

**Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет**

А.Я.БОМБА, І.М.ПРИСЯЖНЮК, О.В.ПРИСЯЖНЮК

**МЕТОДИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ ПРОГНОЗУВАННЯ
ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В
ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ
СЕРЕДОВИЩАХ**

Монографія

Рівне – 2017

УДК 517.95:519.63.532.5

ББК 22.161.68

Б 80

Рекомендовано до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 1 від 26 січня 2017р)

Рецензенти:

Р. А. Бунь, доктор техн. наук, професор, професор кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка»;

Б.В. Гера, доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри транспортних технологій Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. В. Лазаряна;

П.М. Мартинюк, доктор техн. наук, завідувач кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування.

Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В.

Б80 Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: [монографія] / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк. – Рівне: **вид**, 2017. – 292с.

ISBN 978-876-8798-98-9

Монографію присвячено математичному моделюванню процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з врахуванням масообміну та температурного режиму в пористих та мікропористих середовищах та розвитку методів теорії збурень розв'язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач. Для спеціалістів з обчислювальної математики, інженерів, аспірантів, дипломників, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

УДК 517.95:519.63.532.5

ББК 22.161.68

ISBN 978-876-8798-98-9

© А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк,
О.В. Присяжнюк, 2017

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	9
1.1. Сучасний стан теорії математичного моделювання процесів конвективної дифузії у пористих та біпористих середовищах	9
1.2. Асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в пористому середовищі.....	24
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЬНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕ-НЕСЕННЯ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	43
2.1. Математичне моделювання сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення розчинних речовин у пористому середовищі.....	44
2.2. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в пористих середовищах	56
2.2.1. Побудова асимптотичних наближень розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в двозв'язних криволінійних областях.....	56
2.2.2. Моделювання сингулярно збурених процесів типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в пористих багатшарових середовищах	62
2.2.3. Моделювання просторового сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористому середовищі з урахуванням хімічної реакції.....	72

2.3. Математичне моделювання процесу масоперенесення в тонкій трубці з врахуванням масообміну із зовнішнім середовищем через бічну поверхню.....	79
2.4. Результати числових експериментів	85

РОЗДІЛ 3. ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ” ДЛЯ ДВОЗВ’ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

103

3.1. Асимптотичне розвинення розв’язків сингулярно збурених крайових задач типу “конvekція-дифузія” з невідомим залежним від фізичних координат двозв’язної області коефіцієнтом дифузії.....	104
3.2. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у випадку невідомого залежного від часу коефіцієнта дифузії.....	110
3.3. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії за наявності функції додаткових джерел забруднення та неповних даних	115
3.3.1. Моделювання процесів масоперенесення за наявності невідомих функції масообміну та залежного від часу коефіцієнта дифузії	115
3.3.2. Моделювання процесів масоперенесення за наявності невідомих функції масообміну та залежного від географічних координат коефіцієнта дифузії	124
3.4. Обернені сингулярно-збурені крайові задачі для системи рівнянь двокомпонентної конвективної дифузії.....	144
3.5. Автоматизоване керування процесом конвективного масопереносу в многозв’язних областях	153
3.6. Автоматизоване керування процесом конвективного масопереносу в многозв’язних областях	157

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНО-АДСОРБЦІЙНОГО МАСОПЕРЕЕНЕСЕННЯ В МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	189
4.1. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач процесу однокомпонентного масоперенесення в біпористих середовищах	190
4.2. Ідентифікація параметрів нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в мікропористих середовищах.....	197
4.3. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в багат шарових біпористих середовищах	205
4.4. Результати комп'ютерного моделювання сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного масоперенесення в мікропористому середовищі	222
РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕЕНЕСЕННЯ В БІПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	233
5.1. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення двох сортів розчинних речовин у мікропористих середовищах	233
5.2. Сингулярно збурені процеси багатоконпонентного конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах.....	244
5.3. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням мікропористих частинок.....	251
5.4. Результати комп'ютерного моделювання.....	256
ЛІТЕРАТУРА	265

ПЕРЕДМОВА

Математичне моделювання процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з урахуванням масообміну знаходить важливі застосування при вирішенні проблем очищення рідин шляхом фільтрування, а також прогнозування забруднення атмосфери, поверхневих та підземних вод шкідливими домішками тощо. На теперішній час перспективним є використання фільтрів з мікропористим завантаженням для очищення забруднених технологічних потоків, що дає можливість зменшити розміри відповідних пристроїв, створити відносно недорогі, швидкі і ефективні методи очистки зон забруднення.

На сьогодні вже відомі математичні моделі дифузійно-адсорбційного масоперенесення в неоднорідних схильних до деформації і двопористих (у тому числі мікропористих) середовищах. Проте актуальним залишається дослідження такого роду процесів у випадку наявності домінуючих складових механізму перенесення, що приводить до появи малих параметрів у відповідних математичних моделях. Зокрема, при дослідженні багатокомпонентного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах, необхідно враховувати низку факторів, таких як співвідношення між величинами параметрів, що характеризують ті чи інші складові процесу, залежність фільтрувальних властивостей таких матеріалів від температури (наприклад, в одних випадках мікропористий матеріал не пропускає тепло, а за інших умов – у зворотньому напрямку не пропускає вологу) тощо. Їх урахування призводить до ускладнення математичних моделей процесів сингулярностями, породженими малими параметрами. Тому постає актуальна задача розробки нових або удосконалення існуючих методів розв'язання відповідних крайових задач. Принцип локалізації, що використовується у методах теорії

збурень, дозволяє одночасно отримати і достатню точність, і значне спрощення процесу розв'язування. Асимптотичний метод розв'язування типових модельних крайових задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на теперішній час ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими. Виникає природне запитання стосовно можливості його розвитку для розв'язання нелінійних систем сингулярно збурених рівнянь з локально-іншорідними особливостями, що забезпечить можливість прогнозування аналогічних процесів багатокомпонентного масоперенесення у мікропористих середовищах.

Монографію присвячено актуальній проблемі моделювання процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення у мікропористих середовищах (фільтрах) за умови домінування одних складових цих процесів над іншими та розвитку асимптотичних методів розв'язання відповідних сингулярно збурених крайових задач. Спершу здійснено узагальнення математичних моделей сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок дослідження відповідних багатокомпонентних неізотермічних процесів з урахуванням хімічної реакції між розчинними речовинами. Побудовано асимптотичне наближення розв'язків відповідних крайових задач, обґрунтованість яких забезпечується високим рівнем співпадання результатів числових експериментів та аналітичними розв'язками відповідних спеціальних типів модельних тестових задач. На основі отриманих числових результатів підтверджено прогнозовану інтенсифікацію дифузійних та масообмінних складових процесу зі збільшенням температури середовища. Далі розглянуто обернені задачі конвективної дифузії, які в сво-

їх рівняннях мають невідомі коефіцієнти при старших похідних чи функції масообміну. Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язання розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія-масообмін” з невідомим залежним від часу чи фізичних координат двозв'язної області коефіцієнтом дифузії. Змодельовано сингулярно збурені процеси конвективної дифузії за наявності невідомої функції додаєткових джерел забруднення середовища, побудовано асимптотичні наближення розв'язків відповідних задач. Також в монографії сформовано та обґрунтовано математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному та кусково-однорідному середовищі частинок мікропористої структури, що на відміну від існуючих, враховує механізм конвективного перенесення, а також уточнює розрахунок розподілу концентрації в мікропористому середовищі (фільтрі); побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному мікропористому середовищі за умов врахування масообміну та взаємовпливу компонент. Побудовано асимптотичні розв'язання розв'язків відповідних крайових задач, у тому числі за умови неповних даних. Підтверджено, що незважаючи на малу швидкість протікання явищ дифузійного масоперенесення в порах частинок, з часом це суттєво впливає на розподіл концентрації у самій частинці та у всьому фільтрі, а отже, можливим є використання розглянутого мікропористого середовища з метою очищення рідин від забруднень. Отримано розв'язок модельної задачі процесу первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих сорбентів, яка враховує зміну концентрації не лише забруднення, а й самих сорбуючих частинок.

РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

1.1. Сучасний стан теорії математичного моделювання процесів конвективної дифузії у пористих та біпористих середовищах

Проблеми переносу в пористих середовищах мають велике прикладне значення. Основні проблеми при вивченні процесів тепломасообміну пов'язані з постановкою і розв'язанням задач при високій щільності теплових потоків і великих швидкостях течії, при фазових і хімічних перетвореннях.

Процес масообміну полягає у перенесенні деякої речовини, представленої у формі молекул, атомів, іонів, в просторі з неоднорідною концентрацією або при неоднорідних полях температур і тисків. Цей процес перенесення маси між фазами відбувається до настання певного стану, що називається станом рівноваги і при якому з першої фази в другу переноситься така ж кількість речовини, як і з другої в першу. Для масообміну в межах однієї фази - після вирівнювання концентрації речовини по всьому об'єму середовища. Окрім того, речовина може переноситися під одночасним впливом декількох градієнтів – градієнту концентрації, градієнту температури чи градієнту тиску, такий вид масоперенесення називається молекулярною дифузією і розрізняють відповідно концентраційну дифузію, термодифузію та бародифузію. Процес перенесення маси, окрім молекулярної дифузії, може здійснюватися і під дією конвекції і на відміну від останньої, молекулярна дифузія як правило має місце в нерухомих потоках або в приграничних шарах, що знаходяться поблизу межі розділу фаз і обумовлена хаотичним рухом частинок речовини.

При дифузійному переносі, напрямок перенесення речовини

визначається градієнтом концентрації в окремих точках системи, і речовина завжди переходить з фази, де її концентрація вище рівноважної, у фазу чи область, в якій її концентрація нижче рівноважної (або від більшого градієнта до меншого). Швидкість масопередачі пов'язана з механізмом переносу речовини між фазами, які приймають участь у масообміні.

До розробки основних положень теорії масоперенесення долучилися такі видатні вчені, як А. Фік, А. Дарсі [192], І.-Ж. Ленгмюр, М.Є. Жуковський, П.Я. Полубаринова-Кочина [133-134], Н.В. Герсеванов, Р. Колінз [89], Я. Бер [49], Г. І. Бернблатт [8], В.І. Аравін [6], С.М. Нумеров [121], А.В. Ликов [107-108], М. Шірато, Н. Н. Веригін [55-56], Б.С. Шержуков [170], Ж. Каргер [199], Д. Ритвен [199, 211], С. Корнер, Ж. Фресард [196], Д.Ф. Шульгін, В.Н. Ніколаєвський [37], С.Ф. Авер'янов [1], А. Шейдергер [169] та інші. Проблеми математичного моделювання переносу різної природи, як в однорідних так і неоднорідних пористих середовищах розглянуті в працях А.М. Когановського [88], І.М. Федоткіна, Р. Лоренца, І.І. Ляшка [104-106], С.І. Ляшка, В.І. Лаврика [96-97, 116], І.В. Сергієнка [152-154], В.В. Скопечького [168], Я.Г. Савули [95, 147], В.С. Дейнеки [69-72], М. Р. Петрика [99], Є. Я. Чаплі [166], О.Ю. Чернухи [143], Б. В. Гери [64, 114], Я.Й. Бурака [45], В.М. Булавацького [39-41], А.Я. Бомби [13, 18, 27-28], А. П. Власюка [59-62], О. Я. Олійника [83, 122-124], В. Ф. Півня [131, 207], Г.А. Шинкаренка, В.М. Шестакова [171] та ін. [5, 90, 98, 101, 111, 126, 177, 190, 191, 197]. В цих працях розглядаються постановки змішаних крайових задач для рівнянь переносу в частинних похідних, що описують різні види переносу в однорідних на неоднорідних середовищах, в основному на макрорівні і без врахування внутрішньої структури пористих частинок.

