'язати у “найгіршому” випадку не більше двох, а після вибору конкретного випадку необхідно буде розв'язати додатково ще одну “проміжну” задачу для того, щоб отримати розв'язок вихідної задачі. При цьому зауважимо, що “проміжні” задачі 1.3–1.5, 2.3–2.5 та 3.4–3.6 можуть бути розв'язані “погрупово” (за спільним для групи випадків алгоритмом), зважаючи на геометричну „подібність” (в певному сенсі) відповідних областей комплексного потенціалу.

Алгоритм вибору. Нехай задані геометрична конфігурація фізичної області G_z (криві L_* , L^* , L_0) та значення граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 . Тоді загальний алгоритм вибору конкретного випадку з можливих можна записати у вигляді послідовності таких кроків:

- 1) Якщо $\varphi_0 = \varphi_*$ або $\varphi_0 = \varphi^*$, то маємо відповідно конкретні випадки 1.8 та 3.1. Інакше – продовжуємо виконання алгоритму.
- 2) Якщо $\varphi_0 < \varphi_*$, то переходимо до п.8. Якщо $\varphi_0 > \varphi^*$, то переходимо до п.13.
- 3) У випадку, коли $\varphi_0 - \varphi_* > \varphi^* - \varphi_0$, переходимо до п.6.
- 4) Розв'язуємо задачу 2.2. Зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^3 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.1.

- 5) Знаходимо ключове значення φ_k^4 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 2.6. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.7. При $\varphi_0 < \varphi_k^4$ маємо один з випадків 2.3–2.5.
- 6) Розв'язуємо задачу 2.6 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^4 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.7.
- 7) Розв'язуємо задачу 2.2. Зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^3 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.1. При $\varphi_0 > \varphi_k^3$ маємо один з випадків 2.3–2.5.
- 8) У випадку, коли $\varphi_* - \varphi_0 \gg \varphi^* - \varphi_*$, переходимо до п.11.
- 9) Розв'язуємо задачу 1.6 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^2 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.7.
- 10) Знаходимо ключове значення φ_k^1 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 1.2. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.1. При $\varphi_0 > \varphi_k^1$ маємо один з випадків 1.3–1.5.
- 11) Знаходимо φ_k^1 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 1.2. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.1.
- 12) Розв'язуємо задачу 1.6, зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^2 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.7. При $\varphi_0 < \varphi_k^2$ маємо один з випадків 1.3–1.5.

- 13) У випадку, коли $\varphi_0 - \varphi^* \gg \varphi^* - \varphi_*$, переходимо до п.16.
- 14) Знаходимо ключове значення φ_k^5 як результат розв'язання відповідної оптимізаційної задачі 3.3. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.3. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.2.
- 15) Розв'язуємо задачу 3.7 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^6 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.7. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.8. При $\varphi_0 < \varphi_k^6$ маємо один з випадків 3.4–3.6.
- 16) Розв'язуємо задачу 3.7, зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^6 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.7. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.8.
- 17) Знаходимо ключове значення φ_k^5 як результат розв'язання відповідної оптимізаційної задачі 3.3. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.3. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.2. При $\varphi_0 > \varphi_k^5$ маємо один з випадків 3.4–3.6.

Алгоритми розв'язування, як проміжних задач на знаходження невідомих витрат за відомими значеннями граничних потенціалів так і ключових задач на знаходження значення керуючого потенціалу для вибраних конкретних випадків формування течії ґрунтуються на ідеї почергової параметризації граничних вузлів, внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності та потенціалу керування. Після переходу до відповідних різницевих задач в кожному з окремих випадків система рівнянь, яку необхідно розв'язати, ділиться на три групи рівнянь, кожній з яких відповідає певна група невідомих. До першої групи невідомих належать значення шуканих функцій $x(\varphi, \psi)$ та

$y(\varphi, \psi)$ у внутрішніх вузлах сіткової області $G_\omega^y = \bigcup_{k=1}^K G_{\omega,k}^y$ ($x_{i,j}$ та

$y_{i,j}$ відповідно), де $G_{\omega,k}^{\gamma} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_k^L + (i - i_k^0) \frac{\varphi_k^R - \varphi_k^L}{n_k},$

$$\psi_j = j_k^0 \Delta \psi_k^- + (j - j_k^0) \frac{Q_k}{m_k}, \quad i = \overline{i_k^0, i_k^0 + n_k}, \quad j = \overline{j_k^0, j_k^0 + m_k},$$

$i_k^0, j_k^0, n_k, m_k, \varphi_k^L, \varphi_k^R, \Delta \psi_k^-, Q_k$ – значення, які беруться з відповідної конкретному випадку таблиці (див. табл. 2.10, табл. 2.11 та табл. 2.12, наприклад, для випадків 1.3, 1.6 та 1.7 відповідно), причому використовуються тільки ті рядки таблиці для яких стовпчик $Q_k \neq '-'$.

Табл.2.10. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.3

3	i^0	j^0	n	m	ω_k^0	$\Delta \varphi_k^-$	$\Delta \varphi_k^+$	$\Delta \psi_k^-$	$\Delta \psi_k^+$	$\Delta \varphi_k^L$	$\Delta \varphi_k^R$	Q_k	φ_k^L	φ_k^R
1	κ	0	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_1^-$	$\Delta \varphi_1^+$	$\Delta \psi_1^-$	$\Delta \psi_1^+$	$\Delta \varphi_1^L$	$\Delta \varphi_1^R$	Q_1	φ_1^L	φ_1^R
2	1	0	n	m	0	$\Delta \varphi_2^-$	$\Delta \varphi_2^+$	$\Delta \psi_2^-$	$\Delta \psi_2^+$	$\Delta \varphi_2^L$	$\Delta \varphi_2^R$	Q_2	φ_2^L	φ_2^R
3	κ	m_1	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_3^-$	$\Delta \varphi_3^+$	$\Delta \psi_3^-$	$\Delta \psi_3^+$	$\Delta \varphi_3^L$	$\Delta \varphi_3^R$	Q_3	φ_3^L	φ_3^R
4	1	$-m_1$	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_4^-$	$\Delta \varphi_4^+$	$\Delta \psi_4^-$	$\Delta \psi_4^+$	$\Delta \varphi_4^L$	$\Delta \varphi_4^R$	Q_4	φ_4^L	φ_4^R
5	$-n$	-1	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_5^-$	$\Delta \varphi_5^+$	$\Delta \psi_5^-$	$\Delta \psi_5^+$	$\Delta \varphi_5^L$	$\Delta \varphi_5^R$	Q_5	φ_5^L	φ_5^R
6	1	-1	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_6^-$	$\Delta \varphi_6^+$	$\Delta \psi_6^-$	$\Delta \psi_6^+$	$\Delta \varphi_6^L$	$\Delta \varphi_6^R$	Q_6	φ_6^L	φ_6^R
7	κ	m_1	n_1	m_1	m_1	$\Delta \varphi_7^-$	$\Delta \varphi_7^+$	$\Delta \psi_7^-$	$\Delta \psi_7^+$	$\Delta \varphi_7^L$	$\Delta \varphi_7^R$	Q_7	φ_7^L	φ_7^R
8	1	$m_1 - 1$	n_1	m_1	$m_1 + m_1$	$\Delta \varphi_8^-$	$\Delta \varphi_8^+$	$\Delta \psi_8^-$	$\Delta \psi_8^+$	$\Delta \varphi_8^L$	$\Delta \varphi_8^R$	Q_8	φ_8^L	φ_8^R
9	-1	0	n_1	m_1	0	$\Delta \varphi_9^-$	$\Delta \varphi_9^+$	$\Delta \psi_9^-$	$\Delta \psi_9^+$	$\Delta \varphi_9^L$	$\Delta \varphi_9^R$	Q_9	φ_9^L	φ_9^R

Першій групі невідомих відповідають апроксимовані рівняння Лапласа:

$$x_{i,j} = \alpha_k^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_k^-}{\Delta \psi_k^-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta \varphi_k^+}{\Delta \psi_k^+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta \psi_k^-}{\Delta \varphi_k^-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta \psi_k^+}{\Delta \varphi_k^+} x_{i,j+1} \right),$$

$$y_{i,j} = \alpha_k^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_k^-}{\Delta \psi_k^-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta \varphi_k^+}{\Delta \psi_k^+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta \psi_k^-}{\Delta \varphi_k^-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta \psi_k^+}{\Delta \varphi_k^+} y_{i,j+1} \right), \quad (2.42)$$

де $\alpha_k = 2\Delta \varphi_k \Delta \psi_k ((\Delta \varphi_k^- \Delta \varphi_k^+)^{-1} + (\Delta \psi_k^- \Delta \psi_k^+)^{-1})$, $\Delta \varphi_k = (\Delta \varphi_k^- + \Delta \varphi_k^+) / 2$, $\Delta \psi_k = (\Delta \psi_k^- + \Delta \psi_k^+) / 2$, $\Delta \varphi_k^-$, $\Delta \varphi_k^+$, $\Delta \psi_k^-$, $\Delta \psi_k^+$ – кроки локальної сітки (беруться з таблиці), $\{j\} = \begin{cases} j, & j < j_k^0 + m_k, \\ j - m_k^-, & j \geq j_k^0 + m_k. \end{cases}$ Друга група

невідомих – це значення $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ у граничних вузлах сіткової області G_ω^γ , які визначаються при розв’язуванні рівнянь (2.43)–(2.44) належності вузлів до границі області, рівнянь ортогональності (2.45)–(2.46) та рівнянь періодичності (2.47):

$$L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (2.43)$$

$$R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial y} (4x_{i_k^0+1,j}^0 - 3x_{i_k^0,j}^0 - x_{i_k^0+2,j}^0) - \frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial x} \times \\ \times (4y_{i_k^0+1,j}^0 - 3y_{i_k^0,j}^0 - y_{i_k^0+2,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial y} (3x_{i_k^0+n_k,j}^0 + x_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - 4x_{i_k^0+n_k-1,j}^0) - \\ - \frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial x} (3y_{i_k^0+n_k,j}^0 + y_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - 4y_{i_k^0+n_k-1,j}^0) = 0, \\ j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (2.46)$$

$x_{i,J_k^0}^0 = x_{i,J_k^0+m_k^-}$, $y_{i,J_k^0}^0 = y_{i,J_k^0+m_k^-}$, $i = \overline{i_k^0, i_k^0 + n_k}$, для $m_k \neq 0$, $m_k > m_k^-$.

До останньої третьої групи невідомих відносяться величини перетоків між контурами (витрати) та ключові потенціали (останні лише у випадку, якщо розв’язуються ключові задачі). Відповідні їм рівняння будуються на основі умов конформної подібності елементарних сіткових чотирикутників фізичної області та відповідних їм у області комплексного потенціалу і записуються у вигляді:

$$Q_k = \gamma_k m_k (\varphi_k^R - \varphi_k^L), \quad \gamma_k = \frac{1}{n_k m_k} \sum_{i=i_k^0}^{i_k^0+n_k-1} \sum_{j=j_k^0}^{j_k^0+m_k-1} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}, \quad (2.47)$$

$$\text{де } a_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}.$$

Табл.2.11. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.6

k	z_1^k	z_2^k	α_k	m_k	α_k	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_4$	l_k	β_k	φ_k^*	φ_k	ϱ_k^*	ϱ_k
1	$-m_1$	0	m_1	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	f_1	-	φ_1	φ_1	ϱ_1^*	ϱ_1
2	0	0	m_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	-	f_2^*	φ_2	φ_2^*	ϱ_2^*	ϱ_2
3	0	$-m_2$	m_2	m_2	0	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	-	f_3^*	φ_3	φ_3^*	ϱ_3^*	ϱ_3
4	0	-1	m_2	2	0	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	-	f_4^*	-	-	-	-
5	0	$m_2 - 1$	m_2	2	$m_1 - m_2$	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	-	f_5^*	-	-	-	-
6	-1	0	2	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	-	-	-	-	-	-

Табл.2.12. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.7

k	z_1^k	z_2^k	α_k	m_k	α_k	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_4$	l_k	β_k	φ_k^*	φ_k	ϱ_k^*	ϱ_k
1	m_1	1	m_1	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	f_1	-	φ_1	φ_1	ϱ_1^*	ϱ_1
2	0	1	m_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	f_2	-	φ_2	φ_2	ϱ_2^*	ϱ_2
3	$-m_1$	$-m_1$	m_1	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	f_3	-	φ_3	φ_3	ϱ_3^*	ϱ_3
4	0	m_1	m_1	m_1	0	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\varphi_4$	-	f_4^*	φ_4	φ_4^*	ϱ_4^*	-
5	0	-	m_2	3	0	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	$\Delta\varphi_5$	-	f_5^*	-	-	-	-
6	0	m_1	m_2	2	$m_1 - m_2 + 1$	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	$\Delta\varphi_6$	f_6	-	-	-	-	-
7	-1	m_1	m_1	m_1	0	$\Delta\varphi_7$	$\Delta\varphi_7$	$\Delta\varphi_7$	$\Delta\varphi_7$	-	-	-	-	-	-
8	-1	1	2	m_1	0	$\Delta\varphi_8$	$\Delta\varphi_8$	$\Delta\varphi_8$	$\Delta\varphi_8$	-	-	-	-	-	-

Загальна схема алгоритму розв'язування ключових та проміжних задач така:

0. Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z :

$$L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}, \quad L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\},$$

$$L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}; \text{ кількість вузлів розбиття відповідної}$$

області комплексного потенціалу $G_\omega = \bigcup_{k=1}^K G_\omega^k$ деякої сіткової

області G_ω^k (параметри $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3$ – їх кількість

залежить від конкретного випадку, що розглядається); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_i , $i = \overline{1,3}$ та ступінь конформності δ_* відображення, яке ми хочемо побудувати.

1. Задаємо початкове наближення шуканих координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$ та $y_{i,j}^{(0)}$, так щоб виконувалися умови (2.43)–(2.46).
2. Задаємо початкові наближення шуканих координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, початкові наближення витрат $Q_k^{(0)}$ і керуючого потенціалу $\varphi_0^{(0)}$ (для цього розв’язуються рівняння (2.47) відносно невідомих, які у таблиці наведені у окремому стовпчику u_k). Покладаємо $t := 0$ (t – номер загальної ітерації алгоритму).
3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(t)}, y_{i,j}^{(t)})$ за ітераційними схемами (2.42), враховуючи при цьому періодичність шуканих функцій (2.47). Найкраще проводити корекцію координат внутрішніх вузлів, використовуючи багатосіткові методи [27], які дозволяють значно ефективніше використовувати процесорний час. Достатньо провести або одну або невелику кількість ітерацій багатосіткового методу, адже алгоритм передбачає багаторазове виконання цієї операції.
4. “Підправляємо” граничні вузли, розв’язуючи систему рівнянь ортогональності ліній течії до границі області та рівнянь належності вузла до границі області (2.43)–(2.46), одним з модифікованих методів Ньютона.
5. Знаходимо нові наближення $Q_k^{(t)}$, $\varphi_k^{(t)}$ величин Q_k , φ_k ,

розв'язуючи систему рівнянь (2.47).

6. Якщо зміни невідомих величин Q_k і φ_k за останню проведену ітерацію більші за ε_3 , то переходимо до п.3.

7. Знаходимо величину зміщення вузлів на границі за проведену t -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$.

Якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до п.3.

8. Перевіряємо максимальне зміщення за нормою \mathfrak{R}_2 внутрішніх вузлів за останню проведену ітерацію алгоритму. Якщо вона більша за ε_1 , то продовжуємо ітераційний процес з п.3. Обчислюємо параметр конформності отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії розділу течії, а саме знаходимо максимальну нев'язку δ рівнянь Коші-Рімана, записаних у внутрішніх вузлах сіткової області G_ω^y . Якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^y (для цього збільшуємо параметри n_k , m_k , не забуваючи при цьому обрати таке співвідношення між ними, щоб сітка G_ω^y була максимально близька до квадратної) та переходимо до п.3, інакше – кінець роботи алгоритму: задача розв'язана із необхідною точністю.

Наведений загальний алгоритм з успіхом може бути адаптований до розв'язання будь-якої з ключових або проміжних задач. Конкретні випадки адаптації алгоритму та його модифікації стосовно розв'язування задач нелінійної фільтрації будуть наведені у наступних параграфах даного розділу.

2.2.2. Задачі із керуючим потенціалом та проміжні задачі. Алгоритми їх числового розв'язування

Розглянемо задачу знаходження такого значення керуючого потенціалу φ_0 , при якому має місце рівність притоку до внутрішнього контура L_0 – носія керуючого потенціалу та витоку з нього.

Нехай (рис.2.15) у деякій тривз'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (внутрішнім), $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (зовнішнім), $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$ (внутрішнім, що є носієм керуючого потенціалу), розглядається процес фільтрації у пористому пласті, який описується за допомогою рівняння руху $v = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\text{div } v = 0$, де $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, κ – коефіцієнт фільтрації, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$). Значення потенціалів φ_* та φ^* вважатимемо фіксованими, а невідомий (керуючий) параметр φ_0 будемо шукати за умови рівності перетоків з L_* в L_0 та з L_0 в L^* .

Поставлену задачу будемо розв'язувати шляхом підбору такого значення потенціалу керування, за якого буде досягнута рівність перетоків до та з керуючого контура. Для цього задамо деяке допустиме значення потенціалу керування (таке, за якого мають місце всі три перетоки у заданій області), знайдемо, як розв'язок деякої проміжної задачі за спеціально розробленим алгоритмом, величини перетоків до (Q_*^0) та з (Q_0^*) керуючого

контура (при цьому значення потенціалу керування вважатимемо відомим, а невідомими вважатимемо значення перетоків між контурами, що обмежують область G_z), обчислимо різницю $Q_*^0 - Q_0^*$ цих перетоків, на основі якої підправимо обране значення потенціалу керування і т.д., доки не досягнемо рівності нулю модуля різниці перетоків із заданою точністю. Підправляти значення керуючого потенціалу будемо використовуючи монотонно-зростаючий характер залежності різниці перетоків від значення керуючого потенціалу.

Використання проміжної задачі зумовлене питанням можливої нерациональності створення окремого алгоритму для розв'язання поставленої задачі, оскільки проміжна задача вже включає у себе випадки 2.4 та 2.6 з §3.1 і з незначною надбудовою в алгоритмі свого розв'язання, описаною вище, може бути використана також і при розв'язанні поставленої нами вихідної задачі 2.5.

Для розв'язання проміжної задачі знаходження перетоків між контурами, що обмежують задану область, за заданим значенням потенціалу керування, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$), здійснивши умовні розрізи $AB=A_1B_3=A_2B_2$ та $BC=B_3C_1=B_1C_2$ вздовж відповідних ліній течії, що проходять через точку розділу потоків $B=B_1=B_2=B_3$ (рис. 2.15), переходимо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (AB \cup BC)$ на відповідну область комплексного потенціалу

$$G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4 \cup D'E' \cup E'F' \cup E'B'_3,$$

$$(G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < \psi < Q_*^0\}, \quad G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi :$$

$$\varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q_0^*\}, \quad G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \quad \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \\ -Q_*^* < \psi < 0\}, \quad G_\omega^4 = \{\omega = \varphi + i\psi : \quad \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \quad -Q_*^* < \psi < 0\}, \\ D'E' = \{\omega = \varphi + i\psi : \quad \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \quad \psi = 0\}, \quad E'F' = \{\omega = \varphi + i\psi : \\ \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \quad \psi = 0\}, \quad E'B'_3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \quad \varphi = \varphi_0, \quad -Q_*^* < \psi < 0\}, \text{ де} \\ D', E', F', B'_i \text{ - відповідні образи точок } D, E, F, B_i) \text{ з трьохма} \\ \text{невідомими витратами } Q_*^0 = \oint_{DA_2} -v_y dx + v_x dy, \quad Q_0^* = \oint_{EB_1} -v_y dx + v_x dy, \\ Q_*^* = \oint_{A_1D} -v_y dx + v_x dy :$$

$$\begin{aligned} \varphi_x = \psi_y, \quad \varphi|_{A_1A_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{B_1B_2} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_1C_2} = \varphi^*, \\ \varphi_y = -\psi_x, \quad \psi|_{A_1C_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{A_2B_2} = Q_0^*, \quad \psi|_{B_2C_2} = Q_0^*. \end{aligned} \quad (2.48)$$

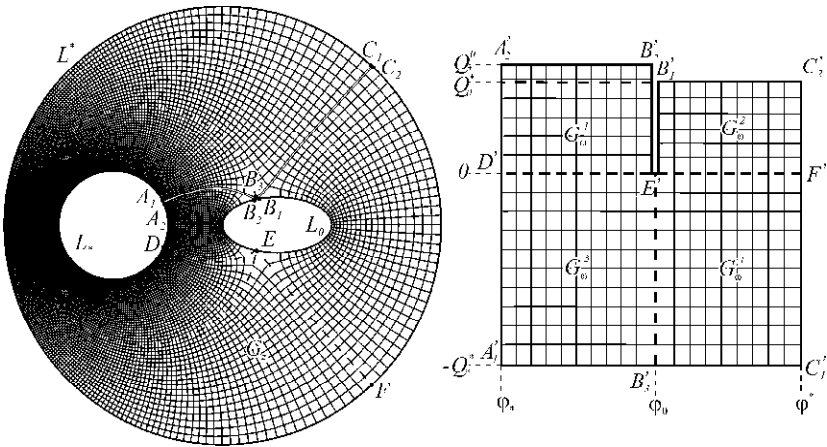


Рис.2.15. Область G_z та відповідна їй конфігурація області комплексного потенціалу G_ω

Відповідну їй неповну обернену крайову задачу на

конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишемо у вигляді:

$$x_\varphi = y_\psi, \quad x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.49)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_0^*,$$

$$f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_*^0,$$

$$f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*,$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, Q_*^0), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_*^0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

$$x(\varphi, -Q_0^*) = x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_0^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (2.50)$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \quad (2.51)$$

Зауважимо, що на відрізьку $\varphi = \varphi_0$, $\psi > 0$ функції $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ набувають різних значень залежно від того, яким точкам контура B_2EB_1 вони відповідають (B_2E чи EB_1).

Дана задача далі буде доповнена нами ще й вимогами виконання рівнянь Лапласа для функцій $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах “берегів” лінії розділу перетоків ABC для врахування її “роздвоєння” при переході від області G_z до G_ω .

Різницеві аналоги рівнянь (2.51), умов (2.50) та додаткових умов для граничних та приграничних вузлів у сітковій області

$$G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j)\}, \text{ де } \varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} -Q_*^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m_1 + m_2}, \text{ для } i \leq n_1, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_3, & j = \overline{m_1, m_1 + m_3}, \text{ для } i \geq n_1, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*) / n_1, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0) / n_2, \quad \Delta\psi_1 = Q_*^* / m_1, \\ \Delta\psi_2 = Q_*^0 / m_2,$$

$$\Delta\psi_3 = Q_0^* / m_3, \quad n = n_1 + n_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 \in N,$$

запишемо у вигляді:

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1} \right), \\ y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1} \right), \quad (2.52)$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}), \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \\ \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2, \quad \text{де значення } \Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+ \\ \text{вибираються з табл.2.13 в залежності від належності вузла } (\varphi_i, \psi_j)$$

тій чи іншій підобласті G_ω^{ly} сіткової області G_ω^y ;

$$f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m_1 + m_2}, \quad f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m_1 + m_3}, \\ f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1 + m_2}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1 + m_3},$$

$$x_{i,0} = x_{i, m_1 + m_2}, \quad y_{i,0} = y_{i, m_1 + m_2}, \quad i = \overline{0, n_1},$$

$$x_{i,0} = x_{i, m_1 + m_3}, \quad y_{i,0} = y_{i, m_1 + m_3}, \quad i = \overline{n_1, n}; \quad (2.53)$$

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial y} \right)_{n,j} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)_{n,j} (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0,$$

$$j = \overline{0, m_1 + m_3},$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y}(x_{0,j}, y_{0,j})(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x_{0,j}, y_{0,j})(4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0,$$

$$j = \overline{0, m_1 + m_2},$$

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} \right)_{n_1,j} (3x_{n_1,j} + x_{n_1-2,j} - 4x_{n_1-1,j}) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} \right)_{n_1,j} (3y_{n_1,j} + y_{n_1-2,j} - 4y_{n_1-1,j}) = 0,$$

$$j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 - 1},$$

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} \right)_{n_1, j} (4x_{n_1+1, j} - 3x_{n_1, j} - x_{n_1+2, j}) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} \right)_{n_1, j} (4y_{n_1+1, j} - y_{n_1, j} - y_{n_1+2, j}) = 0,$$

$$j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_3 - 1}. \quad (2.54)$$

Табл. 2.13. Структура області G_ω^γ

$G_\omega^{l\gamma} / L_l$	i_0	j_0	n_0	m_0	m_-	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
$G_\omega^{1\gamma}$	0	m_1	n_1	m_2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	
$G_\omega^{2\gamma}$	n_1	m_1	n_2	m_3	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_3$	
$G_\omega^{3\gamma}$	0	0	n_1	m_1	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	
$G_\omega^{4\gamma}$	n_1	0	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	
$D'E'$	0	$m_1 - 1$	n_1	2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$
$E'F'$	n_1	$m_1 - 1$	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_3$
$E'B'_3$	$n_1 - 1$	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	
$A'_2 B'_2$	0	$m_1 + m_2 - 1$	n_1	2	$m_1 + m_2$	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$
$B'_1 C'_2$	n_1	$m_1 + m_3 - 1$	n_2	2	$m_1 + m_3$	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$

Формули для знаходження невідомих величин Q^0 , Q^* та Q_0^* одержуємо на підставі умов “конформної подібності” елементарних сіткових чотирикутників двох областей:

$$Q^* = m_1 \Delta\psi_1, \quad Q^0 = m_2 \Delta\psi_2, \quad Q_0^* = m_3 \Delta\psi_3, \quad \Delta\psi_2 = \gamma_1 \Delta\varphi_1, \quad \Delta\psi_3 = \gamma_2 \Delta\varphi_2,$$

$$\Delta\psi_1 = (n_1 \gamma_3 \Delta\varphi_1 + n_2 \gamma_4 \Delta\varphi_2) / (n_1 + n_2),$$

$$\gamma_l = \frac{1}{n_0^l m_0^l} \sum_{i=i_0^l}^{i_0^l + n_0^l - 1} \sum_{j=j_0^l}^{j_0^l + m_0^l - 1} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}, \quad (2.55)$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2},$$

де $l = \overline{1,4}$, а компоненти вектора $(i_0^l, j_0^l, n_0^l, m_0^l)$ вибираються із стовпців 2–5 відповідного підобласті G_ω^{ly} рядка табл. 2.13.

Задавши кількість вузлів розбиття області G_ω n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (2.50)–(2.51) різницевої задачі,

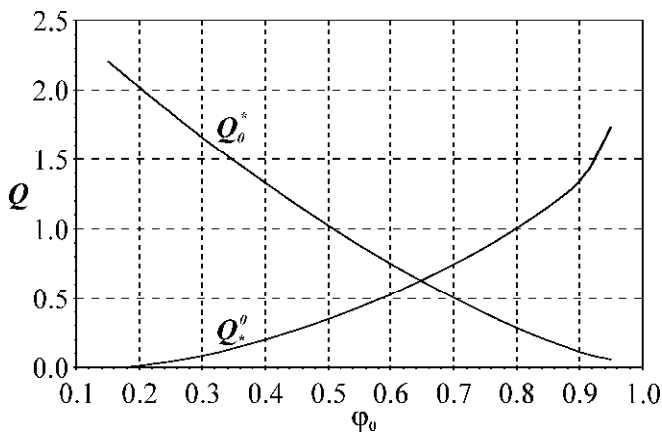


Рис.2.16. Графік залежності шуканих витрат від потенціалу керування

початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.53)) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулою (2.55) початкові наближення величин Q^0, Q^* та Q_0^* .

Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (2.56) типу “хрест” в кожній з підобластей G_ω^{ly} при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}$, $j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (табл.2.13):

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k)} &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1}^{(k-1)} \right), \\ y_{i,j}^{(k)} &= \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1}^{(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

де $\{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j_0 + m_0, \\ j - m_-, & j = j_0 + m_0, \end{cases}$ m_- – параметр корекції індексів,

введений для врахування “роздвоєння” лінії розділу перетоків ABC при переході від області G_z до G_ω .

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв’язуючи наближено систему рівнянь (2.54). Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)}\right)^2} \quad ((i, j) - \text{індекси координат}$$

граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_*^0 , Q_*^* та Q_0^* за формулами (2.55). Якщо найбільша із змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію більша за ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку – обчислюємо нев’язку “конформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.49) в G_ω :

$$\delta_1 = \max_{(i,j) \in \bigcup_{l=1}^4 G_{\omega}^{l'}} \left| \gamma_l(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{(i,j) \in \bigcup_{l=1}^4 G_{\omega}^{l'}} \left| \gamma_l(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 та розв'язуємо задачу повторно (при цьому необхідно зважати на оптимальність співвідношення між ними, яка досягається шляхом оптимізації відповідних функціоналів типу Рімана).

Вище описаний алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT, що використовує набір мультимедійних інструкцій SSE процесорів Pentium III та Athlon XP. Для перевірки його коректності проведена серія чисельних експериментів на тестовому прикладі при $L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos(t), y = y_*(t) = \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4\cos(t), y = y^*(t) = 4\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos(t), y = y_0(t) = \sin(t)/2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $\varphi_* = 0, \varphi^* = 1$. Для знаходження значення потенціалу керування φ_0 , при якому досягається рівність витрат Q_*^0 та Q_0^* , чисельно за алгоритмом, описаним вище, була розв'язана проміжна задача при різних допустимих значеннях потенціалу керування.

Результати обчислень для $n = 50, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4}$ наведені в табл.2.14 (n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до квадратної). Графік залежності

витрат від φ_0 зображений на рис.2.16. Далі, використовуючи метод поділу відрізка пополам, на проміжку $[0.6,0.7]$ було знайдене шукане значення потенціалу керування $\varphi_0 \approx 0.64875$. При цьому були отримані наступні результати: $Q_*^0 \approx Q_0^* \approx 0.6375$, $Q_*^* \approx 5.4394$. Відповідна динамічна сітка зображена на рис.2.15.

Табл.2.14. Результати розрахунків для різних значень потенціалу керування

φ_0	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	Q_*^0	Q_0^*	Q_*^*	δ
0.15	8	42	283	2	118	0.004	2.205	5.314	0.523
0.20	10	40	268	2	101	0.012	2.018	5.358	0.311
0.30	15	35	272	4	83	0.081	1.656	5.431	0.350
0.40	20	30	273	10	66	0.200	1.327	5.469	0.395
0.50	25	25	274	17	51	0.349	1.025	5.480	0.414
0.60	30	20	273	26	38	0.527	0.750	5.464	0.407
0.70	35	15	271	37	25	0.746	0.503	5.419	0.266
0.80	40	10	267	50	14	1.006	0.286	5.338	0.167
0.90	45	5	260	67	5	1.345	0.109	5.197	0.240
0.95	47	3	251	86	3	1.733	0.054	5.073	0.462

Вищеописана методика зведення ключових задач до розв'язування серії проміжних задач може бути з успіхом застосована і для інших випадків формування течії у тризв'язних областях. Поряд із тим, перспективною видається побудова окремих (оптимальних з точки зору мінімізації необхідного для отримання розв'язків машинного часу) алгоритмів для розв'язування вище окреслених задач без необхідності розв'язання серії задач того ж порядку складності, що і вихідна.

2.2.3. Приклади побудови алгоритмів розв'язування задач у тризв'язних областях для різних випадків формування течії.

Розглянемо задачу побудови та реалізації алгоритму розв'язання задач із невідомим керуючим потенціалом φ_0 у тризв'язних областях, обмежених екіпотенціальними лініями, за умов мінімуму перетоку від контуру L_* до L_0 і відсутності перетоку від контуру L_0 до L^* . Для цього розглянемо в деякій тризв'язній криволінійній області $G_z, z = x + iy$, обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t), y = y_0(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, процес руху частинок (зокрема, фільтрації у пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці та ін.), який описується за допомогою рівняння руху $v = \kappa \text{grad} \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\text{div} v = 0$, де $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок; κ – коефіцієнт провідності (фільтрації тощо); $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$) у випадку відсутності перетоку з L_0 до L^* (рис. 2.17). Значення потенціалу керування шукатимемо за умови мінімуму перетоку від L_* до L_0 (рис. 2.18).

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно-спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$), здійснивши умовні розрізи $AB = A_1B_3 = A_2B_2$ і $BC = B_3C_1 = B_1C_2$ вздовж відповідних ліній течії, що проходять через точку розділу потоків $B = B_1 = B_2 = B_3$ (рис. 2.18), отримуємо більш загальну задачу на конформне відображення $\omega = \omega(z)$

утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (AB \cup BC)$ на

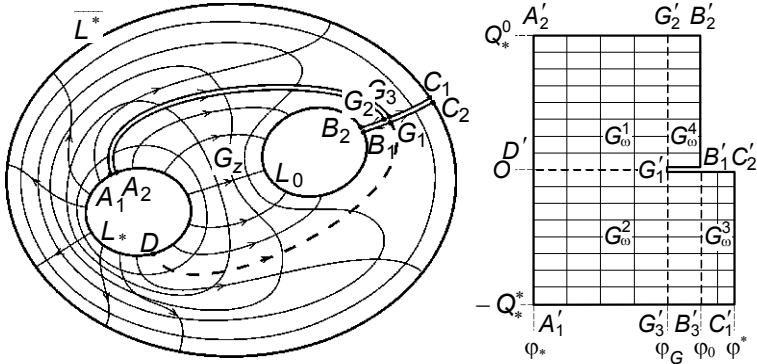


Рис. 2.17. Фізична область та область комплексного потенціалу для випадку 2.7

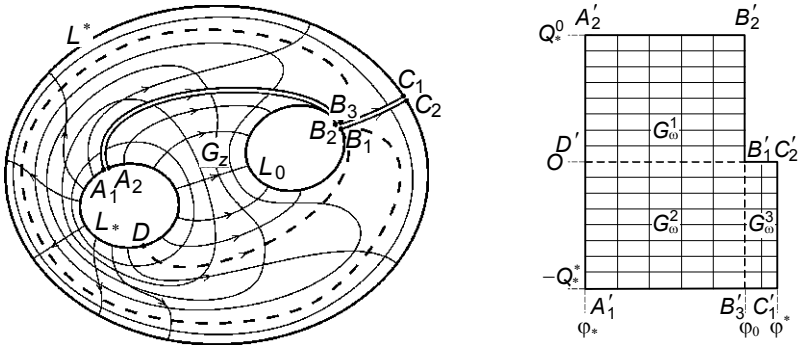


Рис. 2.18. Фізична область та область комплексного потенціалу для випадку 2.6

відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup D'B_1' \cup B_1'B_3'$, де $G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi < Q_*^0\}$, $G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^0 < \psi < 0\}$, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^0 < \psi < 0\}$, $D'B_1' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \psi = 0\}$, $B_1'B_3' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi = \varphi_0, -Q_*^0 < \psi < 0\}$ (тут D' , B_i' – образи точок

D, B_i), з невідомими витратами $Q_*^0 = \oint_{A_2 D} -v_y dx + v_x dy$,

$Q_*^* = \int_{A_1 D} -v_y dx + v_x dy$ та невідомим потенціалом керування φ_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_x = \psi_y, \quad \varphi|_{A_1 A_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{B_1 B_2} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_1 C_2} = \varphi^*, \\ \varphi_y = -\psi_x, \quad \psi|_{A_1 C_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{DB_1} = 0, \quad \psi|_{A_2 B_2} = Q_*^0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Відповідну їй неповну обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 і рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишемо у вигляді:

$$x_\varphi = y_\psi, \quad x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.58)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq 0,$$

$$f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_*^0, \quad (2.59)$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, Q_*^0), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_*^0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, 0), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, 0), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \quad (2.60)$$

Зауважимо, що цю задачу далі доповнюватимемо ще й вимогами виконання рівнянь Лапласа для функцій $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах «берегів» лінії розділу перетоків ABC для врахування її «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω .

Різницеві аналоги рівнянь (2.60), умов (2.59) та додаткових умов для граничних і приграничних вузлів у сітковій області

$$G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}_f, \text{ де } \varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} -Q^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m}, \end{cases} \quad \Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*) / n_1, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0) / n_2,$$

$$\Delta\psi_1 = Q^* / m_1, \quad \Delta\psi_2 = Q^0 / m_2, \quad n = n_1 + n_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N},$$

запишемо у вигляді:

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1} \right),$$

$$y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1} \right), \quad (2.61)$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi \Delta\psi \left(\Delta\varphi_-^{-1} \Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1} \Delta\psi_+^{-1} \right), \quad \text{де значення } \Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$$

визначаються з табл.2.15 залежно від належності вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті $G_\omega^{\ell\gamma}$ сіткової області G_ω^γ ;

$$f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m},$$

$$f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1},$$

$$x_{i,0} = x_{i,m_1}, \quad y_{i,0} = y_{i,m_1}, \quad i = \overline{n_1, n}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial f^*(x_{n,j}, y_{n,j})}{\partial y} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) -$$

$$- \frac{\partial f^*(x_{n,j}, y_{n,j})}{\partial x} (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$\frac{\partial f_*(x_{0,j}, y_{0,j})}{\partial y} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) -$$

$$- \frac{\partial f_*(x_{0,j}, y_{0,j})}{\partial x} (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$\frac{\partial f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})}{\partial y} (3x_{n_1,j} + x_{n_1-2,j} - 4x_{n_1-1,j}) - \frac{\partial f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})}{\partial x} (3y_{n_1,j} + y_{n_1-2,j} - 4y_{n_1-1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1+1, m-1}. \quad (2.63)$$

Формули для знаходження невідомих величин Q_*^0 , Q_*^* і φ_0 одержуємо на підставі умов «конформної подібності» елементарних сіткових чотирикутників двох областей:

$$Q_*^* = m_1 \Delta \psi_1, \quad Q_*^0 = m_2 \Delta \psi_2, \quad \varphi_0 = \varphi_* + n_1 \Delta \varphi_1, \\ \Delta \psi_1 = \gamma_2 \Delta \varphi_1, \quad \Delta \psi_2 = \gamma_1 \Delta \varphi_1, \quad \Delta \varphi_1 = \gamma_3 (\varphi^* - \varphi_*) / (n_2 \gamma_2 + n_1 \gamma_3), \quad (2.64)$$

$$\gamma_\ell = \frac{1}{n_0 m_0} \sum_{i=i_0^\ell}^{i_0^\ell+n_0^\ell-1} \sum_{j=j_0^\ell}^{j_0^\ell+m_0^\ell-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}},$$

де $\ell = \overline{1,3}$, а компоненти вектора $(i_0^\ell, j_0^\ell, n_0^\ell, m_0^\ell)$ вибираються зі стовпців 2–5 відповідного підобласті $G_\omega^{\ell\gamma}$ рядка табл.2.15.