Основним завданням аналітичної теорії дифузії є визначення і вивчення просторово-часової зміни основної фізичної величини,

що характеризує процес дифузії, – концентрації $C = C(x, y, t)$, де (x, y) - прямокутні координати, t – час.

Концентраційним полем називається сукупність значень концентрації для всіх точок простору в даний момент часу t . Концентраційне поле є скаляром, так як сама концентрація – скаляр. Якщо концентрація є функцією лише координат (x, y) , то поле називається стаціонарним. Якщо концентрація змінюється також в часі, то поле називається нестаціонарним. Закони, що керують просторово-тимчасовим розвитком концентраційного поля, називаються законами Фіка [20, 24].

Закони Фіка – це закони дифузії в ідеальних розчинах при відсутності зовнішніх впливів. Перший закон Фіка встановлює пропорційність дифузійного потоку частинок градієнту їх концентрації; другий закон Фіка описує зміну концентрації, обумовлену дифузією, відкриті німецьким вченим-фізіологом Адольфом Фіком в 1855 р.

Найпростіший вираз для першого закону Фіка має вигляд:

$$J = -D \text{grad } C.$$

Величину J називають щільністю потоку дифундучої речовини (або щільністю потоку дифузанта, або щільністю дифузійного потоку).

Градієнт концентрації спрямований по нормалі до ізоконцентраційної поверхні, причому за додатній напрямок цього вектора приймається напрямок у бік зростання концентрації. В окремому випадку одномірної дифузії, величина $\text{grad } C = \frac{\partial C}{\partial x}$ представляє собою збільшення концентрації в напрямку осі x .

Перенесення дифузанта може відбуватися тільки за умови, що в різних точках тіла концентраційне поле неоднорідне, тобто для того, щоб усередині тіла виникав потік частинок, необхідна на-

явність градієнта концентрації, відмінного від нуля. Потік дифузанта на відміну від температури (скалярної величини) має певний напрям від точок тіла з більш високою концентрацією до точок з більш низькою концентрацією дифузанта.

Згідно першого закону Фіка кількість речовини, що проходить через уявний перетин, перпендикулярний напрямку дифузії, пропорційна величині градієнта концентрації в цьому перерізі, площі перерізу та часу дифузії. Знак мінус вказує на те, що потік речовини направлений у бік зменшення концентрації. Внаслідок цього в ізольованій системі є тенденція до зникнення концентраційних градієнтів. Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом дифузії.

Диференціальне рівняння дифузії (1-й закон Фіка) зазвичай ще записується у вигляді: $J = -DS \frac{\partial C}{\partial x}$, де S – площа поверхні ділянки, через яку здійснюється дифузія.

Перший закон Фіка записують також у вигляді:

$$J = Cv_m, \quad (1.1)$$

де C – концентрація дифузанта; v_m – його середня швидкість, або ще відомий запис першого закону:

$$\vec{J} = -D \text{grad } C = -D \nabla C. \quad (1.2)$$

Перший закон Фіка дозволяє зрозуміти фізичний зміст коефіцієнту дифузії. Коефіцієнт дифузії чисельно дорівнює щільності потоку дифузанта при градієнті концентрації рівному одиниці. Оскільки цей потік речовини прагне вирівняти перепад потенціалу або концентрації, можна сказати, що коефіцієнт дифузії є мірою швидкості, з якою система здатна при наперед заданих умовах вирівняти різниці концентрацій і відповідно різниці хімічних потенціалів.

Для деяких розрахунків оцінного характеру виявляється достатнім скористатися першим законом Фіка. Однак практичне використання першого закону дифузії для експериментального визначення коефіцієнтів дифузії можливо лише в тих випадках, коли умови досвіду дозволяють вимірювати потік і градієнт концентрації одночасно. Для цього слід, наприклад, підтримувати постійний градієнт концентрації, тобто створювати умови для встановлення стаціонарного стану, що не завжди легко здійснено. Тому виникає завдання дослідити нестационарний процес дифузії.

Другий закон Фіка може бути отриманий з першого, при використанні законів збереження. Виведення рівняння другого закону дифузії можливе різними шляхами. Це рівняння виводиться на основі уявлення про випадкові блукання атомів в кристалічній решітці, або часток у сумішах зернистих матеріалів, або при розгляді ймовірності знаходження частинки в тому чи іншому обсязі при її статистичному переміщенні. Ми будемо оперувати поняттями континуальної теорії.

У загальному вигляді виведення цього рівняння досить громіздке. Обмежимося записом рівняння: $\frac{\partial \sigma C}{\partial t} = D \Delta C$, де σ – пористість середовища.

Це рівняння виражає другий закон Фіка при постійному коефіцієнті дифузії. У курсах математичної фізики показано, що згадане вище рівняння дифузії відноситься до диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу.

Рівняння другого закону Фіка можна отримати також з умови рівності зміни концентрації в деякому обсязі результуючого потоку всередину цього об'єму (така рівність має місце за відсутності джерел і стоків). Ця умова виражається рівнянням безперервності, що має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma C}{\partial t} = -\text{grad } J. \quad (1.3)$$

Особливість розв'язання рівнянь в частинних похідних параболічного типу, яким є згадане рівняння, полягає в тому, що збурення поширюється з нескінченною швидкістю. Більш точний аналіз явища дифузії призводить до рівнянь гіперболічного типу, вирішення яких характеризуються кінцевою швидкістю розповсюдження збурень. Однак більша частина задач математичної теорії дифузії пов'язана з обчисленням розподілу концентрації як функції просторових і часової координат.

Конвективна дифузія пов'язана з рухом середовища, в якому за рахунок турбулентних пульсацій здійснюється перемішування потоку і тим самим вирівнюється концентрація речовини в об'ємі. Швидкість конвективної дифузії залежить від гідродинамічних умов, які визначаються швидкістю потоку та масштабом турбулентності. Розподіл концентрацій при конвективній дифузії описується диференціальним рівнянням конвективного переносу речовини:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \cdot \text{grad } C = D \cdot \Delta C.$$

У диференційному рівнянні конвективного переносу в рухомому середовищі завдяки концентрації змінною є швидкість потоку. Тому це рівняння треба розглядати поєднано з диференціальними рівняннями гідродинаміки, наприклад, рівнянням руху Нав'є-Стокса та рівнянням нерозривності потоку.

Нехай задано поле швидкостей фільтраційного потоку в пластині $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$. На його фоні здійснюється перерозподіл розчинних речовин. Введемо позначення: D – коефіцієнт дифузії, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ – компоненти масової швидкості, $C(x, y, t)$ – концентрація розчиненої речовини у точці (x, y) у момент часу t .

Рівняння руху описується згідно закону Фіка:

$$\begin{cases} u_x = v_x C - D \frac{\partial C}{\partial x}, \\ u_y = v_y C - D \frac{\partial C}{\partial y}, \end{cases} \quad (1.4)$$

та рівняння балансу речовини (1.3):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma C}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Тут (u_x, u_y) – вектор масової швидкості (швидкість зміни маси).

Після підстановки рівняння (1.4) в рівняння (1.5), та прийнявши, що $\text{div } \vec{v} = 0$ (течія ідеальна), $D = \text{const}$, отримаємо:

$$D(C_{xx} + C_{yy}) - v_x C_x - v_y C_y = \sigma \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Процеси міграції речовини у водонасичених пористих середовищах при її малих концентраціях у розчині і можна описати наступною системою диференціальних рівнянь [18]:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0;$$

$$(\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div} (D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^m f_{k,j}^*(C_k, C_j) - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^*(C_j, C_k) -$$

$$- \tilde{f}_j(C_j, U_j) + \tilde{f}_j(U_j, C_j),$$

$$(\sigma \cdot U_j)'_t = \sum_{k=1}^m f_{k,j}^{**}(U_k, U_j) - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^{**}(U_j, U_k) +$$

$$+ \tilde{f}_j(C_j, U_j) - \tilde{f}_j(U_j, C_j),$$

$$j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}, m \in N,$$

де φ і \vec{v} – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації,

$\kappa = \kappa(x, y, z, U_j)$ – коефіцієнт фільтрації, C_j і U_j – відповідно масові концентрації j -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища у точці (x, y, z) в момент часу t , $D_j = D_j(x, y, z, C_j)$ – коефіцієнт конвективної дифузії j -ї компоненти речовини у водному потоці ($j = \overline{1, m}$), $\sigma = \sigma(x, y, z, U_j)$ – пористість середовища, $f_{j,k}^*(C_j, C_k)$ і $f_{j,k}^{**}(U_j, U_k)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -ю і k -ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища ($j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}$), $\tilde{f}_j(C_j, U_j)$ і $\tilde{\tilde{f}}_j(U_j, C_j)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкості протікання відповідно сорбційних і десорбційних процесів j -ї компоненти речовини ($j = \overline{1, m}$).

Фільтраційні процеси, як правило, протікають в обмежених областях. На границі S фільтраційної області або на її частині задаються крайові умови, найбільш прості і широко поширені із яких умови:

а) $\varphi|_S = \tilde{\varphi} = const$ – на ділянках границі S , які є входами і (або) виходами фільтраційної течії;

б) $\varphi'_n|_S = 0$ – на водонепроникних ділянках границі S області фільтрації, де \bar{n} – нормаль до границі.

На межах розділів сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності потенціалів і швидкостей:

$$\varphi|_{S_-} = \varphi|_{S_+}, \quad v|_{S_-} = v|_{S_+}.$$

При постановці задач конвективної дифузії на вході S_* фі-

льтраційної течії, зазвичай, граничною умовою задається:

а) закон надходження і розподілу величин концентрації розчиненої у воді речовини $C|_{S_s} = c_*$;

б) умова Данквертса $D \cdot C'_n - v_n \cdot (C - c_*)|_{S_s} = 0$ (що враховує як конвективний, так і дифузійний механізми підведення речовини).

На водонепроникних ділянках границі \tilde{S} області фільтрації виконуються умови: $C|_{\tilde{S}} = c^*$ або $C'_n|_{\tilde{S}} = 0$ (врахування або відсутності додаткових джерел надходження величин концентрації розчиненої у воді речовини), а на ділянці виходу фільтраційного потоку S^* можна приймати одну з наступних граничних умов:

а) задано закон розподілу величин концентрації речовини $C|_{S^*} = c^*$;

б) задана умова Данквертса $D \cdot C'_n - v_n \cdot (C - c^*)|_{S^*} = 0$ (такі умови приймаються, якщо не спостерігається інтенсивного відводу вод на виході фільтраційного потоку);

в) задана умова, що враховує тільки конвективний перенос через границю $C'_n|_{S^*} = 0$ (у випадку інтенсивного відводу вод на виході фільтраційного потоку).

На межі розділу сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності концентрацій і потоків речовин:

$$C_{S_{*+}} = C_{S_{*-}}, \quad D_* \cdot C'_n - v_n \cdot C|_{S_{*-}} = D^* \cdot C'_n - v_n \cdot C|_{S_{*+}},$$

де D_* , D^* – коефіцієнти конвективної дифузії у сусідніх шарах, v_n – нормальна складова швидкості на межі розділу.

Початкова умова має вигляд $C(M, t) = c_0(M)$, де $c_0(M)$ –

задана функція розподілу концентрацій речовини в області фільтрації в момент часу t до настання процесу забруднення або промивання пористого середовища, M – довільна точка області фільтрації.

Власюком А. П., Мартинюком П. М. та їх учнями [60-61, 109] процес однокомпонентного тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів у недеформованих ґрунтових середовищах в загальноприйнятих позначеннях запропоновано описувати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \text{div}(D(C)\text{grad } C + D_T(C)\text{grad } T) - \\ & -\vec{V}(C)\text{grad } C = \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\vec{V}(C) = -\kappa(C, T)\text{grad } \varphi + v(c)\text{grad } C + v_1\text{grad } T, \quad \text{div}\vec{V} = 0, \quad (1.7)$$

$$\text{div}(\lambda\text{grad } T) - \rho c_p \vec{V}(C)\text{grad } T = c_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(C, N, C_*, N_*, T, \gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (1.9)$$

Тут рівняння (1.6), (1.7) описують масоперенесення і фільтрацію сольових розчинів в неізотермічних умовах, рівняння (1.8) описує теплоперенесення в ґрунтових масивах, (1.9) – масообмін між рідкою і твердою фазами.

Проте при математичному моделюванні багатоконпонентних процесів виникає потреба врахувати можливість втрати чи набуття концентрації забруднюючих речовин у фільтраційній течії внаслідок їхньої реакції. Більшість таких реакцій проходять з виділенням чи поглинанням енергії, тому необхідно враховувати вплив зміни температури середовища на швидкість перебігу дифузійних та масообмінних (породжених хімічними реакціями) процесів.

Згідно кінетичного закону діючих мас швидкість елементарної реакції при заданій температурі пропорційна добутку концентрацій реагуючих речовин в степені, що показує кількість моль речовини, що вступають у реакцію [194]:

$$\frac{dC}{dt} = k(T) \cdot C_1^{n_1} \cdot C_2^{n_2} \cdot \dots \cdot C_i^{n_i}, \quad (1.10)$$

де $k(T)$ – швидкість хімічної реакції. Рівняння (1.10) справедливо для елементарних реакцій. Для складних реакцій показники степеня в рівнянні (1.10) називаються порядками реакції і можуть приймати не тільки цілочисельні значення. Константа швидкості хімічної реакції залежить від температури.

Отже, при дослідженні багатокомпонентного масоперенесення в пористих середовищах в низці випадків необхідно враховувати взаємовплив температури середовища на розподіл концентрації розчинних речовин з метою інтенсифікації процесів очищення забруднених технологічних потоків.

Перспективним напрямком також є використання мікропористих матеріалів для видалення домішок з газових та водних потоків. На сьогодні існує ряд підходів до моделювання процесів масоперенесення в пористих каталітичних (біпористих) середовищах, які дозволяють в достатній мірі враховувати вплив масоперенесення на рівні частинок. Дослідженню процесів дифузійно-адсорбційного масоперенесення в біпористих середовищах присвячено значну кількість праць закордонних авторів – Р. Бартера, Н. Чена [189], Ж. Каргера, Д. Ритвена [211], Ж. Фресарда, Є. Воробйова, С. Лекерка [204, 206], Золотарьова П. П [75-77], Бекмана І. М. [10] та ін. [181, 208, 209], а також вітчизняних – В.С. Дейнеки, К.В. Сергієнка, М.Р. Петрика [127-130, 193, 203-206]. В них розглядаються моделі молекулярного транспорту в кристалічних тілах, який спричиняється двома видами дифузії: дифузією в макропорах, за рахунок поро-

жнин між кристалічними частинками адсорбенту і дифузією в мікропорах частинок. Модель однокомпонентного адсорбційного масоперенесення в каталітичному середовищі частинок мікропористої структури представлено у вигляді системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{inter}} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \theta_{\text{intra}} \left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)_{r=R}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = D_{\text{intra}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (1.11)$$

з початковими та крайовими умовами

$$c(t, z)|_{t=0} = 0, \quad q(t, r, z)|_{t=0} = 0, \quad (1.12)$$

$$c(t, z)|_{z=l} = c_{\infty}, \quad q(t, r, z)|_{r=R} = k \cdot c(t, z),$$

$$\left. \frac{\partial c(t, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial q(t, r, z)}{\partial r} \right|_{z=0} = 0. \quad (1.13)$$

Перше з рівняння (1.11) описує масоперенесення у міжчастинковому просторі, друге описує внутрішньочастинкове масоперенесення з поточною концентрацією $q(t, r, z)$, що пов'язана з концентрацією в міжчастинковому просторі $c(t, z)$ другою з крайових умов (1.13) – умовою рівноваги на поверхні частинок. Коефіцієнти D_{inter} та D_{intra} відповідно характеризують швидкість протікання процесів масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт $\theta_{\text{intra}} = 3 \frac{(1 - \varepsilon_{\text{inter}}) D_{\text{intra}}}{\varepsilon_{\text{inter}} R}$ характеризує вплив внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове. Тут l – довжина зразка, R – радіус мікропористих частинок, $\varepsilon_{\text{inter}}$ – пористість. Дана методологія поширена на випадок моделювання та дослідження розв'язків крайових задач переносу з системою двофазного дворівневого і n -рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури з мікро- і нанопористими просторово розподіленими диферен-

ціальними та інтегральними включеннями, а також на випадок моделювання та дослідження розв'язків двофазних інтегродиференціальних крайових задачі типу „фільтрація-консолідація” з системою двофазного дворівневого і n -рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури. На цій основі для розглянутих моделей переносу з використанням їх аналітичних розв'язків, градієнтних методів та даних фізичного експерименту запропоновані ефективні алгоритми і програмні процедури наближеного розв'язання зворотніх задач для визначення розподілів кінетичних коефіцієнтів (коефіцієнтів дифузії, коефіцієнтів консолидації на мікро- і макрорівнях). Модельну конструкцію (1.11) за додаткової умови рівноваги із (1.13) називатимемо системою диференціальних рівнянь з локально-іншорідними особливостями.

Проте актуальним залишається питання врахування конвективного масоперенесення в однорідних та шаруватих середовищах частинок мікропористої структури, що приводить до розв'язання сингулярно збурених задач, оскільки сорбція та дифузія є малими в порівнянні з конвективною складовою процесу. Проведений аналіз результатів досліджень свідчить про те, що практика сьогодні, як ніколи, вимагає побудови все більш повних, точних і адекватних моделей, що описують сингулярно збурені процеси багатокомпонентного тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах, а також розвитку методів їх розв'язання та дослідження, що дозволить враховувати взаємовплив характеристик досліджуваного процесу.

Модельна задача сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в біпористих середовищах з урахуванням масообміну та зворотнього впливу характеристик процесу (температури, що зростає в результаті екзотермічної хімічної реакції між забруднюючими речовинами) на характеристики се-

редовища (коефіцієнти дифузії, масообміну) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\sigma_1 \frac{\partial C_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^m \operatorname{div} \left(D_{js}(T) \cdot \operatorname{grad} C_s \right) + \operatorname{div} (D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} C_j + \tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T) - D_{*j}^*(T) (U_j)'_r \Big|_{r=R}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^m r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{js}^*(T) \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_s}{\partial r} \right) - \tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \tilde{f}_j^{**}(C_1, \dots, C_j, T), \quad (1.16)$$

$$\vec{v} = \kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.17)$$

де φ і \vec{v} – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, z, C_j, T)$ – коефіцієнт фільтрації, C_j і U_j – відповідно масові концентрації j -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і в мікрочастинках (на сферах з центром в точці (x, y, z) радіуса r , $0 \leq r \leq R$) в момент часу t , $D_{js}(T)$ та $D_{js}^*(T)$ – коефіцієнти конвективної дифузії j -ї компоненти речовини за умови присутності s -ї компоненти у фільтраційному потоці та в мікропористих частинках відповідно ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$), D_T – коефіцієнт термодифузії, σ_1 σ_2 – пористість відповідно середовища та мікрочастинок, $\tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T)$ і $\tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -ю і s -ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і в мікрочастинках ($j = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, m}$), $\tilde{f}_j^{**}(C_j, C_s, T)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість теплоутворення в результаті масообміну, $D_{*j}^*(T)$ – неперервні обмежені

функції, які характеризують швидкість протікання сорбційних процесів j -ї компоненти речовини (швидкість переходу концентрації з міжчастинкового простору у внутрішньочастинковий).

Система (1.14)–(1.17) доповнюється початковим та граничними умовами. Зокрема, на поверхні мікропористої частинки задається умова адсорбційної рівноваги:

$U_j(x, y, z, r, t)|_{r=R} = k_j(T)C_j(x, y, z, t)$, що пов'язує концентрації у внутрішньочастинковому просторі та міжчастинковому.

В якості методів математичного моделювання і дослідження масоперенесення різної природи використовуються аналітичні [7, 12, 38, 58, 63, 68, 92-94] та наближені методи теорії крайових задач [3, 4, 9, 50, 86, 103, 125, 132, 183]. Для аналітичного розв'язання крайових задач, що описуються рівняннями в частинних похідних, найчастіше застосовують класичні методи (метод характеристик, метод відокремлення змінних (метод Фур'є), метод джерел (функцій Гріна), метод Рімана, метод потенціалів) та методи інтегральних перетворень. Так в працях [99, 115] в якості методики відшукування розв'язків задачі використовувались поряд із класичними методами застосовуються методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Бесселя, які забезпечують високий ступінь адекватності отриманих модельних розв'язків, збіжність розв'язків до початкових та крайових умов і при цьому надають можливість враховувати впливи широкого класу фізичних та технологічних чинників.

Застосування чисельних методів дає практичні алгоритми для побудови наближених розв'язків крайових задач для всієї області зміни аргументів. Для розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних ефективно застосовуються такі чисельні методи як: методи скінченних різниць (сіток), варіаційно-різницеві методи, методи скінченних елементів, статистичні методи. Серед цих методів, найбільш широке застосування для побудови розв'язків моде-

лей у вигляді крайових задач для рівнянь в частинних похідних для моделей переносу отримав метод скінченних різниць [65, 148-150, 172]. Серед варіаційно-різницевих методів, в яких дискретна модель переносу одержується з використанням варіаційного формулювання, найбільш використовуваними є метод локальних колокацій та метод скінченних елементів.

Розробці різних методів чисельного та чисельно-аналітичного розв'язання одно- та двовимірних задач масоперенесення (волого-, солеперенесення, розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі, та суміжних) присвячені роботи І.І. Ляшка, І.В. Сергієнка, В.В. Скопечького, М.З. Згуровського [74, 168], В.С. Дейнеки, В.М. Булавацького, Я.Й.Бурака, А.П.Власюка та ін.

Асимптотичний метод розв'язування типових крайових модельних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на даний час ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими і виникає природне запитання стосовно можливості його розвитку для розв'язання систем сингулярно збурених рівнянь з локально-іншорідними особливостями, що забезпечить можливість прогнозування аналогічних процесів масоперенесення в мікропористих середовищах.