Табл.2.15. Параметри сіткової області

$G_\omega^{\ell\gamma} / L_\ell$	i_0	j_0	n_0	m_0	m_-	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
$G_\omega^{1\gamma}$	0	m_1	n_1	m_2	0		$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$
$G_\omega^{2\gamma}$	0	0	n_1	m_1	0		$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$
$G_\omega^{3\gamma}$	n_1	0	n_2	m_1+1	m_1		$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$
$D'B'_1$	0	m_1-1	n_1	2	0		$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$ $\Delta\psi_2$
$B'_1B'_3$	n_1-1	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$
$A'_2B'_2$	0	$m-1$	n_1	2	m		$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$

Задавши кількість вузлів n_1, n_2, m_1, m_2 розбиття області

G_ω , параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язування відповідної (2.59), (2.60) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.62)) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}$), визначаємо за формулами (2.64) початкові наближення величин Q_*^0, Q_*^* і φ_0 . Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}$) із заданою точністю ε_1 (де k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (2.65) типу «хрест» у кожній із підобластей $G_\omega^{(i)}$ при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}$, $j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (див. табл. 2.15):

$$x_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1}^{(k-1)} \right),$$

$$y_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1}^{(k-1)} \right), \quad (2.65)$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi \left(\Delta\varphi_-^{-1} \Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1} \Delta\psi_+^{-1} \right),$$

де $\{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j + m_0, \\ j - m_-, & j = j + m_0, \end{cases}$ m_- – параметр корекції індексів,

уведений для врахування «роздвоєння» лінії розділу перетоків ABC при переході від області G_z до G_ω .

Після цього «підправляємо» граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.63), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту

загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)}\right)^2}$ (тут (i, j) – індекси координат граничних вузлів) є більшою, ніж ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_*^0 , Q_*^* і φ_0 за формулами (2.64). Якщо найбільша зі змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію є більшою, ніж ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, у протилежному випадку – обчислюємо нев’язку $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ «конформності» отриманої сітки, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.58) у G_ω :

$$\delta_1 = \max_{(i,j) \in G_\omega'} \left| \gamma_\ell(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{(i,j) \in G_\omega'} \left| \gamma_\ell(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1 , n_2 , m_1 , m_2 і розв’язуємо задачу повторно.

Якщо контури L_* та L^* не є екіпотенціальними лініями (наприклад, коли $\varphi_*^* = \varphi_*(M)$, де M – біжуча точка відповідного контуру, $\varphi_*(M)$ – малозмінна неперервно диференційовна та періодична функція), безпосередньо скористатись перевагами запропонованого нами підходу не можна (відповідна область комплексного потенціалу не є канонічною). У цьому випадку можливим є комбінований підхід із використанням методу скінченних елементів і методу мажорантних областей Г. М. Положія.

Описаний вище алгоритм чисельного розв’язування сформульованої задачі реалізований у вигляді програми для ПК

IBM PC/AT. Для перевірки його коректності проведено серію чисельних експериментів на тестовому прикладі, коли

$$L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos t, y = y_*(t) = \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4 \cos t, y = y^*(t) = 4 \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos t, y = y_0(t) = \sin t/2, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$\varphi_* = 0, \varphi^* = 1$. Основні результати розв'язання цієї задачі (значення потенціалу керування і перетоків) для різних значень n_1 наведено в табл.2.15 (при цьому m_1 і m_2 вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до квадратної, $n_2 = 2$).

Отриману динамічну сітку у випадку $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 80 \times 2 \times 428 \times 96$ зображено на рис.2.19, де пунктирною лінією виділено «застійну зону» (область великих нев'язок рівнянь Коші – Рімана в околі особливої точки $B = B_1 = B_2 = B_3 : \delta_{i,j} > \delta_* = 0.05$). Розподіл швидкості на найближчій до контуру $A_1 A_2$ екіпотенціальній лінії зображено на рис. 2.19.

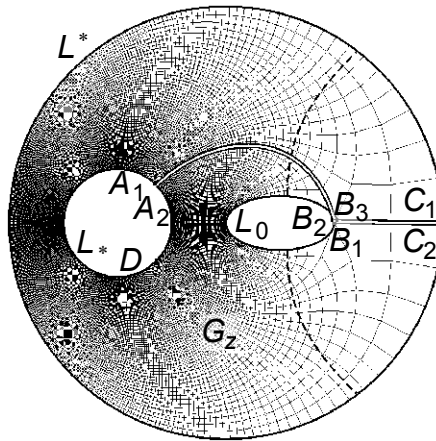


Рис.2.19. Побудована динамічна сітка

Табл. 2.16. Результати числових розрахунків

n_1	m_1	m_2	φ_0	Q_*^0	Q_*^*	δ
5	33	6	0.854	0.942	5.570	0.255
10	61	12	0.895	1.030	5.454	0.195
15	89	17	0.912	1.012	5.394	0.192
20	115	24	0.926	1.098	5.339	0.162
40	219	50	0.958	1.205	5.234	0.131
80	428	92	0.981	1.122	5.245	0.093

Розв'язок сформульованої задачі з керуванням зводиться до розв'язування відповідної виродженої (при $G_i \rightarrow B_i, i = \overline{1,3}$) задачі на конформне відображення областей, зображених на рис.2.17, що включає знаходження тих значень параметрів φ_0, Q_*^0, Q_*^* , які забезпечують його існування та єдиність.

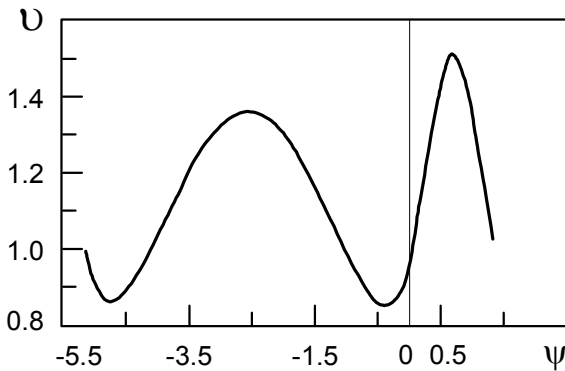


Рис.2.20. Розподіл швидкості фільтрації вздовж еквіпотенціалі

Розглянемо тепер в деякій тризв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t), y = y_0(t), 0 \leq t < 2\pi\}$,

процес фільтрації у випадку відсутності перетоку з L_* в L_0 (див. рис.2.21). Причому значення потенціалу керування шукатимемо за умови максимуму перетоку від L_* до L^* (див. рис. 2.22).

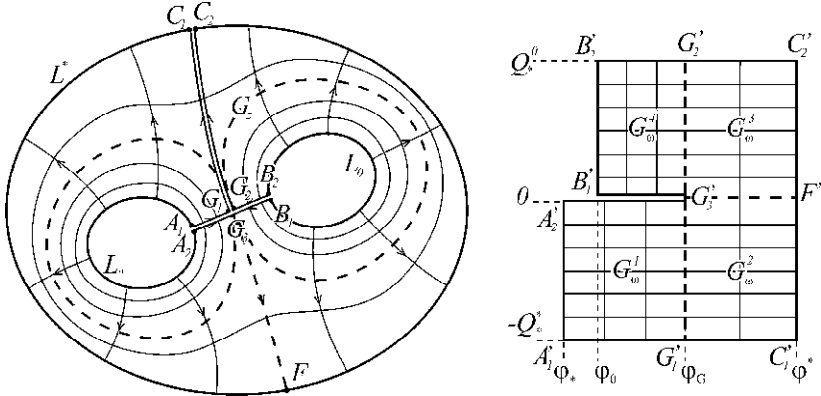


Рис. 2.21. Фізична область та область комплексного потенціалу для проміжного випадку

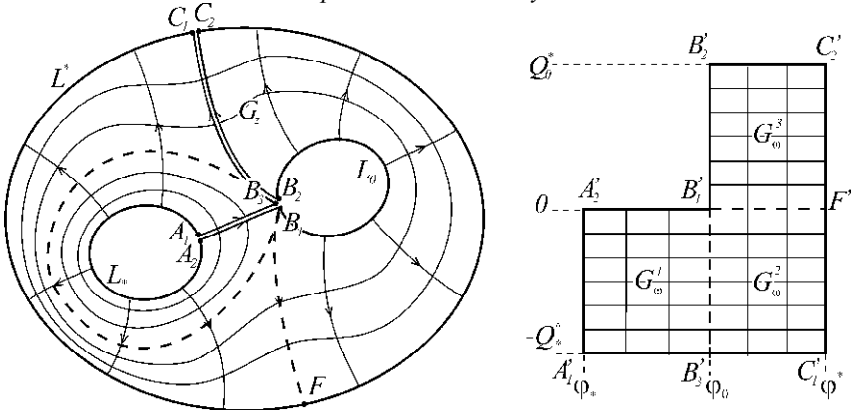


Рис. 2.22. Фізична область та область комплексного потенціалу для ключового випадку

Аналогічно до попереднього випадку, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно спряжену до $\phi = \phi(x, y)$), здійснивши умовні розрізи $AB = A_1B_3 = A_2B_1$ та $BC = B_3C_1 = B_2C_2$ вздовж відповідних

ліній течії, що проходять через точку розділу потоків $B=B_1=B_2=B_3$ (див. рис.2.22), приходимо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (AB \cup BC)$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup F'B'_1 \cup B'_1 B'_3$ ($G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $F'B'_1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \psi = 0\}$, $B'_1 B'_3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi = \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, де F', B'_i – образи точок F, B_i) з двома невідомими витратами $Q_0^* = \oint_{C_2F} -v_y dx + v_x dy$, $Q_*^* = \oint_{C_1F} -v_y dx + v_x dy$ та невідомим керуючим потенціалом φ_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_x = \psi_y, \quad \varphi|_{A_1 A_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{B_1 B_2} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_1 C_2} = \varphi^*, \\ \varphi_y = -\psi_x, \quad \psi|_{A_1 C_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{FB_1} = 0, \quad \psi|_{B_2 C_2} = Q_0^*. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Аналогічно до попереднього відповідну їй неповну обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишемо у вигляді:

$$x_\varphi = y_\psi, \quad x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.67)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq 0,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_0^*,$$

$$f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*, \quad (2.68)$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$x(\varphi, -Q^*) = x(\varphi, 0), \quad y(\varphi, -Q^*) = y(\varphi, 0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \quad (2.69)$$

Зауважимо, що для врахування “роздвоєння” лінії ABC розділу перетоків при переході від області G_z до G_ω , дану задачу далі доповнюватимемо ще й вимогами виконання рівнянь Лапласа для функцій $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах “берегів” даної лінії.

Алгоритм чисельного розв’язання поставленої задачі. Різницеві аналоги рівнянь (2.69), умов (2.68) та додаткових умов для граничних та приграничних вузлів у сітковій області $G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases} \quad \psi_j = \begin{cases} -Q^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m}, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*) / n_1, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0) / n_2, \quad \Delta\psi_1 = Q^* / m_1, \\ \Delta\psi_2 = Q^* / m_2, \quad n = n_1 + n_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \in N, \text{ запишемо у вигляді:}$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1} \right), \\ y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1} \right), \quad (2.70)$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}), \text{ де значення } \Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-,$$

$\Delta\psi_+$ беруться з табл. 2.17 в залежності від належності вузла

(φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті G_ω^{ly} сіткової області G_ω^y ;

$$f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m},$$

$$f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad f^*(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1, n}, \quad x_{i,0} = x_{i,m_1}, \quad y_{i,0} = y_{i,m_1}, \quad i = \overline{0, n_1}; \quad (2.71)$$

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial y} \right)_{n,j} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)_{n,j} (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y}(x_{0,j}, y_{0,j})(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x_{0,j}, y_{0,j})(4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})(4x_{n_1+1,j} - 3x_{n_1,j} - x_{n_1+2,j}) - \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_{n_1,j}, y_{n_1,j})(4y_{n_1+1,j} - 3y_{n_1,j} - y_{n_1+2,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m - 1}. \quad (2.72)$$

Табл.2.17. Параметри сіткової області

G_o^{ly} / L_l	i_0	j_0	n_0	m_0	m_+	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
G_o^{1y}	0	0	n_1	m_1	1	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	
G_o^{2y}	n_1	0	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	
G_o^{3y}	n_1	m_1	n_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_2$	
$F'B'_1$	n_1	$m_1 - 1$	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$
$B'_1 B'_3$	$n_1 - 1$	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	
$B'_2 C'_2$	n_1	$m - 1$	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$

Формули для знаходження невідомих величин Q_0^* , Q^* та φ_0 одержуємо на підставі умов “конформної подібності” елементарних сіткових чотирикутників двох областей:

$$Q_*^* = m_1 \Delta\psi_1, \quad Q_0^* = m_2 \Delta\psi_2, \quad \varphi_0 = \varphi^* - n_2 \Delta\varphi_2, \quad \Delta\psi_1 = \gamma_2 \Delta\varphi_2, \\ \Delta\psi_2 = \gamma_3 \Delta\varphi_2, \quad \Delta\varphi_2 = \gamma_1 (\varphi^* - \varphi_*) / (n_1 \gamma_2 + n_2 \gamma_1), \quad (2.73)$$

$$\gamma_l = \frac{1}{n_0 m_0} \sum_{i,j=\overline{0, j_0}}^{\overline{i_0+n_0-1, j_0+m_0-1}} \frac{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}},$$

де $l = \overline{1, 3}$, а компоненти вектора (i_0, j_0, n_0, m_0) вибираються із

відповідного підобласті G_{ω}^{ly} рядка таблиці 2.17.

Задавши кількість вузлів розбиття області G_{ω} n_1, n_2, m_1, m_2 , параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (2.68)-(2.69) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.71)) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулами (2.73) початкові наближення величин Q_0^*, Q^* та φ_0 . Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (2.74) типу “хрест” в кожній з підобластей G_{ω}^{ly} при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}, j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 + m_+ - 1}$:

$$x_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1}^{(k-1)} \right),$$

$$y_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1}^{(k-1)} \right), \quad (2.74)$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}), \text{ де } \{j\} = j_0 + ((j - j_0) \bmod m_0).$$

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.72). Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ ((i, j) – індекси координат граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення

внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_0^* , Q^* та φ_0 за формулами (2.73). Якщо найбільша із змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію більша за ε_3 , то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку – обчислюємо нев’язку “конформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.67) в G_ω :

$$\delta_1 = \max_{(i,j) \in G_\omega'} \left| \gamma_l(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{(i,j) \in G_\omega'} \left| \gamma_l(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1 , n_2 , m_1 , m_2 та розв’язуємо задачу повторно (оптимальність співвідношення між ними досягається аналогічно до попереднього випадку шляхом оптимізації відповідних функціоналів типу Рімана).

Табл.2.18. Результати числових розрахунків

n_2	n_1	m_1	m_2	φ_0	Q_0^*	Q^*	δ
20	2	116	55	0.099	2.479	5.215	0.063
30	4	178	81	0.118	2.392	5.236	0.042
40	6	240	108	0.125	2.364	5.243	0.032
60	9	364	161	0.132	2.329	5.252	0.022
80	13	486	214	0.135	2.318	5.255	0.017

Для перевірки коректності вище описаного алгоритму була

проведена серія чисельних експериментів на тестовому прикладі, коли $L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos(t), y = y_*(t) = \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4\cos(t), y = y^*(t) = 4\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos(t), y = y_0(t) = \sin(t)/2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$. Основні результати розв'язання поставленої задачі (значення керуючого потенціалу та перетоків) для різних значень n_1 наведені в табл. 2.18 (n_2 , m_1 та m_2 вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до квадратної, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-8}$).

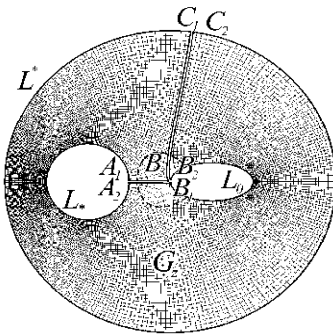


Рис.2.23. Побудована динамічна сітка

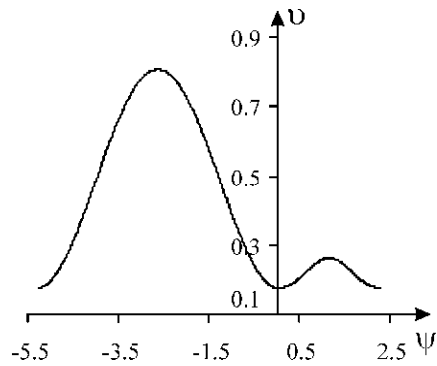


Рис. 2.24. Розподіл швидкості

Отримана динамічна сітка у випадку $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 6 \times 40 \times 240 \times 108$ зображена на рис.2.23, де пунктирними лініями виділена "застійна зона" (область великих нев'язок рівнянь Коші-Рімана в околі особливої точки $B=B_1=B_2=B_3$: $\delta_{i,j} > \delta_* = 0.02$). Розподіл швидкості на найближчій до контура C_1C_2 екіпотенціальній лінії зображений на рис. 2.24.

2.2.4. Нелінійна фільтрація у випадку тривз'язних модельних областей

Розглянемо нелінійний стаціонарний процес фільтрації в деякій тривз'язній криволінійній області G_z (рис. 2.25а), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$, який описується за допомогою рівняння руху $v = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\text{div } v = 0$, де $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок; $\kappa = (\kappa^{rs}(x, y, \varphi_x, \varphi_y))_{2 \times 2}$ – тензор провідності (фільтрації тощо), який дає можливість враховувати неоднорідність середовища, його анізотропність та схильність до фільтраційних деформацій; $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* = \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$).

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазікомплексно-спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$) та здійснивши умовний розріз Γ вздовж однієї з ліній розділу течії в G_z , отримуємо більш загальну задачу на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4 \cup H'_1 H'_2 \cup H'_2 F \cup H'_2 H'_3$, $G_\omega^1 = \{\omega : \varphi_0 < \varphi < \varphi_H, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_\omega^2 = \{\omega : \varphi_H < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_\omega^3 = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi_H, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^4 = \{\omega : \varphi_H < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $H'_1 H'_2 = \{\omega : \varphi = \varphi_H, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $H'_2 F = \{\omega : \varphi_H < \varphi < \varphi^*, \psi = 0\}$, $H'_2 H'_3 = \{\omega : \varphi = \varphi_H, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $\omega = \varphi + i\psi$ (тут F' , H'_i – образи точок F , H_i) з невідомими параметрами-

$$\begin{aligned}
f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*, \\
f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad -Q_0^* \leq \psi \leq Q_0^*, \\
x(\varphi, -Q_0^*) &= x(\varphi, 0), \quad y(\varphi, -Q_0^*) = y(\varphi, 0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_H, \\
x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_H, \\
x(\varphi, -Q_0^*) &= x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_0^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi^*; \quad (2.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa^{11}} (x_\varphi + \kappa^{12} x_\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa^{11}} (\kappa \cdot x_\psi - \kappa^{21} x_\varphi) \right) \right\} = 0, \\
&\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa^{22}} (y_\varphi - \kappa^{21} y_\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\kappa^{22}} (\kappa \cdot y_\psi + \kappa^{12} y_\varphi) \right) \right\} = 0, \\
&\kappa = \kappa^{11} \kappa^{22} - \kappa^{12} \kappa^{21}. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що цю задачу далі доповнюватимемо ще й вимогами виконання рівнянь (2.78) для функцій $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах “берегів” лінії розділу перетоків Γ для врахування її “роздвоєння” при переході від області G_z до G_ω .

Різнлицеві аналоги рівнянь (2.78), умов (2.77) та додаткових умов для граничних та приграничних вузлів у сітковій області $G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\begin{aligned}
\varphi_i &= \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_H + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases} & \Delta\varphi_1 = (\varphi_H - \varphi_*) / n_1, \\
\psi_j &= \begin{cases} -Q_0^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m}, \end{cases} & \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_H) / n_2,
\end{aligned}$$

$$\Delta\psi_1 = Q_0^* / m_1, \quad \Delta\psi_2 = Q_0^* / m_2, \quad n = n_1 + n_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \in N,$$

запишемо у вигляді:

$$x_{i,j} = \alpha_{i,j}^{-1} \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{11}} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i-1,j} \right) + \frac{\kappa_{i,j}}{\kappa_{i,j}^{11}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i,j+1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i,j-1} \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta\psi}{4\Delta\varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{1}{\kappa_{i-1,j}^{11}} \right) \times (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \frac{\Delta\varphi}{4\Delta\psi} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{11}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{11}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i+1,j}^{12}}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j+1}^{21}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} \right) x_{i+1,j+1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i-1,j}^{12}}{\kappa_{i-1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{21}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) x_{i-1,j-1} - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i+1,j}^{12}}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{21}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) \times \\
& \quad \times x_{i+1,j-1} - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i-1,j}^{12}}{\kappa_{i-1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j+1}^{21}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} \right) x_{i-1,j+1} \Bigg), \\
y_{i,j} = & \beta_{i,j}^{-1} \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{22}} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i-1,j} \right) + \frac{\kappa_{i,j}}{\kappa_{i,j}^{22}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i,j+1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i,j-1} \right) \right) + \\
& + \frac{\Delta\psi}{4\Delta\varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1,j}^{22}} - \frac{1}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) \times (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \frac{\Delta\varphi}{4\Delta\psi} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{22}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{22}}{\kappa_{i,j-1}^{22}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{12}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i+1,j}^{21}}{\kappa_{i+1,j}^{22}} \right) y_{i+1,j+1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j-1}^{12}}{\kappa_{i,j-1}^{22}} - \frac{\kappa_{i-1,j}^{21}}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) y_{i-1,j-1} - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j-1}^{12}}{\kappa_{i,j-1}^{22}} - \frac{\kappa_{i+1,j}^{21}}{\kappa_{i+1,j}^{22}} \right) \times \\
& \quad \times y_{i+1,j-1} - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{12}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i-1,j}^{21}}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) y_{i-1,j+1} \Bigg), \tag{2.79}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \kappa_{i,j}^{rs} = \kappa^{rs} \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, -\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right),$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$$\alpha_{i,j} = 2\Delta\varphi\Delta\psi (\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \kappa_{i,j}\Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}) / \kappa_{i,j}^{11},$$

$$\beta_{i,j} = 2\Delta\varphi\Delta\psi (\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \kappa_{i,j}\Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1}) / \kappa_{i,j}^{22},$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi},$$

а значення $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ вибираються з табл. 2.19 в залежності від належності вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті

G_ω^{ly} сіткової області G_ω^y ;

$$f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$f_0(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1, n}, \quad x_{i,0} = x_{i,m_1}, \quad y_{i,0} = y_{i,m_1}, \quad i = \overline{0, n_1}; \quad (2.80)$$

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(\kappa_{0,j}^{22}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{21}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1})) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times (\kappa_{0,j}^{11}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{12}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1})) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(\kappa_{0,j}^{22}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{21}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1})) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times (\kappa_{0,j}^{11}(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - \kappa_{0,j}^{12}(x_{0,j+1} - x_{0,j-1})) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{22}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) - \kappa_{n,j}^{21}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1})) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times (\kappa_{n,j}^{11}(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - \kappa_{n,j}^{12}(x_{n,j+1} - x_{n,j-1})) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \quad (2.81)$$

Формули для знаходження невідомих величин Q_0^* , Q_*^* та φ_H одержуємо на підставі умов “квазіконформної подібності” елементарних сіткових чотирикутників двох областей:

$$\varphi_H = \varphi_* + n_1 \Delta \varphi_1, \quad Q_*^* = m_1 \gamma_3 \Delta \varphi_1, \quad Q_0^* = m_2 \gamma_1 \Delta \varphi_1,$$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{2} \left(\frac{\gamma_2}{n_1 \gamma_2 + n_2 \gamma_1} + \frac{\gamma_4}{n_1 \gamma_4 + n_2 \gamma_3} \right),$$

$$\gamma_l = \frac{1}{n_0^l m_0^l} \sum_{i=i_0^l}^{i_0^l + n_0^l - 1} \sum_{j=j_0^l}^{j_0^l + m_0^l - 1} \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j}}{\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i,j+1}}, \quad (2.82)$$

$$\text{де } \bar{a}_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(\bar{\kappa}_{i,j}^{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{\kappa}_{i,j}^{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2 + (\bar{\kappa}_{i,j}^{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{\kappa}_{i,j}^{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2},$$

$$\kappa_{i,j}^{-rs} = \kappa^{rs} \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4}, \right. \\ \left. \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2\Delta\psi \cdot \bar{J}_{i,j}}, \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot \bar{J}_{i,j}} \right),$$

$\bar{J}_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} ((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j}))$, $l = \overline{1,4}$, а компоненти вектора $(i_0^l, j_0^l, n_0^l, m_0^l)$ вибираються із стовпців 2-5 відповідного підобласті G_ω^{ly} рядка табл.2.19.

Задавши кількість вузлів розбиття області $G_\omega (n_1, n_2, m_1, m_2, m_3)$, параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (2.77)–(2.78) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n_1,j}^{(0)}, y_{n_1,j}^{(0)}, x_{n_2,j}^{(0)}, y_{n_2,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.80) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулами (2.82) початкові наближення величин Q_0^* , Q_H^* та φ_H . Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (2.83) типу “хрест” в кожній з підобластей G_ω^{ly} при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}, j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (див. табл.2.19):

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k)} = & \alpha_{i,j}^{-1} \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{11}} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} \right) + \frac{\kappa_{i,j}}{\kappa_{i,j}^{11}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \right) + \\ & + \frac{\Delta\psi}{4\Delta\varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{1}{\kappa_{i-1,j}^{11}} \right) \times (x_{i+1,j}^{(k-1)} - x_{i-1,j}^{(k-1)}) + \frac{\Delta\varphi}{4\Delta\psi} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) (x_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} - x_{i,j-1}^{(k-1)}) + \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i+1,j}^{12}}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j+1}^{21}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} \right) x_{i+1,\{j+1\}}^{(k-1)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i-1,j}^{12}}{\kappa_{i-1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{21}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) x_{i-1,j-1}^{(k-1)} - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i+1,j}^{12}}{\kappa_{i+1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j-1}^{21}}{\kappa_{i,j-1}^{11}} \right) x_{i+1,j-1}^{(k-1)} - \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i-1,j}^{12}}{\kappa_{i-1,j}^{11}} - \frac{\kappa_{i,j+1}^{21}}{\kappa_{i,j+1}^{11}} \right) x_{i-1,\{j+1\}}^{(k-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{i,j}^{(k)} = & \beta_{i,j}^{-1} \left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{22}} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} \right) + \frac{\kappa_{i,j}}{\kappa_{i,j}^{22}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \right) + \\
& + \frac{\Delta\psi}{4\Delta\varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1,j}^{22}} - \frac{1}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) \times \left(y_{i+1,j}^{(k-1)} - y_{i-1,j}^{(k-1)} \right) + \frac{\Delta\varphi}{4\Delta\psi} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i,j-1}}{\kappa_{i,j-1}^{22}} \right) \left(y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} - y_{i,j-1}^{(k-1)} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{12}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i+1,j}^{21}}{\kappa_{i+1,j}^{22}} \right) y_{i+1,\{j+1\}}^{(k-1)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j-1}^{12}}{\kappa_{i,j-1}^{22}} - \frac{\kappa_{i-1,j}^{21}}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) y_{i-1,j-1}^{(k-1)} - \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_{i,j+1}^{12}}{\kappa_{i,j+1}^{22}} - \frac{\kappa_{i-1,j}^{21}}{\kappa_{i-1,j}^{22}} \right) y_{i-1,\{j+1\}}^{(k-1)},
\end{aligned}$$

де $\{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j_0 + m_-, \\ j - m_-, & j = j_0 + m_-, \end{cases}$ m_- – параметр корекції індексів,

введений для врахування “роздвоєння” лінії розділу перетоків при переході від області G_- до G_+ .

Після цього “підправляємо” граничні вузли, розв’язуючи наближено систему рівнянь (2.81). Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)} \right)^2 + \left(y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)} \right)^2}, \quad \text{де } (i,j) - \text{ індекси}$$

координат граничних вузлів, більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_0^* , Q_*^* та φ_H за формулами (2.82). Якщо найбільша із змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію більша за ε_3 , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку – обчислюємо нев’язку “квазіконформності” отриманої сітки

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad \text{де } \delta_1, \delta_2 - \text{ нев’язки апроксимацій рівнянь (2.76) в}$$

G_ω .

Табл.2.19. Структура сіткової області G_ω^y

G_ω^{ly} / L_i	i_0	j_0	n_0	m_0	m_-	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
G_ω^{1y}	0	m_1	n_1	$m_2 + 1$	m_2	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	
G_ω^{2y}	n_1	m_1	n_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_2$	
G_ω^{3y}	0	0	n_1	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	
G_ω^{4y}	n_1	0	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	
..	$n_1 - 1$	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	
$H'_2 F'$	n_1	$m_1 - 1$	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$
$H'_2 H'_3$	$n_1 - 1$	m_1	2	m_2	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	
$H'_3 C'_2$	n_1	$m - 1$	n_2	2	m	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1, n_2, m_1, m_2 та розв'язуємо задачу повторно.

Описаний вище алгоритм чисельного розв'язування поставленої задачі реалізований у вигляді програми для ПК IBM PC/AT. Комп'ютерна збіжність та коректність алгоритму перевірялися на тестовому прикладі:

$$L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -4 + \cos t, y = y_*(t) = \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 8 \cos t, y = y^*(t) = 8 \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 4 + 2 \cos t, y = y_0(t) = \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$\kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} & 0.1\varepsilon \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \\ 0.15\varepsilon \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} & 1 + 2\varepsilon \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0.01,$$

$\varphi_* = \varphi_0 = 0$, $\varphi^* = 1$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 10 \times 28 \times 117 \times 161$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4}$,
в результаті розв'язання якого була отримана динамічна сітка
(рис.2.25а), потенціал точки розділу потоків $\varphi_H = 0.2608$ та
значення витрат $Q_0^* = 4.2111$ і $Q_*^* = 3.0640$.

Алгоритм реалізований у вигляді програмного комплексу,
який забезпечує роботу як в автоматичному так і в діаловому
режимах, зокрема, дозволяє зупиняти процес обчислень за
неповного виконання “умов зупинки” із виведенням ділянок
області, де нев'язки більші за задані.

У випадку ізотропного однорідного середовища із
врахуванням лише взаємовпливу характеристик середовища та
процесу для моделювання явищ типу суфозії зручно розглядати
спрощену форму запису коефіцієнта фільтрації у вигляді:
 $\kappa = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$. Це дозволяє значно спростити формули для
обчислень.

В даному випадку формули (2.75) замінюються на

$$\kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L'} = \varphi^*,$$

$$\psi|_{A_1H_1C_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{A_2H_2B_1} = 0, \quad \psi|_{B_2H_3C_2} = Q_0^*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0, \quad \varphi|_{L_H} = \varphi_H. \quad (2.83)$$

Обернена крайова задача на квазіконформне відображення
 $z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 і рівняння для дійсної
 $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції
течії $z = z(\omega)$ записуються у вигляді:

$$\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (2.84)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq 0, \quad f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_0^*,$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, 0), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, 0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_H,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_H,$$

$$x(\varphi, -Q_*^*) = x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi^*; \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (2.86)$$

де $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$.

Різницеві аналоги рівнянь (2.86), умов (2.85) та додаткових умов для граничних та приграничних вузлів у сітковій області $G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$ набувають вигляду:

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j) = \alpha_{i,j}^{-1} \cdot \left(\kappa_{i,j}^{-1} \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi_+} x_{i+1,j} \right) + \kappa_{i,j} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi_+} \times \right. \right.$$

$$\left. \times x_{i,j+1} \right) + \frac{(\kappa_{i+1,j}^{-1} - \kappa_{i-1,j}^{-1}) \Delta \psi}{4 \Delta \varphi} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \frac{(\kappa_{i,j+1} - \kappa_{i,j-1}) \Delta \varphi}{4 \Delta \psi} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}),$$

$$y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j) = \alpha_{i,j}^{-1} \cdot \left(\kappa_{i,j}^{-1} \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi_+} y_{i+1,j} \right) + \kappa_{i,j} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi_+} \times \right. \right.$$

$$\left. \times y_{i,j+1} \right) + \frac{(\kappa_{i+1,j}^{-1} - \kappa_{i-1,j}^{-1}) \Delta \psi}{4 \Delta \varphi} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \frac{(\kappa_{i,j+1} - \kappa_{i,j-1}) \Delta \varphi}{4 \Delta \psi} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}),$$

$$\alpha_{i,j} = 2\Delta\varphi\Delta\psi (\kappa_{i,j}^{-1}\Delta\varphi_{-}^{-1}\Delta\varphi_{+}^{-1} + \kappa_{i,j}\Delta\psi_{-}^{-1}\Delta\psi_{+}^{-1}),$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_{-} + \Delta\varphi_{+}) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_{-} + \Delta\psi_{+}) / 2, \quad (2.87)$$

де значення $\Delta\varphi_{-}$, $\Delta\varphi_{+}$, $\Delta\psi_{-}$, $\Delta\psi_{+}$ вибираються з табл.2.19 в залежності від належності вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті G_{ω}^{ly} сіткової області G_{ω}^y ;

$$f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$f_0(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.88)$$

$$x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1, n}, \quad x_{i,0} = x_{i,m_1}, \quad y_{i,0} = y_{i,m_1}, \quad i = \overline{0, n_1};$$

$$\frac{\partial f_*}{\partial y}(x_{0,j}, y_{0,j})(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x_{0,j}, y_{0,j})(4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y}(x_{n,j}, y_{n,j})(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x_{n,j}, y_{n,j})(3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0,$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x_{0,i}, y_{0,i})(4x_{1,i} - 3x_{0,i} - x_{2,i}) - \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_{0,i}, y_{0,i})(4y_{1,i} - 3y_{0,i} - y_{2,i}) = 0,$$

$$i = \overline{m_1 + 1, m}, \quad j = \overline{0, m}. \quad (2.89)$$

Формули для знаходження невідомих величин Q_0^* , Q_m^* та φ_H залишаються тими ж самими як і загальна схема алгоритму.

Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) проводиться за допомогою ітераційних схем (2.90) типу “хрест” в кожній з підобластей G_{ω}^{ly} при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}$, $j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (див. табл.2.19):

$$x_{i,j}^{(k)} = \alpha_{i,j}^{-1} \cdot \left[\kappa_{i,j}^{-1} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_{-}} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_{+}} x_{i+1,j}^{(k-1)} \right) + \kappa_{i,j} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_{-}} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_{+}} x_{i,j+1}^{(k-1)} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\kappa_{i+1,j}^{-1} - \kappa_{i-1,j}^{-1})\Delta\psi}{4\Delta\varphi} (x_{i+1,j}^{(k-1)} - x_{i-1,j}^{(k-1)}) + \frac{(\kappa_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} - \kappa_{i,j-1}^{(k-1)})\Delta\varphi}{4\Delta\psi} (x_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} - x_{i,j-1}^{(k-1)}) \Big), \\
y_{i,j}^{(k)} = & \alpha_{i,j}^{-1} \cdot \left(\kappa_{i,j}^{-1} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} \right) + \kappa_{i,j} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(\kappa_{i+1,j}^{-1} - \kappa_{i-1,j}^{-1})\Delta\psi}{4\Delta\varphi} (y_{i+1,j}^{(k-1)} - y_{i-1,j}^{(k-1)}) + \frac{(\kappa_{i,\{j+1\}} - \kappa_{i,j-1})\Delta\varphi}{4\Delta\psi} (y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} - y_{i,j-1}^{(k-1)}) \right), \quad (2.90)
\end{aligned}$$

де $\alpha_{i,j} = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\kappa_{i,j}^{-1}\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \kappa_{i,j}\Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1})$, $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2$,

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2, \quad \{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j_0 + m_0, \\ j - m_-, & j = j_0 + m_0, \end{cases} \quad m_- \text{ — параметр}$$

корекції індексів, введений для врахування “роздвоєння” лінії розділу потоків при переході від області G_z до G_ω .

Комп'ютерна збіжність та коректність алгоритму для спрощеної моделі перевірялися на тестовому прикладі:

$$L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos t, y = y_*(t) = \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4 \cos t, y = y^*(t) = 4 \sin t, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos t, y = y_0(t) = \sin t / 2, 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$\varphi_* = \varphi_0 = 0, \varphi^* = 1, \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y) = 1 + \varepsilon \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}, \varepsilon = 0.01,$$

$$n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 10 \times 26 \times 110 \times 146, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4},$$

в результаті розв'язання якого були отримані потенціал точки розділу потоків $\varphi_H = 0.2799$ та значення витрат $Q_0^* = 4.1097$ і $Q_*^* = 3.0792$.

Вище описані алгоритми із деякими модифікаціями можуть бути поширені також і на інші випадки формування течії, що визначаються співвідношенням між величинами граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 .