1.2. Асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в пористому середовищі

Загальновідомо, що при моделюванні процесів фільтрування їх компоненти (конвекція, дифузія, масообмін, різні співвідношення між параметрами) входять не рівнозначно одні із них переважають над іншими. Диференціальні рівняння, що описують такі процеси

як правило містять малі параметри, а відповідні задачі доцільно розв'язувати з допомогою методів теорії збурень. Теоретичні дослідження в області теорії сингулярних збурень ведуться досить давно.

Слід зазначити, що асимптотичні методи, які виявилися ефективним інструментом дослідження сингулярно збурених задач, з'явилися задовго до середини минулого століття. Одними з творців асимптотичної теорії були французькі вчені П.Лаплас і А. Пуанкаре. У працях П. Лапласа, пов'язаних із завданнями небесної механіки, асимптотичні методи розроблялися і застосовувалися як спосіб наближеного обчислення значень функції в околі її особливих точок. А. Пуанкаре заклав основи сучасної асимптотичної теорії, ввів у вживання її основні терміни і довів фундаментальні теореми. Істотний внесок у розвиток асимптотичних методів вніс російський вчений А.М.Ляпунов. Теорія стійкості по суті є теорією асимптотичного дослідження систем диференціальних рівнянь.

Що стосується дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь методами теорії збурень, то початок вони беруть з робіт А.Н.Тихонова [159], які присвячені системам нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, в яких одне з рівнянь має множником при старшій похідній малий параметр. Розв'язок даної системи містить "швидку" і "повільну" компоненти (зараз такі системи називаються системами Тихонівського типу). А.Н.Тихонов вивів умови, за яких розв'язок не виродженої задачі прямує до розв'язку виродженої задачі коли малий параметр прямує до нуля. Ці статті мали істотний вплив на даний напрям прикладної математики. Слідом за цими статтями з'явився ряд робіт М.І.Вішика і Л.А. Люстерніка [57, 102], в яких був сформульований загальний підхід до побудови асимптотичних розв'язків лінійних рівнянь в частинних похідних з малими параметрами при деяких з старших похідних. Цей підхід – ідея асимптотичного розкладу

розв'язку за малим параметром – отримав назву методу Вішика-Люстерника.

У роботах В.Ф. Бутузова [46-48, 188] розглядаються різні крайові задачі для рівнянь в частинних похідних еліптичного, параболічного та гіперболічного типу областях з негладкою границею; розроблені методи для наближення розв'язку в околі кутових точок: метод кутових примежових функцій і ідея згладжування членів асимптотики. Роботи А. Б. Васильєвої [53, 54] присвячені широкому класу задач, як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь в частинних похідних. Так, нею розроблені методи асимптотичного розв'язання початкових і крайових задач для лінійних і нелінійних сингулярно збурених рівнянь та їх систем – метод примежових функцій, досліджені питання, пов'язані з періодичними рішеннями і стійкістю рішень. А.Б. Васильєвою, В.Ф. Бутузовим та їх учнями створена й інтенсивно розвивається теорія існування і стійкості контрастних структур для крайових задач.

У роботах В.Ф. Бутузова та А.Б. Васильєвої широкий розвиток і застосування отримав так званий метод пограничних функцій та метод згладження “негладкостей”. Суть методу покажемо на прикладі задачі [53]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u - v^2(x, y)u &= g(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in (0, a) * (0, b) = \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тут $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $v(x, y)$ і $g(x, y, \varepsilon)$ – достатньо гладкі функції, $v(x, y) > 0$ в області Ω .

Асимптотичний розклад її розв'язку В.Бутузовим отримано у вигляді:

$$u_\varepsilon = \bar{u} + \Pi + P,$$

де $\bar{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, y)$ – регулярна частина асимптотики, Π – приме-

жові функції, вплив яких суттєвий близько сторін прямокутника, а P – кутові функції, вплив яких суттєвий близько вершин прямокутника. У відповідності до числа сторін прямокутника Π – функції складаються із чотирьох доданків:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\widehat{\Pi}_i(x, \eta) + \underline{\Pi}_i(\xi, y) + \widehat{\Pi}_i(x, \eta_*) + \underline{\Pi}_i(\xi_*, y)),$$

де $\eta = y / \varepsilon$, $\xi = x / \varepsilon$, $\eta_* = (b - y) / \varepsilon$, $\xi_* = (a - x) / \varepsilon$ – примежові змінні-розтяги.

Функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$, що служать для опису примежового шару в околі сторони $y = 0$, визначаються з допомогою оператора $\partial_{\eta\eta}^2 - v^2(x, 0), \eta > 0$ і граничних умов $\widehat{\Pi}_i(x, 0) = -\bar{u}_i(x, 0)$, $\widehat{\Pi}_i(x, \infty) = 0$. Тим самим $\widehat{\Pi} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ функції ліквідовують нев'язку, внесену в граничні умови на стороні $y = 0$ регулярною частиною асимптотики. Для $\widehat{\Pi}_0(x, \eta)$ одержимо вираз:

$$\widehat{\Pi}_0(x, \eta) = -\bar{u}_0(x, 0)e^{-v(x, 0)\eta}.$$

Далі можна послідовно знайти в явному вигляді $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ для $i = 1, 2, \dots$. Всі ці функції мають експоненціальну оцінку:

$$|\widehat{\Pi}_i(x, \eta)| \leq \alpha e^{-\gamma\eta}.$$

Аналогічно, знаходяться функції $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$, $\widehat{\Pi}_i(x, \eta_*)$ і $\underline{\Pi}_i(\xi_*, y)$.

Значимо, що примежові функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$, ліквідовуючи нев'язку в граничній умові на стороні $y = 0$, в свою чергу вносять додаткові умови на сторонах $x = 0$ і $x = a$. Ці нев'язки суттєві біля кутових точок $(0, 0)$ і $(a, 0)$, а далі з ростом y вони експоненціально затухають. Аналогічні нев'язки вносять функції $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$ на сторо-

ни $y=0$ і $y=b$, функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta_*)$ – на сторони $x=0$ і $x=a$, а функції $\underline{\Pi}_i(\xi_*, y)$ на сторони $y=0$ і $y=b$.

Для ліквідації цих неузгодженостей і вводяться кутові функції. В відповідності з числом вершин прямокутника P –функції складаються із чотирьох доданків:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\widehat{P}_i(\xi, \eta) + \underline{P}_i(\xi, \eta_*) + \widehat{P}_i(\xi_*, \eta_*) + \underline{P}_i(\xi_*, \eta)).$$

Зокрема, функції $\widehat{P}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{P}_i(\xi, \eta)$ служать для ліквідації неузгодженостей, внесених функціями $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ в граничну умову на сторони $x=0$ і функціями $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$ в граничну умову на сторони $y=0$. Рівняння для функцій $\widehat{P}_i(\xi, \eta)$ отримуються із вихідного рівняння (1.18) (точніше, із однорідного рівняння, що відповідає (1.18)) стандартним способом: переходом до змінних $\eta = y / \varepsilon$, $\xi = x / \varepsilon$, розкладом коефіцієнта $v^2(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta)$ в ряд по степеням ε і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε в обох частинах рівняння. Отже матимемо такі задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{P}_i(\xi, \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \widehat{P}_i(\xi, \eta) - v^2(0, 0) \widehat{P}_i(\xi, \eta) &= p_i(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \eta > 0, \\ \widehat{P}_i(0, \eta) &= -\widehat{\Pi}_i(0, \eta), \quad \widehat{P}_i(\xi, 0) = -\underline{\Pi}_i(\xi, 0), \\ \widehat{P}_i(\xi, \eta) &\rightarrow 0 \text{ при } (\xi + \eta) \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.19)$$

де $p_i(\xi, \eta)$ рекурентно виражаються через функції $\widehat{P}_s(\xi, \eta)$ з номерами $s < i$, зокрема $p_0(\xi, \eta) = 0$. Розв'язки задач (1.19) можна послідовно виразити в явному вигляді через функцію Гріна. Зокрема, в [53] авторами показано, що вони мають наступну експоненціальну оцінку:

$$|\widehat{P}_i(\xi, \eta)| \leq ce^{-\chi(\xi+\eta)}.$$

Аналогічно знаходяться і решта кутових функцій і мають таку ж оцінку.

Паралельно розвивалися й інші методи теорії збурень. Зокрема, метод регуляризації для сингулярно збурених диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, розроблений С.А.Ломовим [100], перетворився в самостійний напрям теорії сингулярних збурень і отримав свій розвиток в дослідженнях його учнів, відомий як метод «зрощування».

Роботи В.Г.Сушко [157, 158] присвячені вивченню лінійних і нелінійних рівнянь в частинних похідних параболічного, еліптичного та змішаного типу з внутрішніми перехідними шарами, що виникають через негладкість розв'язку вродженої задачі або в результаті нелінійності рівняння.

Серед методів обґрунтування справедливості побудованих асимптотичних розв'язків можна назвати метод апріорних оцінок, принцип максимуму, метод послідовних наближень, метод інтегральних нерівностей, метод бар'єрних функцій. Останній з названих методів, великий внесок у розробку якого внесли С. Н. Бернштейн, С. А. Чаплигін, М. Нагумо, є не тільки способом обґрунтування асимптотичних розв'язків, а й у ряді випадків застосовується для доведення існування точного розв'язку крайових задач.

Також розвитком і використанням асимптотичних методів займалися В. Вазов [51], М. Ван-Дайк [52], П. Файф, Р.О' Маллі, К. Чанг, Ф. Хауес, Н. Н. Мойсеєв, Н. Левінсон, С. Каменомостська, Є. Жидков, Д. Аронсон, О. Ладиженська, Б. Панайоті, В. П. Маслов [112], В. О. Митропольский, Н. Н. Боголюбов, С. Ф. Фещенко [163], І. М. Федоткін [162], А. М. Айзен, В. Г. Сушко [158, 159], А. Найфе [119], В. С. Берман [11], О. М. Буличова [42-44], Е. Т. Копсон, В. А.

Треногин [160, 161], В. В. Городецький, А. Я. Бомба та багато інших [80, 173, 175, 176, 183, 184, 202, 213-215].

Використовуючи ідеї переходу до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах, А. Я. Бомба, А. П. Власюк та їх учні розв'язали ряд нелінійних сингулярно-збурених крайових задач масоперенесення при фільтрації в неоднорідних анізотропних пористих середовищах. В роботах [27, 138] цю методику С.С. Каштаном, Д.О. Пригорницьким та І.М. Присяжнюком поширено на випадки багатозв'язних областей, а в [18, 32, 155, 156], за допомогою поєднання методу квазіконформних відображень та асимптотичного методу, Ю.Є. Климюком знайдено наближення розв'язків сингулярно збурених задач конвективної дифузії для просторових криволінійних областей.

Ці ж підходи також використано, модифіковано та розвинуто С.В. Барановським [27] при побудові асимптотичних наближень розв'язків нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях з вільними межами, які виникають при математичному моделюванні та дослідженні процесів розмиву дна русел.

В даний час асимптотичну теорію сингулярно збурених диференціальних рівнянь ще не можна вважати остаточно сформованою. Багато питань, що виникають при вивченні конкретних прикладних задач, все ще залишаються відкритими. Асимптотичні методи дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь продовжують розвиватися, незважаючи на інтенсивний розвиток чисельних методів. Справа в тому, що сингулярно збурені задачі при чисельному моделюванні, як правило, призводять до систем лінійних рівнянь з погано обумовленою матрицею. Тому при розв'язанні різницевого аналога сингулярно збуреної задачі відіграє помітну роль похибка машинного округлення чисел, яка може зро-

бити точність наближеного розв'язку неприйнятною. Крім цього, при використанні класичних різницевих схем для розв'язання рівнянь з малим параметром при старшій похідній виявляється, що ці схеми дають достатню точність, якщо крок сітки значно менше величини малого параметра, тому для стійкості різницевої схеми потрібно дуже невеликий крок сітки, що призводить до величезних витрат машинних ресурсів.

Для моделювання жорстких задач, розв'язки яких одночасно мають області як швидкої, так і повільної зміни, потрібні спеціальні числові алгоритми, які враховують апріорну інформацію про структуру розв'язку. Асимптотичний аналіз розв'язку може служити основою для розробки стійких і ефективних чисельних алгоритмів на нерівномірних сітках, застосованих до жорстких задач.

Один з прикладів проблем, пов'язаних із застосуванням класичних числових методів до розв'язання сингулярно збурених задач, наведений у статті А. М. Ільїна [81], там же запропонований спосіб створення спеціальних обчислювальних методів, заснованих на асимптотичному поданні розв'язку задачі. Таким чином, чисельні та асимптотичні методи не виключають, а взаємно доповнюють один одного.

Асимптотичні та чисельно-асимптотичні методи, з урахуванням можливостей сучасних інформаційних технологій, є достатньо гнучкими для багатократних рекурентних обчислень та побудов явно визначених просторово-часових розподілів фізичних параметрів та їх градієнтів. Вони є ефективними також при розв'язуванні зворотних задач по визначенню чи уточненню внутрішніх кінетичних параметрів систем (коефіцієнтів дифузії, констант адсорбції, коефіцієнтів консолідації тощо). Такі методи не потребують кардинального перероблення та модифікації програмних продуктів при зміні конструктивних параметрів робочих областей чи режимних характеристик систем.

Асимптотичний метод розв'язування типових модельних крайових задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на теперішній час ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими. Використовуючи ідеї переходу до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах, А.Я.Бомба, А.П.Власюк та їх учні розв'язали ряд нелінійних сингулярно збурених крайових задач масопереносу при фільтрації в неоднорідних анізотропних пористих середовищах.

Розглянемо асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія” в однорідному пористому середовищі на прикладі задачі для криволінійної чотирикутної області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженої чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами [27]:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} C|_{AB} &= C_*(M, t), \quad C|_{CD} = C^*(M, t), \quad C(M, 0) = C_0^0(M), \\ C|_{AD} &= C_{**}(M, t), \quad C|_{BC} = C^{**}(M, t), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad (1.22)$$

де $C(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній те-

чії у точці (x, y) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $C_*(M, t)$, $C^*(M, t)$, $C_0^0(M)$, $C_{**}(M, t)$, $C^{**}(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ($G = G_z \times (0, \infty)$).

Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох граничних умов (1.22) на умови: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$ (Q – невідомий параметр, повна витрата), дану задачу замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $w = w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_w = \{w: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, $\kappa = 1$ (κ – коефіцієнт фільтрації) при відповідності чотирьох кутових точок (див. рис. 1.1). Поставлена задача розв’язана у роботах [13], [27]. Аналогічні задачі для просторових областей розв’язані у роботі [18].

Припустивши, що задача (1.22) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв’язаною, здійснюємо заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1.20) та умовах (1.21) і приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

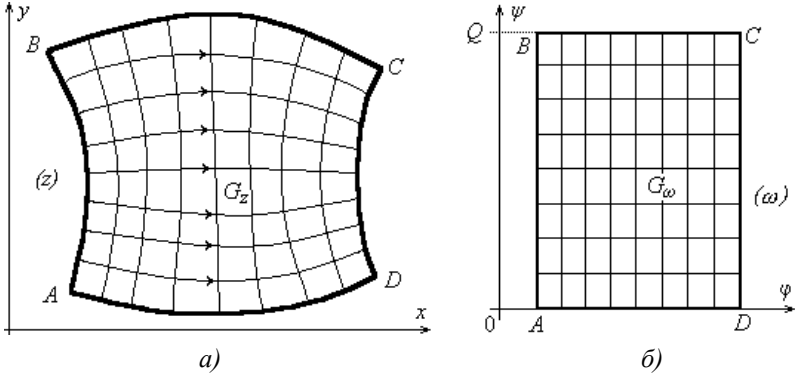


Рис. 1.1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) [C_{\varphi\varphi} + C_{\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi) C_\varphi = C_t, \quad (1.23)$$

$$C(\varphi_*, \psi, t) = C_*(\psi, t), \quad C(\varphi^*, \psi, t) = C^*(\psi, t), \quad C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t),$$

$$C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t), \quad C(\varphi, \psi, 0) = C_0^0(\varphi, \psi),$$

де $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z) знаходиться в процесі розв'язку задачі фільтрації.

Розв'язок C даної задачі з точністю $O(\varepsilon^2)$ знайдено у вигляді такого асимптотичного ряду [18], [27]:

$$C(\varphi, \psi, t) = C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} P_i(\varphi, \eta, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \bar{P}_i(\varphi, \mu, t) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (1.24)$$

де R_2 – залишковий член, $C_i(\varphi, \psi, t)$, ($i = \overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, t)$, ($i = \overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_z), $P_i(\varphi, \eta, t)$, $\bar{P}_i(\varphi, \mu, t)$, ($i = \overline{0,2}$) – функції типу пог-

раншару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$ (відповідно поправки на лініях течії BC та AD), $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = (Q - \psi)\varepsilon^{-1/2}$, $\mu = \psi \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регулятивні перетворення (змінні розтягів).

В результаті підстановки (1.24) у (1.23) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження головної частини $C_0(\varphi, \psi, t)$ розв’язку і поправки $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)C_{0\varphi} + C_{0t} = 0, \\ C_0|_{t=0} = C_0^0(\varphi, \psi), C_0|_{\varphi=\varphi_*} = C_*(\psi, t), \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)C_{1\varphi} + C_{1t} = g(\varphi, \psi, t), \\ g(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)(C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}), \\ C_1(\varphi, \psi, 0) = C_1(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

Характеристичне рівняння, рівняння характеристик і загальний розв’язок задачі (1.25) записується у вигляді:

$$\frac{d\varphi}{v^2(\varphi, \psi)} = \frac{dt}{1}, f(\varphi, \psi) - t = \rho, C_0(\varphi, \psi, t) = \Phi(f(\varphi, \psi) - t),$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) d\tilde{\varphi}$, $\Phi(\bullet)$ – довільна диференційована функція, ρ – довільна стала. Врахувавши початкову та крайову умови, її розв’язок запишеться у вигляді:

$$C_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), t < f(\varphi, \psi), \\ C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)), t \geq f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де f^{-1} – функція обернена до f по змінній φ . Використовуючи метод характеристик та врахувавши, що змінна ψ у задачі (1.26) фігурує лише як параметр, знаходимо розв’язок $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$C_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t > f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq f(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Якщо в якості умов узгодженості функцій $C_0^0(\varphi, \psi)$ та $C_*(\varphi, t)$ виконується лише умова неперервності $C_0^0(0, \psi) = C_*(0, t)$, то функція $C_0(\varphi, \psi, t)$ (не кажучи вже про $C_1(\varphi, \psi, t)$) не буде достатньо гладкою вздовж характеристик $t = f(\varphi, \psi)$ ($\forall \varphi \in (-\varphi_*, \varphi^*)$). А тому функція (1.24) не задовольнить рівняння (1.23) в цій області $\{(\varphi, \psi, t) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q, t > 0\}$.

З метою згладження цієї негладкості вздовж характеристики $t = f(\varphi, \psi)$ поступають таким чином. Спочатку замість цієї негладкої функції $C_0(\varphi, \psi, t)$ розглядають її згладження:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) = & 2^{-1}(1 - D(\theta))C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi) + \\ & + 2^{-1}(1 + D(\theta))C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)), \end{aligned}$$

$$\text{де } D(\theta) = \int_0^{\theta} e^{-\tau^2} d\tau, \quad \theta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(t - f(\varphi, \psi)).$$

Як неважко переконатись, функція $C \approx \tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}(\varphi, \psi, t)$ задовольняє рівняння (1.23) з вказаною точністю $O(\varepsilon^2)$, але порушує виконання початкової та граничних умов, які задовольнялись функцією $C_0(\varphi, \psi, t)$. З метою усунення нев'язки у початкових та граничних умовах будують функцію: $S(\varphi, \psi, t) = S_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon S_1(\varphi, \psi, t)$ таким чином, щоб функція $C = \tilde{C}_0 + S$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла рівняння (1.23) та початковій і граничній умовам:

$$\begin{cases} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[(\tilde{C}_0 + S)_{\varphi\varphi} + (\tilde{C}_0 + S)_{\psi\psi} \right] - v^2(\varphi, \psi) (\tilde{C}_0 + S)_{\varphi} = \\ = (\tilde{C}_0 + S)_t + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{C}_0 + S \Big|_{t=0, \varphi>0} = C_0^0(\varphi, \psi) + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{C}_0 + S \Big|_{\varphi=\varphi_*, t \geq 0} = C_*(\psi, t) + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Перейшовши в даних співвідношеннях від змінних (φ, ψ, t) до змінних (ξ, ψ, t) за формулами $\zeta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(t - f(\varphi, \psi))$, $\varphi = f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi)$ та розклавши функцію $v^2(\varphi, \psi) = v^2(f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi), \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\zeta = 0$, отримано для знаходження функцій S_0 і S_1 такі задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial t} - a(\psi, t) \frac{\partial^2 C_0}{\partial \zeta^2} = 0, \\ S_0 \Big|_{t=0, \zeta \leq 0} = 0, \quad S_0 \Big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta \leq 0} = 0, \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} = a(\psi, t) \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial \zeta^2} + b(\psi)(1 - \zeta^2)e^{-\zeta^2} \right), \\ S_1 \Big|_{t=0, \zeta \leq 0} = \zeta \frac{b(\psi)}{2} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-r^2} dr, \quad S_1 \Big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta \leq 0} = \zeta \frac{b(\psi)}{2} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-r^2} dr, \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\text{де} \begin{cases} b(\psi) = 2\sqrt{\pi}^{-1} \left(v^2(0, \psi) C_0^0(\varphi_*, \psi)_{\psi\psi} + C_*(\varphi, 0)_t \right), \\ a(\psi, t) = v^2(f^{-1}(t, \psi), \psi) + v^2(f^{-1}(t, \psi), \psi) (v'_{\psi}(f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi), \psi))^2. \end{cases}$$

Очевидно, що $S_0(\varphi, \psi, t) = 0$. А замінивши в другій із задач (1.27) крайову умову на промені $\{t = \sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta > 0\}$ на крайову умову на промені $\{t = 0, \zeta > 0\}$ матимемо з точністю $O(\varepsilon^2)$, що

$$S_1(\zeta, \psi, t) = 2^{-1} b(\psi) \left(\zeta \int_{\frac{\zeta}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\zeta} e^{-s^2} ds - \sqrt{\varepsilon} t e^{-\frac{\zeta^2}{4\varepsilon}} \right).$$