2.3. Комп'ютерне моделювання фільтраційних процесів у ґрунтах

2.3.1. Особливості програмної реалізації числових алгоритмів моделювання фільтраційних процесів у пористих середовищах для багатозв'язних областей

Задачі, що розглядалися у попередніх розділах зводяться до розв'язування неоднорідних за структурою та великих за об'ємом систем нелінійних та квазілінійних рівнянь, обсяг яких вимагає якнайбільшої оптимізації алгоритмів та програм. З метою підвищення обчислювальної ефективності запропонованих вище алгоритмів і процедур нами досліджувалися, зокрема, такі шляхи: 1) вибір схем опису границь модельних областей (явної, неявної, параметричної тощо); 2) вибір методів розв'язування великих за обсягом систем алгебраїчних рівнянь – різницевих аналогів вихідних крайових задач на конформній (квазіконформній) відображенні для систем еліптичних рівнянь; 3) вибір програмних засобів та спеціальних методик організації обчислень для досягнення максимально можливого використання потенціалу сучасних mainstream процесорів.

В результаті проведених досліджень у цьому напрямку нами виявлено, що використання параметричного задання граничних ліній у вигляді $L = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [0, 2\pi)\}$ замість їх неявного задання $L = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ (більш зручного для опису теоретичних викладок) дозволяє зменшити кількість невідомих у системі: замість знаходження двох координат $(x_{i,j}, y_{i,j})$ кожної з граничних точок необхідно знайти лише один параметр $t_{i,j}$. При цьому рівняння належності вузла границі області виду

$$L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0) = 0, \quad R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0+1, j_k^0+m_k-1}$$

виключаються зі складу системи, а рівняння ортогональності

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial y} (4x_{i_k^0+1,j}^0 - 3x_{i_k^0,j}^0 - x_{i_k^0+2,j}^0) - \frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial x} \times \\ & \times (4y_{i_k^0+1,j}^0 - 3y_{i_k^0,j}^0 - y_{i_k^0+2,j}^0) = 0, \quad \frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial y} (3x_{i_k^0+n_k,j}^0 + x_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - \\ & - 4x_{i_k^0+n_k-1,j}^0) - \frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial x} (3y_{i_k^0+n_k,j}^0 + y_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - 4y_{i_k^0+n_k-1,j}^0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & j = \overline{j_k^0+1, j_k^0+m_k-1} \text{ замінюються на рівняння } \frac{\partial \tilde{x}(t_{i_k^0,j}^0)}{\partial t} (x_{i_k^0+1,j}^0 - \tilde{x}(t_{i_k^0,j}^0)) + \\ & + \frac{\partial \tilde{y}(t_{i_k^0,j}^0)}{\partial t} (y_{i_k^0+1,j}^0 - \tilde{y}(t_{i_k^0,j}^0)) = 0 \text{ (для вузлів, що знаходяться на лівих} \end{aligned}$$

граничних лініях області комплексного потенціалу) та

$$\frac{\partial \tilde{x}(t_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial t} (\tilde{x}(t_{i_k^0+n_k,j}^0) - x_{i_k^0+n_k-1,j}^0) + \frac{\partial \tilde{y}(t_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial t} (\tilde{y}(t_{i_k^0+n_k,j}^0) - y_{i_k^0+n_k-1,j}^0) = 0$$

(для вузлів, що знаходяться на правих граничних лініях області комплексного потенціалу), де $\tilde{x}(t)$ та $\tilde{y}(t)$ – функції, що визначають відповідну граничну лінію.

На етапі уточнення координат внутрішніх вузлів для розв’язування відповідних систем алгебраїчних рівнянь доцільніше використовувати багатосітковий ітераційний метод [22,27], запропонований у 1961 році Р. П. Федоренко (який і на сьогоднішній день залишається чи не найбільш “швидким” при розв’язуванні великих розріджених систем алгебраїчних рівнянь, що виникають при дискретизації різноманітних задач математичної фізики). Зокрема, використання навіть звичайного V-багатосіткового кроку дозволяє значно підвищити швидкість збіжності у порівнянні із використанням звичайних ітераційних

методів таких як, наприклад, метод Зейделя чи метод Якобі. Крім того, зменшити час роботи загального алгоритму вдається проведенням лише декількох (зокрема, однієї) ітерацій етапу уточнення внутрішніх вузлів.

Суттєве прискорення виконання програм розрахунку фільтраційних полів можна здійснити за рахунок якнайповнішого використання обчислювального потенціалу сучасних mainstream процесорів на основі залучення технологій паралельних обчислень MMX, SSE, SSE-II та SSE-III. Використання сучасних векторизуючих компіляторів дозволяє підвищити продуктивність роботи процесорів без ускладнення програмної реалізації алгоритму різного роду вставками машинно-орієнтованого коду, які, як відомо, суттєво звужують можливості перенесення такого коду на інші обчислювальні платформи. Для 32х-бітної платформи PC більш пріоритетним, на наш погляд, є вибір в якості базового компілятора Intel® C++ Compiler for 32-bit applications, v 8.1, який дозволяє обирати тип процесора з поміж усіх моделей однойменної компанії та використовувати алгоритм автоматичної векторизації вихідного коду програми. Відзначимо, що при використанні згаданого вище компілятора при комп'ютерному моделюванні дозволило нам отримати прискорення виконання алгоритму у 5–10 разів в порівнянні із використанням традиційних компіляторів.

2.3.2. Результати розрахунків фільтраційних процесів у пористих середовищах без та з врахуванням деформаційних явищ, їх аналіз та порівняльна характеристика

З метою перевірки адекватності запропонованих моделей, достовірності отримуваних на їх основі результатів дослідження відповідних процесів здійснювалося порівняння результатів

багаточисельних числових експериментів за розробленими алгоритмами з результатами відомих аналітичних та експериментальних досліджень, а також натурних спостережень для серій тестових прикладів.

Зокрема, розглядався випадок ідеального поля, породженого двома особливими точками – витоком ($z = -1$) та втоком ($z = 1$) однакових інтенсивностей Q , комплексний потенціал якого має вигляд:

$$\omega = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z+1) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z-1) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+1}{z-1},$$

де $\varphi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}}$ – потенціал швидкості, $\psi(x, y)$ – функція течії.

Легко бачити, що екіпотенціальними лініями $\varphi(x, y) = \varphi_0 \in$

кола з центрами у точках $(x_0, 0)$ та радіусами $r_0 = \frac{2\sqrt{c_0}}{c_0 - 1} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{Q}\varphi_0}}{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0} - 1}$,

$$\text{де } x_0 = \frac{c_0 + 1}{c_0 - 1} = \frac{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0} + 1}{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0} - 1}, \quad c_0 = e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0}.$$

Результати розв'язування тестового прикладу при $Q = 100$;

$$x_*(t) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{(1 + \sqrt{2})^2 - 1} + \cos(t), \quad y_*(t) = \sin(t), \quad t = [0, 2\pi) \quad - \text{внутрішній}$$

$$\text{контур (свердловина); } y^*(t) = 10 \sin(t), \quad x^*(t) = \frac{(1 + \sqrt{101})^2 + 100}{(1 + \sqrt{101})^2 - 100} + 10 \cos(t),$$

$t = [0, 2\pi)$ – зона впливу; $\varphi_* = \frac{Q}{2\pi} \ln(1 + \sqrt{2})$, $\varphi^* = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{101}}{10}\right)$ за

побудованим нами алгоритмом та за отриманими аналітичними формулами практично ідентичні (як видно з рис.2.26 вузли обох динамічних сіток візуально співпадають; при цьому похибка знаходження повної витрати складає 0,063).

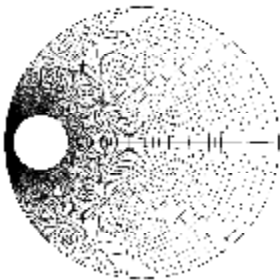


Рис.2.26. Ідеальне поле, породженого витоком $z = -1$ та втоком $z = 1$

Додаткові можливості розроблених алгоритмів та програм проілюстровані на рис.2.27–2.29, де представлені динамічні сітки для випадків $x_*(t) = \cos t + \alpha$, $y_*(t) = \sin t$, $x^*(t) = 10 \cos t$, $y^*(t) = 10 \sin t$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 100$, $\kappa = 1$ (тут α – параметр, що дозволяє моделювати зміщення центру

круглої свердловини відносно центру зони впливу).

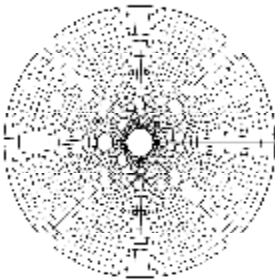


Рис.2.27. Осесиметричний випадок розміщення свердловини ($\alpha = 0$)

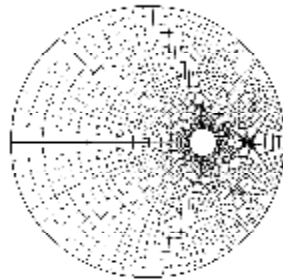


Рис.2.28. Свердловина у круговому пласті при $\alpha = 5$

Числові характеристики розв'язків задач, а саме параметри розбиття сітки n , m , кількості загальних ітерацій алгоритму n_{iter} ,

відношення $\gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\phi}$ (конформні інваріанти), повні витрати Q та швидкості $v(A)$ руху рідини у початковій точці $A(x_*(0), y_*(0))$ розрізу вихідної області для різних значень параметра α наведені у табл.2.20.

Табл.2.20. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку “Свердловина у круговому пласті”

α	N	m	n_{iter}	γ	Q	$v(A)$
0.0	40	109	169	1.0015161	272.91313	42.078704
1.0	40	109	644	1.0059480	274.12084	43.536920
2.0	40	111	603	1.0013998	277.88843	45.170836
3.0	40	113	598	1.0077947	284.70200	47.999598
4.0	40	118	601	1.0019847	295.58548	52.114187
5.0	100	312	4420	1.0017561	312.54789	57.914013
6.0	100	340	4427	1.0004788	340.16280	67.664687
7.0	100	390	4449	1.0013003	390.50713	87.465704
8.0	100	513	4494	1.0008144	513.41778	147.22649
8.5	100	697	4563	1.0008695	697.60601	268.88791

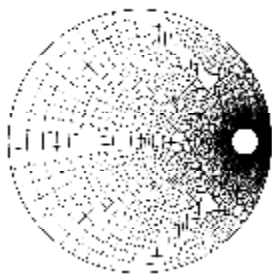


Рис.2.29. Свердловина у круговому пласті при $\alpha = 8$

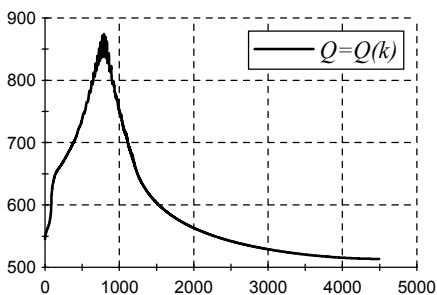


Рис.2.30. Зміна повної витрати під час ітераційного процесу

Залежності Q та $v(A)$ від α зображені на рис.2.31 та 2.32. Зміну значення невідомої витрати Q під час ітераційного процесу

розв'язування задачі при $\alpha = 8$ проілюстровано на рис.2.30.

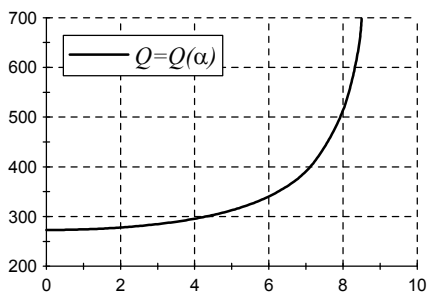


Рис.2.31. Залежність повної витрати від розміщення свердловини у круглому пласті

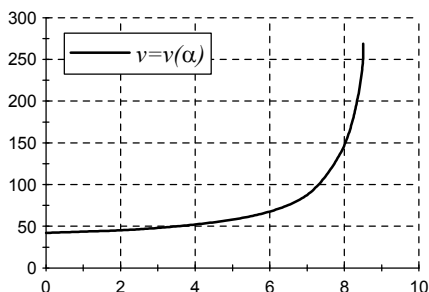


Рис.2.32. Залежність швидкості на свердловині від розміщення останньої у круглому пласті

В результаті проведених нами спеціальних досліджень проблеми початкового наближення виявлено, що його неточне задання призводить до досить великих змін шуканих величин у процесі ітераційного розв'язування задачі та суттєвого збільшення кількості ітерацій для отримання заданої точності наближення розв'язку задачі. При надмірному відхиленні початкового наближення від шуканого розв'язку, інколи спостерігалось стягування граничних точок сітки в одну на кожному з відповідних граничних контурів області, яке виявляється у візуальному спотворенні границі області в процесі роботи алгоритму. Такі результати можна інтерпретувати як результати розв'язання не заданої, а деякої їй супутньої задачі на знаходження характеристик течії у внутрішності розрізу (невідомий параметр Q при цьому, як і слід цього очікувати, дорівнював нулю). Як правило, уникнути таких “небажаних” ефектів спотворення постановок задач під час роботи алгоритму вдається шляхом збільшення параметрів розбиття

сітки n , m , із збереженням оптимального співвідношення між ними.

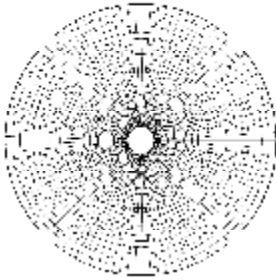


Рис.2.33. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha = 0$

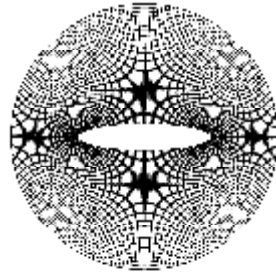


Рис.2.34. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha = 5$

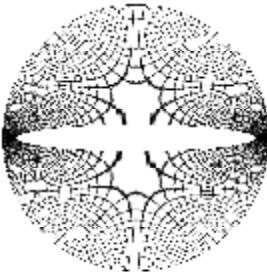


Рис.2.35. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha = 8$

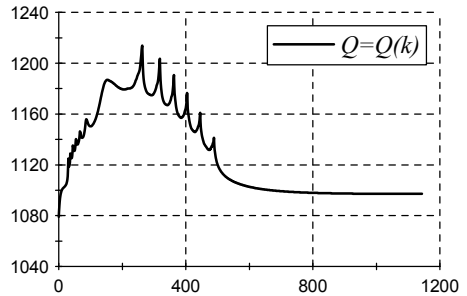


Рис.2.36. Зміна повної витрати під час ітераційного процесу

Результати розв'язування серії геометрично складніших задач ($x_*(t) = \alpha \cos t$, $y_*(t) = \sin t$, $x^*(t) = 10 \cos t$, $y^*(t) = 10 \sin t$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 100$, $\kappa = 1$), в яких замість свердловини розглядався еліптичний резервуар, представлені на рис.2.33 ($\alpha = 1$), 2.34 ($\alpha = 5$), 2.35 ($\alpha = 9$), 2.36, 2.37, 2.38 та у відповідній таблиці 2.21. Результати розрахунків, зображені на рис.2.36, наочно підтверджують затухаючий характер коливань значення шуканої невідомої витрати під час роботи алгоритму.

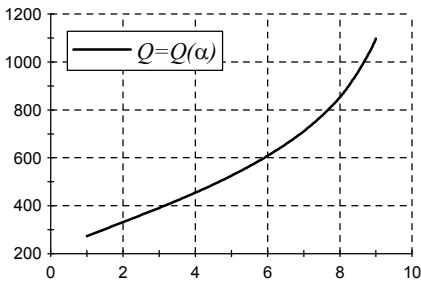


Рис.2.37. Залежність повної витрати від параметрів еліптичного резервуару

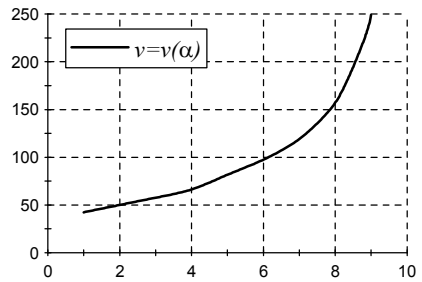


Рис.2.38. Залежність швидкості в крайній правій точці резервуару від параметрів останнього

Табл.2.21. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку “Еліптичний резервуар у круговому пласті”

α	n	m	n_{iter}	γ	Q	$v(A)$
1.0	50	136	254	1.0033079	272.89975	42.328284
2.0	50	165	284	1.0037443	331.23563	50.033917
3.0	50	195	317	1.0015640	390.60996	57.591556
4.0	50	227	300	1.0004089	454.18566	66.226574
5.0	50	262	283	1.0021256	525.11382	81.671091
6.0	50	303	485	1.0031748	607.92391	97.436911
7.0	50	355	667	1.0011558	710.82060	119.09577
8.0	50	426	862	1.0006952	852.59235	157.05766
9.0	50	548	1144	1.0010486	1097.1493	249.11876

На рис.2.39–2.41 зображені динамічні сітки, побудовані для серії випадків “Кругла свердловина у чотирикутному пласті” ($x_*(t) = \cos t + \alpha$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0.1 \cos 3t)$, $y_*(t) = \sin t$, $y^*(t) = 10(\sin t - 0.1 \sin 3t)$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 100$, $\kappa = 1$) при різних значеннях параметра α , який визначає положення свердловини у пласті.

Числові результати розрахунків наведено у таблиці 2.22. На

рис.2.42 проілюстрована зміна значення повної витрати із часом роботи алгоритму, а на рис.2.43–2.44 – залежності повної витрати та максимальної швидкості рідини на свердловині від параметра α .



Рис.2.39. Осесиметричний випадок розміщення свердловини ($\alpha = 0$) у прямокутному пласті

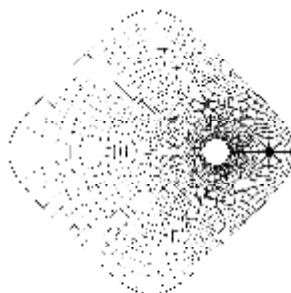


Рис.2.40. Свердловина у прямокутному пласті із згладженими кутами

Табл.2.22. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку “Свердловина у прямокутному пласті”

α	n	m	n_{iter}	γ	Q	$v(A)$
0.0	50	138	227	1.0053233	277.46923	43.374814
1.0	50	139	1055	1.0029468	278.81922	45.631689
2.0	50	141	970	1.0033456	282.94347	47.174747
3.0	50	145	944	1.0005924	290.17181	49.988440
4.0	50	154	960	0.9776947	301.12997	53.410942
5.0	50	158	910	1.0034381	317.08643	60.278202
6.0	100	340	3966	1.0005053	340.17182	66.299757
7.0	100	375	1326	1.0020168	375.75631	77.693905

Приклад гідродинамічної сітки, побудованої у еліптичному пласті з урахуванням анізотропної природи середовища, зображений на рис.2.45.

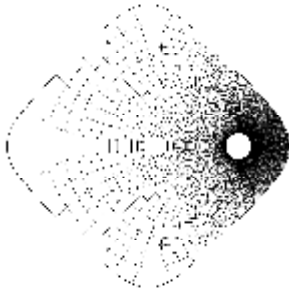


Рис.2.41. Свердловина у прямокутному пласті із згладженими кутами при $\alpha = 8$

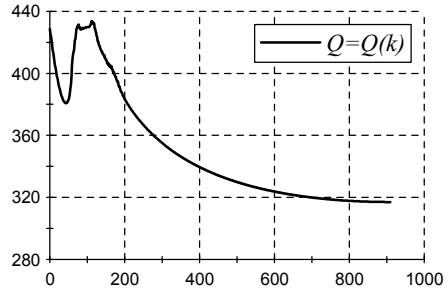


Рис.2.42. Зміна параметра Q під час ітераційного процесу

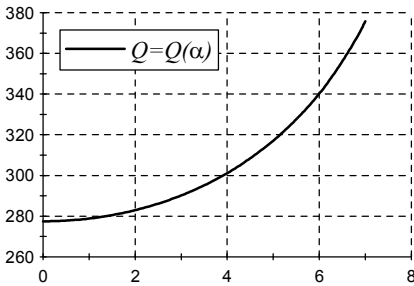


Рис.2.43. Залежність повної витрати від розміщення свердловини у прямокутному пласті

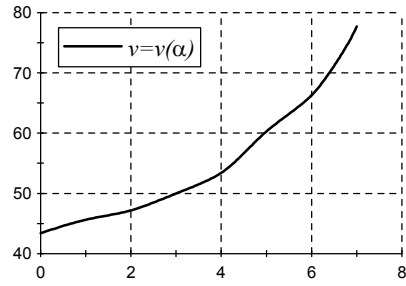


Рис.2.44. Залежність швидкості на свердловині від розміщення останньої у прямокутному пласті

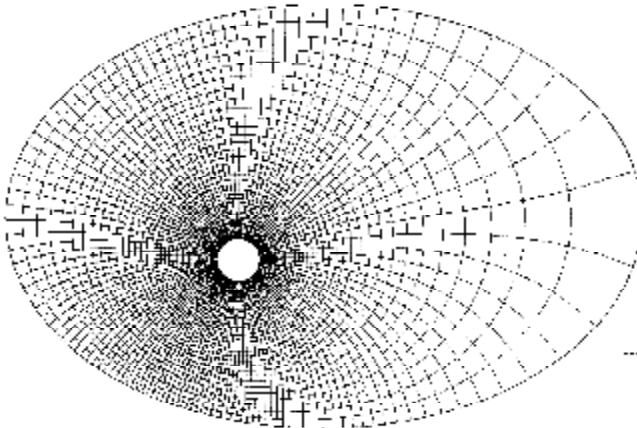


Рис.2.45. Свердловина у еліптичному анізотропному пласті

Результат розрахунку фільтраційного поля для тризв'язної області (еліптичний та круглий резервуари у круглому пласті) зображений на рис.2.46.

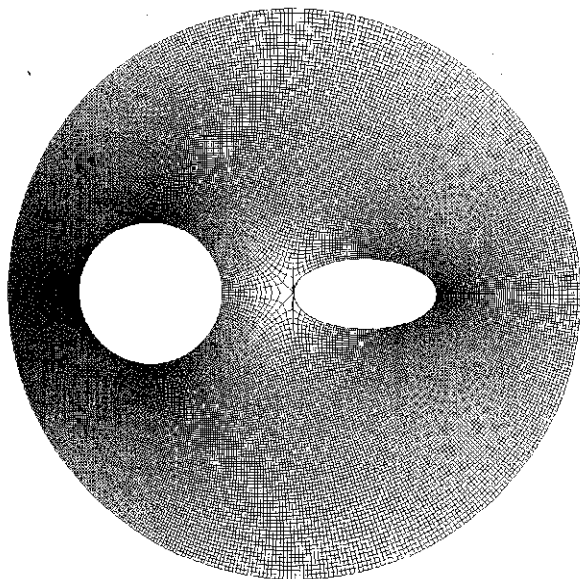
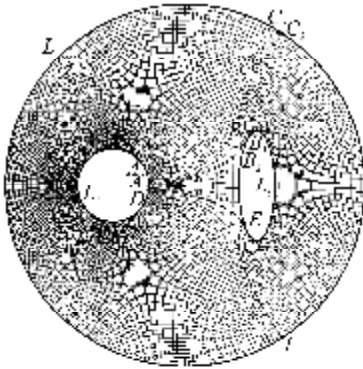
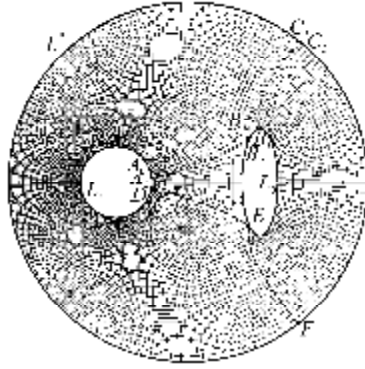


Рис.2.46. Еліптичний та круглий резервуари у круглому пласті

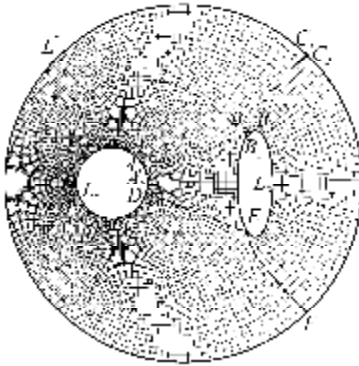
На рис. 2.47 зображені розрахункові динамічні сітки для системи “Кругла та еліптична свердловини у пласті” при різних значеннях керуючого потенціала φ_0 на еліптичному контурі (випадки (а)–(е) впорядковані за зростанням значення φ_0 ; потенціал другої свердловини приймався рівним нулю, а потенціал зони впливу – одиниці). Значення величин перетоків при різних значеннях керуючого потенціалу наведені у табл.2.23 (Q_*^* , Q_*^0 та Q_0^* – величина перетоків $L_* \rightarrow L^*$, $L_* \rightarrow L_0$ та $L_0 \rightarrow L^*$ відповідно), а графіки залежностей повних витрат від керуючого потенціалу проілюстровані на рис. 2.48.



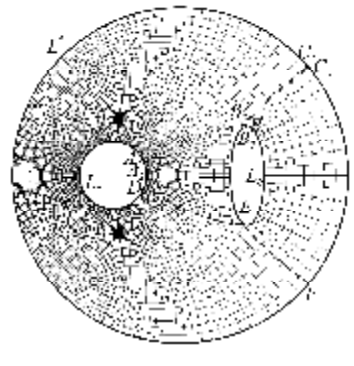
a) $\varphi_0 = 0.5$



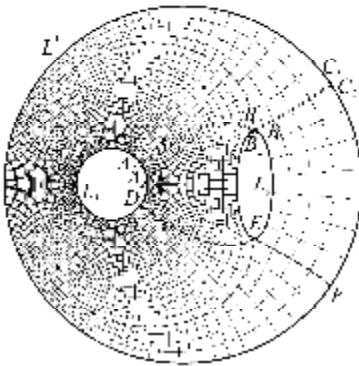
б) $\varphi_0 = 0.6$



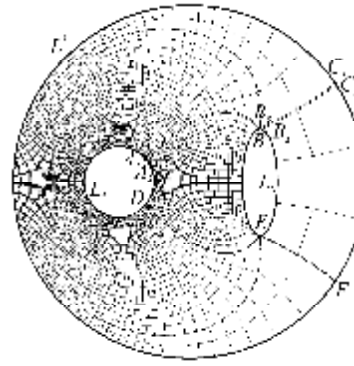
в) $\varphi_0 = 0.7$



г) $\varphi_0 = 0.8$



д) $\varphi_0 = 0.9$



е) $\varphi_0 = 0.95$

Рис.2.47. Динамічні сітки при різних значеннях потенціалу керування

Табл.2.23. Значення величин перетоків при різних значеннях керуючого потенціалу для випадку “кругла та еліптична свердловини у круглому пласті”

φ_0	Q_*	Q_*^0	Q_0^*
0.3	4.04618127	0.00045305	2.09780982
0.4	4.05861365	0.02114897	1.73638254
0.5	4.07092870	0.09799301	1.36716228
0.6	4.05993931	0.20678807	1.02055556
0.7	4.02175839	0.34645410	0.70094236
0.8	3.94595805	0.53016214	0.41607785
0.9	3.80313894	0.79561584	0.18142087
0.95	3.67703122	0.99514852	0.08831913

Отримані результати числових експериментів підтверджують факт збільшення величини перетоку $L_* \rightarrow L_0$ та одночасне зменшення двох інших при збільшенні величини φ_0 .

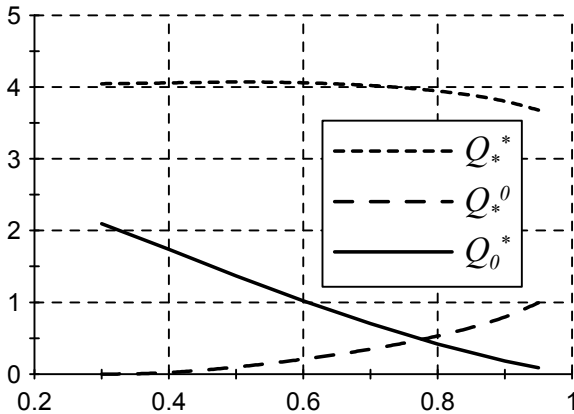


Рис.2.48. Залежності повних витрат від керуючого потенціалу на еліптичному контурі

Особливості комп’ютерного моделювання нелінійних процесів проілюструємо на прикладах фільтраційних процесів із

урахуванням суфозійних явищ у ґрунті, що відбуваються під дією зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища (відповідні моделі та алгоритми побудови динамічної сітки і знаходження повної витрати наведені у попередніх параграфах). З метою порівняння результатів роботи з результатами досліджень, приведеними в [45], в якості області фільтрації нами обрана область близька до осесиметричної (див. рис. 2.49 та рис. 2.50): $L^* = \{(x, y) : x = a^* \cos t, y = b^* \sin t\}$, $L_* = \{(x, y) : x = a_* \cos t - x_*^0, y = b_* \sin t\}$, $x_*^0 = 2, a_* = 1, b_* = 1, a^* = 8, b^* = 8$).

Динамічна сітка та результати розрахунків для моделі $\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I < I_{kp}, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_{kp}), & I \geq I_{kp}, \end{cases}$ де μ – параметр, що характеризує ступінь впливу градієнтів потенціалу на коефіцієнт фільтрації, κ_0 – коефіцієнт фільтрації недеформованого середовища; $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – величина діючого градієнту потенціалу; I_{kp} – критичне його значення ($\kappa_0 = 1, \mu = 1, I_{kp} = 0.25$) зображені на рис.2.49 та рис.2.51.

У випадку неврахування взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації ($\kappa = 1$) отримано повну витрату $Q_0 = 3.12$, його ж врахування за вище вказаним законом викликало збільшення розрахункової витрати Q до 3.21. На рис.2.51 відповідно пунктирними, точковими та жирними лініями зображені залежності $I = I_k(x)$, $\kappa = \kappa_k(x)$ ($x \in \Gamma$) на початкових ($k = 0, k = 1$) ітераціях і на стадії стабілізації процесу (I_∞, κ_∞).

Динамічна сітка та результати розрахунків для моделі описаної у §2.1.4 ($M = 1$), яка описується залежністю

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I < I_3, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_3)(I - I_6), & I_3 \leq I \leq I_H, \\ \kappa^*, & I > I_H; \end{cases} \quad \text{де } I_3, I_6, I_H - \text{ критичні значення}$$

градієнту напору (затримки суфозійних частинок, їх вимиву та повного вимиву) при $I_3 = 0.2$, $I_6 = 0.3$, $I_H = 0.3618$, $\kappa_0 = 1$, $\kappa^* = 1.2$, $\mu = 20$ зображені на рис. 2.50 та рис. 2.52.

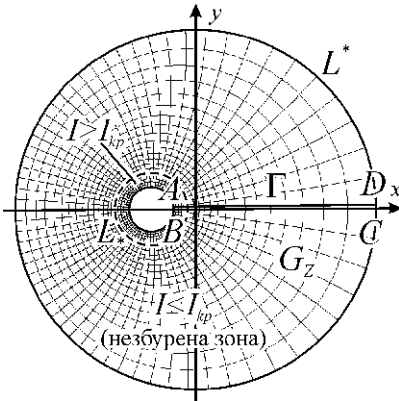


Рис.2.49. Свердловина в еліптичному деформівному пористому пласті (модель із однією зоною збурення)

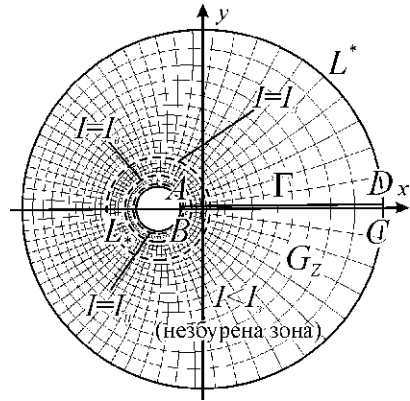


Рис.2.50. Свердловина в еліптичному деформівному пористому пласті (модель із двома зонами збурення)

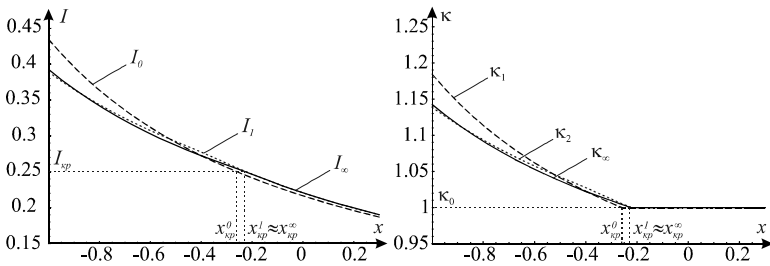


Рис.2.51. Розподіл градієнта напору та коефіцієнта фільтрації вздовж розрізу Γ в еліптичному деформівному пласті (одна зона збурення)

При $\kappa = 1$ нами отримано повну витрату $Q_0 = 3.120$,

врахування ж явищ типу суфозії за вище вказаним законом викликало збільшення Q до 3.188.

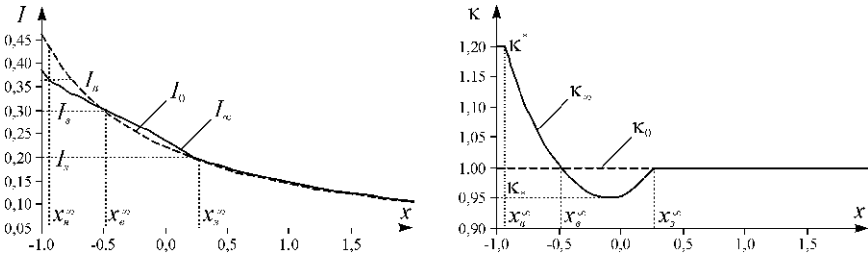


Рис.2.52. Розподіл градієнта напору та коефіцієнта фільтрації вздовж розрізу Γ в еліптичному деформівному пласті.

На рис.2.52 пунктирними та суцільними лініями зображені залежності $I = I(x)$, $\kappa = \kappa(x)$ ($x \in \Gamma$) відповідно на початковій ($k = 0$) ітерації і на стадії стабілізації процесу (I_∞ , κ_∞).

Аналіз отриманих результатів числових експериментів показав їх повну узгодженість у граничному випадку при $x_\varepsilon^0 \rightarrow 0$ із отриманими аналітично результатами робіт [45], що підтверджує адекватність моделі.

Відзначимо, що розроблені та реалізовані нами алгоритми дозволяють ефективно отримувати і інші характеристики процесів, зокрема, нами встановлено залежність фільтраційної витрати Q від форми зони впливу (еліпса) при розрахунку процесу фільтрації до неї від свердловини у випадку двозв'язної області фільтрації. А саме: при фіксованій площі області фільтрації $S = \pi ab = \pi R_0^2$ (внутрішності еліпса з осями a , b) знайдено залежність $Q = Q(\delta)$, де $\delta = a/b$ ($a = R_0 \cdot \sqrt{\delta}$, $b = R_0 / \sqrt{\delta}$). Результати числових розрахунків при $r_0 = 0,05$ м, $R_0 = 50$ м, $\kappa = 1$ м/добу, $n \times m = 200 \times 192$, $\varepsilon = 10^{-5}$ наведені на рис.2.53 та у табл.2.24 (Q_0 – значення повної

витрати при $\delta = 1$), зокрема, при співвідношенні осей еліпса 2:1 отримано збільшення значення повної витрати у порівнянні із випадком $\delta = 1$ приблизно на 2,26%.

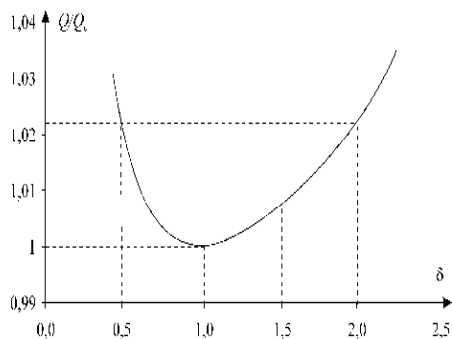


Рис.2.53. Залежність фільтраційної витрати від форми зони впливу

Потрібно також підкреслити переваги розроблених нами методів і алгоритмів при розв'язуванні більш широких класів задач для областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, зокрема, коли зовнішній контур фільтраційної області є непроникним. Останні є важливими при моделюванні фільтраційних процесів у нафтогазових пластах, в яких для продовження терміну експлуатації штучно створюються додаткові впливи. В якості прикладу, на рис.2.54 та рис.2.55 схематично зображені динамічна сітка та два варіанта побудови області комплексного потенціалу для одного з випадків формування течії, породженої двома внутрішніми лініями рівного потенціалу – свердловинами (нагнітальною та експлуатаційною), у пласті із непроникною зовнішньою стінкою. Схематичне зображення області фільтрації, ліній течії та відповідної області комплексного потенціалу для більш складного випадку із врахуванням впливу додаткової третьої свердловини-перехоплювача наведені на рис. 2.56.