З метою задовольнити другу із крайових умов будується зовнішня примежова функція $\Pi = \Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \varepsilon^2 \Pi_2$ в околі $\varphi = \varphi_*$ таким чином, щоб функція $C(\varphi, \psi, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг) $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi_* - \varphi)$, $\varphi = \varphi_* - \varepsilon \xi$.

$$\text{Врахувавши співвідношення: } \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$

перепишемо оператор $L\Pi = \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \Delta \Pi - v^2(\varphi, \psi) \Pi_\varphi - \Pi_t$ у вигляді

$$\text{ді (у змінних } (\xi, \psi, t)): L\Pi = v^2(\varphi_* - \xi \varepsilon, \psi) \left[\left[\varepsilon^{-1} \Pi_{\xi\xi} + \varepsilon \Pi_{\psi\psi} \right] + \varepsilon^{-1} \Pi_\xi \right] - \Pi_t.$$

Розкладемо $v^2(\varphi_* - \xi \varepsilon, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_*$:

$$v^2(\varphi_* - \varepsilon \xi, \psi) = v^2(\varphi_*, \psi) + 2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)(-\varepsilon \xi) + (v^2(\varphi_*, \psi) + v(\varphi_*, \psi)v''(\varphi_*, \psi))(\varepsilon \xi)^2 + \dots$$

Прирівняємо в рівності $L(\Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \varepsilon^2 \Pi_2) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε :

$$\begin{aligned} & \varepsilon(v^2(\varphi_*, \psi, t) - \alpha \xi \varepsilon + \dots)(\varepsilon^{-2} \Pi_{\xi\xi} + \Pi_{\psi\psi}) + \\ & + \varepsilon^{-1}(v^2(\varphi_*, \psi, t) - \alpha \xi \varepsilon + \dots) \Pi_\xi = \Pi_t, \end{aligned}$$

де $\alpha = -2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)$. Тоді для визначення Π_0 , Π_1 і Π_2 одержимо такі рівняння із відповідними умовами:

$$\begin{cases} \Pi_{0\xi\xi} + \Pi_{0\xi} = 0, \\ \Pi_0(0, \psi, t) = C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t), \quad \Pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\ \Pi_{1\xi\xi} + \Pi_{1\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) f_1(\xi, \psi, t), \quad f_1(\xi, \psi, t) = \Pi_{0t}(\xi, \psi, t), \\ \Pi_1(\varphi_*, \psi, t) = -C_1(\varphi_*, \psi, t), \quad \Pi_1(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_{2\xi\xi} + \Pi_{2\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) f_2(\xi, \psi, t), \\ f_2(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi) \alpha_\xi \Pi_{0t}(\xi, \psi, t) + \Pi_{1t}(\xi, \psi, t) - \\ - v^2(\varphi_*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t), \\ \Pi_2(\varphi_*, \psi, t) = 0, \Pi_2(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тоді $\Pi_0(\xi, \psi, t) = (C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t))e^{-\xi}$, $\Pi_1(\xi, \psi, t) = -C_1(\varphi_*, \psi, t)e^{-\xi} - v^{-2}(\varphi_*, \psi)\xi\Pi_{0t}(\xi, \psi, t)$, $\Pi_2(\xi, \psi, t) = -((M_1 + M_2)\xi - M_2\xi^2/2)e^{-\xi}$, де $M_1 = -(v^{-2}(\varphi_*, \psi)C_{1t}(\varphi_*, \psi, t) + (C_{\psi\psi}^*(\psi, t) - C_{0\psi\psi}(\varphi_*, \psi, t)))$, $M_2 = v^{-4}(\varphi_*, \psi)\alpha(C_t^*(\psi, t) - C_{0t}(\varphi_*, \psi, t)) - v^{-4}(\varphi_*, \psi)(C_{tt}^*(\psi, t) - C_{0tt}(\varphi_*, \psi, t))$.

З метою задовольнити умову $C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t)$, будується зовнішня примежова функція $P = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1$ таким чином, щоб функція $P(\varphi, \psi, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводять заміну (розтяг) $\eta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}\psi$, $\psi = \eta\sqrt{\varepsilon}$. Врахувавши ці співвідношення, а також співвідношення: $\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$, перепишемо оператор

$$LP = \varepsilon v^2(\varphi, \psi)\Delta P - v^2(\varphi, \psi)P_\varphi - P_t \text{ у вигляді змінних } (\varphi, \eta, t):$$

$$LP = \varepsilon v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)[P_\varphi + \varepsilon^{-1}P_{\eta\eta}] - v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)P_\varphi - P_t.$$

Розклавши $v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$ (за степенями $\sqrt{\varepsilon}\eta$) і прирівнявши в рівності $L(P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , матимемо такі рівняння для визначення P_0 , $P_{1/2}$, P_1 .

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{0\eta\eta} + P_{0\varphi}) = P_{0t}, \\ P_0(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t) - W(\varphi, 0, t), P_0(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{1/2\eta\eta} + P_{1/2\varphi}) = K(\varphi, \eta, t), \\ P_{1/2}(\varphi, 0, t) = 0, P_{1/2}(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) = B(\varphi, \eta, t), \\ P_1(\varphi, 0, t) = 0, P_1(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

де $W(\varphi, \psi, t) = C_0 + \varepsilon C_1 + \Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \varepsilon^2 \Pi_2$, $K(\varphi, \eta, t) = P_{1t} - 2\eta v'(\varphi, 0, t)v^{-1}(\varphi, 0, t)P_{0t}$, $B(\varphi, \eta, t) = P_{2t} - 2\eta v'(\varphi, 0)\mathcal{G}(\varphi, 0)(P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) - v^2(\varphi, 0)P_{0\varphi\varphi} - \frac{v'^2(\varphi, 0) + v(\varphi, 0)v''(\varphi, 0)}{v^2(\varphi, 0)}\eta^2 P_{0t}$.

З метою задовольнити крайову умову $C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t)$, побудуємо зовнішню примежову функцію $\bar{P} = \bar{P}_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{P}_{1/2} + \varepsilon\bar{P}_1$ аналогічно до того, як це було зроблено для примежової функції P (для цього вводимо заміну $\mu = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(Q - \psi)$, $\psi = Q - \mu\sqrt{\varepsilon}$).

У випадку недостатньої узгодженості граничних умов вздовж ребер та кутових точок паралелепіпеда $\{(\varphi, \psi, t): \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q, 0 < t < \infty\}$ А.П. Власюком побудовані відповідні реброві та кутові функції. Звичайна погранфункція задачі (1.23) $\Pi(\xi, \psi, t)$, яка забезпечує виконання граничної умови на $\varphi = \varphi^*$, сама вносить нев'язки на границі $t = 0$, $\psi = 0$, $\psi = Q$. Погранфункції $P(\varphi, \eta, \tau)$ та $\bar{P}(\varphi, \mu, t)$, які слугують для виконання граничних умов на $\psi = 0$, $\psi = Q$, вносять неузгодженість в граничну умову на $\varphi = \varphi^*$. Для ліквідації неузгодженостей, внесених погранфункцією $\Pi(\xi, \psi, t)$ на границю $t = 0$ слугує кутова погранфункція $L^0(\xi, \psi, \tau)$, яка діє в околі ребра $\{\varphi = \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q\}$. Для ліквідації неузгодженостей внесених погранфункціями $\Pi(\xi, \psi, t)$, $P(\varphi, \eta, \tau)$ та $\bar{P}(\varphi, \mu, t)$,

$\bar{P}(\varphi, \mu, t)$ в околі ребер $\{\varphi = \varphi^*, \psi = 0, t \geq 0\}$ та $\{\varphi = \varphi^*, \psi = Q, t \geq 0\}$, слугують кутові погранфункції $L^1(\xi, \sigma_0, t)$, $L^2(\xi, \sigma_1, t)$, які діють відповідно в околах цих ребер. Неузгодженості, внесені кутовими погранфункціями $L^0(\xi, \psi, \tau)$ та $L^1(\xi, \sigma_0, t)$, $L^2(\xi, \sigma_1, t)$ в околах кутових точок $C(\varphi^*, 0, 0)$ і $C(\varphi^*, Q, 0)$, ліквіду-ють кутові погранфункції $\Gamma^0(\xi, \sigma_0, \tau)$ і $\Gamma^1(\xi, \sigma_1, \tau)$, які, відповідно, діють в околах цих точок. Звідси асимптотичний розклад задачі (1.18) в цьому випадку шукаємо у вигляді:

$$C(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = (C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t)) + \Pi(\xi, \psi, t) + \\ P(\varphi, \eta, t) + \bar{P}(\varphi, \mu, t) + L^0(\xi, \psi, \tau) + L^1(\xi, \sigma_0, t) + L^2(\xi, \sigma_1, t) + \\ + \Gamma^0(\xi, \sigma_0, \tau) + \Gamma^1(\xi, \sigma_1, \tau) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon),$$

де $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$, $\sigma_0 = \sqrt{\varepsilon^{-1}}\eta = \varepsilon^{-1}\psi$, $\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon^{-1}}\mu = (Q - \psi)\varepsilon^{-1}$, $\tau = \varepsilon^{-1}t$ – пограншарові змінні.

Як приклад, наведемо алгоритм знаходження кутової погран-функції $L^1(\xi, \sigma_0, t) = L_0^1(\xi, \sigma_0, t) + \varepsilon L_1^1(\xi, \sigma_0, t) + \varepsilon^2 L_2^1(\xi, \sigma_0, t)$.

1) Робимо наступну заміну змінних: $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi^* - \varphi)$, $\sigma_0 = \varepsilon^{-1}\psi$.

2) Розкладемо функцію $v^2(\varphi, \psi)$ в ряд по степенях ε :

$$v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \varepsilon\sigma_0) = v^2(\varphi^*, 0) + \varepsilon(-\xi v_{\xi\xi}^2(\varphi^*, 0) + \sigma_0 v_{\sigma_0\sigma_0}^2(\varphi^*, 0)) + \\ + \varepsilon^2(\xi^2 v_{\xi\xi\xi}^2(\varphi^*, 0) + \sigma_0^2 v_{\sigma_0\sigma_0}^2(\varphi^*, 0)) + \dots$$

Підставимо в рівняння (1.23) функцію $L^1(\xi, \sigma_0, t)$ та розклад $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \varepsilon\sigma_0)$ в ряд за степенями ε . Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо такі задачі для знаходження функції $L_i^1(\xi, \sigma_0, t)$, $i = \overline{0, 2}$:

$$\begin{cases} L_{i\xi\xi}^1 + L_{i\sigma_0\sigma_0}^1 + L_{i\xi}^1 = p_i, & L_i^1(\xi, \sigma_0, t) \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{\xi^2 + \sigma_0^2} \rightarrow \infty, \\ L_i^1(\varphi^*, \sigma_0, t) = -P_i(\varphi^*, \sigma_0, t), & L_i^1(\xi, 0, t) = -\Pi_i(\xi, 0, t), \end{cases}$$

де $p_0 = 0$, $p_1 = v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1$, $p_2 = v^{-2}(\varphi^*, 0)(L_{1t}^1 - v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1)$.

Для знаходження R_2 маємо задачу:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) [R_{2\varphi\varphi} + R_{2\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi} = R_{2t} + \varepsilon^3 g_1(\varphi, \psi, t),$$

$$R_2(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) =$$

$$R_2(\varphi, \psi, Q, \varepsilon) = R_2(\varphi, 0, t, \varepsilon) = 0,$$

де $g_1(\varphi, \psi, t)$ – функція, що виражається через відомі члени ряду (1.24).