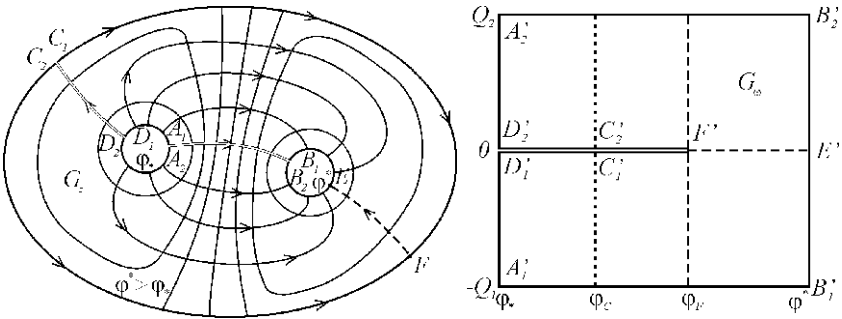


Рис.2.54. Дві свердловини у пласті із непроникною зовнішньою стінкою із розрізом вздовж однієї з ліній розділу потоків

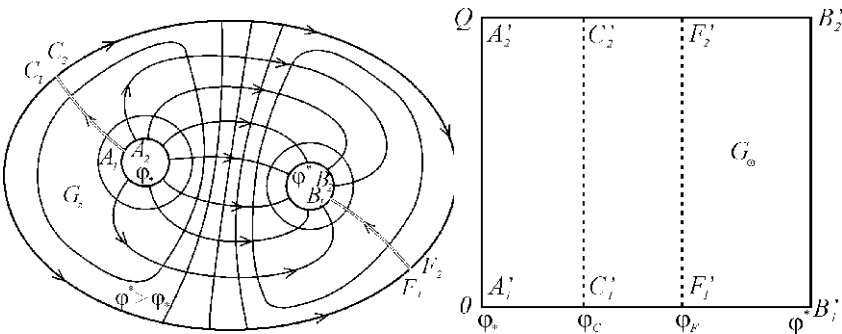


Рис.2.55. Дві свердловини у пласті із непроникною зовнішньою стінкою із розрізами області вздовж двох ліній розділу потоків

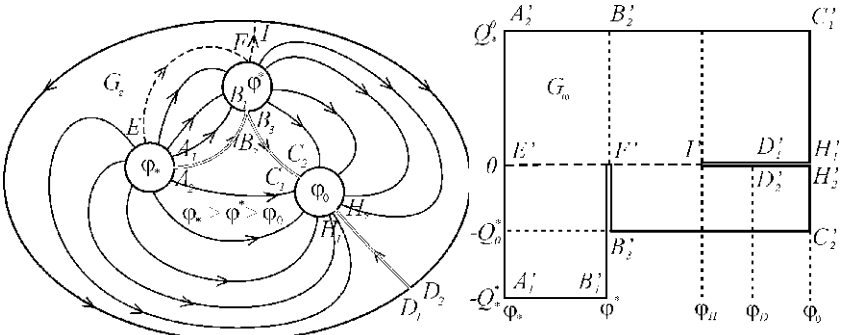


Рис.2.56. Три свердловини у пласті із непроникною зовнішньою стінкою

РОЗДІЛ 3. КОМПЛЕКСНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

На сьогоднішній день досить часто для прогнозування процесів, що відбуваються в нафтогазових пластах використовують детальні просторові моделі. Проте об'єкт моделювання в кожному випадку є унікальним, з мало вивченими особливостями його будови та з досить великою похибкою визначеними геологічними та фільтраційними параметрами, що в свою чергу приводить до неадекватного опису, згідно з вибраними моделями, процесів, що відбуваються при сумісному русі декількох рідин. Тому на початковому етапі проектування доцільно використовувати математичні моделі процесів меншої просторової розмірності з певними модифікаціями, що дозволяли б відслідковувати основні ефекти протікання процесу з подальшою екстраполяцією на моделі більшої розмірності. Проте, як показує практика, одновимірного наближення часто недостатньо, особливо коли приходится досліджувати характер фільтраційної течії в системі свердловин та розраховувати темпи їх обводнення. При умові, що потужність розроблюваних пластів значно менша їх протяжності по довжині, а експлуатаційні і нагнітальні свердловини досконалі по ступеню і характеру розкриття пласта, фільтрацію можна розглядати як плоску, а відповідні задачі як двовимірні.

У цьому розділі розроблено нову методику дослідження процесів багатофазної фільтрації в горизонтальних, схильних до деформації нафтогазових пластах, обмежених екіпотенціальними лініями та лініями течії. Сформовано нові типи модельних задач математичної фізики, розроблено числові методи і алгоритми їх розв'язання, які реалізовані у вигляді пакетів програм для подальшого комп'ютерного моделювання. Запропоновано підхід до

числового розв'язання відповідних обернених крайових задач на квазіконформні (конформні) відображення, що автоматично вирішує проблему побудови гідродинамічної сітки, відшукування точок «призупинки» течії та різного роду фільтраційних параметрів.

3.1. Використання методу квазіконформних відображень до дослідження нелінійних процесів витіснення

При розробці родовищ нафти та газу досить часто приходиться розглядати задачі, в яких рідина вводиться в пористе середовище (пласт-колектор) або ж виводиться з нього через дуже малу область (свердловину) [30, 31, 135]. При цьому необхідно адекватно враховувати співвідношення між розмірами пласта та радіусами свердловин, що не завжди вдається при використанні різного роду сіткових методів. Також, важливою проблемою є побудова лінії розділу двох рідин (води, нафти) [87, 111, 117, 156] та передбачення її положення в різні моменти часу. Зокрема, в час прориву води до експлуатаційної свердловини, що дозволить провести відповідні дії, щодо уникнення передчасного обводнення продукції експлуатаційних свердловин та оптимізувати процес нафтовидобутку.

Різні автори проблему відшукування положення лінії розділу (яку в подальшому позначатимемо Γ_t) вирішували по-різному, відштовхуючись від тих чи інших припущень [111, 135, 162]. Так, у більшості випадків, ввівши рівняння лінії розділу в неявній формі $s(x, y, t) = 0$, вони приходили до деякого рівняння її руху

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, \text{ де похідні координат } x, y \text{ по часу } t$$

пов'язані з компонентами швидкості фільтрації v_x, v_y такими

співвідношеннями $\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sigma}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sigma}$, σ – пористість середовища [31, 109, 156, 157, 193]. Використовуючи перетворене рівняння

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grads} = 0 \quad (3.1)$$

знаходилося нове положення границі розділу за елементарними переміщеннями вздовж нормалей до її попереднього положення. Враховуючи той факт, що рівняння (3.1) є рівнянням конвективного переносу та фізичну природу самого процесу [16], згідно з якою частинки переносяться, в загальному випадку, не вздовж нормалей, як було зазначено в роботах [198, 207, 208], а вздовж траєкторій руху рідини – ліній течії, тому нове положення Γ_t слід шукати за переміщеннями саме вздовж ліній течії.

Таким чином, щоб розв'язати задачу на відшукування положення лінії розділу Γ_t , необхідно розв'язати дві (в загальному випадку взаємопов'язані) підзадачі: 1) задачу на побудову поля швидкості \vec{v} та гідродинамічної сітки; 2) задачу для рівняння конвективного переносу відносно побудованого поля швидкості.

3.1.1. Методи комплексного аналізу побудови гідродинамічних сіток та дослідження еволюції границі розділу різнокольорових рідин

Розглянемо модельну задачу на еволюцію (рух) границі розділу Γ_t двох рідин у пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L , контурами нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин (див. рис. 3.1) в дещо спрощеній постановці, вважаючи, що за фізичними та механічними властивостями рідини не відрізняються, тобто вони є «різнокольоровими» [109, 135, 210].

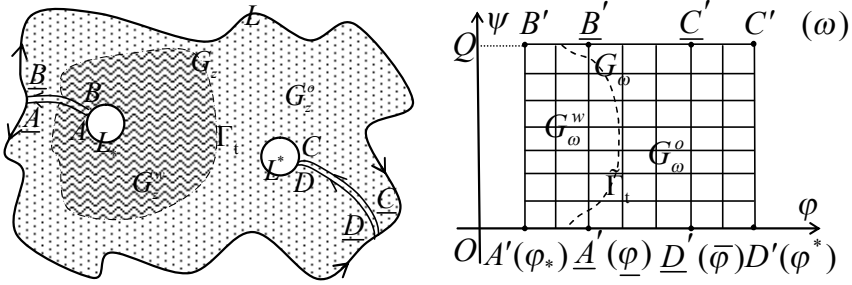


Рис. 3.1. Фізична область фільтрації та відповідна їй область комплексного квазіпотенціалу

Як відомо [135, 185], при русі границі розділу поле швидкості взагалі кажучи змінюється, але у зв'язку із зробленим вище припущенням (про «різнокольоровість» рідин) зміна положення Γ_t не впливає на зміну швидкості \vec{v} , тобто $\vec{v}(x, y, t) = \vec{v}(x, y, t_0)$ (де $\vec{v}(x, y, t_0)$ – поле швидкості в деякий початковий момент часу t_0). Тоді, задача на побудову гідродинамічної сітки (зокрема, знаходження поля швидкості \vec{v}) є стаціонарною і може бути розв'язана незалежно від задачі конвективного переносу. Далі, використовуючи (3.1), визначаємо положення границі Γ_t зі зміною часу.

Для математичної постановки задачі фільтрації рідин у пористому середовищі запишемо рівняння нерозривності та рівняння руху

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = k \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

де $k = k(x, y)$ – коефіцієнт фільтрації, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал швидкості фільтрації $\vec{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$.

Аналогічно, як у [56], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками

«призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати, положення точок (x_0^*, y_0^*) , (x_*^0, y_*^0) , (x_*, y_*) , (x^*, y^*) та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [56, 142, 143], утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad (3.2)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ – невідома витрата.

Границя Γ_t , положення якої в початковий момент часу $t = t_0$ є відомим $s(x, y, t_0) = \tilde{s}(x, y) \equiv 0$ (зокрема, можна прийняти $\Gamma_{t=t_0} = L_*$), визначається рівнянням (3.1) з відповідними умовами:

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} s = 0, \quad s|_{L_*} = 1, \quad s(x, y, t)|_{t=t_0} = 0. \quad (3.3)$$

В зв'язку із складністю геометрії області G_z^0 та тривіальністю відповідної області G_ω , більш доцільним є перехід до оберненого квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_z^0$, що спрощує та в деякій мірі автоматизує побудову гідродинамічної сітки.

Обернена до (3.2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії запишуться у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.4)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.5)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (3.6)$$

$$\nu(x(\underline{\varphi}, \psi), y(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \nu(x(\bar{\varphi}, \psi), y(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \psi = \{0, Q\},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.7)$$

де $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» (відповідно «розходження» та «сходження» течії), f_* , f^* , f – функції, що визначають контури області G_z : L_* , L^* , L відповідно.

Запис рівнянь контурів області G_z може бути представлено як у неявній так і у параметричній формі, що є зручнішим у деяких випадках. Тому, будемо в подальшому користуватися як неявним так і параметричним представленням контурів: $L_* = \{z: x = x_*(\tau), y = y_*(\tau), \alpha_* \leq \tau \leq \beta_*\} = \{z: f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z: x = x^*(\tau), y = y^*(\tau), \alpha^* \leq \tau \leq \beta^*\} = \{z: f^*(x, y) = 0\}$, $L = \{z: x = x_0(\tau), y = y_0(\tau), \alpha_0 \leq \tau \leq \beta_0\} = \{z: f(x, y) = 0\}$.

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (3.4) і формули для обчислення компонент

швидкості $v_x = \frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$ задачу (3.3)

перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.8)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0,$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.9)$$

де отримане диференціальне рівняння в частинних похідних є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Для (3.8), запишемо відповідне звичайне диференціальне рівняння $\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}$, інтегруючи яке знайдемо час

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi} \quad (3.10)$$

проходження частинкою рідини шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ вздовж лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$, де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, σ - пористість ґрунту.

Використовуючи (3.10), знаходимо час початку та повного обводнення продукції експлуатаційної свердловини відповідно $\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$, $\Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$.

Для запису різницевого аналогу задачі (3.4 – 3.9) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$l = \begin{cases} 1, \text{ при } i = \overline{1, n_1}, \\ 2, \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, & \psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = Q/m, j = \overline{0, m}, \\ 3, \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, \end{cases}$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу двох середовищ з різними його значеннями [38, 39, 120, 135], рівняння (3.7) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [23, 25, 32, 187]. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \\ & - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\ & + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $k_{i,j\pm 1/2} = k \left(\frac{x_{i,j\pm 1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1} + y_{i,j}}{2} \right)$,

$$k_{i\pm 1/2,j} = k \left(\frac{x_{i\pm 1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j} + y_{i,j}}{2} \right), \quad \gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi} - \text{квазіконформні}$$

інваріанти.

Побудована різницева схема (3.12) у випадку однорідного середовища ($k = const$) фактично є узагальненням використаної у роботі [48], для задачі на конформне відображення, побудованої на п'ятиточковому шаблоні типу «хрест», схеми:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_l^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma_l^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ & y_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_l^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma_l^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.12')$$

Крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів (у випадку $k = const$, умови ортогональності) апроксимуємо таким чином:

$$\left\{ \begin{aligned} & f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ & f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \quad (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1}) \times \\ \times (x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \\ i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулами:

$$Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$\text{де} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)},$$

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)} \quad (\text{зокрема,} \quad \text{можна}$$

використовувати також наступні формули $\underline{\varphi} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi\gamma_1$, $\bar{\varphi} = \varphi^* - (n_3 + 1)\Delta\psi\gamma_3$, $\Delta\psi = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta\varphi_l}{\gamma_l}$). Величини квазіконформних

інваріантів γ_l одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \frac{a_{i,j}}{k_{i+1/2, j+1/2} b_{i,j}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1, 0}^{n_1+n_2-1, m-1} \frac{a_{i,j}}{k_{i+1/2, j+1/2} b_{i,j}}, \\ \gamma_3 = \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2, 0}^{n-1, m-1} \frac{a_{i,j}}{k_{i+1/2, j+1/2} b_{i,j}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2},$$

$$k_{i+1/2,j+1/2} = k \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4} \right).$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо наступним чином:

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1,$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{i,0} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}),$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3;$$

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{0,j} = \frac{k_{0,j}}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad l = 1, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n,j} = \frac{k_{n,j}}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n-1,j+1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,m} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,m}), \quad l = 2,$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,m} - y_{i,m-1}) - (x_{i,m} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = \frac{k_{i,0}}{\Delta\psi J_{i,0}} (y_{i,1} - y_{i,0}, x_{i,0} - x_{i,1}), \quad i = \overline{n_1 + 2, n_1 + n_2 - 1},$$

$$J_{i,0} = \frac{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,j} = \frac{k_{n_1+1,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,j}} (y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1}, x_{n_1+1,j-1} - x_{n_1+1,j+1}),$$

$$j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n_1+1,j} = \frac{(x_{n_1+2,j} - x_{n_1+1,j})(y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} -$$

$$\frac{(x_{n_1+1,j+1} - x_{n_1+1,j-1})(y_{n_1+2,j} - y_{n_1+1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,j} = \frac{k_{n_1+n_2,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,j}} (y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1}, x_{n_1+n_2,j-1} - x_{n_1+n_2,j+1}),$$

$$J_{n_1+n_2,j} = \frac{(x_{n_1+n_2,j} - x_{n_1+n_2-1,j})(y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} -$$

$$\frac{(x_{n_1+n_2,j+1} - x_{n_1+n_2,j-1})(y_{n_1+n_2,j} - y_{n_1+n_2-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,0} = (\nu_x, \nu_y)_{0,m} = \frac{k_{0,0}}{2\Delta\psi J_{0,0}} (y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1}),$$

$$J_{0,0} = \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,0} = (\nu_x, \nu_y)_{n,m} = \frac{k_{n,0}}{2\Delta\psi J_{n,0}} (y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1}),$$

$$\begin{aligned}
J_{n,0} &= \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_3}; \\
(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+n_2, m} &= \frac{k_{n_1+n_2,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,0}} (y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1}, x_{n_1+n_2,m-1} - x_{n_1+n_2,1}), \\
(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+n_2,0} &= (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+n_2, m}, \\
J_{n_1+n_2,0} &= \frac{(x_{n_1+n_2,0} - x_{n_1+n_2-1,0})(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
&\quad - \frac{(x_{n_1+n_2,1} - x_{n_1+n_2,m-1})(y_{n_1+n_2,0} - y_{n_1+n_2-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}; \\
(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+1, m} &= \frac{k_{n_1+1,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,0}} (y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1}, x_{n_1+1,m-1} - x_{n_1+1,1}), \\
(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+1,0} &= (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)_{n_1+1, m}, \\
J_{n_1+1,0} &= \frac{(x_{n_1+2,0} - x_{n_1+1,0})(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
&\quad - \frac{(x_{n_1+1,1} - x_{n_1+1,m-1})(y_{n_1+2,0} - y_{n_1+1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Маючи різницеву задачу для ітераційного відшукання гідродинамічної сітки, коли відома тільки геометрія області фільтрації (контури границі та умови на них), слід задати «якісне» початкове наближення розміщення її вузлів, як на границі так і в середині області, тому, що швидкість збіжності ітераційного процесу сильно залежить від нього.

Задання початкового наближення розміщення точок на контурах області не викликає труднощів, особливо, коли контури задані параметрично. Для побудови початкового наближення координат внутрішніх вузлів, можна використати один із алгебраїчних чи варіаційних методів побудови сіток [2, 20, 33, 106],

наприклад метод трансфінітної інтерполяції [32]. Проте, використання такого роду методів для геометрично складних областей, досить часто призводить до небажаних результатів, наприклад, в деяких місцях лінії сітки можуть перетинати самі себе. Для уникнення цього ефекту та покращення побудованої сітки, доцільно ввести корегуючі поправки [33, 103] на взаємне розміщення вузлів або ж здійснити їх поправку вручну.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3.4)–(3.7) різницевою задачею у загальному випадку, як і в роботах [71 – 74], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [167], для аналітичного обґрунтування його збіжності. На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L , L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1 , n_2 , n_3 та m) та параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (3.13), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (3.15), знаходимо початкове наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_l^{(0)}$

та невідомих величин
$$\underline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \overline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \text{де}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}. \quad \text{Проводимо}$$

уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (3.12) (у випадку конформного відображення (3.12')) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (3.14). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (3.15), знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3.4):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

$$l = \begin{cases} 1, & \text{при } i = \overline{1, n_1}, \\ 2, & \text{при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ 3, & \text{при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}. \end{cases}$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

В зв'язку з гіперболічністю рівняння (3.8), виникає проблема пов'язана з вибором схеми його апроксимації. Так, наприклад, схемам першого порядку точності властива інтенсивна числова дифузія, що приводить до спотворення розв'язку та його нефізичності [191]. Схеми ж другого порядку в деяких випадках дозволяють отримати задовільні результати при достатньо гладких функціях, проте стають непридатними для задач з границями розділу [211].

Враховуючи той факт, що рівняння (3.8) є одномірним гіперболічним і границя Γ_t не обов'язково проходить через точки гідродинамічної сітки, тобто крок по φ для нього не сталий та в загальному випадку відмінний від кроку по φ сіткової області G_ω побудуємо різницевий алгоритм відшукування Γ_t , виходячи з ідей методу характеристик, наступним чином. Використовуючи (3.10) запишемо ітераційну формулу для знаходження значення квазіпотенціалу $\varphi = \tilde{\varphi}_t$, вздовж заданої лінії течії, що відповідає шуканому положенню границі розділу Γ_t у відповідний момент часу. Для цього крок по часу вважаємо сталим і рівним Δt , а по φ – змінним. Значення величин $v = \frac{v^2}{\sigma k}$ в точках, що не співпадають з вузлами гідродинамічної сітки обчислюємо з використанням

лінійної інтерполяції по їх значенням у навколишніх вузлах

$$\tilde{v}_{\tilde{i}} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} (\tilde{\varphi}_{\tilde{i}} - \varphi_i) + v_i, \text{ а значення } \tilde{\varphi}_{\tilde{i}} \text{ з використанням наступної}$$

ітераційної формули $\tilde{\varphi}_{\tilde{i}} = \tilde{\varphi}_{\tilde{i}-1} + \Delta t \tilde{v}_{\tilde{i}-1}$, де індекс \tilde{i} відповідає шуканому положенню $\Gamma_{\tilde{i}}$. Для знаходження положення границі розділу рідин використовуватимемо наступну процедуру її ітераційного наближення. За заданим початковим наближенням положення Γ_i в момент часу $t = t_0$ знаходимо нове її положення, збільшуючи час на величину кроку Δt та порівнюючи його з часом корекції t_i (перехід через характеристику), якщо він менший то корегуємо положення границі розділу за знайденою ітераційною формулою для величини $\tilde{\varphi}_{\tilde{i}}$, в протилежному випадку повторюємо цей крок алгоритму. Час корекції t_i знаходимо з різницевого аналогу формули (3.10) при сталому кроці $\Delta\varphi$, за формулою $t_i = t_{i-1} + \frac{\Delta\varphi_l}{v_{i-1}}$, де $t_0 = 0$, $v_i = \frac{v_i^2}{\sigma_i k_i}$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, 3}$. Так як функція ψ входить у рівняння, як параметр, відповідний їй індекс j для спрощення записів був опущений.

Використовуючи розроблений алгоритм проведемо числові розрахунки для однорідного пласта при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k = 1$, $\sigma = 0.5$, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 6 \times 35 \times 6 \times 112$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Рівняння контурів області G_z запишемо у параметричній формі наступним чином:

$$L_* : \begin{cases} x_*(t) = 0.3 \cos(t) + \tilde{x}_*, \\ y_*(t) = 0.3 \sin(t) + \tilde{y}_*, \end{cases} \quad L^* : \begin{cases} x^*(t) = 0.3 \cos(t) + \tilde{x}^*, \\ y^*(t) = 0.3 \sin(t) + \tilde{y}^*, \end{cases}$$

$$L : \begin{cases} x_0(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(2t)), \\ y_0(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(2t)), \end{cases}$$

де $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*)$, $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ – координати центрів відповідно нагнітальної та експлуатаційної свердловин, $0 \leq t < 2\pi$. На рис. 3.2 зображено дві гідродинамічні сітки при фіксованому положенні нагнітальної свердловини та змінному положенні експлуатаційної (див. рис. 3.2а – 3.2б), де потовщені лінії відповідають положенню границі розділу різнокольорових рідин у відповідні моменти часу, зокрема, в час прориву води до експлуатаційної свердловини, що становить для кожного з випадків 0.185 та 0.283. Як можна помітити при розміщенні свердловин зображеному на рис. 3.2б лінія розділу просувається значно повільніше, а час прориву та повного заводнення пласта збільшується по відношенню до випадку зображеного на рис. 3.2а.

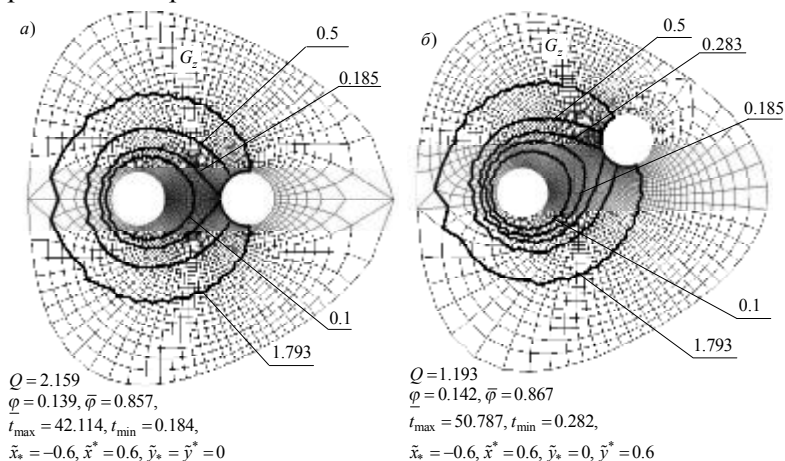


Рис. 3.2. Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин для різних моментів часу в пластовій системі «нагнітальна та експлуатаційна свердловини»

Таким чином, змінюючи положення експлуатаційної свердловини, при фіксуванні нагнітальної, можна забезпечити оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів. На рис. 3.3 зображено залежності частки витісняючої

рідини (води) Q_i у загальній фільтраційній витраті Q експлуатаційної свердловини від часу, для описаних випадків розміщення свердловин, де графік 1 відповідає випадку зображеному на рис. 3.2а, а графік 2 відповідно на рис. 3.2б.

Як відомо [48], при виконанні умови $Q_i/Q > 90\%$, подальша експлуатація свердловини стає економічно не вигідна і необхідно її зупинити, або ж провести водоізоляційні роботи. На рис. 3.4 проілюстровано залежність часу $T_j = \Phi(\varphi^*, \psi_j)$ проходження частинкою шляху від нагнітальної до експлуатаційної свердловини відносно конкретної лінії течії ψ_j ($j = \overline{0, m}$) для випадків зображених на рис. 3.2.

В практиці розробки родовищ нафти і газу досить часто приходиться мати справу з неоднорідними пластами-колекторами. Неоднорідність обумовлена існуванням в пласті певних непроникних, чи частково проникних включень, які можна представити у вигляді хаотично розташованих по площі пласта лінз. Окрім неоднорідності у формі лінз виділяють зональну неоднорідність, при якій пласт по своїй площі складається із декількох зон з різною проникністю [37, 38, 130]. Такого роду неоднорідність може виникнути, наприклад, після кислотної обробки привибійної зони свердловин чи внаслідок забруднення пор під час буріння. Досить важливою проблемою при цьому є встановлення впливу на віддачу пласта значення відношення коефіцієнта проникності привибійної зони до коефіцієнта проникності всього пласта [37]. Проведемо числові розрахунки для випадку коли пласт складається з двох зон різної проникності, зони пласта поблизу стінки свердловини яку позначимо D та зони $G_2 \setminus D$. При цьому коефіцієнт фільтрації представимо у вигляді

$$k(x, y) = \begin{cases} k_0, & (x, y) \in D = \{x, y : (x - \tilde{x}_*)^2 + (y - \tilde{y}_*)^2 < 0.25\}, \\ 1, & (x, y) \in G_z \setminus D, \end{cases}$$

а інші параметри розрахунку залишимо без змін.

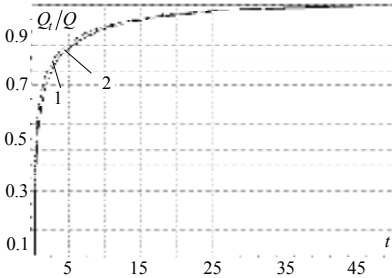


Рис. 3.3. Залежність частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті від часу

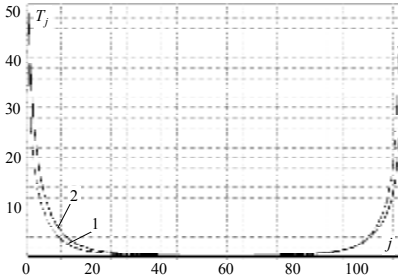
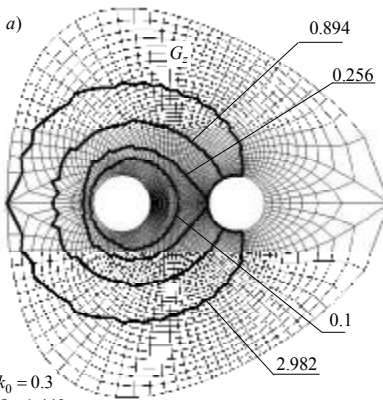
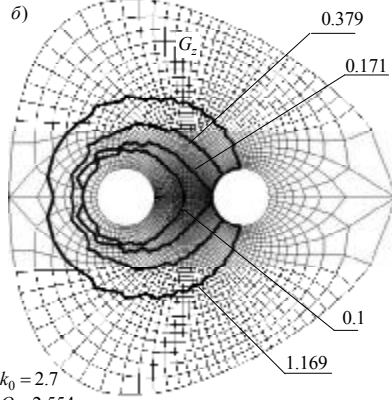


Рис. 3.4. Залежність часу T_j проходження частинок від нагнітальної свердловини до експлуатаційної відносно j



$k_0 = 0.3$
 $Q = 1.449$
 $\varphi = 0.210, \bar{\varphi} = 0.894,$
 $t_{\max} = 44.586, t_{\min} = 0.256,$
 $\tilde{x}_* = -0.6, \tilde{x}^* = 0.6, \tilde{y}_* = \tilde{y}^* = 0$



$k_0 = 2.7$
 $Q = 2.554$
 $\varphi = 0.123, \bar{\varphi} = 0.848,$
 $t_{\max} = 41.933, t_{\min} = 0.171,$
 $\tilde{x}_* = -0.6, \tilde{x}^* = 0.6, \tilde{y}_* = \tilde{y}^* = 0$

Рис. 3.5. Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин у випадку існування зональної неоднорідності

На рис. 3.5а–3.5б зображено історію просування лінії розділу рідин від нагнітальної свердловини до експлуатаційної, за умови,

що коефіцієнт фільтрації k_0 в присвердловинній зоні рівний відповідно 0.3 та 2.7. Для оцінки впливу зміни коефіцієнта фільтрації привибійної зони внаслідок кольматації чи інтенсифікації на загальну витрату свердловин зіставимо значення величин відношення Q_1/Q для зонально неоднорідного пласта та однорідного (див. рис. 3.6). Це дає змогу оцінити негативний вплив кольматації або технологічну ефективність (приріст дебіту) інтенсифікації.

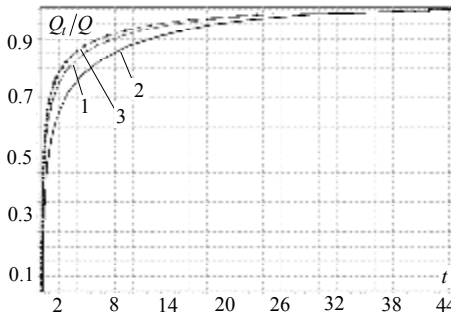


Рис. 3.6. Часова залежність частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті для пласта (1– однорідного, 2– неоднорідного, при $k_0 = 0.3$, 3– неоднорідного, при $k_0 = 2.7$)

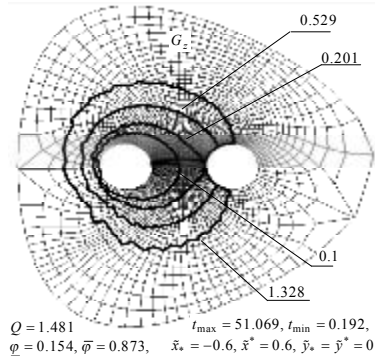


Рис. 3.7. Гідродинамічна сітка та лінії розділу для неоднорідного пласта

Для демонстрації можливостей розробленого алгоритму проведемо також розрахунки у випадку, коли в пласті в околі точок з координатами (1,1) та (-1,-1) існують сильно та слабо проникні ділянки відповідно, а коефіцієнт фільтрації визначається наступною формулою

$$k(x, y) = 0.7 - 0.9 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \right). \text{ На}$$

рис. 3.7 зображено відповідну гідродинамічну сітку з побудованими лініями розділу.

3.1.2. Моделювання нелінійних процесів витіснення за умов взаємовпливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища

В п. 3.1 розглянуто задачу про рух границі розділу двох різнокольорових рідин, у пласті, що розробляється нагнітальною і експлуатаційною свердловинами. Встановлено, що вона розпадається на дві підзадачі: 1) задачу на побудову гідродинамічної сітки; 2) задачу для рівняння конвективного переносу відносно побудованого поля швидкості. Таким чином, в подальшому, розглядаючи випадок руху різнокольорових рідин будемо розв'язувати тільки задачу на побудову поля швидкості та гідродинамічної сітки, при необхідності вказуючи на особливі моменти в розв'язанні відповідної задачі конвективного переносу.

Також особлива увага приділялася процесам фільтрації в однорідних та неоднорідних пластах-колекторах, фільтраційно-ємкісні характеристики яких не змінювалися в процесі фільтрації. Проте, при спорудженні та експлуатації свердловин в частині пласта, що прилягає до свердловини, відбуваються техногенні зміни природних фільтраційних властивостей і формується система навколосвердловинних зон з особливими умовами фільтрації [115, 131]. Ефект зміни фільтраційних характеристик навколосвердловинної зони при математичному моделюванні в деяких випадках враховують завдяки введенню кусково-неперервного коефіцієнта проникності у припущенні, що границі зон нерухомі [38, 119, 135, 139]. Однак такого роду методика не враховує нелінійність фільтрації, пов'язану з змінами проникності в присвердловинних зонах, зі зміною діючих градієнтів

квazіпотенціалу швидкості в цих зонах. Так при перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) значення для даного ґрунту в прилеглий до свердловини зоні відбувається втрата фільтраційної міцності ґрунтів за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що зумовлює зміну коефіцієнта проникності. Також, під дією різних механізмів відбувається утворення і накопичення осаду завислих частинок (забруднень) різного механічного утворення, явище механічного кольматажу [185], що призводить до зменшення коефіцієнта проникності і пористості середовища, внаслідок чого зростає гідравлічний опір пласта в окремих зонах [209].

В роботах [51, 56, 57, 71, 73, 202] проведено математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням суфозійних явищ і розроблено методику розв'язання відповідних нелінійних задач з післядією руху води до дрени (свердловини), отримані співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується в залежності від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу.

У цьому параграфі поєднано і узагальнено ідеї запропоновані в згаданих роботах та п. 3.1, зокрема, побудовано модель коефіцієнта фільтрації, що враховує особливості зміни фільтраційно-ємкісних характеристик в околі нагнітальної та експлуатаційної свердловин в залежності від значень градієнта квazіпотенціала.

Методика корекції значення коефіцієнта фільтрації в залежності від значень градієнтів I квazіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ ($\varphi_* < \varphi < \varphi^*$) полягає у виділенні в прилеглих до свердловин зонах ділянок (рис. 3.8), в яких k описується наступною моделлю:

$$k(x, y, \varphi_x, \varphi_y) = \begin{cases} k_* = k_0 + \varepsilon\beta(I_{кр}^* - I_{кр}^6)(I_{кр}^* - I_{кр}^3), I > I_{кр}^*, I_\varphi < 0, \\ k_0 + \varepsilon\beta(I - I_{кр}^6)(I - I_{кр}^3), I_{кр}^3 \leq I \leq I_{кр}^*, I_\varphi < 0, \\ k_0, I < I_{кр}^3, I_\varphi < 0 \text{ або } I < I_{кр}^0, I_\varphi > 0 \\ k_0 + \varepsilon\alpha(I - I_{кр}^0), I_{кр}^0 \leq I \leq I_{кр}^*, I_\varphi > 0, \\ k^* = k_0 + \varepsilon\alpha(I_{кр}^* - I_{кр}^0), I > I_{кр}^*, I_\varphi > 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

де k_0 – коефіцієнт фільтрації в незбуреній зоні пласта, $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – величина градієнту, а $I_{кр}^6$, $I_{кр}^0$, $I_{кр}^*$, $I_{кр}^3$ – критичні його значення, при переході через які відбувається вимив частинок (в околі відповідно нагнітальної та експлуатаційної свердловин), повний вимив (коли суфозійних частинок на ділянці уже немає), а також їх осідання (затримка) [56]. Параметри ε , α підбираються виходячи з фізичного експерименту, а β – із умови: $k_* = k^*$

$$\left(\beta = \alpha \frac{I_{кр}^* - I_{кр}^0}{(I_{кр}^* - I_{кр}^6)(I_{кр}^* - I_{кр}^3)} \right). \text{ Залежності коефіцієнта фільтрації від}$$

величини градієнта, а також від величини квазіпотенціала φ вздовж однієї з ліній течії схематично зображено на рис. 3.9. (відповідно а, б), де I_*^* – значення градієнта I у деякій точці $\varphi = \varphi_*^*$ такій, що $I_\varphi'(\varphi_*^*, \psi_0) = 0$; $\varphi_{кр}^6$, $\varphi_{кр}^3$, $\varphi_{кр}^0$, $\varphi_{кр}^*$ і $\varphi_{кр}^{**}$ є розв'язки рівнянь $I(\varphi, \psi_0) = I_{кр}$, коли $I_{кр}$ приймає відповідно значення $I_{кр}^6$, $I_{кр}^3$, $I_{кр}^0$, $I_{кр}^*$ (проміжки $[\varphi_{кр}^*, \varphi_{кр}^6]$, $[\varphi_{кр}^0, \varphi_{кр}^{**}]$, $[\varphi_{кр}^6, \varphi_{кр}^3]$, $[\varphi_*, \varphi_{кр}^*]$, $[\varphi_{кр}^{**}, \varphi_*^*]$, $[\varphi_{кр}^3, \varphi_{кр}^0]$ належать відповідно до зон вимиву, затримки, повного вимиву та незбуреної зони).

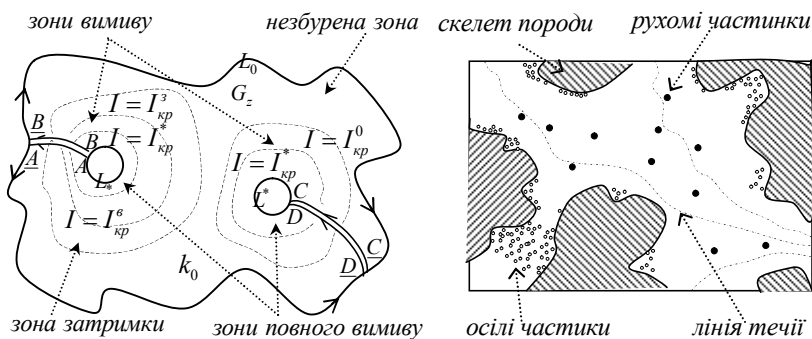


Рис. 3.8. Дві свердловини у пласті (із виділенням зон впливу критичних значень градієнта)

Використовуючи запропоновану модель (3.17) зміни коефіцієнта фільтрації, розглянемо в деякій трив'язній криволінійній області G_z , обмеженій трьома гладкими замкненими контурами (див. рис. 3.8) L_* , L^* , L , процес фільтрації, який описується за допомогою рівняння руху $\vec{v} = k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \cdot \text{grad} \varphi$ (закон Дарсі) та рівняння нерозривності $\text{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ - швидкість фільтрації, а $\varphi = \varphi(x, y)$ - квазіпотенціал відповідного поля.

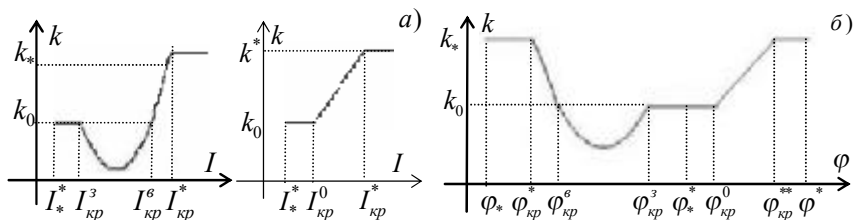


Рис. 3.9. Розподіл коефіцієнта провідності по відношенню до значень градієнту (а) та квазіпотенціалу (б)

Аналогічно, як у п. 3.1, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$, та здійснивши умовні розрізи

Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії приходимо до відповідної задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$:

$$k(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.18)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (3.19)$$

$$v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0,$$

де $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$.

Використовуючи формули переходу до області комплексного квазіпотенціалу, систему (3.18) перепишемо у вигляді:

$$k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (3.20)$$

при цьому крайові умови (3.19) для задачі на обернене квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z^0$ співпадають з відповідними умовами (3.5)–(3.6) для системи рівнянь (3.4).

Як наслідок з (3.19) запишемо рівняння для дійсної $\text{Re}(z(\omega))$ і уявної $\text{Im}(z(\omega))$ частин характеристичної функції течії:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k\left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)^{-1} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.21)$$

де $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$, $J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi$ – якобіан відображення.

Для запису дискретного аналогу оберненої задачі на квазіконформне відображення побудуємо в області G_ω рівномірну

ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються згідно з формулою (3.11) та проведемо відносно неї апроксимацію відповідних рівнянь та крайових умов наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_l^2 (k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \\ - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \gamma_l^2 (k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \\ + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, i = \overline{1, n_1}, l = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2; \\ i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, l = 3; j = \overline{1, m - 1}; \end{array} \right. \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m - 1}, (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1}) \times \\ \times (x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \\ i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$,

$$k_{i+1/2,j} = k \left((x_{i+1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i+1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) / (4\Delta\psi J_{i+1/2,j}), (x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}) / (4\Delta\psi J_{i+1/2,j}) \right),$$

$$k_{i-1/2,j} = k \left((x_{i-1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i-1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) / (4\Delta\psi J_{i-1/2,j}), (x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1}) / (4\Delta\psi J_{i-1/2,j}) \right),$$

$$\begin{aligned}
& -y_{i,j-1})/(4\Delta\psi J_{i-1/2,j}), (x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i-1/2,j}), \\
k_{i,j+1/2} &= k\left((x_{i,j+1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j+1} + y_{i,j})/2, (y_{i,j+1} - y_{i,j})/(\Delta\psi J_{i,j+1/2}), \right. \\
& \left. (x_{i,j} - x_{i,j+1})/(\Delta\psi J_{i,j+1/2})\right), \\
k_{i,j-1/2} &= k\left((x_{i,j-1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j-1} + y_{i,j})/2, (y_{i,j} - y_{i,j-1})/(\Delta\psi J_{i,j-1/2}), \right. \\
& \left. (x_{i,j-1} - x_{i,j})/(\Delta\psi J_{i,j-1/2})\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i+1/2,j} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} \left((x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) - \right. \\
& \left. - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i-1/2,j} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} \left((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) - \right. \\
& \left. - (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i,j+1/2} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} \left((y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i,j-1/2} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} \left((y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}) \right).
\end{aligned}$$

Невідому повну фільтраційну витрату Q та значення квазіпотенціалів $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ в точках «призупинки» шукаємо в процесі

ітераційного розрахунку за формулами: $Q = m\Delta\psi$, $\underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}$,

$\bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}}$, де $\tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}$, $\tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}$,

$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}$. На підставі умови

«квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей знаходимо величини квазіконформних інваріантів γ_l :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{k_{i+1/2, j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1, j})}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1, 0}^{n_1+n_2-1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{k_{i+1/2, j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1, j})}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2, 0}^{n-1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{k_{i+1/2, j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1, j})},\end{aligned}\quad (3.25)$$

де

$$\begin{aligned}a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\ b_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \\ k_{i+1/2, j+1/2} &= k \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4}, \right. \\ &\quad \left. \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}}, \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi J_{i,j}} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{i,j} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} ((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - \\ &\quad - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j})), \quad l = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Формули розрахунку швидкості у внутрішніх вузлах сітки мають вигляд

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})),$$

$$k_{i,j} = k \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi J_{i,j}}, -\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\psi J_{i,j}} \right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1;$$

$i = \overline{n_1 + 2, n_1 + n_2 - 1}, \quad l = 2; \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, \quad l = 3$. Аналогічним чином, через координати гідродинамічної сітки, виражаються швидкості на розрізах Γ_* , Γ^* та границі області.

Розв'язок різницевої задачі (3.22) – (3.24) будується, як і в попередньому випадку, з тією відмінністю, що початкові наближення координат граничних вузлів задаються так, щоб виконувались рівності (3.23), початкові наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_l^{(0)}$ знаходимо за формулами (3.25); уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя за формулами, отриманими шляхом розв'язання (3.22) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (3.25),

знаходимо нове наближення величин

$$Q = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

де $\tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}$. Також

зазначимо, що необхідні значення градієнту та функції k у вузлах сітки області G_ω обчислюються через величини $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації. Ступінь квазіконформності δ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, встановлюємо наступним чином:

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2},$$

де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (3.19) які визначаються із співвідношень

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|,$$

$$k_{i,j} = k \left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right),$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi \cdot \Delta\phi_l},$$

$$j = \overline{1, m-1}, l = \begin{cases} 1, \text{ при } i = \overline{1, n_1}, \\ 2, \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ 3, \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n-1}. \end{cases}$$

Числові розрахунки проведено для області з коефіцієнтом фільтрації, що визначається моделлю (3.17) при $k_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 180$, $\sigma = 0.5$, $I_{кр}^* = 0.208$, $I_{кр}^3 = 0.1$, $I_{кр}^6 = 0.151$, $I_{кр}^0 = 0.151$; $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $x_*(t) = 0.82 \cos(t) - 6.6$, $x_0(t) = 20(\cos(t) + 0.1 \cos(2t))$, $y_0(t) = 20(\sin(t) - 0.1 \sin(2t))$, $y_*(t) = 0.82 \sin(t)$, $x^*(t) = 0.82 \cos(t) + 6.6$, $y^*(t) = 0.82 \sin(t)$, $0 \leq t < 2\pi$.

На рисунку 3.10 зображено гідродинамічну сітку руху (при наступному співвідношенні параметрів розбиття $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 41 \times 94 \times 45 \times 189$) з побудованими на ній лініями розділу різнокольорових рідин в різні моменти часу, для випадку деформівного (а) (коли суфозійний процес стабілізувався) та недеформівного (б) середовищ. Зауважимо, що положення ліній

розділу рідин для випадку руху у деформівному пласті мажоруються побудованими лініями для однорідного пласта та відповідного деформівного на стадії стабілізації суфозійно-фільтраційної взаємодії. Як бачимо, на початковій стадії заводнення пласта поблизу нагнітальної свердловини течія є близькою до радіальної і поступово, з просуванням фронту витіснення у напрямку експлуатаційної свердловини, загострюється. Відмітимо також, що швидкість загострення фронту витіснення та його просування у напрямку експлуатаційної свердловини значно залежить від фільтраційних характеристик прилеглих до свердловин зон пласта при зміні пропускних властивостей яких у певній мірі вдається підвищити продуктивність роботи свердловин.

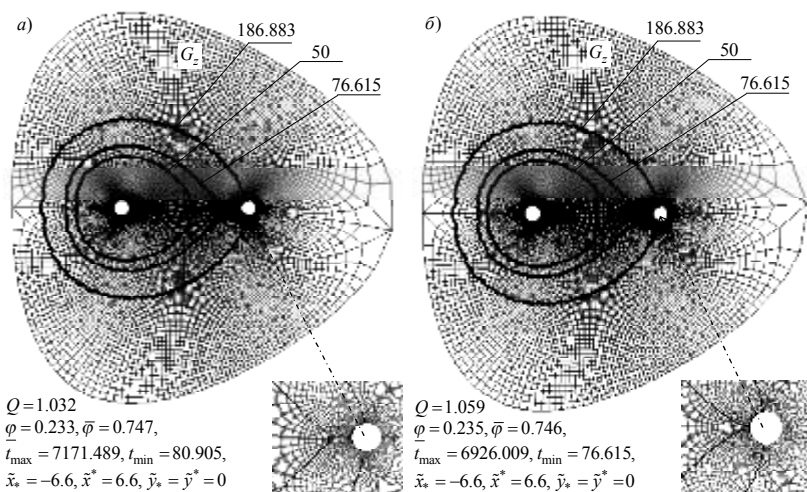


Рис. 3.10. Дві свердловини відповідно в неоднорідному а) та однорідному б) пластах з побудованими контурами розділу в різні моменти часу

Проведені числові розрахунки з використання методики корекції коефіцієнта фільтрації в залежності від значень величин критичних градієнтів показали, що уже на етапі встановлення фільтраційно-суфозійних деформації збільшується значення витрати Q , що є прямим наслідком врахування вимиву частинок в

присвердловинних зонах пласта при взаємодії експлуатаційної та нагнітальної свердловин. Значно зменшився і час прориву та повного заводнення пласта по відношенню до випадку неврахування деформацій.

3.1.3. Дослідження еволюції границі розділу рідин при поршневому витісненні

У попередніх підрозділах задачу про витіснення із пористого середовища однієї рідини іншою сформульовано як задачу з рухомою границею, яка розділяє область фільтрації на дві підобласті в кожній із яких рухається тільки одна із рідин, та побудовано алгоритм її розв'язування для випадку коли рідини за фізичними та механічними властивостями не відрізняються, тобто є «різнокольоровими». Проте, такого роду схематизація процесу руху, що описується моделлю побудованою на припущенні «різнокольоровості» рідин придатна лише для початкової оцінки положення границі розділу. Для більш точного розрахунку слід враховувати відмінність між рідинами, а до постановки відповідної задачі додати умови неперервності тиску (квазіпотенціалу) та потоку при переході через рухому границю, що приводить до виникнення нелінійності, пов'язаної з відшуканням положення невідомої границі по невідомому розв'язку фільтраційної задачі і, навпаки, знаходженням розв'язку фільтраційної задачі в невідомій області.

Тому, розглянемо процес фільтрації двох різних рідин, які не змішуються, наприклад, води і нафти, що описується законом Дарсі та рівнянням нерозривності [148, 156, 207, 208]:

$$\vec{v} = k \cdot \text{grad}\varphi, \quad \text{div}\vec{v} = 0, \quad (x, y) \in G_z^w \cup G_z^o \quad (3.26)$$

за умов $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L_0} = 0$ на нерухомих ділянках границі фільтраційної області G_z (див. рис. 3.1) та умов неперервності потоку і тиску (квазіпотенціалу) при переході через рухомиху границю Γ_t , що розділяє пласт на підобласті фільтрації води G_z^w та нафти G_z^o (φ – квазіпотенціал швидкості фільтрації $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$, k – коефіцієнт фільтрації, причому $k = k_w$, $\varphi = \varphi_w$ в G_z^w і $k = k_o$, $\varphi = \varphi_o$ в G_z^o , n – нормаль до відповідної кривої).

Ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z (горизонтального пласта, що розробляється нагнітальною та експлуатаційною свердловинами) вздовж ліній розділу течії, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати Q , квазіпотенціалів $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ в шуканих точках «призупинки», що визначаються координатами (x_0^*, y_0^*) , (x_*, y_*) , (x^*, y^*) та інших характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = G_\omega^w \cup G_\omega^o = \{ \omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \}$:

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$\varphi_w = \varphi_o|_{\Gamma_t}, \quad (v_w)_n = (v_o)_n|_{\Gamma_t}, \quad v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*, y_*) = 0, \quad (3.27)$$

де G_ω^w , G_ω^o – відповідні G_z^w , G_z^o підобласті області G_ω ,
 $Q = \oint_{L_\omega} -v_y dx + v_x dy$, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$.

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω , що є прямокутником, як і в попередніх параграфах замість прямої задачі на квазіконформне відображення, при невідомих Q , φ , $\bar{\varphi}$, Γ_* , Γ^* , розглядатимемо обернену до неї:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^w \cup G_\omega^o, \quad (3.28)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (3.29)$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \underline{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (3.30)$$

$$v(x(\underline{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\underline{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad v(x(\bar{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\bar{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \tilde{\psi} = \{0, Q\},$$

$$[\varphi]_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad \left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\bar{v}, \bar{n}) \right]_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.32)$$

де $k = k_w$ в G_ω^w і $k = k_o$ в G_ω^o , $v_x = \frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$,

$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $[\bullet]_{\tilde{\Gamma}_i}$ – стрибок відповідної функції на $\tilde{\Gamma}_i$.

Для знаходження положення границі розділу рідин використовуватимемо таку процедуру її ітераційного наближення. За заданим початковим положенням границі розділу рідин Γ_{i_0} знаходимо розв'язок задачі (3.28)–(3.32). Положення Γ_i в кожен

наступний момент часу $t_{p+1} = t_p + \Delta t, p = 0, 1, \dots$ (де Δt – деякий заданий достатньо малий часовий крок) шукатимемо, використовуючи поле швидкостей при $t = t_p$, відповідні формули $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ квазіконформного відображення G_ω на G_z та формулу (3.10) для розрахунку часу проходження частинкою рідини шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi})$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi})$ вздовж вибраної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}$.

Рівняння (3.32), крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів сіткової області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються із співвідношень (3.11), апроксимуємо наступним чином:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \\ & - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \\ & + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, i = \overline{1, n_1}, l = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2; \\ & i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, l = 3; j = \overline{1, m - 1}; \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ & f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ & \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m - 1}, (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(4y_{i,1}-3y_{i,0}-y_{i,2})(y_{i+1,0}-y_{i-1,0})=0, \quad (3x_{i,m}+x_{i,m-2}-4x_{i,m-1})\times \\
&\quad \times(x_{i+1,m}-x_{i-1,m})+(3y_{i,m}+y_{i,m-2}-4y_{i,m-1})(y_{i+1,m}-y_{i-1,m})=0, \\
&\quad i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $k_{i,j\pm 1/2} = \frac{k_{i,j\pm 1} + k_{i,j}}{2}$,

$k_{i\pm 1/2,j} = \frac{k_{i\pm 1,j} + k_{i,j}}{2}$. Невідому фільтраційну витрату Q шукаємо за

формулою $Q = m\Delta\psi$, де $\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1+1) + \gamma_2(n_2-1) + \gamma_3(n_3+1)}$, γ_l

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1+1)} \sum_{i,j=0}^{n_1,m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2-1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1,m-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma_3 &= \frac{1}{m(n-n_1-n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1,m-1} \gamma_{i,j}, \quad (3.36)
\end{aligned}$$

де $\gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}$, $a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$,

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

У процесі ітераційного розв'язування задачі невідомі $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ шукаємо за формулами: $\underline{\varphi} = \varphi_* + (n_1+1)\Delta\psi\gamma_1$, $\bar{\varphi} = \varphi^* - (n_3+1)\Delta\psi\gamma_3$. Формули для розрахунку швидкості записуються аналогічно до (3.16).

Таким чином, задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z ; параметри розбиття n_1 , n_2 , n_3 та m відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω деякої сіткової області G_ω^l (параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень

квазіконформності δ_* відображення), початкове наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$ та $y_{i,j}^{(0)}$, щоб виконувалися умови (3.34) та початкові значення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо початкове наближення витрати $Q^{(0)}$ та величин $\underline{\varphi}^{(0)}$, $\bar{\varphi}^{(0)}$ квазіпотенціалу в точках «призупинки». Уточнюємо координати внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (3.33) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використаємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Після цього, як і в [46, 48, 70], «підправляємо» граничні вузли (за умови фіксації сусідніх граничних та приграничних), використовуючи різниці аналогів умов типу Коші-Рімана (3.35). Знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ використовуючи значення квазіконформного інваріанту, знайдене за формулами (3.36). Якщо зміна невідомої величини Q за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів. Визначаємо величину зміщення вузлів S на границі за проведену κ -ту загальну ітерацію за формулою $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2}$ і, якщо вона більша за ε_2 , то повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку – оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3.28):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

$$l = \begin{cases} 1, \text{ при } i = \overline{1, n_1}, \\ 2, \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ 3, \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}. \end{cases}$$

Використовуючи одержані значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, знаходимо $v_{i,j}^2 = v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j)) = (v_x^2 + v_y^2)_{i,j}$, а також $t_{i,j} = \Phi(\varphi_i, \psi_j)$. Якщо час $t = t_p$ є заданим (а саме, якщо $\bar{t}_{l,j} < t_p < \bar{t}_{l+1,j}$), то відповідне йому значення квазіпотенціалу $\bar{\varphi}_{p,j}$ знаходимо, наприклад, виходячи з пропорції $\frac{\varphi_{l+1,j} - \varphi_{l,j}}{\bar{t}_{l+1,j} - \bar{t}_{l,j}} = \frac{\varphi_{l+1,j} - \bar{\varphi}_{p,j}}{\bar{t}_{l+1,j} - t_p}$.

Аналогічно в області G_z будуємо прообрази $(x_{p,j}, y_{p,j})$ точок $(\bar{\varphi}_{p,j}, \psi_j)$ (при цьому можемо використовувати як, аналогічну до попередньої, «просторово-часову» пропорцію, так і просторову). У результаті маємо наближення лінії розділу Γ_{t_p} при $t = t_p$. Далі збільшуємо час на Δt та повторюємо кроки алгоритму.

Продемонструємо можливості розробленого алгоритму на тестовому прикладі, коли, $x_*(t) = 0.2 \cos(t) - 1$, $y_*(t) = 0.2 \sin(t)$, $x^*(t) = 0.2 \cos(t) + 1$, $y^*(t) = 0.2 \sin(t)$, $x_0(t) = 3 \cos(t)$, $y_0(t) = 2 \sin(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k_o = 0.6$, $k_w = 1$, $t_0 = 0$, $\Delta t = 0.001$. Відповідна гідродинамічна сітка у випадку розбиття $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 20 \times 80 \times 20 \times 87$ зображена на рис. 3.14а, де потовщеною лінією виділено границю розділу рідин в момент часу

$t = \Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = 0.37$ (час початку «заводнення» експлуатаційної свердловини).

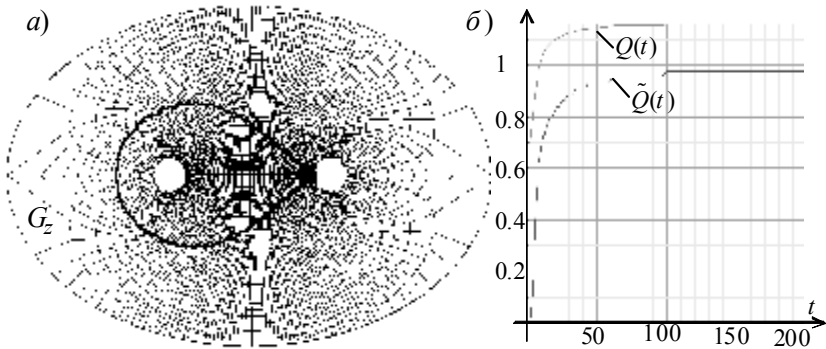


Рис. 3.14. Гідродинамічна сітка для еліптичного пласта (а) та графіки зміни величин $Q(t)$, $\tilde{Q}(t)$ в часі (б)

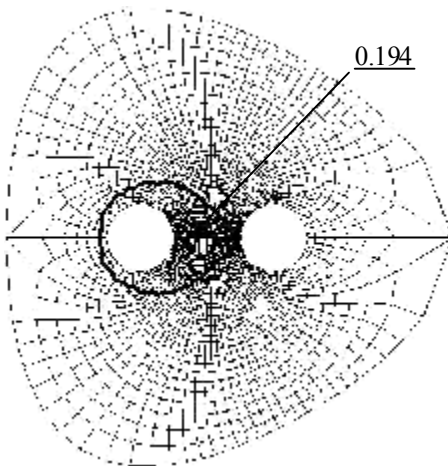


Рис. 3.15. Положення границі розділу рідин в час прориву

На рис. 3.14б зображена залежність від часу повної фільтраційної витрати $Q(t)$ та частки витісняючої рідини (води) $\tilde{Q}(t)$ у повній фільтраційній витраті. Проведемо розрахунки процесу витіснення в пласті зображеному на рис. 3.2а використовуючи розроблений алгоритм, та порівняємо отримані результати, з результатами для моделі

різнокольорових рідин. Як можна помітити (рис. 3.15) у випадку поршневої моделі фронт витіснення просувається повільніше, проте його форма фактично не змінюється. Ця особливість може бути використана для введення поправок на часові характеристики

процесу коли використовується модель різнокольорових рідин, що дозволить значно зменшити час виконання відповідних програм розрахунку фільтраційних характеристик. Так як при використанні моделі різнокольорових рідин поле швидкості та відповідна гідродинамічна сітка розраховуються лише один раз на відміну від поршневої моделі де вони розраховуються на кожній часовій ітерації.

3.2. Моделювання багатофазної фільтрації в горизонтальному пласті за умов неповного витіснення

Як показує практика досить часто приходиться мати справу з процесами витіснення, коли вода не витісняє нафту повністю, і утворюється достатньо велика зона де рухаються обидві рідини. Для врахування такого типу витіснення використовуватимемо узагальнений закон Дарсі та рівняння нерозривності течії, записані для кожної з рідин, відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ – тиск у точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} – деяке характерне його значення) та насиченості $s = s(x, y, t)$ витісняючої фази, у вигляді [29, 96, 194]

$$\vec{v}_1 = \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1} \text{grad}\varphi, \quad \vec{v}_2 = \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2} \text{grad}\varphi,$$

$$\sigma \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_1 = 0, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_2 = 0,$$

де $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \mu_1, \mu_2$ – вектори швидкості та коефіцієнти в'язкості відповідних фаз, $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s), \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ – відносні фазові проникності, σ, k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії та початкових і граничних умов, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s) \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \varphi|_{L^*} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{L_0} = 0, \quad s|_{L_*} = s_*, \\ s(x, y, t) \Big|_{t=0} &= \tilde{s}(x, y), \end{aligned} \quad (3.37)$$

де $\bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}$, $f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}$, L_* , L^* , L_0 – контури тризв’язної криволінійної області G_z (див. рис. 3.16), $\tilde{s}(x, y)$ – задана функція розподілу насиченості в початковий момент часу.

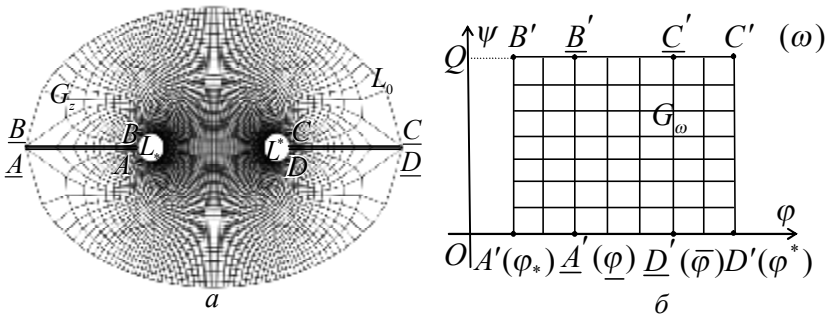


Рис. 3.16. Фізична область (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б)

Аналогічно до [46, 48, 56], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати,

положення точок (x_0^*, y_0^*) , (x_*^0, y_*^0) , (x_*, y_*) , (x^*, y^*) та інших характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\begin{aligned} \bar{k}(s(x, y, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s(x, y, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi|_{L^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ \nu(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad \nu(x_*^0, y_*^0) = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}(s)}{\sigma} \frac{\partial f(s)}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \\ s|_{L_*} = s_*, \quad s(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \end{aligned} \quad (3.39)$$

де $Q = \oint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy$, $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$.

Обернена до (3.38) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізах із врахуванням їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії при невідомих Q , φ , $\bar{\varphi}$, Γ_* , Γ^* запишеться у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \underline{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (3.42)$$

$$v(x(\underline{\varphi}, \psi), y(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, v(x(\overline{\varphi}, \psi), y(\overline{\varphi}, \psi)) = 0, \psi = \{0, Q\}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\overline{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\overline{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\overline{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\overline{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.44)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$(J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}), \text{ умови (3.40) та формули для обчислення компонент}$$

сумарної швидкості $v_x = \frac{\overline{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{\overline{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$, задачу для

насиченості (3.39) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \overline{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.45)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)). \quad (3.46)$$

Де рівняння (3.45) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр. Останнє дозволяє суттєво спростити загальну стратегію розв'язання вихідної задачі (розщепити алгоритм) а саме: а) за відомим з попереднього часового кроку розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення (3.40) – (3.44) (зокрема, будуюмо гідродинамічну сітку, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); б) отримавши розв'язок (3.40) – (3.44), відносно квазіпотенціалу швидкості та відомого з попереднього часового кроку розподілу насиченості, знаходимо

розв'язок рівняння (3.45) при відповідних крайових умовах; в) перевіряємо умову зупинки алгоритму (однією із таких умов може бути, умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини), при невиконанні якої переходимо до пункту (а) алгоритму. Таким чином отримано послідовність більш простіших задач: крайових задач на квазіконформні відображення та нелінійних задач для просторово-одновимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з параметром.

Рівняння (3.44) для внутрішніх вузлів (φ_i, ψ_j) відповідної G_ω

$$\text{сіткової області } G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta_i\varphi, \quad \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}$$

$$\text{при } i = \overline{0, n_1}; \quad \varphi_i = \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta_i\varphi, \quad \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1} \quad \text{при}$$

$$i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}; \quad \varphi_i = \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta_i\varphi, \quad \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1} \quad \text{при}$$

$$i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}; \quad \psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad j = \overline{0, m}; \quad \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi}, \quad l = 1, 2, 3\},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$, m – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, γ_l – квазіконформні інваріанти та граничних вузлів, що є образами «берегів» розрізів Γ_* , Γ^* , крайові умови, умови періодичності та умови ортогональності для граничних і приграничних вузлів апроксимуємо так:

$$\gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0,$$

$$\gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0,$$

$$\bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j}}{2}, \quad \bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j}}{2}, \quad j = \overline{1, m-1} \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1,$$

$$i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n-1}, \quad l = 3; \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \quad (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1}) \times \\ \times (x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \\ i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Невідому витрату Q , параметри $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ в процесі ітерацій шукаємо за формулами: $\underline{\varphi} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi\gamma_1$, $\bar{\varphi} = \varphi^* - (n_3 + 1)\Delta\psi\gamma_3$,

$$Q = m\Delta\psi, \quad \text{де } \Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \gamma_i \text{ одержуємо}$$

на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1, j})},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1, 0}^{n_1+n_2-1, m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1, j})},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n-n_1-n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1,m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{\bar{k}_{i+1/2,j+1/2} (b_{i,j} + b_{i+1,j})}, \quad (3.50)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.45) апроксимуємо однією із наступних різницьових схем «проти потоку» [130]:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad (3.51)$$

$$\hat{\hat{s}}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} (f(s_{i,j}) - f(s_{i-1,j})), \quad (3.51')$$

де $s_{i-1/2,j} = 0.5(s_{i-1,j} + s_{i,j})$, $j = \overline{1, m}$, $l = 1$, $i = \overline{1, n_1}$; $l = 2$, $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$; $l = 3$, $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}$, τ – крок по часу, $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (шукаємо як і в роботі [48]). Граничну та початкову умови для насиченості в сіткові області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n - 1}$.

Задавши крок τ , параметрів розбиття n_1 , n_2 , n_3 , m , області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.48)) і початкове наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ за формулою (3.50) знаходимо наближення величин квазіконформного інваріанту. Після чого проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.47)

відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (а саме, «нові» координати вузла шукаємо як узагальненосередні навколишніх «старих») з урахуванням періодичності шуканих функцій. Як і в [48], проводимо уточнення граничних вузлів, (за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних вузлів) використовуючи різницеві аналоги (3.49) (умови ортогональності) з наступним розрахунком величин Q , φ , $\bar{\varphi}$. Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів зокрема, поля швидкості) на даному часовому етапі: стабілізація витрати Q ($|Q^{(\kappa+1)} - Q^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів (i, j) ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов, відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності використовуючи співвідношення $\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \geq \delta^*$, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (3.40):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l \bar{k}_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l \bar{k}_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

$$j = \overline{1, m-1}, \quad l=1, \quad i = \overline{1, n_1}; \quad l=2, \quad i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}; \quad l=3, \\ i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}.$$

Зауважимо, якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^l (при цьому намагаємося вибрати співвідношення між параметрами n_1 , n_2 , n_3 , m , аналогічно до [46, 48, 56]).

Використовуючи побудоване поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничної умови), знаходимо розподіл насиченості у пласті на даному часовому етапі та повторюємо кроки алгоритму.

На рис. 3.16а, 3.17а відповідно представлені динамічна сітка в момент часу $t=0$ у випадку $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 20 \times 80 \times 20 \times 87$ та розподіл насиченості в момент часу $t=1.5062$ (час прориву) при $x_*(\tilde{t}) = 0.2 \cos(\tilde{t}) - 1$, $y_*(\tilde{t}) = 0.2 \sin(\tilde{t})$, $x^*(\tilde{t}) = 0.2 \cos(\tilde{t}) + 1$, $y^*(\tilde{t}) = 0.2 \sin(\tilde{t})$, $x_0(\tilde{t}) = 3 \cos(\tilde{t})$, $y_0(\tilde{t}) = 2 \sin(\tilde{t})$, $0 \leq \tilde{t} < 2\pi$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k = 1$, $k_1 = (1-s)^2$, $k_2 = s^2$, $\sigma = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $\tau = 0.0001$. Залежність сумарної фільтраційної витрати $Q = Q(t)$ від часу яка змінюється від $Q = 0.583$ до $Q = 1.165$ представлено на рис. 3.17б.

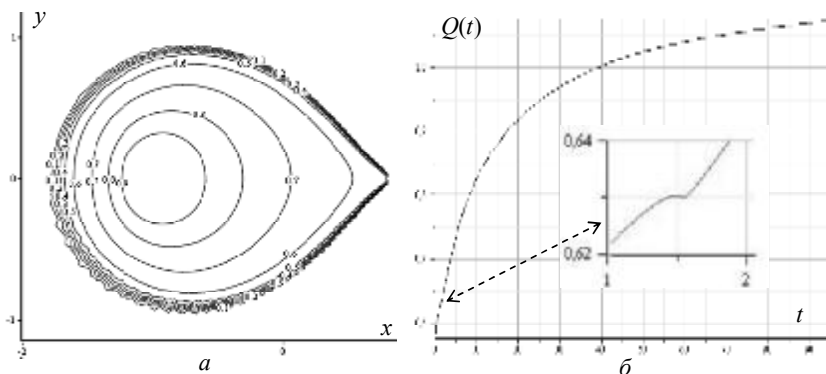


Рис. 3.17. Поле насиченості (а) та розподіл сумарної витрати (б)

Як і слід було очікувати величина Q змінюється зростаючи від $Q(0) = 0.583$ (що відповідає наявності у пласті лише нафти) до $Q(t) = 1.165$, причому «комп'ютерний» перегин відповідного графіка відповідає околу часу прориву витісняючої рідини в експлуатаційну свердловину.

3.3. Проблеми оптимізації параметрів та керування процесами витіснення у нафтогазових пластах

У підрозділі пропонується комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом поповнення існуючого фонду свердловин. На основі ідей методів квазіконформних відображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу фільтрації розроблено числові алгоритми розв'язування відповідних крайових задач про побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо для випадків, коли область комплексного квазіпотенціалу є одно- чи багатолистою поверхнею.

3.3.1. Алгоритм вибору випадку формування течії та методика керування системою перетоків між свердловинами з наступним підбором оптимальних параметрів їх роботи

В попередньому розділі сформовано математичні моделі нелінійних процесів витіснення в горизонтальних нафтогазових пластах за умови існування в пласті нагнітальної і експлуатаційної свердловин. Встановлено особливості протікання досліджуваних процесів в залежності від їх розташування в пласті та впливу системи різної проникності присвердловинних зон на зміну фільтраційної витрати. Згідно ж потреб практики для повноцінної розробки продуктивних пластів та утворення додаткових фільтраційних впливів фонд існуючих свердловин повинен з часом поповнюватися. Проте, зі збільшенням кількості свердловин ускладнюється структура фільтраційної течії та виникає необхідність керування системою перетоків між свердловинами для

уникнення формування (значних за своїми площами) застійних зон, що призводить до необхідності виділення в фільтраційній моделі певних параметрів завдяки зміні яких буде відбуватися керування відповідним процесом.

Так, у роботах [54, 56, 71] запропоновано підхід до розв'язування стаціонарних задач однофазної фільтрації у трив'язних областях (пластах), обмежених екіпотенціальними лініями (двома свердловинами та зовнішнім контуром живлення). Вперше зроблено евристичний опис з наступним логічним обґрунтування всіх можливих випадків формування течії, в залежності від заданих значень керуючого потенціалу, розв'язана проблема неоднозначності нелінійного обернення відповідних крайових задач на конформні відображення з використанням розробленої процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. Запропоновано постановки крайових задач на конформні відображення при невідомому значенні керуючого потенціалу як задач на оптимізацію та керування. Розроблено метод розв'язання такого роду задач, що дає можливість будувати гідродинамічну сітку, знаходити лінії розділу течії та обчислювати величини різного роду перетоків, який апробовано для окремих, так званих, проміжних та ключових (оптимізаційних) випадків.

У цьому підрозділі поширено розроблену методика моделювання процесів витіснення на випадок існування в пласті трьох свердловин за умови, що на контурах двох свердловин задано фіксоване значення потенціалу, відповідно $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, а потенціал φ_0 на контурі L_0 третьої свердловини вважаємо керуючим параметром, що може змінюватися у межах $-\infty < \varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi^* < +\infty$. При цьому відповідну чотиризв'язну область фільтрації, обмежену екіпотенціальними лініями L_* , L_0 ,

L^* , та лініями течії C_1D_1 , C_2D_2 (останні визначаються шуканими точками «призупинки» на зовнішньому непроникному контурі $L = C_1D_1 \cup C_2D_2$) позначимо як G_z ($z = x + iy$).

В залежності від співвідношення величин граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 відповідна G_z область комплексного потенціалу G_ω набуває різної геометричної конфігурації. На основі евристичних міркувань (з наступним логічним обґрунтуванням) нами встановлено усі можливі випадки формування течії. Так на рис. 3.18–3.19 зображено 9 однотипних із них. Очевидно, що кожен із випадків (їх надалі “іменуватимемо” як випадки 3.18а–3.18д (рис. 3.18, *a-d*) і випадки 3.19а–3.19г (рис. 3.19, *a-z*) відповідно) характеризується тим чи іншим набором перетоків між внутрішніми контурами (свердловинами).

Особливий інтерес для нас представлятимуть випадки (називатимемо їх ключовими, серед яких доцільно виділити так звані граничні, а також критичні), які характеризуються такими значеннями керуючого потенціалу φ_0 , при яких за додаткових умов досягається мінімум (чи максимум) величини одного з перетоків між внутрішніми контурами області, всі інші називатимемо проміжними.

Так, для випадків 3.18а, 3.18б та 3.18в характерним є те, що L^* є лінією втоку, а контури L_0 та L_* – лініями витоку, випадок 3.1а (ключовий) характеризується ще тим, що значення потенціалів на контурах L_* і L_0 рівні. Випадок 3.18в є ключовим у тому розумінні, що точка H_3 розгалуження потоків співпадає із деякою точкою B_1 внутрішнього контуру L_0 , а також граничним, оскільки при збільшенні значення керуючого потенціалу з’являється перетік мінімальної величини між контурами L_* та L_0 (надалі

позначатимемо $L_* \rightarrow L_0$, де L_* – контур-джерело, а L_0 – контур-приймач).