На підставі принципу максимуму для параболічних рівнянь переконуємось у тому, що $|R_2| = O(\varepsilon^2)$.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЬНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНО- ДИFUZІЙНОГО ТЕПЛОМАСО- ПЕРЕНЕСЕННЯ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

При дослідженні процесів розповсюдження багатоконпонентних забруднень у водонасичених пористих середовищах за допомогою математичного моделювання та проведення комп'ютерних експериментів виникає чимало труднощів, пов'язаних із врахуванням усіх видів взаємодій між компонентами забруднюючої речовини.

У цьому розділі поширено методику дослідження сингулярно збурених процесів однокомпонентної конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок врахування тепло- та масообміну, породженого хімічною реакцією між компонентами дифундууючої речовини в одно- і двозв'язних плоских і просторових областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями [18, 27]. Узагальнено математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок дослідження відповідних багатоконпонентних неізотермічних процесів з урахуванням хімічної реакції між розчинними речовинами. Побудовано асимптотичне наближення розв'язків відповідних крайових задач, обґрунтованість яких забезпечується високим рівнем співпадання результатів числових експериментів та аналітичними розв'язками відповідних спеціальних типів модельних тестових задач. На основі отриманих числових результатів підтверджено прогнозовану інтенсифікацію дифузійних та масообмінних складових процесу зі збільшенням температури середовища. Це дає можливість контролювати вибір речовин, що візьмуть участь у реакції, а також оптимальної температури середовища з метою зменшення концентрації забруднюючої речовини на виході фільтраційної течії даної області.

Як приклад ефективності застосування запропонованого підходу розв'язування крайових задач, також досліджено сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного теплоперенесення у тонкій трубці з врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем та побудоване асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної модельної задачі з умовами третього роду на бічній границі. Такі задачі, зокрема, виникають при моделюванні роботи ґрунтового теплообмінника. Проведені числові експерименти дозволяють робити висновки про вплив параметрів теплообмінника, сезонної зміни температури ґрунту та його фізичних характеристик на ефективність відбору ґрунтового тепла. За результатами чисельних розрахунків, отримано, як і очікувалось, що ґрунти із вмістом води дозволяють отримати більший приріст теплової енергії порівняно із сухими піщаними та глинястими. Із збільшенням довжини трубки горизонтального теплообмінника відбувається приріст теплової енергії, але при перевищенні деякого критичного значення суттєво приросту не спостерігається, однак збільшуватимуться витрати електричної енергії на перекачування рідини по трубці.

2.1. Математичне моделювання сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення розчинних речовин у пористому середовищі

Для кількісного опису масоперенесення в пористих середовищах запишемо наступні співвідношення:

а) рівняння переносу і дифузії рідини уздовж осей координат

$$u_x = v_x C - D_x \frac{\partial C}{\partial x}, u_y = v_y C - D_y \frac{\partial C}{\partial y}, u_z = v_z C - D_z \frac{\partial C}{\partial z},$$

де $v_x C, v_y C, v_z C$ – конвективні складові процесу,
 $-D_x \frac{\partial C}{\partial x}, -D_y \frac{\partial C}{\partial y}, -D_z \frac{\partial C}{\partial z}$ – складові, що відповідають за дифузій-

не перенесення;

б) рівняння балансу маси речовини:

$$-\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} + g = \sigma \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Тут v_x, v_y, v_z – компоненти швидкості фільтрації, (м/добу);
 D_x, D_y, D_z – коефіцієнти гідродинамічної дисперсії (конвективної
 дифузії), (м²/добу); u_x, u_y, u_z – компоненти масової швидкості роз-
 чиненої речовини (кг/(м²·добу)); C – масова концентрація речови-
 ни в рідкій фазі, (кг/м³); g – інтенсивність внутрішніх джерел ре-
 човини (кг/(м²·добу)) у виділеному об'ємі. Записані рівняння слід
 розглядати разом з рівнянням фільтрації.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + g^* = \frac{\partial(\sigma \varphi)}{\partial t},$$

де $\kappa = \kappa(x, y, z, C)$ – коефіцієнт фільтрації, φ – напір, g^* – інтенси-
 вність джерел надходження розчинної речовини до області фільт-
 рації, σ – пористість.

Підставляючи перше рівняння у друге, отримаємо рівняння
 конвективної дифузії

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \vec{v} \text{grad } C + g = \sigma \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Як зазначалось вище, швидкість елементарної реакції при по-
 стійній температурі пропорційна добутку концентрацій реагуючих
 речовин в степені, що показує кількість моль речовини, що вступа-
 ють у реакцію. Відповідно функція джерела матиме вигляд:

$$g = k \cdot C_1^{\alpha_1} \cdot C_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot C_m^{\alpha_m},$$

де k – константа швидкості хімічної реакції, α_i – стехіометричні коефіцієнти.

Розглядається сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного масоперенесення чотирьох розчинних речовин при фільтрації в області $G = G_z \times (0, \infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній та $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 2.1,а). Три речовини (\tilde{C} , \tilde{U} , \tilde{H}) вступають у хімічну реакцію типу $a\tilde{C} + b\tilde{U} + c\tilde{H} = d \cdot \tilde{N}$, в результаті чого утворюється четверта розчинна речовина \tilde{N} .

Відповідна модельна задача типу „конвекція-дифузія-масообмін” [139] матиме вигляд:

$$D_1 \left(\tilde{C}_{xx}(x, y, t) + \tilde{C}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{C}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{C}_y(x, y, t) - k \cdot a \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{C}_t(x, y, t), \quad (2.1)$$

$$D_2 \left(\tilde{U}_{xx}(x, y, t) + \tilde{U}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{U}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{U}_y(x, y, t) - k \cdot b \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = U_t(x, y, t), \quad (2.2)$$

$$D_3 \left(\tilde{H}_{xx}(x, y, t) + \tilde{H}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{H}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{H}_y(x, y, t) - k \cdot c \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{H}_t(x, y, t), \quad (2.3)$$

$$D_4 \left(\tilde{N}_{xx}(x, y, t) + \tilde{N}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{N}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{N}_y(x, y, t) + k \cdot d \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{N}_t(x, y, t), \quad (2.4)$$

$$\tilde{C}|_L = \tilde{C}_*(M, t), \quad \tilde{C}|_{L^*} = \tilde{C}^*(M, t), \quad \tilde{C}(M, 0) = \tilde{C}_0^0(M),$$

$$\tilde{U}|_L = \tilde{U}_*(M, t), \quad \tilde{U}|_{L^*} = \tilde{U}^*(M, t), \quad \tilde{U}(M, 0) = \tilde{U}_0^0(M),$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}|_{L_*} &= \tilde{H}_*(M, t), \quad \tilde{H}|_{L^*} = \tilde{H}^*(M, t), \quad \tilde{H}(M, 0) = \tilde{H}_0^0(M), \\ \tilde{N}|_{L_*} &= \tilde{N}_*(M, t), \quad \tilde{N}|_{L^*} = \tilde{N}^*(M, t), \quad \tilde{N}(M, 0) = \tilde{N}_0^0(M), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (2.6)$$

де $\tilde{C}(x, y, t)$, $\tilde{U}(x, y, t)$, $\tilde{H}(x, y, t)$, $\tilde{N}(x, y, t)$ – відповідно концентрації чотирьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), M – біжуча точка відповідної кривої, $D_i = d_i \cdot \varepsilon$ ($i = \overline{1, 4}$, d_i – задані додатні дійсні числа) – коефіцієнти дифузії i -го сорту розчинної речовини, $k = k^* \cdot \varepsilon$, де k^* – константа швидкості хімічної реакції, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими). Розглядається випадок, коли швидкість хімічної реакції співрозмірна зі швидкістю дифузійного перенесення розчинних речовин, яка значно менша за швидкість конвективного перенесення ($\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$).

Функції $\tilde{C}_*(M, t)$, $\tilde{C}^*(M, t)$, $\tilde{C}_0^0(M)$, $\tilde{U}_*(M, t)$, $\tilde{U}^*(M, t)$, $\tilde{U}_0^0(M)$, $\tilde{H}_*(M, t)$, $\tilde{H}^*(M, t)$, $\tilde{H}_0^0(M)$, $\tilde{N}_*(M, t)$, $\tilde{N}^*(M, t)$, $\tilde{N}_0^0(M)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв'язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Розв'язавши задачу (2.6) шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), де $G_w = \{\tilde{w} = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*; 0 < \psi < Q\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу;

$\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$.

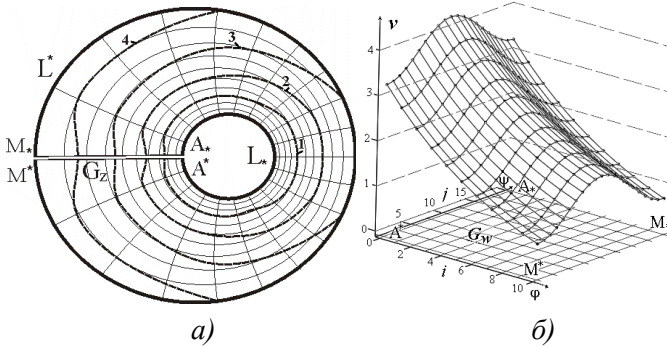


Рис.2.1. Фільтраційний фон (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б)

Параметр $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний

переріз G_w) знаходиться в процесі розв'язку даної задачі (див., напр., [84]). Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (2.1)–(2.4) та умовах (2.5), приходимо до відповідної задачі для області G_w (рис.2.1,б):

$$D_1 v^2(\varphi, \psi) (C_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) C_\varphi(\varphi, \psi, t) - k \cdot a \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(x, y, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = C_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.7)$$

$$D_2 v^2(\varphi, \psi) (U_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + U_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) U_\varphi(\varphi, \psi, t) - k \cdot b \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = U_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.8)$$

$$D_3 v^2(\varphi, \psi) (H_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + H_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) H_\varphi(\varphi, \psi, t) - k \cdot c \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = H_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.9)$$

$$D_4 v^2(\varphi, \psi) (N_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) N_\varphi(\varphi, \psi, t) +$$

$$+k \cdot d \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = N_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.10)$$

$$C \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_*(\psi, t), \quad C \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^*(\psi, t), \quad C \Big|_{t=0} = C_0^0(\varphi, \psi),$$

$$U \Big|_{\varphi=\varphi_*} = U_*(\psi, t), \quad U \Big|_{\varphi=\varphi^*} = U^*(\psi, t), \quad U \Big|_{t=0} = U_0^0(\varphi, \psi),$$

$$H \Big|_{\varphi=\varphi_*} = H_*(\psi, t), \quad H \Big|_{\varphi=\varphi^*} = H^*(\psi, t), \quad H \Big|_{t=0} = H_0^0(\varphi, \psi),$$

$$N \Big|_{\varphi=\varphi_*} = N_*(\psi, t), \quad N \Big|_{\varphi=\varphi^*} = N^*(\psi, t), \quad N \Big|_{t=0} = N_0^0(\varphi, \psi), \quad (2.11)$$

де $C(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $U(\varphi, \psi, t) = \tilde{U}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$,

$$H(\varphi, \psi, t) = \tilde{H}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), \quad N(\varphi, \psi, t) = \tilde{N}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$$

інші функції (C_* , C^* , C_0^0 , U_* , U^* , U_0^0 , H_* , H^* , H_0^0 , N_* , N^* , N_0^0) – інтерпретуються аналогічно.