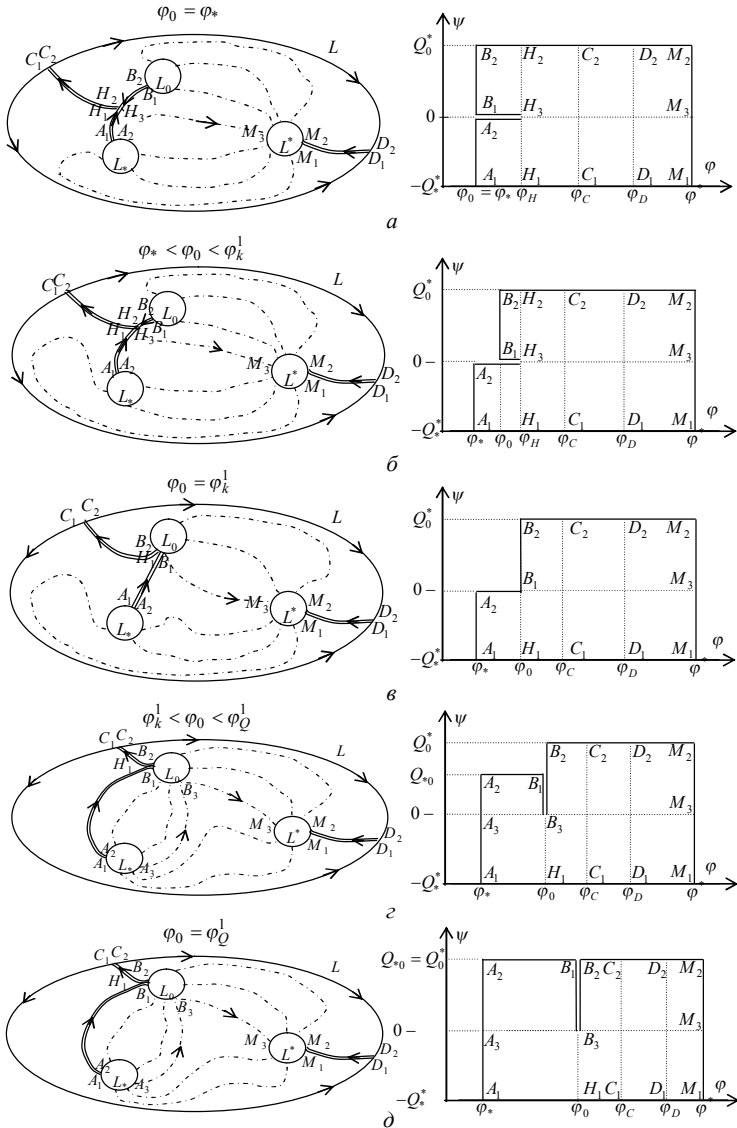


Рис. 3.18. Схематичне зображення формування течії при $\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi_Q^1$

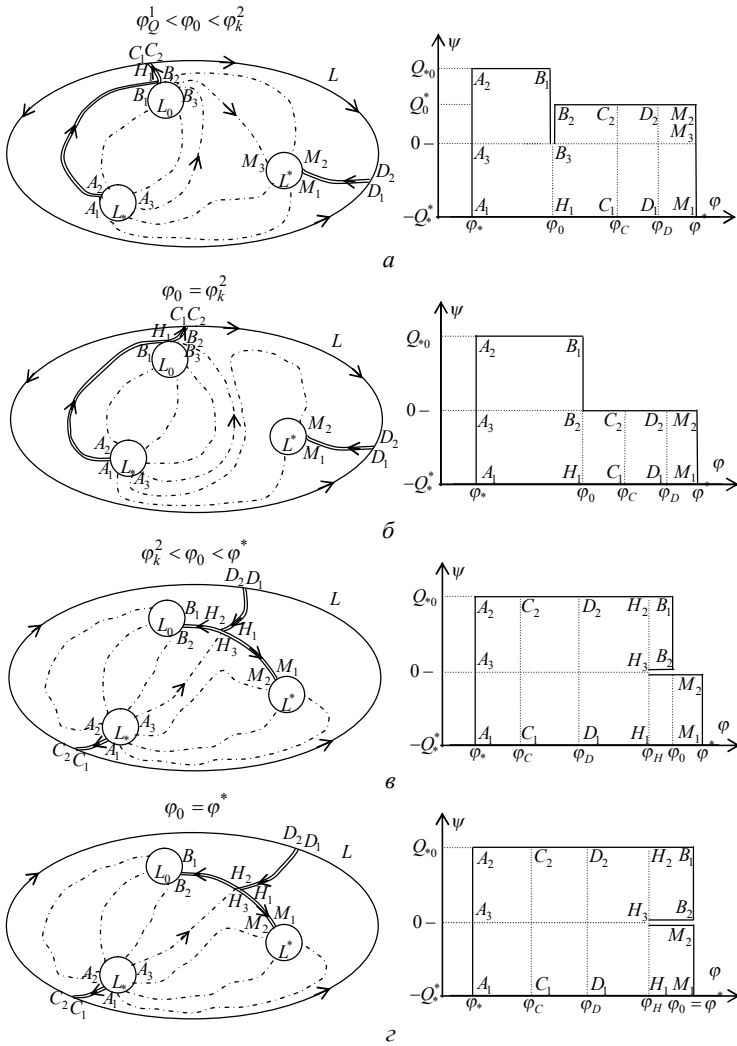


Рис. 3.19. Схематичне зображення формування течії при $\varphi_Q^1 < \varphi_0 \leq \varphi^*$

При подальшому зростанні потенціалу керування φ_0 (випадки 3.18г, 3.18д) перетік $L_* \rightarrow L_0$ збільшується до деякого його граничного значення (проміжний випадок 3.18г переходить у

ключовий 3.18д характерною особливістю якого є те, що сумарний потік через контур L_0 дорівнює нулю). Проміжні випадки 3.19а характерні тим, що значення перетоку $L_0 \rightarrow L^*$ зменшується при зростанні φ_0 і при переході до граничного випадку 3.19б досягає свого мінімуму. Випадок 3.19в є проміжним між 3.19б і 3.19г (ключовий), де останній характеризується рівністю потенціалів на L^* та L_0 . Граничні випадки 3.18в і 3.19б характеризуються наявністю мінімального значення перетоків до та від контуру носія керуючого потенціалу відповідно, зокрема описані вище ключові випадки є одночасно різного роду оптимізаційними для функціоналу вигляду $Q = \oint_{\lambda} -v_y dx + v_x dy$, де λ - частина внутрішнього контуру області.

Неповна визначеність геометричної конфігурації області комплексного потенціалу G_{ω} (а саме, її залежність від співвідношення величин граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів чисельного розв'язання задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і алгоритму вибору конкретного із описаних вище випадків.

Нехай задана геометрична конфігурація фізичної області G_z (криві L_* , L^* , L_0 , L) та значення граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 . Тоді алгоритм вибору конкретного із можливих випадків (рис. 3.18–3.19) запишемо у вигляді послідовності таких кроків.

1. Розв'язуємо задачу у випадку 3.18а при $\varphi_0 = \varphi_* = \varphi_0^0$ (випадок 3.19г при $\varphi_0 = \varphi^* = \varphi_0^1$), зокрема, знаходимо значення потенціалу φ_H в точці $H = H_1 = H_2 = H_3$, і збільшуємо (зменшуємо) потенціал керуючого контуру L_0 на величину $\Delta\tilde{\varphi}$ таку, що

$\varphi_0^0 + \Delta\tilde{\varphi} \ll \varphi_H$ ($\varphi_0^1 - \Delta\tilde{\varphi} \gg \varphi_H$), здійснюючи тим самим перехід від випадку 3.18а до 3.18б (3.19г до 3.19в).

2. Шукаємо розв'язок задачі у проміжних випадках 3.18б (3.2в) поступово збільшуючи (зменшуючи) потенціал на керуючому контурі до виконання рівності $(x_B, y_B) = (x_H, y_H)$, що є умовою переходу випадку 3.18б у 3.18в (3.19в у 3.19б), та знаходимо значення $\varphi_0 = \varphi_k^1$ ($\varphi_0 = \varphi_k^2$), що відповідає цьому випадку.

3. Поступово збільшуючи φ_k^1 (зменшуючи φ_k^2) на величину $\Delta\tilde{\varphi}$, розв'язуємо задачу у випадку 3.18г (3.19а) до виконання умови $Q_{*0} + Q_0^* = 0$ (рівності потоків в та з керуючого контуру), яка визначає випадок 3.18д і знаходимо $\varphi_0 = \varphi_Q^1$.

3.3.2. Розв'язання крайових задач багатофазної фільтрації в чотиририв'язних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями з використанням ідей квазіконформних відображень

При побудові числового розв'язку задачі для кожного розглянутого вище випадку формування течії з метою спрощення викладок вважатимемо, що фільтрація є однофазною і підпорядковується закону Дарсі $\vec{v} = k \cdot \text{grad}\varphi$, де $k = k(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ – коефіцієнт фільтрації, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал швидкості фільтрації $\vec{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$.

Шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до φ та умовних розрізів Γ_i , $i = \overline{1, 3}$ області G_z вздовж ліній розділу течії, що проходять через точки «призупинки» течії

$C = C_1 = C_2 = (x_C, y_C)$, $D = D_1 = D_2 = (x_D, y_D)$, $H = H_1 = H_2 = H_3$,
 $H = (x_H, y_H)$, задачу дослідження процесу витіснення зводимо до сукупності задач на квазіконформне (конформне) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ (при невідомих ділянках її границі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу (потенціалу) G_ω або до задачі на обернене квазіконформне (конформне) відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ ($G_\omega \rightarrow G_z^0$) при відповідності кутових точок з одночасним обчисленням невідомих фільтраційних параметрів [56]. Наприклад, для випадку зображеного на рис. 3.18а. (при $\varphi_0 = \varphi_*$, $k=1$) відповідна задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ з невідомими параметрами (Q_0^* , Q_*^* ; φ_H , φ_C , φ_D - потенціали у відповідних точках «призупинки», (x_C, y_C) , (x_H, y_H) , (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_M, y_M) , (x_D, y_D) - координати кінців розрізів CH , AH , BH , DM) має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0,$$

$$\psi|_{A_2H_3B_1} = 0, \quad \psi|_{A_1H_1C_1D_1M_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{B_2H_2C_2D_2M_2} = Q_0^*,$$

$$v(x_C, y_C) = 0, \quad v(x_D, y_D) = 0, \quad v(x_H, y_H) = 0, \quad (3.52)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$; $Q_0^* = \oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy$,

$Q_*^* = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ - потоки (величини перетоків) відповідно через

контури L_0 , L_* , що знаходяться в процесі розв'язання задачі (очевидно, що в цьому випадку, як і на рис. 3.18б, 3.18в

$$Q_0^* + Q_*^* = \oint_{L^*} (-v_y dx + v_x dy).$$

Після здійснення умовних розрізів, отриману однозв'язну область $G_z^0 = G_z / (CH \cup AH \cup BH \cup DM)$ (де $CH = C_1H_1 = C_2H_2$, $BH = B_1H_3 = B_2H_2$, $AH = A_1H_1 = A_2H_3$, $DM = D_1M_1 = D_2M_2$ розрізи, що проходять через точки розділу $H = H_1 = H_2 = H_3$, сходження $D = D_1 = D_2$ та розходження $C = C_1 = C_2$ ліній течії) відображаємо на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup H_3M_3$, $G_\omega^1 = \{\omega : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_\omega^2 = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $H_3M_3 = \{\omega : \varphi_H < \varphi < \varphi^*, \psi = 0\}$ з невідомими параметрами-витратами Q_0^* , Q_*^* та потенціалами φ_H , φ_C , φ_D у відповідних точках.

Відповідна до (3.52) обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 зводиться до знаходження розв'язку $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ в G_ω системи Коші-Рімана

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (3.53)$$

що задовольняє умовам

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_0^*, \\ f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*, \\ f(x(\varphi, -Q_*^*), y(\varphi, -Q_*^*)) &= 0, \quad f(x(\varphi, Q_0^*), y(\varphi, Q_0^*)) = 0, \quad \varphi_C \leq \varphi \leq \varphi_D, \\ x(\varphi, -Q_*^*) &= x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_H \leq \varphi \leq \varphi_C, \quad \varphi_D \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ x(\varphi, -Q_*^*) &= x(\varphi, 0_-), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, 0_-), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_H, \\ x(\varphi, Q_0^*) &= x(\varphi, 0_+), \quad y(\varphi, Q_0^*) = y(\varphi, 0_+), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x(\varphi_C, \tilde{\psi}), y(\varphi_C, \tilde{\psi})) = 0, \quad v(x(\varphi_D, \tilde{\psi}), y(\varphi_D, \tilde{\psi})) = 0, \quad \tilde{\psi} = \{-Q^*, Q_0^*\}, \\
v(x(\varphi_H, \psi), y(\varphi_H, \psi)) = 0, \quad \psi = \{-Q^*, 0, Q_0^*\}, \quad (3.54)
\end{aligned}$$

а також відповідним (3.53) рівнянням Лапласа на розрізах (для врахування їх роздвоєння при переході від області G_z до G_ω) і параметрів Q_0^* , Q^* , φ_H , φ_C , φ_D (що забезпечують існування і єдиність відображення), розрізів.

Різницеві аналоги відповідних (3.53) рівнянь Лапласа (виконання умов Коші-Рімана вимагаємо лише в околі границі області G_z^0), умов (3.54) і умов ортогональності приграничних нормальних векторів до граничних дотичних – наслідків з умов Коші-Рімана (запишемо їх лише для контуру L_0) у сітковій області $G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\begin{aligned}
\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1, i = \overline{0, n_1}, \\ \varphi_H + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1}, \\ \varphi_C + (i - n_1 - n_2 - 2)\Delta\varphi_3, i = \overline{n_1 + n_2 + 2, n - n_4 - 2}, \\ \varphi_D + (i - n_1 - n_2 - n_3 - 3)\Delta\varphi_4, i = \overline{n - n_4 - 1, n}, \end{cases} \\
\Delta\varphi_1 = (\varphi_H - \varphi_*)/(n_1 + 1), \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi_C - \varphi_H)/(n_2 + 1), \\
\Delta\varphi_3 = (\varphi_D - \varphi_C)/(n_3 + 1), \quad \Delta\varphi_4 = (\varphi_* - \varphi_D)/(n_4 + 1), \\
\psi_j = \begin{cases} j\Delta\psi_1, j = \overline{0, m_1}, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^1, \Delta\psi_1 = Q_0^*/m_1, \\ -j\Delta\psi_2, j = \overline{0, m_2}, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^2, \Delta\psi_2 = Q^*/m_2, \end{cases} \\
n = \sum_{l=1}^4 n_l + 4, \quad m = m_1 + m_2, \quad n_l, m_1, m_2 \in N, \quad l = \overline{1, 4},
\end{aligned}$$

запишемо у вигляді

$$x_{i,j} = \alpha^{-1} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i,j+1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i,j-1} \right),$$

$$y_{i,j} = \alpha^{-1} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i,j+1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i,j-1} \right), \quad (3.55)$$

де $\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1})$, $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2$,
 $\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2$ (вибір величин $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$
 визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті
 сіткової області G_{ω}^{γ} , наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_H$ і $\psi_j = 0$, то
 $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$);

$$f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_2}, \quad f_0(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1},$$

$$f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$f(x_{i,m_2}, y_{i,m_2}) = 0, \quad f(x_{i,m_1}, y_{i,m_1}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 2, n - n_4 - 1},$$

$$x_{i,m_2} = x_{i,m_1}, \quad y_{i,m_2} = y_{i,m_1}, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 + 2}, \quad i = \overline{n - n_4 - 1, n},$$

$$x_{i,m_2} = x_{i,0}, \quad y_{i,m_2} = y_{i,0}, \quad x_{i,m_1} = x_{i,0}, \quad y_{i,m_1} = y_{i,0}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1}; \quad (3.56)$$

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1 - 1}. \quad (3.57)$$

Формули для знаходження невідомих величин Q_0^* , Q^* , φ_H ,
 φ_C , φ_D і конформних інваріантів $\gamma_l^p = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi_p}$, $p = \overline{1, 2}$; $l = \overline{1, 4}$,

одержуємо на підставі умов „конформної подібності в малому”
 елементарних сіткових чотирикутників [56] двох областей:

$$\gamma_l^p = \frac{1}{(n_l + 1)m_p} \sum_{i=i_{l-1}}^{i_l-1} \sum_{j=0}^{m_p-1} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad Q_0^* = m_1\Delta\psi_1, \quad Q^* = m_2\Delta\psi_2, \quad (3.58)$$

де $\Delta\psi_p = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 \frac{\Delta\varphi_l}{\gamma_l^p}$, $i_l = \sum_{r=0}^l n_r + l$, $n_0 = 0$, $\varphi_H = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\varphi_1$,

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad \varphi_D = \varphi^* - (n_4 + 1)\Delta\varphi_4,$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \quad \varphi_H = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\varphi_1,$$

$$\varphi_C = 0.5(\varphi_H + \varphi_D + (n_2 + 1)\Delta\varphi_2 - (n_3 + 1)\Delta\varphi_3).$$

Алгоритм розв'язування різницевої задачі побудований на основі ідей блочної ітерації [58, 167] і представлений у вигляді наступної послідовності кроків.

1. Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z неявно або, що зручніше для реалізації на ЕОМ, параметрично; параметри $n_1 - n_4$ і m_1, m_2 розбиття сіткової області G_ω^y ; параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_i, i=1,2$ та рівень конформності δ_* відображення.

2. Задаємо початкове наближення шуканих координат граничних вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ так, щоб виконувалися умови (3.56) та наближення внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки, використовуючи (3.58), розраховуємо відповідні конформні інваріанти і невідомі витрати Q_0^*, Q_* .

3. Уточнюємо за формулами (3.55) координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використаємо лише перший ітераційний крок), при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій.

4. «Підправляємо» граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (умови ортогональності) аналогічно до [56].

5. Використовуючи значення конформних інваріантів (3.58), знаходимо нове наближення величин Q_0^*, Q_* і $\varphi_H, \varphi_C, \varphi_D$, якщо їх

зміна за останню проведену ітерацію більша ε_1 , то переходимо до п.3.

6. Знаходимо величини зміщення вузлів на границі за проведену κ -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2}. \text{ Якщо вона більша за } \varepsilon_2, \text{ то}$$

переходимо до п.3 інакше оцінюємо ступінь конформності

$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3.53):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l^p (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, l = \overline{1,4}, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \gamma_l^p (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, p = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ (при цьому намагаємося співвідношення між параметрами розбиття області вибирати так, щоб сітка G_ω^γ була близькою до квадратної) та переходимо до п.1, інакше – кінець роботи алгоритму, задача розв'язана із необхідною точністю. У випадку багатофазної фільтрації до побудованого алгоритму необхідно додати ще один крок на якому проводиться перерахунок розподілу насиченості пористого середовищами кожною із фаз, аналогічно як це зроблено в підрозділі два.

Наведемо для прикладу гідродинамічну сітку рис. 3.20 побудовану у результаті розв'язання задачі для випадку 3.18а, коли значення потенціалу керування співпадає з значенням на одній із свердловин ($\varphi_0 = \varphi_* = 0, \varphi^* = 1$) для області обмеженої такими контурами:

$$L_* : \begin{cases} x_*(t) = 0.3 \cos(t) + \tilde{x}_*, \\ y_*(t) = 0.3 \sin(t) + \tilde{y}_*, \end{cases} \quad L^* : \begin{cases} x^*(t) = 0.3 \cos(t) + \tilde{x}^*, \\ y^*(t) = 0.3 \sin(t) + \tilde{y}^*, \end{cases}$$

$$L_0 : \begin{cases} x^*(t) = 0.3 \cos(t) + \tilde{x}_0, \\ y^*(t) = 0.3 \sin(t) + \tilde{y}_0, \end{cases} \quad L : \begin{cases} x(t) = R(\cos(t) + a \cos(\alpha t)), \\ y(t) = R(\sin(t) - b \sin(\beta t)), \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

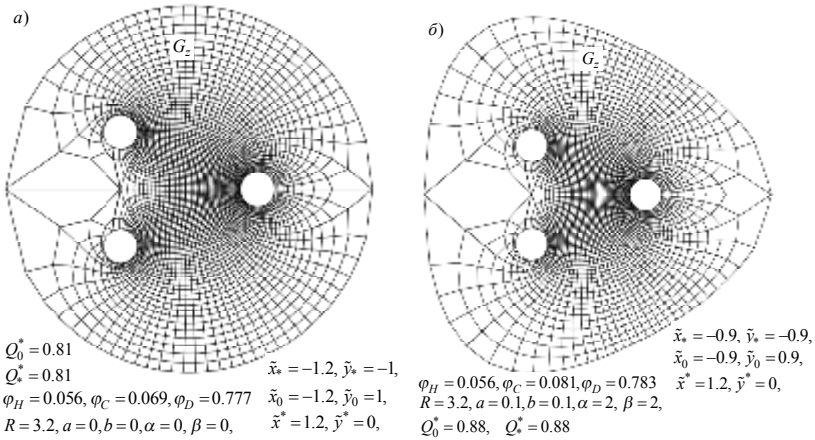


Рис. 3.20. Три свердловини в горизонтальному пласті (гідродинамічні сітки при розбитті $n_0 \times n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times m_1 \times m_2 = 1 \times 1 \times 2 \times 30 \times 7 \times 45 \times 45$)

Як і слід було очікувати у випадках розташування свердловин зображених на рис. 3.20 значення витрат $Q_0^* = Q_*^*$ рівні, що загалом пов'язано із симетрією області. Користуючись розробленими алгоритмами для побудови гідродинамічних сіток та формулами з попередніх параграфів також було прослідковано зміну положення границі розділу в залежності від зміни значення керуючого потенціалу та координат центру його носія (контуру L_0) відносно інших свердловин.

3.3.3. Узагальнення методів комплексного аналізу моделювання процесів витіснення на випадки існування в пласті великої кількості свердловин

В двох попередніх параграфах розглянуто задачі витіснення при наявності в пласті трьох свердловин. Уже у цьому випадку

виникають різні ситуаційні стани формування течії в залежності від розміщення свердловин та значення керуючого потенціалу на одній із них, що вимагає побудови алгоритмів вибору того чи іншого випадку формування течії за умов задання певних характеристичних параметрів. Проте зі збільшенням кількості свердловин в пласті та хаотичністю їх розташування значно ускладнюється не тільки алгоритм вибору, але і сама область комплексного квазіпотенціалу.

В зв'язку з цим виникає необхідність введення певних правил стосовно розміщення свердловин (зокрема, правил загальної схематизації розробки пласта), що забезпечували б можливість простої адаптації розроблених вище алгоритмі розв'язування відповідних фільтраційних задач і на ці випадки. Тому, в подальшому будемо вважати, що в пласті обмеженому непроникним зовнішнім контуром, свердловини розташовані в горизонтальних криволінійних рядах, перетоки між якими відсутні, квазіпотенціал φ на нагнітальних (●) і експлуатаційних (○) свердловинах є заданим, і відповідно рівний φ_* та φ^* (див. рис. 3.21). Після введення такого роду схематизації розробки пласта проаналізуємо як буде змінюватися область комплексного квазіпотенціалу при збільшенні кількості рядів та свердловин в цих рядах. Для цього розглянемо один із простіших варіантів, що підпадає під вказану схематизацію, а саме коли пласт розбурений рядами, що містять лише три свердловини, дві експлуатаційні та одну нагнітальну (див. рис. 3.22). Як можна побачити вже у цьому випадку область квазіпотенціалу є досить складною, проте вона має ту особливість, що існує певна подібність в структурі підобластей з яких вона складається. Так наприклад, коли її розрізати вздовж лінії S_6T_5 , ми отримаємо дві подібні підобласті. Такого роду подібність дозволяє значно спростити як побудову оберненої задачі, зокрема,

запис граничних умов на відповідних ділянках фільтраційної області так і алгоритм її розв'язування.

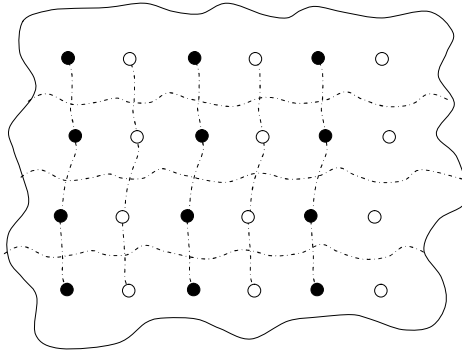


Рис. 3.21. Загальна схематизація розташування свердловин в пласті

Досить часто в таких рядах на одну експлуатаційну свердловину може припадати декілька нагнітальних, центри яких розташовані на одній прямій (див., наприклад, рис. 3.23), тому прослідкуємо як буде змінюватися область комплексного квазіпотенціалу і в цьому випадку.

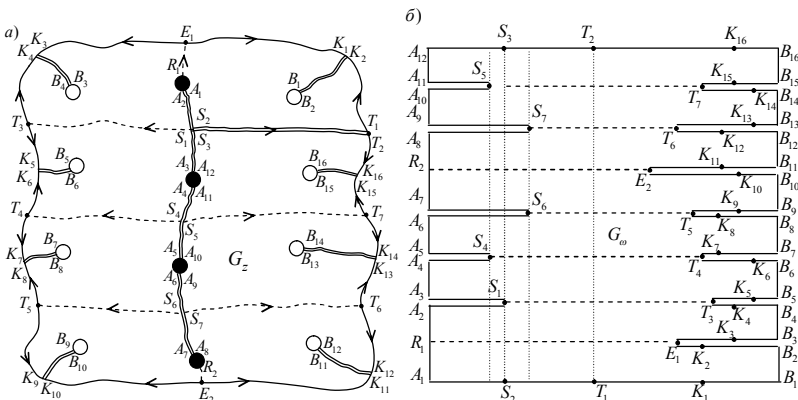


Рис. 3.22. Фізична область та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Для уникнення громіздкості у відповідних рисунках та зменшення зайнятого ними простору побудуємо їх лише у випадку, коли на одну експлуатаційну свердловину припадає дві нагнітальні

(рис. 3.22), як можна помітити загальна подібність елементів з яких складається область комплексного квазіпотенціалу не зникає. Таким чином, збільшуючи кількість криволінійних рядів у пласті відповідну задачу з легкістю розв'язуємо використовуючи розроблені у попередніх параграфах алгоритми та побудовані на їх основі програмні комплекси.

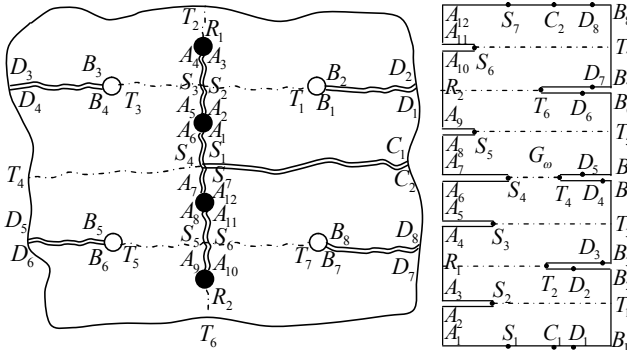


Рис. 3.23. Схематизація розміщення свердловин

Згідно з потребами практики кількість свердловин у процесі розробки продуктивних площ з часом збільшується, то це, в свою чергу, вимагає збільшення кількості свердловин у запропонованій схемі в кожному з рядів, можливо, в декілька разів.

При цьому область комплексного квазіпотенціалу \tilde{G}_ω (див., наприклад, рис. 3.24) є багатолистою, листи якої складаються із склеєних між собою внутрішностей прямокутників $A_1A_2B_1B_2$, $B_2B_3C_2C_3$, $N_1N_2C_1C_2$, $D_1D_2T_3T_4$, $D_2D_3T_1T_2$, $T_4T_5A_4A_3$, які є прообразами відповідних криволінійних підобластей області \tilde{G}_z . Такого типу схематизація пласта вимагає розробки комплексного підходу до постановки відповідних задач та побудови алгоритмів їх розв'язування.

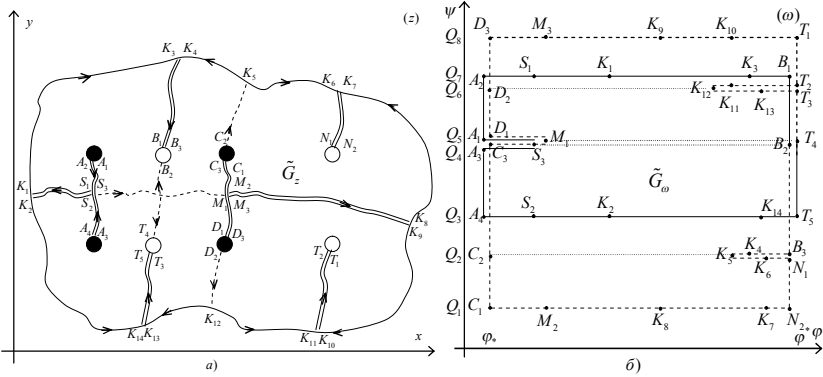


Рис. 3.24. Фізична область та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Для зручності викладок окремих фрагментів запропонованої методології розглянемо спочатку простіший випадок, коли пластові ряди свердловин є прямолінійними, розміщені симетрично і на одну експлуатаційну свердловину припадає декілька (n_*) нагнітальних (рис. 3.25а).

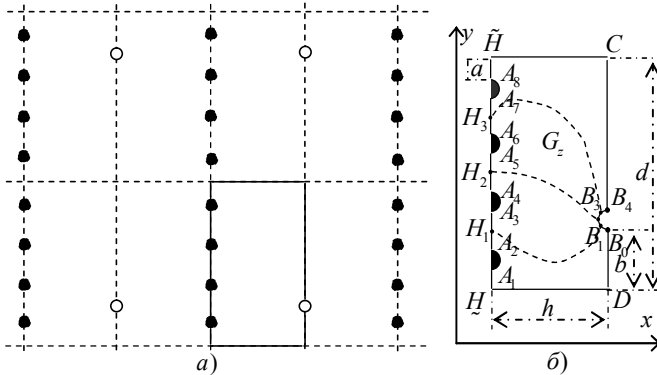


Рис. 3.25. Схема розробки пласта прямолінійними рядами нагнітальних і експлуатаційних свердловин (а) з виділеним елементом симетрії (б)

З огляду на симетрію розміщення свердловин маємо можливість виділити елемент $G_z \in \tilde{G}_z$, що містить n_* нагнітальних

свердловин та одну експлуатаційну (рис. 3.25б, де $d = 2n_*(r^0 + a)$, r^0 – радіус нагнітальних та експлуатаційних свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, $n_* = 4$).

Закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ – тиск в точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} – деяке характерне його значення), згідно з [15, 20, 36, 121] подамо у вигляді:

$$\vec{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де $s_1(x, y, t)$, $s_2(x, y, t)$ – відповідно насиченості пористого середовища нафтою і водою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини є безрозмірними); σ , k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); \vec{v}_l , μ_l – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -ї фази. Звідси з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії маємо

$$\text{div}\vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s) \cdot \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\text{де } f(s) = \frac{\mu_2 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних L_g і експлуатаційних L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (квазіпотенціали, що відповідають їм, позначимо через φ_* та φ^*), інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце

рівності $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{L} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = 0$, де $L^* = \{z = x + iy :$

$$f^*(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + h, y = r^0 \sin(\tau) + b + r^0, \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}\},$$

$$\tilde{L} = A_1 \tilde{H} \cup \tilde{H} D \cup D B_0 = \{z : f(x, y) = 0\}, \quad A_1 \tilde{H} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\},$$

$$L_g = \{z : f_g(x, y) = 0, \quad g = \overline{1, n_*}\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau), y = r^0 \sin(\tau) + (2g - 1)(a + r^0), \frac{3\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{5\pi}{2}\}, \quad \tilde{H} D = \{z : y = 0, 0 \leq x \leq h\},$$

$$\tilde{L} = A_{2n_*} \tilde{H} \cup \tilde{H} C \cup C B_{n_*} = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}, \quad D B_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq b\},$$

$$\tilde{L} = \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2} \tilde{H}_{u-1} A_{2u-1}, \quad C B_{n_*} = \{z : x = h, b + 2r^0 \leq y \leq d\},$$

$$A_{2u-2} \tilde{H}_{u-1} A_{2u-1} = \{z : x = 0, 2(u-1)(a + r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a + r^0) + a\},$$

$$A_{2n_*} \tilde{H} = \{z : x = 0, d - a \leq y \leq d\}, \quad \tilde{H} C = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}.$$

Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$ і $s = s_*$.

Аналогічно, як у [47, 48, 75, 77], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного

$$\text{квазіпотенціалу } G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n_*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n_*-1} \tilde{L}_g :$$

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L} = 0, \quad \psi|_{L^*} = Q_n, \quad (3.59)$$

$$\psi|_{A_{2u-2}H_{u-1}A_{2u-1}} = Q_{u-1},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (3.60)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_g = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_{g-1} < \psi < Q_g\}$,
 $\bar{L}_g = \{\omega : \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_g\}$, $Q_0 = 0$, $Q_g - Q_{g-1} = \oint_{L_g} -v_y dx + v_x dy -$

невідомо витрата.

Обернену до (3.59) крайову задачу квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також (як наслідок) рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.61)$$

$$\tilde{f}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_n), y(\varphi, Q_n)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$f_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r^0) + a,$$

$$\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}},$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_n, \quad g = \overline{2, n^*}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.63)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (3.61) і формули для обчислення

компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$,

задачу для насиченості (3.60) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.64)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (3.65)$$

де рівняння (3.64) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут входить як параметр. Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі – подання його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно. Спочатку за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу квазіконформного відображення: будемо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри. Потім за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.64) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої

частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукування поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроєктованого розміщення свердловин. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти (зокрема, максимізувати її відбір за умов мінімізації об'єму нагнітання води). Аналогічно як у [70], актуальною є задача оптимізації перетоків між розміщеними згідно з проектом свердловинами при керуванні значенням потенціалу на одній із них.

Проте досить часто виникає потреба розв'язання більш ширших задач, коли, крім прогнозування та визначення особливості експлуатації свердловини, також приходиться встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло б ті чи інші критерії. Так, на підставі розглянутої вище загальної постановки задачі керування процесом оптимізації видобутку нафти може базуватись на встановленні зв'язку лише двох параметрів a та b , що характеризують відповідно розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин на розроблюваних площах, за умов сталості h . Тоді при заданих a та h ставиться задача підібрати таке значення величини b , що характеризує положення експлуатаційної свердловини, щоб час прориву $t = \tilde{t}$ води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти $Q_2 = Q_2(a, b, h, \tilde{t})$ були максимальними, а в наступні моменти часу $t > \tilde{t}$ об'єм води $Q_1 = Q_1(a, b, h, t)$ в сумарній витраті $Q = Q(a, b, h, t) = Q_1 + Q_2 = \oint_L -v_y dx + v_x dy$ був мінімальним.

Важливими також є задачі оптимізації витрат на певному проміжку часу.

Неповна визначеність геометричної конфігурації області комплексного квазіпотенціалу G_ω (її залежність від величин параметра b) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів числового розв'язування задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і «алгоритму вибору», призначеного для вибору конкретного випадку. В залежності від значення параметра b на основі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням нами встановлено усі можливі випадки формування області комплексного квазіпотенціалу. Так на рис. 3.26 зображено чотири однотипних із них, що відповідають значенням $b \leq d/2 - r^0$ (у випадку, коли $b \geq d/2 - r^0$, формування області комплексного квазіпотенціалу є симетричним до побудованих). Особливий інтерес становлять випадки (називатимемо їх «ключовими»), які характеризуються рівністю квазіпотенціалів в точках $H_l(x_{H_l}, y_{H_l})$, $l = \overline{1, n_* - 1}$, «призупинки» течії.

У загальному випадку (для пласта, зображеного на рис. 3.24) постановка задач ускладнюється через необхідність задання умов для визначення характерних ліній розділу течії, точок «призупинки», величин різного роду перетоків [70], а також конструювання схем склеювання між собою прямокутників, що утворюють багатолісту область квазіпотенціалу тощо. При цьому можливі, наприклад, такі типи конкретизації постановки вихідної задачі. 1. За відомими координатами центрів свердловин і потенціалами, заданими на них, знайти гідродинамічну сітку, значення витрат на нагнітальних та експлуатаційних свердловинах (наприклад, $Q = Q_7 - Q_5 = \oint_{A_1 A_2} -v_y dx + v_x dy$), координати точок «призупинки», поля квазіпотенціалу та насиченості і положення

кривих, що розділяють ділянки впливу згаданих вище криволінійних рядів. 2. За заданими вхідними параметрами вказати умови розташування свердловин у криволінійних рядах, які забезпечували б відсутність перетоків між рядами та оптимальні варіанти відбору нафти.

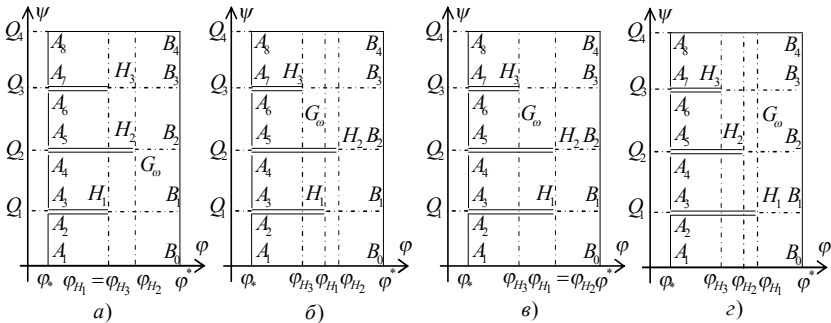


Рис. 3.26. Різні випадки формування області комплексного квазіпотенціалу в залежності від положення експлуатаційної свердловини в елементі симетрії вибраної схема розробки пласта

Алгоритм вибору того чи іншого із випадків (зокрема, області комплексного квазіпотенціалу) в залежності від значень параметра b будуємо, як у [70]. Спочатку розв'язуємо ключову задачу у випадку, коли $b = b_0 = d/2 - r^0$ (див. рис. 3.26а), при цьому знаходимо величини параметрів $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_3}$, φ_{H_2} . Далі послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 3.26б, при $b = b_i = b_0 - \Delta b i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), де Δb – достатньо мале додатне число таке, що $\varphi_{H_2} > \varphi_{H_1} > \varphi_{H_3}$, поки виконується умова $|\varphi_{H_1} - \varphi_{H_2}| > \varepsilon$. Коли ж $|\varphi_{H_1} - \varphi_{H_2}| \leq \varepsilon$, тобто $\varphi_{H_1} \approx \varphi_{H_2}$ (відповідне значення b тоді позначимо через b^0), матимемо наближення розв'язку задачі у ключовому випадку, зображеному на рис. 3.26в. При подальшому зменшенні b , покладаючи $b = b_i = b^0 - i b^0 / m_*$,

$i = \overline{0, m_*}, m_* \in N$, отримуємо серію проміжних задач, що відповідають випадку, зображеному на рис. 3.26г.

Вузли (φ_i, ψ_j) сіткової області G_ω визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*)/(n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi^* - \varphi_{H_g})/(n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j\Delta\psi_g, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1}, (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1})/m_g, g = \overline{1, n_*}, Q_0 = 0, m_0 = 0,$$

$$n = n_1^g + n_2^g + 1, m = \sum_{l=1}^{p_0} m_l + n_* - 1, m_l, n_1^g, n_2^g \in N. \text{ Рівняння (3.63)}$$

апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [25], наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-},$$

$$a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}, a_s = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2,$$

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2, k_n = 2k_{i,j}k_{i,j+1}/(k_{i,j} + k_{i,j+1}),$$

$$k_s = 2k_{i,j}k_{i,j-1}/(k_{i,j} + k_{i,j-1}), k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω [70].

Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{H_1}, \psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2, \Delta\psi_+ = \Delta\psi_1, \Delta\psi_- = \Delta\psi_1$. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$f_g(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1}, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1,$$

$$f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m},$$

$$x_{i, m_{g-1}} = 0, 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_{i, m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1,$$

$$x_{i, m_g} = 0, y_{H_{g-1}} \leq y_{i, m_g} \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, i = \overline{0, n_1},$$

$$\tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \tilde{f}(x_{i, m_p}, y_{i, m_p}) = 0, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, g = \overline{2, n_*}. \quad (3.67)$$

Тут, як і в попередніх підрозділах, комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - \\ & - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, j = \overline{\sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1}, \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, g = \overline{1, n_*}, \\ & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - \\ & - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Невідомі витрати Q_g та значення потенціалу φ_{H_g} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, Q_g = m_g\Delta\psi_g, \text{ де } \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \text{ а}$$

γ_l^g одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1\tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n_1\tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2 &= \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{\overline{k_{i+1/2,j+1/2}}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad g = \overline{1, n_*}, \\ a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\ b_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Рівняння (3.64) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [77] наступним чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \overline{k_{i,j}} \Delta \varphi_l^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \quad (3.70)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1^g + 1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1^g + 2, n}, \quad l = 2,$$

де τ – крок за часом, $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ – насиченість у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (знаходимо, як у роботі [48]). Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $j = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1^g , n_2^g , m_g , $g = \overline{1, n_*}$, області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.67)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, за формулами (3.69) знаходимо наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.66) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [47, 63, 75], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{H_g} . Серед умов завершення алгоритму побудови

гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі ϵ : стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \epsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \epsilon_2$) тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (3.70) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

При побудові різницевого аналогу задачі, яка відповідає області, зображеній на рис. 3.24, до двох індексів (i, j) координат (x, y) шуканих точок приписуємо ще один, що характеризує належність їх образів до того чи іншого листа області \tilde{G}_ω . Встановивши належність образів вузлів гідродинамічної сітки тому чи іншому листу відповідної багатолистої поверхні \tilde{G}_ω та задавши початкове наближення цих вузлів, проводимо уточнення координат (x, y) використовуючи аналоги формул (3.66)–(3.70). Зазначимо, що у випадку введення «локальної» індексації вузлів у кожному із прямокутників, що складають область \tilde{G}_ω , дискретизацію відповідних рівнянь на спільних їх межах здійснюємо з використанням «різноїменних» примежових точок, що в певній мірі дозволяє розпаралелити алгоритм розв'язування. Проведення ж «глобальної» індексації у всій області \tilde{G}_ω забезпечує спрощення дискретизації рівнянь, проте вимагає корегування індексів в околі розрізів. Використовуючи розроблені алгоритми проведемо числові розрахунки при різних значеннях параметрів які характеризують

геометрію області фільтрації за умови, що $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r^0 = 0.3$, $\sigma = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $k = 1$, $\tilde{k}_1 = (1-s)^2$, $\tilde{k}_2 = s^2$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $\tau = 0.0001$.

На рисунку 3.27а зображено загальну схему розташування свердловин в пласті коли $n_* = 1$ та $a = b$, що відповідає рядній системі розстановки свердловин при площовому заводненні. Відповідна гідродинамічна сітка в елементі симетрії при $t = 0$, $a = b = 1$, $h = 5$, $n \times m = 49 \times 20$ зображена на рис. 3.27б.

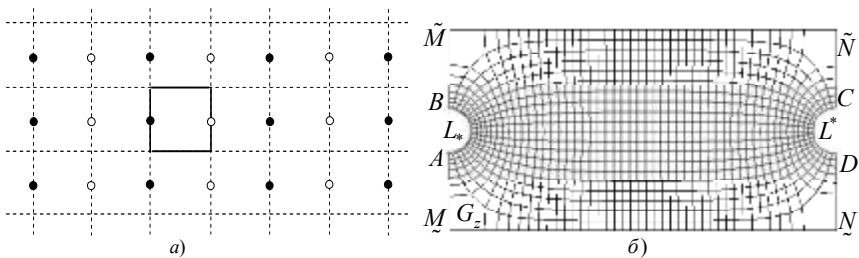


Рис. 3.27. Загальна схематизація розробки пласта рядною системою розташування свердловин з виділенням елементом симетрії (а) та побудованою в ньому гідродинамічною сіткою (б)

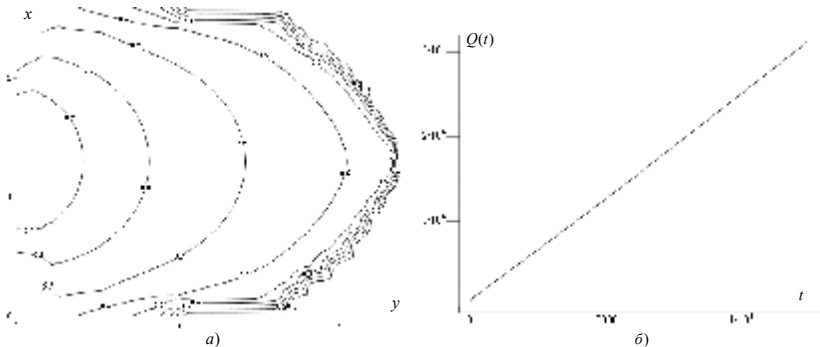


Рис. 3.28. Розподіл насиченості (а) в пласті в момент часу $t = 12,54$ та графік залежності $Q = Q(t)$ (б)

На рис 3.28а, 3.28б. зображено розподіл насиченості в момент прориву $t = 12,54$ витісняючого агенту в експлуатаційну свердловину та залежність від часу t сумарної фільтраційної витрати.

Для утворення додаткового впливу та здійснення керування процесом витіснення модернізуємо систему розстановки свердловин збільшивши при цьому величину параметра n_* на одиницю (див. рис. 3.29).

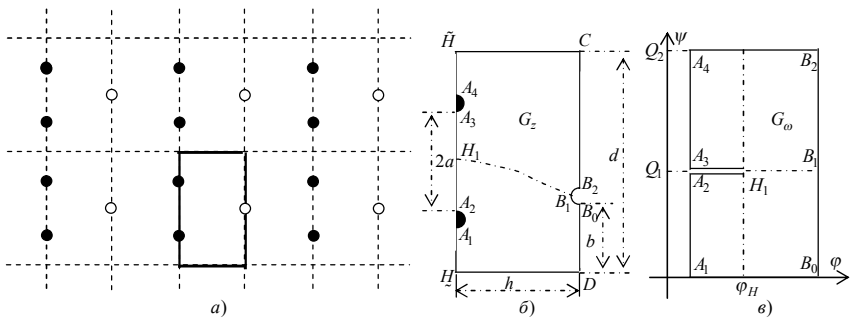


Рис. 3.29. Схематичне зображення розміщення свердловин в пласті (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в)

Уже у цьому випадку змінюючи положення експлуатаційної свердловини відносно нагнітальних вдається підібрати таке значення величини b , щоб процес витіснення задовольняв оптимальним критеріям розробки, а сумарна фільтраційна витрата була максимальною. На рис. 3.30, 3.31 зображено гідродинамічні сітки в елементі симетрії в залежності від значення параметра b при $t = 0$, $a = 1$, $h = 5$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 3 \times 45 \times 30 \times 30$ та розподіл насиченості.

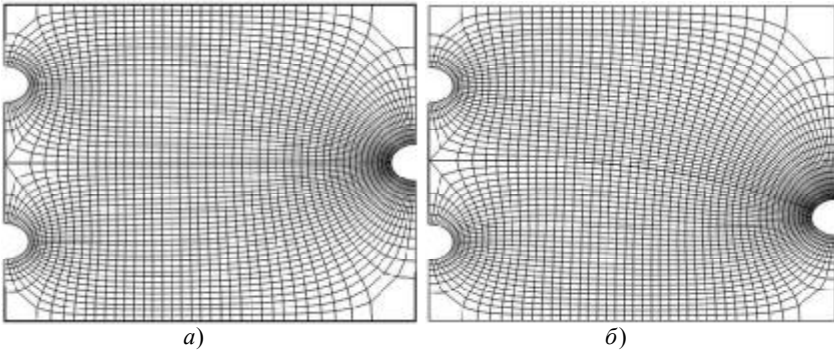


Рис. 3.30. Елемент симетрії з побудованою гідродинамічною сіткою (а) $b = 2a + r^0$, (б) $b = 2(a - r^0)$

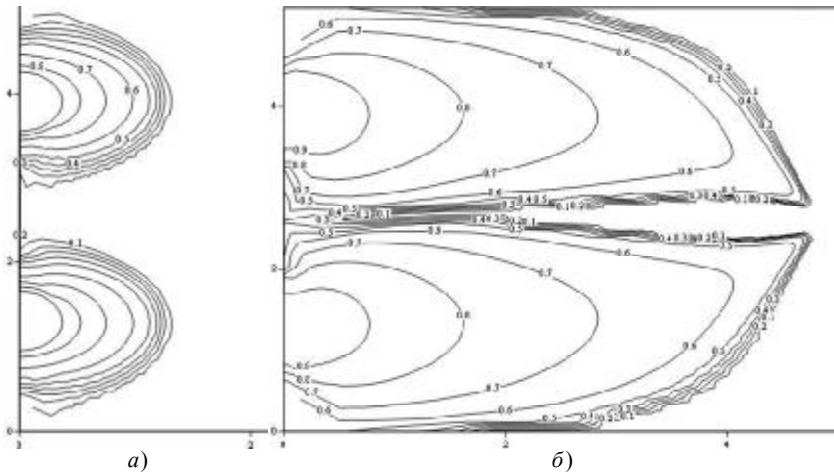


Рис. 3.31. Розподіл насиченості в деякий проміжний момент часу $t = 2.35$ та в момент часу $t = 14.61$, що відповідає прориву води в експлуатаційну свердловину

На рисунку 3.32 зображено гідродинамічну сітку та розподіл насиченості в момент часу $t = t_0$, при $n_* = 3$, $h = 3$, $n_1^1 = 5$, $n_1^2 = 5$, $m_1 = 20$, $m_2 = 30$, $m_3 = 20$, $b = 3a + 2r^0$.

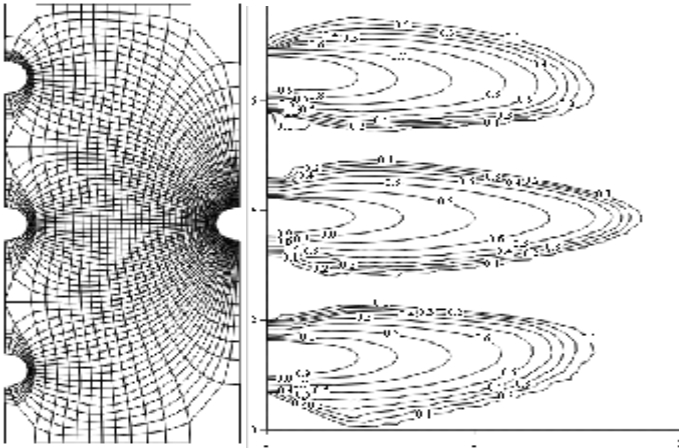


Рис. 3.32. Гідродинамічна сітка та поле насиченості в момент часу $t_0 = 3.199$

Величини невідомих параметрів Q_1 , Q_2 , Q_3 та φ_{H_1} , φ_{H_2} в початковий момент часу $t = 0$ відповідно рівні $Q_1 = 0.126$, $Q_2 = 0.233$, $Q_3 = 0.126$, $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_2} = 0.038$, а при $t = 3.199$: $Q_1 = 0.142$, $Q_2 = 0.216$, $Q_3 = 0.142$, $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_2} = 0.027$.

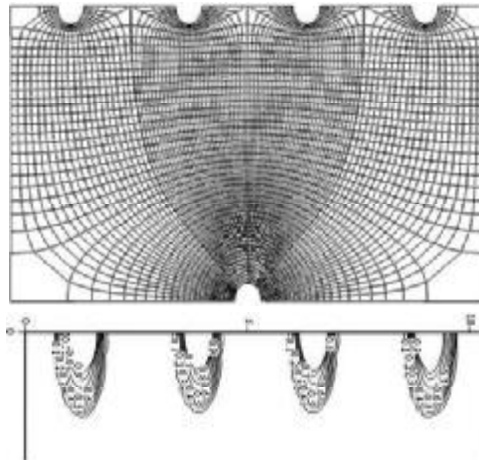


Рис. 3.33. Гідродинамічна сітка та поле насиченості в момент часу $t = 1.01$

На рисунках 3.33 зображено гідродинамічну сітку та розподіл насиченості в момент часу $t = 1.01$ при $n_* = 4$, $a = 1$, $h = 5$, $n_1 = 3$, $n_2 = 45$, $m_1 = 20$, $m_2 = 30$, $m_3 = 30$, $m_4 = 20$.

Зауважимо, що збільшуючи кількість нагнітальних свердловин які припадають на одну експлуатаційну та не змінюючи розмірів фільтраційної області, на основах розробленого алгоритму, також вдається підібрати їх оптимальну кількість, перевищення якої буде згубно впливати на заводненість елемента симетрії та пласта в цілому і нестиме лише фінансові збитки.

3.4. Обґрунтування та узагальнення розроблених алгоритмів математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах

У підрозділі розроблено рекомендації щодо можливості розпаралелювання побудованих алгоритмів (з наступним їх використанням при обчисленнях на сучасних комп'ютерних системах) та перенесення методики стосовно моделювання просторових процесів витіснення, зокрема, побудовано спеціальну процедуру розрахунку координат граничних вузлів гідродинамічної сітки (зокрема, на контурах свердловин), коли границя має складну геометричну форму. Розглядаються питання обґрунтування методу та проведено перевірку розроблених алгоритмів з використанням відомих точних розв'язків для тестових прикладів.

3.4.1. Питання коректності та оптимізації розроблених алгоритмів

Необхідним етапом будь-якої сучасної технології проектування нафтогазових родовищ є комп'ютерний експеримент,

з використанням дискретних моделей процесів і об'єктів моделювання, що передбачає проведення багатоваріантних розрахунків (для вибору оптимальних сценаріїв розробки продуктивних площ), які базуються на підборі керуючих параметрів, що мінімізують величини перетоків між серіями свердловин, та наступному розв'язанні неоднорідних за структурою та великих за об'ємом систем нелінійних та квазілінійних рівнянь, обсяг яких вимагає як найбільшої оптимізації процедури їх розв'язання та програм реалізації. Варто також відмітити, що до вибору дискретної моделі та методів розв'язання відповідних крайових задач ставляться особливі вимоги, підпорядкування яким, зокрема, дозволяє обґрунтувати адекватність її використання для опису того чи іншого процесу і підтвердити коректність розроблених алгоритмів їх розв'язання.

Виходячи з цього проведемо перевірку коректності розробленого алгоритму розв'язання відповідних задач витіснення однієї рідини іншою, на прикладі фільтрації в елементі симетрії шахової системи розміщення свердловин (див., рис. 3.34) [140].

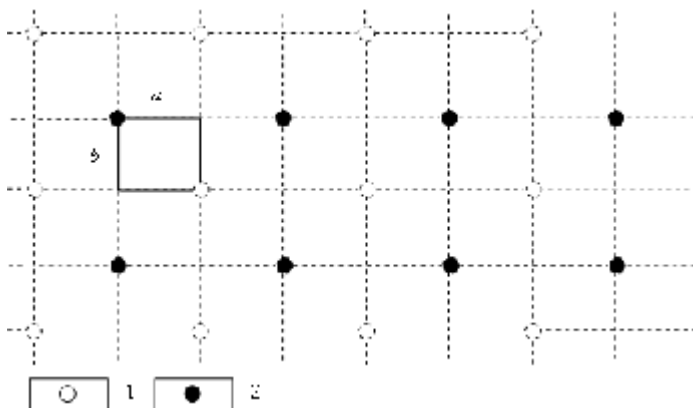


Рис. 3.34. Лінійна система з шаховим розміщенням свердловин (1-експлуатаційна, 2 – нагнітальна свердловини, a , b – розміри елемента симетрії)

Як відомо (див., наприклад [31]), для такого розміщення свердловин існують точні формули розрахунку характерних фільтраційних параметрів, зокрема, комплексного потенціалу відповідного фільтраційного поля та значення витрати.

Для подальших викладок наведемо деякі із вище згаданих формул та порівняємо отримані на основі них результати з результатами, розрахованими при використанні розробленого алгоритму. Тим самим, в деякій мірі, підтвердимо придатність його для вирішення практично важливої задачі математичного моделювання процесу витіснення.

При зображеному на рис. 3.34 шаховому розміщенні свердловин комплексний потенціал відповідного фільтраційного поля для виділеного елемента симетрії має вигляд [31]

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)} \right) + d, \quad (3.71)$$

де q – значення фільтраційної витрати, $(z = x + iy)$, $2a$ – відстань між свердловинами, b – відстань між відповідними рядами, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$ – тета-функції, що визначаються із наступних співвідношень

$$\theta_1(z) = 2h_1^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} h_1^{n(n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2a} z, \quad h_1 = e^{2\pi i},$$

$$\theta_2(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} h_2^{n^2} \cos \frac{n\pi}{a} z, \quad h_2 = e^{\pi i}.$$

Величина d є сталою і знаходиться по відомому значенню тиску в одній із точок.

Використовуючи формулу (3.71) та задані значення забійних тисків p_* та p^* , відповідно на нагнітальній і експлуатаційній свердловинах, знайдено [31] формулу для визначення фільтраційної витрати q , яка має наступний вигляд

$$q = \pi k \frac{p_* - p^*}{\ln\left(aH_2^2 / \pi r H_0^2 h^{1/4}\right)}, \quad (3.72)$$

де k – коефіцієнт фільтрації, $H_0 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k})$, $H_2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h^{2k-1})$, $h = e^{-\pi b/a}$. У випадку коли сітка розстановки свердловин є квадратною, тобто коли $b = a$, то параметр тета-функції h буде рівний $h = e^{-\pi} = 0.0432$, а витрата відповідно

$$q = \pi k \frac{p_* - p^*}{\ln(0.7628a/r)}, \quad (3.72')$$

де r – радіус свердловин.

Формули (3.71)–(3.72) використовуватимемо для контролю точності розробленого алгоритму та для вибору співвідношення між параметрами розбиття (для побудови гідродинамічної сітки). Поле швидкості фільтрації знаходимо диференціюванням комплексного потенціалу (3.71) та з використанням розкладу логарифмічних похідних тета-функцій наступним чином:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{q}{4a} \left(\frac{\sin x'}{chy' - \cos x'} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h)^k}{1 + (-h)^k} \sin kx' chky' \right), \\ v_y &= \frac{q}{4a} \left(\frac{shy'}{chy' - \cos x'} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h)^k}{1 + (-h)^k} \cos kx' shky' \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

де $x' = \pi x/a$, $y' = \pi y/a$ – безрозмірні координати. Формули (3.73) використовуватимемо лише для половини елемента симетрії $y' < \pi/2$, а для другої половини – швидкості знаходимо шляхом використання властивості симетрії.

Для відшукування положення границі розділу різнокольорових рідин необхідно розв'язати наступну систему диференціальних рівнянь [31]

$$m dx/dt = v_x, \quad m dy/dt = v_y$$

за відповідних початкових умов.

Розв'яжемо розглянуту вище задачу на побудову гідродинамічної сітки та відшукування положення невідомої границі розділу, зокрема, різного роду характерних фільтраційних параметрів, з використанням розробленого нами алгоритму, і порівняємо отримані результати. Для математичної постановки задачі фільтрації рідин в пористому середовищі запишемо рівняння нерозривності та рівняння руху:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = k \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

де k – коефіцієнт фільтрації, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал швидкості фільтрації $\vec{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$.

З урахуванням початкових та граничних умов, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = k \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L^0} = 0, \quad (3.74)$$

де $L_* = \{z : \quad x = r \cos(\tau), \quad y = r \sin(\tau),$
 $3\pi/4 \leq \tau \leq 2\pi\} = \{z : f_*(x, y) = 0\}, \quad L^* = \{z : \quad x = r \cos(\tau) + a,$
 $y = r \sin(\tau) + b, \quad \pi/2 \leq \tau \leq \pi\} = \{z : f^*(x, y) = 0\},$
 $L_0 = AN \cup ND = \{z : f_0(x, y) = 0\}, \quad L^0 = BM \cup MC = \{z : f^0(x, y) = 0\},$
 $AN = \{z : x = 0, -r \leq y \leq -b\}, \quad ND = \{z : y = -b, 0 \leq x \leq a - r\},$
 $BM = \{z : y = 0, r \leq x \leq a\}, \quad MC = \{z : x = a, 0 \leq y \leq -b + r\}.$

Границя Γ_t , положення якої в початковий момент часу $t = t_0$ є відомим $s(x, y, t_0) = \tilde{s}(x, y) \equiv 0$ (зокрема, можна прийняти $\Gamma_{t=t_0} = L_*$), визначається рівнянням (3.1) з відповідними умовами:

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} s = 0, \quad s|_{L_*} = 1, \quad s(x, y, t)|_{t=t_0} = 0.$$

Як було вище зазначено у випадку різнокольоровості рідин, задача на побудову гідродинамічної сітки (зокрема, знаходження поля швидкості \vec{v}) є стаціонарною і може бути розв'язана

незалежно. Тому в подальшому розв'язуватимемо тільки фільтраційну задачу.

Аналогічно до [75], ввівши функцію течії ψ комплексно спряжену до φ , задачу на побудову гідродинамічної сітки і відшукання фільтраційної витрати зводимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області $G_z = L_* \cup L_0 \cup L^* \cup L^0$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, (x, y) \in G_z^0, \quad (3.75)$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi_*, \varphi|_{L^0} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q,$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ – невідома

витрата.

Обернена до (3.75) крайова задача квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини характеристичної функції течії запишеться у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.76)$$

$$x_*(\tau) = r \cos(\tau), y_*(\tau) = r \sin(\tau), 3\pi/4 \leq \tau \leq 2\pi,$$

$$x^*(\tau) = r \cos(\tau) + a, y^*(\tau) = r \sin(\tau) + b, \pi/2 \leq \tau \leq \pi,$$

$$x(\varphi, 0) = 0, -r \leq y(\varphi, 0) \leq -b, y(\varphi, 0) = -b, 0 \leq x(\varphi, 0) \leq a - r,$$

$$y(\varphi, Q) = 0, r \leq x(\varphi, Q) \leq a, x(\varphi, Q) = a, 0 \leq y(\varphi, Q) \leq -b + r,$$

$$\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.78)$$

Для запису різницевого аналогу задачі (3.75 – 3.78) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином: $\varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}$, $i = \overline{0, n}$, $\psi_j = j\Delta\psi$, $\Delta\psi = Q/m$, $j = \overline{0, m}$, де $n, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу; $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по змінних φ та ψ .

Рівняння (3.78) у внутрішності сіткової області G_ω апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевих аналогів законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \gamma^2 (k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \\ - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma^2 (k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \\ + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (3.79)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $k_{i,j\pm 1/2} = k \left(\frac{x_{i,j\pm 1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1} + y_{i,j}}{2} \right)$,

$k_{i\pm 1/2,j} = k \left(\frac{x_{i\pm 1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j} + y_{i,j}}{2} \right)$; $\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}$ – квазіконформний

інваріант.

Крайові умови з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів (у випадку $k=1$, умови ортогональності) апроксимуємо наступним чином:

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ f_0(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f^0(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1}) \times \\ \times (x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \\ i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Варто відмітити, що у випадку кругових контурів свердловин (L_k – контур вибраної свердловини), можливим є побудова спеціальних аналітичних формул для визначення положення вузлів $M_k(x_{k,\bar{m}}, y_{k,\bar{m}})$ гідродинамічної сітки на них (див., рис. 3.35):

$$\begin{cases} x_{k,\bar{m}}(\tilde{\tau}_k) = r_k \cos(\tilde{\tau}_k) + \tilde{x}_k, \\ y_{k,\bar{m}}(\tilde{\tau}_k) = r_k \sin(\tilde{\tau}_k) + \tilde{y}_k, \tilde{\tau}_k \in [0, 2\pi), \\ \tilde{\tau}_k = \begin{cases} \arctg \frac{y_{k,\bar{m}} - \tilde{y}_k}{x_{k,\bar{m}} - \tilde{x}_k}, \text{ npu } y_{k,\bar{m}} \geq \tilde{y}_k, x_{k,\bar{m}} > \tilde{x}_k, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ npu } y_{k,\bar{m}} > \tilde{y}_k, x_{k,\bar{m}} = \tilde{x}_k, \\ \pi + \arctg \frac{y_{k,\bar{m}} - \tilde{y}_k}{x_{k,\bar{m}} - \tilde{x}_k}, \text{ npu } x_{k,\bar{m}} < \tilde{x}_k, \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ npu } y_{k,\bar{m}} < \tilde{y}_k, x_{k,\bar{m}} = \tilde{x}_k, \\ 2\pi + \arctg \frac{y_{k,\bar{m}} - \tilde{y}_k}{x_{k,\bar{m}} - \tilde{x}_k}, \text{ npu } y_{k,\bar{m}} < \tilde{y}_k, x_{k,\bar{m}} > \tilde{x}_k, \end{cases} \end{cases} \quad (3.82)$$

де r_k , $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ – відповідно радіус та координати центра вибраної свердловини, $M_k(x_{k,\bar{m}}, y_{k,\bar{m}})$, $\underline{M}_k(x_{k,\bar{m}}, y_{k,\bar{m}})$ – точки перетину променя, що виходить з центру свердловини, з її контуром та наступною еквіпотенціальною лінією.

Невідому повну витрату Q шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулою: $Q = m\Delta\varphi/\gamma$. Величину квазіконформного інваріанту γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1, m-1} \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (3.83)$$

де $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$,

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2},$$

$$k_{i+1/2, j+1/2} = k \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4} \right).$$

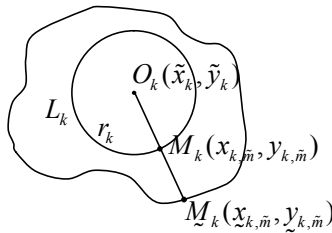


Рис. 3.35. Контур свердловини L_k та наступна еквіпотенціальна лінія

Як можна помітити (див., наприклад, рис. 3.34) у випадку виділення елемента симетрії складові його контурів приходиться задавати різними аналітичними співвідношеннями (формулами), як і контурів пласта, що вимагає побудови критеріїв переходу граничних вузлів гідродинамічної сітки з однієї частини границі на

іншу, з наступною їх реалізацією у вигляді програмного коду. Для врахування складної геометрії границі, що складається з серії кривих можливими є, наприклад, такі підходи:

Провести апроксимацію границі, що складається з серії кривих, однією кривою, рівняння якої записуватимемо в неявній формі $f(x, y) = 0$, що дозволить, в свою чергу, використовувати без зміни розроблені в роботі алгоритми, проте знизить точність отримуваних результати; Другий підхід полягає у введенні умови переходу вузла з однієї гладкої кривої (складової границі) на іншу з наступною корекцією розроблених алгоритмів, що є значно ефективнішим і легко реалізується програмно.

Для демонстрації ідеї побудови розрахункової процедури відшукування координат граничних вузлів гідродинамічної сітки, вважатимемо, що ділянка границя складається лише з двох частин \underline{EE} та $\overline{E\bar{E}}$ рівняння яких відповідно: $f_1(x, y) = 0$ та $f_2(x, y) = 0$ (див., рис. 3.35) і є лінією течії.

Запишемо умову ортогональності на $\overline{E\bar{E}}$ у вигляді:

$$\frac{\partial f_l(x_{i,0}, y_{i,0})}{\partial y}(x_{i,1} - x_{i,0}) - \frac{\partial f_l(x_{i,0}, y_{i,0})}{\partial x}(y_{i,1} - y_{i,0}) = 0, \quad (3.84)$$

де індекс l характеризує складові частини границі і приймає значення 1 чи 2 в залежності від того, якій із частин \underline{EE} чи $\overline{E\bar{E}}$ належить точка $(x_{i,0}, y_{i,0})$. На рис. 3.36 зображено можливі положення шуканої точки $D(x_{i,0}, y_{i,0})$ (відповідно D_1 та D_2) і схематичне розташування ліній течії та необхідних для побудови умов переходу точок $A(x_{i-1,1}, y_{i-1,1})$, $B(x_{i,1}, y_{i,1})$, $C(x_{i+1,1}, y_{i+1,1})$.

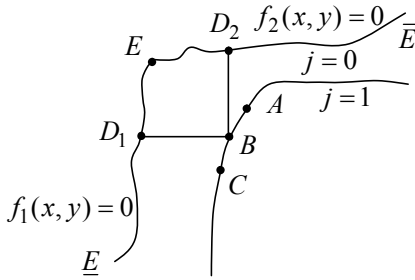


Рис. 3.36. Схематичне розташування шуканої точок на лінії течії

З умов ортогональності для випадку $l=1$ та $l=2$ знаходимо координати можливого положення точки D . Розраховуємо величини косинусів кутів $\angle ABD_1$ та $\angle CBD_2$ і порівнюючи їх між собою, вибираємо оптимальне положення точки, наприклад, згідно рис. 3.36 так: $D = \begin{cases} D_1, \cos \angle ABD_1 \leq \cos \angle CBD_2, \\ D_2, \cos \angle ABD_1 > \cos \angle CBD_2. \end{cases}$

Використовуючи, розглянуті вище, спеціальної розрахункової процедури відшукування координат граничних вузлів гідродинамічної сітки (зокрема, на контурах свердловин), коли границя має складну геометричну форму та задається серією гладких кривих, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3.75)–(3.78) різницевою задачею в загальному випадку, як і в попередніх розділах, будуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_0, L^0, L_*, L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m), та параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ і рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові

наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (3.80), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки i , використовуючи (3.83), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідомої витрати $Q^{(0)} = m\Delta\varphi/\gamma^{(0)}$. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (3.79) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних вузлів), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (3.73). Використовуючи значення квазіконформного інваріанту (3.83), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ – зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3.75):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше – задача розв’язана із необхідною точністю.

Згідно записаних вище аналітичних формул та розробленого в роботі алгоритму, побудовано гідродинамічну сітку з границею розділу різнокольорових рідин в різні моменти часу та знайдено значення фільтраційної витрати при $a = b = \pi$, $r = 0.1$, $n \times m = 280 \times 69$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k = 3$, $\sigma = 0.25$ (див., рис. 3.37а–3.37б).

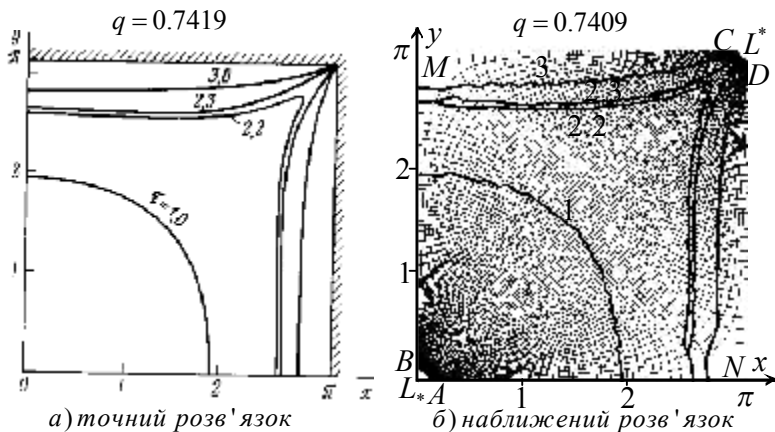


Рис. 3.37. Положення границі розділу різнокольорових рідин в елементі симетрії шахової системи розстановки свердловин у різні моменти часу

Як бачимо, отримані результати співпадають, що ще раз підтверджує придатність розробленого алгоритму до розв’язування розглянутого класу задач математичного моделювання процесів витіснення.

Відмітимо, що при побудові загального алгоритму розв’язування задачі комплексного математичного моделювання

нелінійних процесів витіснення, на етапі уточнення координат внутрішніх вузлів, для досягнення більшої швидкості у розрахунках, доцільно використовувати розпаралелювання обчислень [137]. В зв'язку з цим проведено розпаралелювання, що базується на використанні методу декомпозиції області комплексного квазіпотенціалу, яка складається із спеціальним чином склеєних між собою внутрішностей прямокутників (див., наприклад, рис. 3.38). Основна особливість такого розпаралелювання стосується обміну даними вздовж спільних ділянок E_1T_1 , B_2T_2 границі блоків PE0, PE1 та PE2 відносно яких відбувається їх стиковка (див., рис. 3.38а).

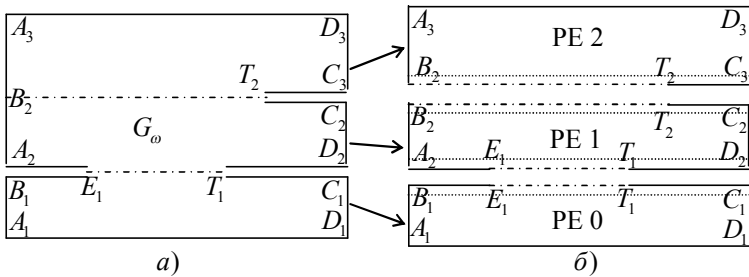


Рис. 3.38. Область комплексного квазіпотенціалу (а) та схема її декомпозиції (б)

Для такого обміну використовуватимемо допоміжні віртуальні блоки, що формуються із прилеглих до межі шарів кожного із з'єднаних фізичних блоків з копіюванням всіх даних необхідних для розрахунків. При цьому в кожному із фізичних блоків, з використанням наступної формули

$$\gamma_l^2 (k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \gamma_l^2 (k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1})) +$$

$$+ \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, k_{i,j\pm 1/2} = \frac{k_{i,j\pm 1} + k_{i,j}}{2}, k_{i\pm 1/2,j} = \frac{k_{i\pm 1,j} + k_{i,j}}{2}$$

проводиться уточнення внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки, аналогічного типу розрахунки проводяться і у віртуальних блоках.

У випадку, коли область комплексного квазіпотенціалу є багатолистою [69] (див., наприклад, рис. 3.24) до двох індексів (i, j) координат (x, y) шуканих точок, при побудові різницевого аналогу задачі, приписуємо ще один, що характеризує належність їх образів до того чи іншого листа і збільшує загальну кількість блоків.

Використання ж (3.82) при побудові алгоритмів дозволяє зменшити кількість невідомих у системах рівнянь ортогональності (замість знаходження двох координат (x, y) кожної з граничних точок необхідно знайти лише один параметр $\tilde{\tau}_k$) та уникнути необхідності їх ітераційного відшукування, що значно зменшує час виконання розробленого алгоритму.

3.4.2. Шляхи розповсюдження методу комплексного аналізу на простір. Моделювання процесів витіснення в мало-просторово-викривлених пластах

В попередніх розділах розглянуто задачі математичного моделювання нелінійних процесів витіснення, коли фільтрація є плоскопаралельною (пласти досить тонкі, постійної товщини). Проте в природних умовах, досить часто приходиться мати справу з просторовими пластами змінної потужності, в зв'язку з чим, виникає необхідність побудови шляхів розповсюдження розробленої методики моделювання процесів витіснення і на ці випадки.

Як відомо, вперше стаціонарна задача про розподіл потенціалу швидкості фільтрації в просторовому, циліндричному

пласті, розбуреному недосконалою по ступеню розкриття свердловиною, була розв'язана з використанням ідеї методів відображення, відносно непроникної кривлі, та підшви вздовж лінії поглинання елементарного стоку з заданою інтенсивністю (вісь вертикальної свердловини) М. Маскетом [156, 157]. Ряд складних задач розв'язано також з використанням електромоделювання. В результаті чого отримано сітку кривих, що дозволяла визначати в кожній точці величини фільтраційного опору пласта.

Більш складними є нестационарні задачі, загальне дослідження яких вперше було проведене А. Л. Хейном, проте в зв'язку з неможливістю їх використання, при обробці кривих наростання (падіння) забійного тиску, широкого практичного застосування вони не отримали.

В зв'язку з цим в основу гідродинамічних методів дослідження недосконалих свердловин і інтерпретації результатів покладено аналітичні розв'язки рівнянь п'єзопровідності для гідродинамічно досконалих свердловин, в які штучним шляхом вводяться додаткові фільтраційні опори, обумовлені недосконалістю свердловин по ступеню і характеру розкриття пласта. Проте, крім складності, пов'язаної з проектуванням впливу ступеня розкриття свердловиною пласта, виникає необхідність врахування перетоків між пропластками і величин відбору з кожного із них. Якщо ж пропластки не мають перетоків, то розробку кожного із них можна моделювати окремо. У випадку ж сумісної розробки, коли пропластки розбурено спільною свердловиною і немає можливості розділити продукцію та закачку свердловини по пропласткам, процес моделювання повинен відбуватися в комплексі, враховуючи кожен із перелічених факторів у відповідних тривимірних фільтраційних моделях.

Досить часто вдається ввести апроксимацію тривимірної фільтрації в пласті (деякій області $G_{(x,y,z)} = A_*B_*C_*D_*A^*B^*C^*D^*$), фільтрацією по стаціонарним поверхням струму [166, 167]. Для цього відносно пласта обмеженої потужності введемо криволінійну (ортогональну) систему координат ξ, η, ζ (див., рис 3.39), підшву $A_*B_*C_*D_*$ і кривлю $A^*B^*C^*D^*$, якого представимо у вигляді відповідних координатних поверхонь $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\zeta = \zeta_2 = const$. У роботі [50], з використанням такого усереднення та ідей методів конформного та квазіконформного відображення, було сформовано стаціонарні задачі моделювання квазіідеальної фільтраційної течії у неоднорідних просторово викривлених пластах обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями-стінками та чотирма поверхнями течії.

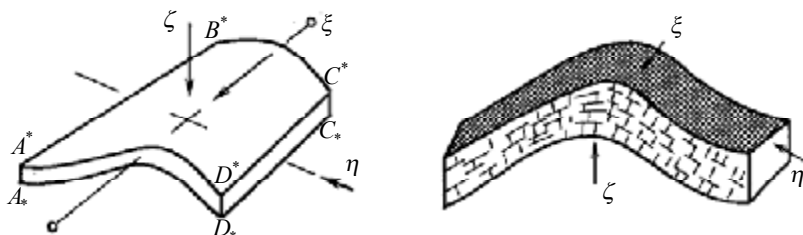


Рис. 3.39. Викривлений пласт обмеженої потужності в ортогональній системі координат ξ, η, ζ

Для поширення розробленої методики моделювання нелінійних процесів витіснення на випадки просторово викривлених пластів використовуватимемо узагальнений закон Дарсі та рівняння нерозривності течії, записані для кожної з рідин в ортогональній системі координат (ξ, η, ζ) , у вигляді:

$$\vec{v}_1 = v_{1\xi} + iv_{1\eta} = \left(\frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1 H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1 H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right),$$

$$\bar{v}_2 = v_{2\xi} + iv_{2\eta} = \left(\frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2 H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2 H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right),$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_{l\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_{l\eta})}{\partial \eta} + \sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial s_l}{\partial t} \right) d\zeta = 0, \quad l=1,2,$$

де $s_1(M, t)$, $s_2(M, t)$ – насиченості пористого середовища нафтою та водою в деякій біжучій точці M пласта у момент часу t ($s_1 + s_2 = 1$); σ , k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); \bar{v}_l , μ_l – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l - тої фази; $H_1 = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}$, $H_2 = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2}$, $H_3 = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2}$ – параметри Ламе; $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ – зв'язок декартових координат точки M з відповідними їй криволінійними координатами (ξ, η, ζ) . Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\bar{v} = v_\xi + iv_\eta = \bar{k}(s) \left(\frac{\varphi_\xi}{H_1}, \frac{\varphi_\eta}{H_2} \right), \quad (3.86)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_\eta)}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0, \quad (3.87)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 f(s) v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 f(s) v_\eta)}{\partial \eta} + \sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial s}{\partial t} \right) d\zeta = 0, \quad (3.88)$$

$$\text{де } \bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}, \quad f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}.$$

Підставляючи (3.86) в (3.87), (3.88) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання отримаємо систему рівняння, що описує процес витіснення у викривленому пласті змінної товщини

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3.89)$$

$$K_3 \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_5 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3.90)$$

де
$$K_1(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\bar{k}(s) H_2 H_3}{H_1} d\zeta, \quad K_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\bar{k}(s) H_1 H_3}{H_2} d\zeta,$$

$$K_3(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma H_1 H_2 H_3 d\zeta, \quad K_4(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\bar{k}(s) f(s) H_2 H_3}{H_1} d\zeta,$$

$$K_5(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\bar{k}(s) f(s) H_1 H_3}{H_2} d\zeta - \text{характеристичні коефіцієнти, що}$$

відповідають за збереження інформації про геометрію та фільтраційні властивості пласта. Для запису граничних умов представимо рівняння підшови, кривлі пласта і решти, обмежуючих фільтраційну область поверхонь в координатах (ξ, η, ζ) наступним чином:

$$A_* A^* B^* B_* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f_*(\xi, \eta) = 0\}, \quad A^* B^* C^* D^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : \zeta = \zeta^*\},$$

$$C_* C^* D^* D_* = \{(\xi, \eta, \zeta) : f^*(\xi, \eta) = 0\}, \quad A_* B_* C_* D_* = \{(\xi, \eta, \zeta) : \zeta = \zeta_*\},$$

$$A_* D_* A^* D^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : g_*(\xi, \eta) = 0\}, \quad B_* C_* C^* B^* = \{(\xi, \eta, \zeta) : g^*(\xi, \eta) = 0\}.$$

Тоді відповідні граничні та початкові умови матимуть вигляд:

$$\varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi_*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{g_*(\xi, \eta)=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{g^*(\xi, \eta)=0} = 0,$$

$$s|_{f_*(\xi, \eta)=0} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(\xi, \eta, \zeta).$$

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad K_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (3.91)$$

при виконанні яких рівняння (4.19) перетворюється на тотожну рівність. Система (3.91) визначає деяку функцію $\omega = \omega(z) = \varphi + i\psi$, яка при виконанні умов:

$$\varphi \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{g_*(\xi, \eta)=0} = 0, \quad \psi \Big|_{g^*(\xi, \eta)=0} = Q \quad (3.92)$$

здійснює квазіконформне відображення фізичної області фільтрації на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$, де Q – невідома фільтраційна витрата.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (3.91)-(3.92) на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z отримаємо у вигляді:

$$K_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad K_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.93)$$

$$f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (3.94)$$

$$g_*(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0, \quad g^*(\xi(\varphi, Q), \eta(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

зокрема, як наслідок (3.93), маємо:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(K_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{K_1} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(K_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{K_2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.95)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad J = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi},$$

умови (4.23) та формули для обчислення компонент сумарної

$$\text{швидкості } v_{\xi} = \frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi) H_1} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}, \quad v_{\eta} = -\frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi) H_2} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad \text{задачу для}$$

насиченості запишемо так:

$$\begin{aligned} K_3 J \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{K_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) - K_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{K_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) \right) + \\ + \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{K_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + K_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{K_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$s(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi), \zeta(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$s(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi)). \quad (3.97)$$

При цьому, якщо $\frac{\partial f(s)}{\partial \zeta} = 0$, то рівняння (3.96) має вигляд [47,

77]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \quad (3.98)$$

і є просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу, з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу, суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії; знаходимо

квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.96) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини на границі $B_*C_*B^*$.

Аналогічно як і в попередніх розділах та роботах [46–48, 63, 69–70], алгоритм знаходження розв'язку оберненої нелінійної диференціальної задачі, що описує процес витіснення, будується шляхом поетапної параметризації величини квазіконформного інваріанту, граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Amsden A.A.* A simple scheme for generating general curvilinear grids / A.A. Amsden, C.W.Hirt // *J.Comp.Phys.*- 1973.- 11, № 3- P.348-369.
2. *Bangerth W.* An automatic reservoir framework for the stochastic optimization of well placement / W. Bangerth, H. Klie, V. Matossian // Center for Subsurface Modeling, The University of Texas at Austin, – 2006. – P. 255–269.
3. *Barfield W.D.* Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes / W.D.Barfield // *J.Comp.Phys.*– 1970.– 5, № 1.– P.23–33.
4. *Bittencourt A. C.* Reservoir development and design optimization / A. C. Bittencourt, R.N. Home // *SPE 38895.* – 1997. – P. 14.
5. *Bomba A.Y.* On One Method for Constructing a Dynamical Mesh of Nonlinear Quasiperfect Processes in Deformable Anisotropic Media / A.Y.Bomba, S.S.Kashtan // *Journal of Applied Computer Science.*- 2005.- Vol. 12, №2.- P.7-21.
6. *Bozhenko B.* Advective diffusion of admixture in a medium with traps / B.Bozhenko, O.Chernukha // *Zeczyty Naukowe. Politechnika Opolska. Matymatyka.*- 2001.- Z.17, №275.- P.5-15.
7. *Buckley S.* Mechanism of fluid displacement in sands / S. Buckley, M.C. Leverett // *Trans. AIME,* – V. 146. – 1942. – P. 107 – 115.
8. *Carlson M.* Practical Reservoir Simulation / M. Carlson – PennWell. – 2003. – 540 p.
9. *Currie I. G.* Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I. G Currie. –Marcel Dekker, Inc., New. York. – 2003. - 525 p.
10. *Darcy H.* Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647p.
11. *Das D.B.* Upscaling Multiphase Flow in Porous Media From Pore

- to Core and Beyond / D.B. Das, S.M. Hassanizadeh. – Springer. – 2005. – 257 p.
12. *Dilts G.A.* Moving-least-squares-particle hydrodynamics ii: conservation and boundaries / G. A. Dilts // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – 48(10). – P. 1503 – 1524.
 13. *Dupuit J.* Etudes theoretiques et pratiques sur le mouvement des eaux / J.Dupuit.- Paris, 1863.- 422p.
 14. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics / C.A.J.Fletcher.- Berlin: Springer-Verlag, 1988.- 628p. [*Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах.- М.: Мир, 1991.]
 15. *Haber S.* Boundary Conditions for Darcy's Flow Through Porous Media / S.Haber, R.Mauri // J. Multiphase Flow. – 1983. – 9, №5. – P.561–574.
 16. *Leverett M.C.* Flow of oil-water mixtures trough unconsolidated sands. // Trans. AIME. – 1939.-V. 132.-P. 149.
 17. *Nield D.A.* Convection in porous media / D.A. Nield, A. Bejan. – Springer, – 2006. – 653 p.
 18. *Potter D.E.* The construction of discrete orthogonal coordinates / D.E.Potter, G.H.Tuttle // J.Comp.Phys.- 1973.- 13, № 4- P.483-501.
 19. *Richtmyer R.D.* Difference Methods for Initial-Value Problems / R.D.Richtmyer, K.W.Morton.- New York: Interscience, 1967.- 547p. [*Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач.- М.: Мир, 1972.]
 20. *Roupert R.* Construction of three-phase data to model multiphase flow in porous media: Comparing an optimization approach to the finite element approach / R. Roupert, G. Schäfer, P. Ackerer // Comptes Rendus Geoscience. Volume 342, Issue 11, November 2010, Pages 855-863.

21. *Thompson J. F.* Numerical Grid Generation. Foundation and Applications / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. – New York : Elsevier, 1985. – 931p.
22. *Trottenberg U.* Multigrid / U. Trottenberg, C. Oosterlee, A. Schuller. – San Diego : Academic Press, 2001. – 631p.
23. *Vafai K.* Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor & Francis Group, – 2005. – 747 p.
24. *Varga R.* Accurate numerical methods for nonlinear boundary value problems / R.Varga // Numerical Solution of nonlinear problems. Eds. *J.Ortega, W.Rheinboldt.*- Philadelphia, Pennsylvania: Soc.Ind.App.Math., 1969.- P.99-113.
25. *Versteeg H. K.* An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera - Longman Scientific & Technical. New York, 1995. - 267p.
26. *Wakeman R.* Filtration: equipment selection, modelling and process simulation / R.Wakeman, J.Tarleton.- Oxford: Elsevier Advanced Technology, 1999.- 385p.
27. *Wesseling P.* An Introduction to Multigrid Methods / P. Wesseling. – Chichester : John Wiley & Sons Inc., 1992. – 296p.
28. *Winslow A.M.* Numerical solution on the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh / A.M.Winslow // J.Comp.Phys.- 1966.- 1, № 2- P.149-172.
29. *Zhangxin C.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. - 531 pp.
30. *Азиз Х.* Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, –2004. – 416с.
31. *Алишаев М.Г.* Неизотермическая фильтрация при разработке

- нефтяных месторождений / М.Г. Алишаев, М.Д. Розенберг, Е.В. Теслюк. – М.: Недра, – 1985. – 271с.
32. *Андерсон Д.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384с.
33. *Антонова Р. Н.* Расчет квазиортогональных сеток минимизацией вариационных функционалов / Р. Н. Антонова, Г. П. Прокопов. – Москва, 1998. – 32с. – (Препринт ИМП РАН, №31).
34. *Аравин В.И.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В.И.Аравин, С.Н.Нумеров. – М.: Гостехиздат, 1953.– 616с.
35. *Байокки К.* О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы / К.Байокки, Э.Мадженес // УМЖ.- 1974.- 29, №2.- С.60-69.
36. *Баренблатт Г.И.* Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, – 1984. – 303с.
37. *Басниев К.С.* Нефтегазовая гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, – 2005. – 544с.
38. *Басниев К.С.* Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. И. Кочина, М. В. Максимов. – М.: Недра, – 1993. – 416с.
39. *Бахвалов Н.С.* Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 451с.
40. *Белинский П.П.* Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами / П.П.Белинский, С.К.Годунов, Ю.Б.Иванов, И.К.Яненко // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1975.- № 6.- С.1499-

1511.

41. *Бердин Т.Г.* Проектирование разработки нефтегазовых месторождений системами горизонтальных скважин / Т.Г. Бердин. – М.: Недра-Бизнесцентр, – 2001. – 199с.
42. *Бомба А.Я.* Застосування методу „фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень при моделюванні нелінійно-суфозійних процесів в середовищах з вільними межами / А.Я.Бомба, В.І.Гаврилюк, С.С.Каштан // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2005.- Вип. 3 (12).- С.28-37.
43. *Бомба А.Я.* Исследование кинетических свойств изотропных сред методом квазиконформных отображений / А.Я.Бомба, С.С.Каштан, В.В.Клепко, Б.Б.Колупаев, Е.В.Лебедев // Физика и техника высоких давлений.- 2006.- Т.16, №3.- С.41-47.
44. *Бомба А. Я.* Крайові задачі на конформні відображення для трив’язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Доповіді Національної академії наук України. – 2004. – №4. – С. 57–63.
45. *Бомба А.Я.* Математичне моделювання нелінійних процесів масопереносу з урахуванням малих деформацій середовища / А.Я. Бомба, М.М. Хлапук, Б.П. Сидорчук // Актуальні проблеми водного господарства. Т.1. – Рівне: Вид-во УДАВГ, 1997. – С. 11–15.
46. *Бомба А.Я.* Метод квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення у деформівних середовищах / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. - Вип. 2. - С. 91–96.
47. *Бомба А.Я.* Метод квазіконформних відображень розв’язання модельних задач двофазної фільтрації / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34–

40.

48. *Бомба А.Я.* Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15) – Рівне : РДГУ, – 2009. – С. 20–35.
49. *Бомба А.Я.* Моделювання впливу градієнтів напору на процес фільтрації в середовищах, що деформуються / А.Я. Бомба, М. М. Хлапук // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 26–35.
50. *Бомба А.Я.* Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів / А.Я. Бомба, А.Я. Теребус // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2010. – Вип. 4. – С. 31-40.
51. *Бомба А.Я.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях / А.Я.Бомба, Ж.С.Гутіна, С.С.Каштан, М.М.Хлапук // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.– Рівне: НУВГП, 2004.–Вип. 23 (27).– С.105–112.
52. *Бомба А.Я.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу / А.Я.Бомба, Ж.С.Гутіна, С.С.Каштан, М.М.Хлапук // Вісник Українського державного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.- №4 (23).- Рівне: УДУВГП, 2003.- С.108-115.
53. *Бомба А. Я.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних

- процесів, що виникають в системах типу “свердловина в еліптичному пласті” / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький, М. М. Хлапук // Гідромеліорація і гідротехнічне будівництво. – Збірник наукових праць. – Вип.29. – Рівне, 2005. – С. 47–56.
54. *Бомба А. Я.* Наближення розв’язків одного класу обернених крайових задач на конформні відображення в багатозв’язних областях з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – 46. – №4. – С. 155–162.
55. *Бомба А.Я.* Нелинейные обратные краевые задачи конформного отображения с управляющим потенциалом / А.Я.Бомба, С.С.Каштан, В.В.Скопеецкий // Кибернетика и системный анализ.- 2004.- №1. - С.71-79.
56. *Бомба А.Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопеецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 308с.
57. *Бомба А.Я.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Математичні методи та фізико-механічні поля.– 2002.– 45, №2.– С.49–57.
58. *Бомба А.Я.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.- 2001.- Вип. 4.- С.182-195.
59. *Бомба А.Я.* Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многузв’язних областях з потенціалом керування / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика.– 2003.– Вип. 6.– С.18–27.

60. *Бомба А.Я.* Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2002.- 45, №3.- С.69-76.
61. *Бомба А.Я.* Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція – дифузія" / Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І. М. – Рівне : НУВГП, 2008. – 252с.
62. *Бомба А. Я.* О решении одного класса нелинейных обратных краевых задач на конформные отображения с управлением / А. Я. Бомба // Компьютерная математика. – 2003. – №2. – С. 97–104.
63. *Бомба А.Я.* Один метод математичного моделювання процесів витіснення / А.Я. Бомба, С.В. Яроцак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2010. – Вип. 3. – С. 3–13.
64. *Бомба А.Я.* Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А.Я.Бомба, С.С.Каштан, А.П.Кузьменко // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-25.
65. *Бомба А.Я.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями і моделювання ліній розділу фільтраційних потоків / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І.Пулюя.- 1998.- Т.3, №4.- С.12-20.
66. *Бомба А.Я.* Про моделювання взаємовпливу фільтрації та механічної суфозії / А.Я. Бомба, М.М. Хлапук, Б.П. Сидорчук // Вісник УДАВГ. "Сучасні проблеми теорії фільтрації". – Рівне:

- УДАВГ. – 1998. – С. 157–166.
67. *Бомба А.Я.* Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика.– 2000.– Вип. 2.– С.3–15.
68. *Бомба А.Я.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип. 6.- С.25-36.
69. *Бомба А.Я.* Системний аналіз та керування процесами двофазної фільтрації / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. –54, № 2. – С. 51–61.
70. *Бомба А.Я.* Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А.Я. Бомба, В. В. Скопецкий, С.В. Ярощак // Международный научно-технический журнал <Проблемы управления и информатики>. – 2010.– № 4. – С. 64–72.
71. *Бомба А. Я.* Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький, В. В. Скопецкий // Доповіді НАН України. – 2004. – №3. – С. 62–68.
72. *Бомба А. Я.* Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький, В. В. Скопецкий // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2003. – Вип.1. – С. 126–135.
73. *Бомба А.Я.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних

- деформівних середовищах / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3–10.
74. *Бомба А.Я.* Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення / А.Я.Бомба, С.С.Каштан // Волинський математичний вісник. - 2001.- Вип. 8.- С.9-22.
75. *Бомба А.Я.* Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площового заводнення / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35) С. 31–35.
76. *Бомба А.Я.* Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах заводнення / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Труды межд. школ-семинаров МДОЗМФ, вып. 8, изд. Орловского госуд. ун-та. – г. Орел, – 2010 – С. 20–28.
77. *Бомба А.Я.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А.Я. Бомба, С.В. Ярощак // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №2. – С. 3–13.
78. *Бомба А. Я.* Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях / А. Я. Бомба, Д. А. Пригорницький, И. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2004. – №1. – С. 152–159.
79. *Бомба А. Я.* Нелінійні модельні крайові задачі на квазіконформні відображення для тризв’язних анізотропних середовищ / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2004. – №2 (91). – С. 19–24.
80. *Бомба А. Я.* Нелінійні обернені крайові задачі на квазіконформні відображення у тризв’язних областях з

- післядією / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Доповіді НАН України. – 2005. – №2. – С. 59–64.
81. *Бомба А. Я.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – Вип.3. – С. 188–195.
82. *Бомба А. Я.* Чисельне розв'язування одного класу обернених крайових задач на конформні відображення для тривзв'язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 155–162.
83. *Булавацький В.М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики / В.М.Булавацький.- К.: Наукова думка, 1993.- 132с.
84. *Булавацький В.М.* Численно-аналитические решения некоторых двух- и трехмерных краевых задач механики уплотняемых сред / В.М.Булавацький // Краевые задачи математической физики.- К.: Наукова думка, 1990.- С.120-126.
85. *Булавацький В.М.* Математичне моделювання в задачах теплофізики та геогідромеханіки / В.М.Булавацький.- К.: КІЗТ, 1998.- 222с.
86. *Булавацький В.М.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В.М.Булавацький, Ю.Г.Кривонос, В.В.Скопечський.- К.: Наукова думка, 2005.- 282с.
87. *Булыгин Д. В.* Геология и имитация разработки залежей нефти / Д.В. Булыгин, В.Я. Булыгин. – М.: Недра, – 1996. – 382с.
88. *Бурак Я.Й.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів / Я.Й.Бурак, Є.Я.Чапля, О.Ю.Чернуха.- К.: Наукова думка, 2006.- 272с.

89. *Бурак Я.Й.* Про вертикальну міграцію радіонуклідів у ґрунті / Я.Й.Бурак, Є.Я.Чапля, О.Ю.Чернуха // Доповіді НАН України.- 1995.- №11.- С.34-37.
90. *Бэр Я.* Физико-математические основы фильтрации воды / Я.Бэр, Д.Заславски, С.Ирмей.- М.: Мир, 1971.- 452с.
91. *Вабищевич П.Н.* Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики / П.Н.Вабищевич // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1969.- 29, №6.- С.902-914.
92. *Вабищевич П.Н.* Вычислительная генерация гранично-адаптивных сеток / П.Н.Вабищевич, А.Н.Павлов, Б.Н.Четверушкин.- М.: 1988.- 28с.- (Препринт АН СССР. Ин-т прикл. математики; 88.158).
93. *Вабищевич П.Н.* Вычислительный алгоритм конформного отображения / П.Н.Вабищевич, С.И.Пулатов // Математическое моделирование.- 1989.- 1, №1.- С.132-139.
94. *Вабищевич П.Н.* Численное моделирование/ П.Н. Вабищевич. – М.: Изд. МГУ, – 1993. – 152с.
95. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд. МГУ, – 1987. – 164с.
96. *Васильев В.И.* Численное моделирование двухфазного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей / В.И. Васильев, Т.С. Тимофеева // Ученые записки ЯГУ. Сер. математика, физика. Юбил. вып.. – 1994. С. 51–62.
97. *Васильев С.В.* Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем / С.В.Васильев, Н.Н.Верыгин, Б.А.Глейзер и др.- М.: Колос, 1970.- 440с.
98. *Веретенцев В.А.* Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного

- отображения / В.А.Веретенцев // Актуальные вопросы прикладной математики.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.- С.88-93.
- 99.Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами / А.П.Власюк, В.Г.Михальчук.– К., 1989.– 55с.– (Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.79).
- 100.Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А.П.Власюк, В.Г.Михальчук.– К., 1991.– 56с.– (Препринт АН Украины. Ин-т математики, 91.57).
- 101.Власюк А.П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутних областях для еліптичних систем рівнянь / А.П.Власюк, В.Г.Михальчук.- Київ, 1994.- 24с.- (Препринт НАН України. Ін-т математики, 94.36).
- 102.Волковыский Л.И. Квазиконформные отображения / Л.И.Волковыский.- Львов: Госуниверситет, 1954.- 156с.
- 103.Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики / А.Н. Гильманов. – М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 248с.
- 104.Глуценко А. А. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов / А. А. Глуценко, А. П. Кузьменко // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С. 50–56.
- 105.Годунов О.К. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / О.К.Годунов, Г.П.Прокопов //

- Журнал вычислительной математики и математической физики.– 1967.– Т.7.– №5.– С.1031–1059.
106. *Годунов О.К.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах / О.К.Годунов, Г.П.Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики.– 1972.– 12, №2.– С.429–440.
107. *Годунов С. К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В Забродин, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 400с.
108. *Голубев Г.В.* Применение дискретных особенностей в задаче определения фильтрационных параметров / Г.В.Голубев // Вестник Харьковского национального университета.- 2007.- №775.- С.99-104.
109. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. – М.: Высш. шк., – 1972. – 368с.
110. *Гурин В.А.* Моделювання нелінійних теплових процесів, що виникають в системах горизонтальних труб / В.А.Гурин, А.Я.Бомба, В.П.Востріков, С.С.Каштан // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.- Вип. 3 (43). Частина 1.- Рівне: НУВГП, 2009.- С.269-276.
111. *Данилов В.Л.* Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения / В.Л. Данилов. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, – 2003. – 108с.
112. *Дейнека В. С.* Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий – К.: Наукова думка, – 1995. – 262с.
113. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач в неоднородных

- средах / В.С.Дейнека, И.В.Сергиенко.– К.: Наукова думка, 2001.– 605с.
114. *Дейнека В.С.*, Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С.Дейнека, И.В.Сергиенко, В.В.Скопецкий.- Киев: Наукова думка, 1998.- 614с.
115. *Добрынин В.М.* Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа / В.М. Добрынин. – М.: Недра, 1970. – 239с.
116. *Евгеньев А.Е.* О фазовых проницаемостях при фильтрации двухфазных систем через пористую среду / А.Е. Евгеньев // – Докл. АН СССР, – т. 162, – № 2, – 1965. С. 300–301.
117. *Евдокимов Д.В.* Применение метода граничных элементов для решения задач фильтрации с подвижной границей / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, И.И. Ткаченко // Вісник ХНУ №780. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2007. – С. 105–120.
118. *Елизаров А. М.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики / А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев. – М. : Наука, 1994. – 437с.
119. *Желтов Ю.П.* Разработка нефтяных месторождений / Ю.П. Желтов. – М.: Недра, 1986. – 333с.
120. *Закиров С. Н.* Проектирование и разработка газовых месторождений / С. Н. Закиров, Б. Б. Лапук. – М.: Недра, – 1974. – 374с.
121. *Заславский М.Ю.* Исследование неустойчивости типа “fingers” в фильтрационных течениях / М.Ю. Заславский, А.Х. Пергамент. – М.: Препринт ИПМ, – № 31, – 2002. – 16с.
122. *Згуровський М.З.* Прикладні методи аналізу і управління нелінійними процесами і полями / М.З.Згуровський, В.С.Мельник, А.Н.Новиков.– К.: Наукова думка, 2004.– 590с.

123. *Згуровський М.З.* Численне моделювання розповсюдження забруднення в оточуючій середі / М.З.Згуровський, В.В.Скопечкий, В.К.Хрущ, Н.Н.Беляев.– К.: Наукова думка, 1997.– 367с.
124. *Іванов В. І.* Конформні отображення / В. І. Іванов, В. Ю. Попов. – МГУ, УРСС, 2002. – 167с.
125. *Избаш С.В.* Фильтрационные деформации грунта / С.В.Избаш // Изв. НИИГ.- 1932.- Т.5.- С. 173-205.
126. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики / В.П.Ильин.- М.: Наука, 1985.- 336с.
127. *Ильинский Н. Б.* Построение прямой однородной решетки профилей методом квазирешений обратных краевых задач / Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев, Г. Р. Таюрская // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1989. – №3. – С. 35–38.
128. *Истомина В. С.* Фильтрационная устойчивость грунтов / В. С. Истомина. – М. : Госстройиздат, 1957. – 295с.
129. *Казанддан Э.П.* Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей / Э.П.Казанддан.- М., 1977.- 60с.- (Препринт АН СССР. Ин-т прикл.математики; 77.82).
130. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д. Каневская. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, – 2002. – 140с.
131. *Каштан С.С.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями / С.С.Каштан // Волинський математичний вісник.- 2000.- Вип. 7.- С.78-86.
132. *Каштан С.С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик

- анізотропного середовища / С.С.Каштан // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип.9.- С.32-40.
133. *Каштан С.С.* Чисельне розв'язання обернених крайових задач на конформні відображення областей складної геометрії / С.С.Каштан // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.- Вип. 4 (32). Частина 2.- Рівне: НУВГП, 2005.- С.110-115.
134. *Клейдман Д.М.* Расчет поля нефтенасыщенности при большом числе скважин / Д. М. Клейдман, Д. В. Шевченко // Матем. моделирование, – т. 14, – №9, – 2002. – С. 19–23.
135. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы / Р.Коллинз.– М.: Мир, 1964.– 350с.
136. *Коновалов А. Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А.Н. Коновалов. – Новосибирск : Наука. СО РАН. 1988. – 168с.
137. *Корнилина М.А.* Моделирование разработки нефтяных месторождений на параллельных вычислительных системах / М. А. Корнилина, Е. А. Самарская, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чурбанова, М. В. Якововский // Матем. моделирование, – т.7, – №2, – 1995. –С. 35–48.
138. *Кричлоу Б. Г.* Современная разработка нефтяных месторождений - проблемы моделирования / Б. Г. Кричлоу. – М.: Недра, 1979. – 305с.
139. *Крылов А. П.* Научные основы разработки нефтяных месторождений / А.П. Крылов, М.М. Глоговский, М.Ф. Мирчинк, Н.М. Николаевский, И.А. Чарный. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 416с.
140. *Крэйг Ф. Ф.* Разработка нефтяных месторождений при заводнении / Ф. Ф. Крэйг. – М.: Недра, 1974. – 192с.

141. *Лаврентьев М.А.* Конформные отображения / М.А.Лаврентьев.- М.: ОГИЗ, 1946.- 462с.
142. *Лаврентьев М.А.* Методы теории функции комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат.- М.: Наука, 1973.- 736с.
143. *Лаврентьев М.А.* Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат.- М.: Наука, 1977.- 407с.
144. *Лаврик В. И.* Математическое моделирование в гидроэкологических системах / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович – К.: Фитосоциоцентр, 1998. – 288с.
145. *Лаврик В. И.* Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А.Я. Бомба // ДАН УССР. – 1980. – №5. – С. 47–51.
146. *Лаврик В.И.* Конформные отображения физико-топологических моделей / В.И.Лаврик, В.П.Фильчакова, А.А.Яшин.- К.: Наукова думка, 1990.- 374с.
147. *Ладиженська О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А.Ладиженська.- М.: Наука, 1973.- 487с.
148. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидрогазодинамика. Собр. трудов в 2 т. / Л. С. Лейбензон. – М.: Изд- во АН СССР, 1953. – 554с.
149. *Ляшко И.И.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И.Ляшко, И.В.Сергиенко, Г.Е.Мистецкий, В.В.Скопеецкий.- К.: Наукова думка, 1977.- 288с.
150. *Ляшко И.И.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И.И.Ляшко, И.М.Великоиваненко, В.И.Лаврик, Г.Е.Мистецкий.- К.: Наукова думка, 1974.- 200с.
151. *Ляшко И.И.* Численно-аналитическое решение краевых задач

- теории фильтрации / И.И.Ляшко, И.М.Великоиваненко.– К.: Наукова думка, 1973.– 264с.
152. *Ляшко С.И.* Обобщенное управление линейными системами / С.И.Ляшко.– К.: Наукова думка, 1998.– 465с.
153. *Максимович Г.К.* Теоретические основы процессов вытеснения нефти из пористой среды водой или газом / Г.К. Максимович // Нефт. Х-во. – № 1, – 1951. – С. 35–15.
154. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук – М.: Наука, 1982. – 320с.
155. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики / Г.И.Марчук.– М.: Наука, 1989.– 608с.
156. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде / М.Маскет.– Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 628с.
157. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти / М. Маскет. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 606с.
158. *Михальчук В.Г.* О применении конформных и квазиконформных отображений для решения краевых задач на ЭВМ / В.Г.Михальчук, А.П.Власюк.- Ровно, 1988.- 36с.- Деп. в УкрНИИНТИ 25.10.88, №2730.
159. *Монахов В.Н.* Новые компьютерные технологии в нефтедобыче / Б.Т. Жумагулов, Н.В. Зубов, В.Н. Монахов, Ш.С.Смагулов. – Алма-Аты : Гылым, 1996. – 166с.
160. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. / Р.И. Нигматулин – М.: Наука, 1972. – 464с.
161. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
162. *Никифоров Г.А.* Применение метода контрольных объемов для решения задач двухфазной фильтрации в переменных

- "скорость-насыщенность" / Г.А. Никифоров // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – Т. 7, – № 1,– 2006. С. 224–228.
163. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1996. – 447с.
164. *Олейник А. Я.* Фильтрационные расчеты вертикального дренажа / А. Я. Олейник. – Киев : Наукова думка, 1978. – 204с.
165. *Олейник А. Я.* Дренаж переувлажненных земель / А. Я. Олейник, В. П. Поляков. – Киев : Наукова думка, 1987. – 279с.
166. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега. – Москва : Мир, 1991. – 367с.
167. *Ортега Дж.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288с.
168. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж.Ортега, В.Рейнболдт.– М.: Мир, 1975.– 558с.
169. *П'янило Я.Д.* Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула, // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. –2006. –Вип. 4. –С. 69–77.
170. *Павловский Н.Н.* Движение грунтовых вод. Собр. сочинений: В 2 т. / Н.Н.Павловский.– М.-Л.: Изд- во АН СССР, 1956.– 771с.
171. *Павловский Н.Н.* О фильтрации воды через земляные плотины / Н.Н.Павловский.- Л.: Изд. сектора гидротехники и гидротехнических сооружений, 1931.- 196с.
172. *Пивень В. Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень – Орёл :

- Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. – 508с.
173. *Положий Г.М.* Численные решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г.М.Положий.- К: Изд-во КГУ, 1982.- 161с.
174. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П.Я.Полубаринова-Кочина.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948.– 144с.
175. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод / П.Я.Полубаринова-Кочина.– М.: Наука, 1977.– 664с.
176. *Пригорницький Д. О.* Алгоритм чисельного розв'язання одного класу нелінійних модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей / Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2003. – Вип. 1. – С. 107–117.
177. *Пригорницький Д. О.* Модифікація алгоритму чисельного розв'язання одного класу нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформівних середовищах / Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С. 60–66.
178. *Пригорницький Д. О.* Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей / Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2004. – Вип. 2. – С. 196–211.
179. *Прокопов Г. П.* Методология вариационного похода к построению квазиортогональных сеток / Г. П. Прокопов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Мат. моделирование физ. процессов. – 1998. – Вип. 1. – С. 37–46.
180. *Прокопов Г.П.* Некоторые общие вопросы конструирования алгоритмов построения разностных сеток / Г.П.Прокопов //

- Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач мат. физики.- 1988.- №1.- С.3-13.
181. *Прокопов Г.П.* О расчете разностных сеток, близких к ортогональным, в областях с криволинейными границами: Препр. / Г.П.Прокопов / ИПМ АН СССР.- 1974.- № 17.- 36с.
182. *Прокопов Г.П.* Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений: Препр. / Г.П.Прокопов / ИПМ АН СССР.- 1970.- № 45. - 46с.
183. *Пыхачев Г. Б.* Подземная гидравлика / Г. Б. Пыхачев, Р. Г. Исаев. – М.: Недра, 1972. – 360с.
184. *Радыгин В. М.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов / В. М. Радыгин, О. В. Голубева. – М.: Высш. школа, 1983. – 160с.
185. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. *Полубариновой-Кочиной П.Я.*- Москва: Наука, 1969.- 546с.
186. *Ромм Е. С.* Структурные модели порового пространства горных пород / Е. С. Ромм. – Л.: Недра, 1985. – 240с.
187. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика / П.Роуч.– М.: Мир, 1980.– 616с.
188. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г.Савула.– Львів: ВЦ ЛНУ, 2004.– 222с.
189. *Савула Я. Г.* Некоторые приложения метода конечных элементов / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, В. Н. Вовк. – Львов : Редакционно-издательская группа Львов. ун-та, 1981. – 38с.
190. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А.Самарский.– М.:

- Наука, 1983.– 616с.
191. *Самарский А.А.* Устойчивость разностных схем / А.А.Самарский, А.В.Гулин.– М.: Наука, 1973.– 415с.
192. *Сергиенко И. В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – Киев : Наукова думка, 1991. – 432с.
193. *Скворцов Э. В.* О движении границы раздела двух жидкостей в бесконечном пласте / Э. В. Скворцов // Уч. зап. КГУ, т. 127, кн. 5. – 1967. – С. 44–48.
194. *Таранчук В.Б.* О влиянии проницаемости и формы неоднородных включений на максимальную безводную нефтеотдачу / В.Б. Таранчук // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, –№ 1. – 1978. – С. 156-159.
195. *Толпаев В. А.* Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины / В. А. Толпаев, В. В. Палиев, Д. В. Баско // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – №2, – 2008. – С. 43–47.
196. *Толпаев В. А.* Математическая модель линейного упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины / В. А. Толпаев, Д. В. Баско // Нефтепромысловое дело. № 12. – М.: ОАО "ВНИИОЭНГ", – 2008. – С. 9–13.
197. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – Москва : Мир, 1985. – 264с.
198. *Тумашев Г. Г.* К задаче о стягивании контура нефтеносности / Г. Г. Тумашев // Уч. Зап. КГУ, т. 113, кн. 10. – 1953. – С. 133–137.
199. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – М.: Мир, 1972. – 440с.

200. *Фильчаков П.Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями / П.Ф.Фильчаков.– К.: Изд-во АН СССР, 1960.– 255с.
201. *Хейгеман Л.* Прикладные итерационные методы / Л.Хейгеман, Д.Янг.- М.: Мир, 1986.- 446с.
202. *Хлапук М.М.* Особливості моделювання нелінійних процесів фільтрації із зволожувача в середовище, що деформується / М.М.Хлапук // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ.– Рівне, 1998.– С.151–157.
203. *Хрисанов Н. И.* Математическое и физическое моделирование фильтрационных деформаций грунта при работе закрытого дренажа / Н. И. Хрисанов, В. А. Камбуров // Физическое и математическое моделирование в мелиорации. – М. : Колос, 1973. – С. 345–353.
204. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод не следующее закону Дарси / С.А.Христианович // Прикл. матем. и мех.- 1940.- Т.4, вып. 1.- С.3-52.
205. *Чапля Є.Я.* Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах / Є.Я.Чапля, О.Ю.Чернуха, В.Є.Гончарук, А.Р.Торський.– Львів: Євросвіт, 2010.– 261с.
206. *Чапля Є.Я.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масопереносу / Є.Я.Чапля, О.Ю.Чернуха.– Львів: СПОЛОМ, 2003.– 128с.
207. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436с.
208. *Чарный И. А.* Подземная гидромеханика/ И. А. Чарный. – Москва-Ленинград : ОГИЗ, Гос. из-во технико-теоретической литературы, – 1948. – 196с.
209. *Шейдегер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые

- среды / А. Э. Шейдегер. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 249с.
210. *Шестерин Д.Е.* Математическое моделирование продвижения двумерной границы разноцветных жидкостей в неоднородно-анизотропном грунте / Д.Е. Шестерин // Вісник ХНУ №780. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2007. – С. 186–192.
211. *Штраубе А.В.* Эффективное решение конвективного уравнения переноса современными численными методами / А.В. Штраубе. – Пермь: Перм. ун-т, 2003. – 28с.
212. *Щелкачев В.Н.* Подземная гидравлика / В.Н. Щелкачев, Б.Б. Лапук. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2001. – 736с.
213. *Ярощак С.В.* Один метод математичного моделювання еволюції границі розділу різнокольорових рідин у неоднорідному пласті / С.В. Ярощак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16) – Рівне: РДГУ, – 2010. – С. 281–290.

Наукове видання

Бомба Андрій Ярославович
Каштан Сергій Степанович
Пригорницький Дмитро Олександрович
Ярощак Сергій Вікторович

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Монографія

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 25.03.2013р. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$

Папір друкарський №1. Гарнітура Times New Roman. Друк різнографічний.
Ум.-друк.арк. 16,0. Обл.-вид.арк. 16,8.

Тираж 300 прим. Зам. №2124.

Видавець і виготовлювач
Редакційно-видавничий центр
Національного університету водного
господарства та природокористування
33028, Рівне, вул.Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції РВ №31 від 26.04.2005р.