Розв'язок (C, U, H, N) задачі (2.7)–(2.11) у випадку тримолекулярної реакції типу $\tilde{C} + \tilde{U} + \tilde{H} = \tilde{N}$ ($a = b = c = d = 1$) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C(\varphi, \psi, t) = C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C_1(\varphi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + R_2^1(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \quad (2.12)$$

$$U(\varphi, \psi, t) = U_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 U_1(\varphi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, t) + R_2^2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.13)$$

$$H(\varphi, \psi, t) = H_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 H_1(\varphi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i T_i(\xi, \psi, t) + R_2^3(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.14)$$

$$N(\varphi, \psi, t) = N_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 N_1(\varphi, \psi, t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Gamma_i(\xi, \psi, t) + R_2^4(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.15)$$

де $C_i(\varphi, \psi, t)$, $U_i(\varphi, \psi, t)$, $H_i(\varphi, \psi, t)$, $N_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C_0 , U_0 , H_0 , N_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); C_1 , U_1 , H_1 , N_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi_i(\xi, \psi, t)$, $P_i(\xi, \psi, t)$, $T_i(\xi, \psi, t)$, $\Gamma_i(\xi, \psi, t)$ ($i = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z); $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу); R_2^1 , R_2^2 , R_2^3 , R_2^4 – залишкові члени.

Аналогічно до [27, 53, 136], після підстановки (2.12)–(2.15) в (2.7)–(2.11) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій C_i , U_i , H_i , N_i ($i = \overline{0,1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^1(\varphi, \psi, t), \\ C_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^1(\varphi, \psi), \quad C_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^1(\psi, t), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot U_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + U_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^2(\varphi, \psi, t), \\ U_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^2(\varphi, \psi), \quad U_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^2(\psi, t), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot H_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + H_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^3(\varphi, \psi, t), \\ H_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^3(\varphi, \psi), \quad H_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^3(\psi, t), \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot N_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^4(\varphi, \psi, t), \\ N_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^4(\varphi, \psi), \quad N_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^4(\psi, t), \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
& \text{де } g_0^j(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_1^j(\varphi, \psi) = 0, \quad b_1^j(\psi, t) = 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad h_0^1(\varphi, \psi) = C_0^0(\varphi, \psi), \\
& h_0^2(\varphi, \psi) = U_0^0(\varphi, \psi), \quad h_0^3(\varphi, \psi) = H_0^0(\varphi, \psi), \quad h_0^4(\varphi, \psi) = N_0^0(\varphi, \psi), \\
& b_0^1(\psi, t) = C_*(\psi, t), \quad b_0^2(\psi, t) = U_*(\psi, t), \quad b_0^3(\psi, t) = H_*(\psi, t), \\
& b_0^4(\psi, t) = N_*(\psi, t), \quad g_1^1(\varphi, \psi, t) = d_1 v^2(\varphi, \psi) \times (C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \\
& g_1^2(\varphi, \psi, t) = d_2 v^2(\varphi, \psi) (U_{0\varphi\varphi} + U_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \\
& g_1^3(\varphi, \psi, t) = d_3 v^2(\varphi, \psi) (H_{0\varphi\varphi} + H_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \\
& g_1^4(\varphi, \psi, t) = d_4 v^2(\varphi, \psi) (N_{0\varphi\varphi} + N_{0\psi\psi}) + k^* C_0 U_0 H_0.
\end{aligned}$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$\begin{aligned}
C_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} C_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
U_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} U_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ U_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
H_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} H_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ H_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
N_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} N_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ N_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
C_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^1(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}
\end{aligned}$$

$$U_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^2(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^2(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$H_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^3(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^3(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$N_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) d\tilde{\varphi}$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$ від еквіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ до еквіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

$$\text{Функції } \Pi = \sum_{i=0}^2 \Pi_i \varepsilon^i, \quad P = \sum_{i=0}^2 P_i \varepsilon^i, \quad T = \sum_{i=0}^2 T_i \varepsilon^i, \quad \Gamma = \sum_{i=0}^2 \Gamma_i \varepsilon^i$$

призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими

регулярними частинами відповідно $C = \sum_{i=0}^1 C_i \varepsilon^i$, $U = \sum_{i=0}^1 U_i \varepsilon^i$,

$H = \sum_{i=0}^1 H_i \varepsilon^i$, $N = \sum_{i=0}^1 N_i \varepsilon^i$ в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Таким чином повинні виконуватись умови:

$$(C + \Pi)|_{\varphi=\varphi^*} = C^* + O(\varepsilon^2), \quad (U + P)|_{\varphi=\varphi^*} = U^* + O(\varepsilon^2),$$

$$(H + T)|_{\varphi=\varphi^*} = H^* + O(\varepsilon^2), \quad (N + \Gamma)|_{\varphi=\varphi^*} = N^* + O(\varepsilon^2). \quad \text{Ці функції}$$

знаходимо в результаті розв'язку наступних задач:

$$d_1 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^1(\xi, \psi, t),$$

$$d_2 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \left(P_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi^*, \psi) P_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^2(\xi, \psi, t),$$

$$d_3 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \left(T_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi^*, \psi) T_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^3(\xi, \psi, t),$$

$$d_4 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \left(\Gamma_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi^*, \psi) \Gamma_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^4(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_i \rightarrow 0, P_i \rightarrow 0, T_i \rightarrow 0, \Gamma_i \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$\Pi_i(0, \psi, t) = q_i^1(\psi, t), P_i(0, \psi, t) = q_i^2(\psi, t), T_i(0, \psi, t) = q_i^3(\psi, t),$$

$$\Gamma_i(0, \psi, t) = q_i^4(\psi, t), i = \overline{0, 2},$$

де $q_0^1(\psi, t) = C^*(\psi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, t)$, $q_0^2(\psi, t) = U^*(\psi, t) - U_0(\varphi^*, \psi, t)$,

$$q_0^3(\psi, t) = H^*(\psi, t) - H_0(\varphi^*, \psi, t), q_0^4(\psi, t) = N^*(\psi, t) - N_0(\varphi^*, \psi, t),$$

$$q_1^1(\psi, t) = -C_1(\varphi^*, \psi, t), q_1^2(\psi, t) = -U_1(\varphi^*, \psi, t), q_1^3(\psi, t) = -H_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$q_1^4(\psi, t) = -N_1(\varphi^*, \psi, t), q_2^1(\psi, t) = 0, q_2^2(\psi, t) = 0, q_2^3(\psi, t) = 0,$$

$$q_2^4(\psi, t) = 0, \sigma_0^1(\xi, \psi, t) = \sigma_0^2(\xi, \psi, t) = \sigma_0^3(\xi, \psi, t) = \sigma_0^4(\xi, \psi, t) = 0,$$

$$\sigma_1^1(\xi, \psi, t) = \Pi_{0r}(\xi, \psi, t), \sigma_1^2(\xi, \psi, t) = P_{0r}(\xi, \psi, t), \sigma_1^3(\xi, \psi, t) = T_{0r}(\xi, \psi, t),$$

$$\sigma_1^4(\xi, \psi, t) = \Gamma_{0r}(\xi, \psi, t), \sigma_2^1(\xi, \psi, t) = \Pi_{1r}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)\xi \times$$

$$\times v_{\xi}(\varphi^*, \psi) \Pi_{0r}(\xi, \psi, t) - d_1 v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t), \sigma_2^2(\xi, \psi, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= P_{1r}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_{\xi}(\varphi^*, \psi)\xi P_{0r}(\xi, \psi, t) - d_1 v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times P_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^3(\xi, \psi, t) = T_{1r}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t) - d_1 v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times T_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_{\xi}(\varphi^*, \psi)\xi T_{0r}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^4(\xi, \psi, t) = \Gamma_{1r}(\xi, \psi, t) - \\
&- \tau(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_{\xi}(\varphi^*, \psi)\xi \Gamma_{0r}(\xi, \psi, t) - d_1 v^2(\varphi^*, \psi)\Gamma_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t), \\
\tau(\xi, \psi, t) &= C_0(\varphi^*, \psi, t)U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0 + H_0(\varphi^*, \psi, t)P_0\Pi_0 + \Pi_0 T_0 P_0 + \\
&+ \Pi_0 U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0 + C_0(\varphi^*, \psi, t)P_0 T_0 + U_0(\varphi^*, \psi, t)H_0(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0.
\end{aligned}$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, \psi, t) = \left(C^*(\psi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_1}},$$

$$P_0(\xi, \psi, t) = \left(U^*(\psi, t) - U_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_2}},$$

$$T_0(\xi, \psi, t) = \left(H^*(\psi, t) - H_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_3}},$$

$$\Gamma_0(\xi, \psi, t) = \left(N^*(\psi, t) - N_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_4}}$$

$$\Pi_1(\xi, \psi, t) = -C_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_1}} - \frac{\xi \Pi_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$P_1(\xi, \psi, t) = -U_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_2}} - \frac{\xi P_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$T_1(\xi, \psi, t) = -H_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_3}} - \frac{\xi T_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$\Gamma_1(\xi, \psi, t) = -N_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{\frac{-\xi}{d_4}} - \frac{\xi \Gamma_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$\Pi_2(\xi, \psi, t) = \frac{2d_1^2 v'_{\xi}(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi \Pi_{0r} - \frac{d_1^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi \Pi_{0t} + d_1^2 \xi \Pi_{0\psi\psi} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_1}{v^2(\varphi^*, t)} \xi C_{1r} e^{\frac{-\xi}{d_1}} - \frac{d_1 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t), \\
P_2(\xi, \psi, t) & = \frac{2d_2^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi P_{0r} - \frac{d_2^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi P_{0rr} + d_2^2 \xi P_{0r\psi} + \\
& + \frac{d_2}{v^2(\varphi^*, t)} \xi U_{1r} e^{\frac{-\xi}{d_2}} - \frac{d_2 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t), \\
T_2(\xi, \psi, t) & = \frac{2d_3^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi T_{0r} - \frac{d_3^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi T_{0rr} + d_3^2 \xi T_{0r\psi} + \\
& + \frac{d_3}{v^2(\varphi^*, t)} \xi H_{1r} e^{\frac{-\xi}{d_3}} - \frac{d_3 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t), \\
\Gamma_2(\xi, \psi, t) & = \frac{2d_4^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi \Gamma_{0r} - \frac{d_4^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi \Gamma_{0rr} + d_4^2 \xi \Gamma_{0r\psi} + \\
& + \frac{d_4}{v^2(\varphi^*, t)} \xi N_{1r} e^{\frac{-\xi}{d_4}} + \frac{d_4 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t),
\end{aligned}$$

де $\zeta(\xi, \psi, t) = C_0(\varphi^*, \psi, t)U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0(\xi, \psi, t) + C_0(\varphi^*, \psi, t) \times$
 $\times H_0(\varphi^*, \psi, t)P_0(\xi, \psi, t) + U_0(\varphi^*, \psi, t)H_0(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0(\xi, \psi, t)$.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу

$$\begin{aligned}
& \varepsilon d_i v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \\
& - \varepsilon \cdot k^* \cdot \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^i(\varphi, \psi, t) - b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\
& R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\
& \varepsilon d_4 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi}^4(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + \\
& + \varepsilon \cdot k^* \cdot \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^4(\varphi, \psi, t) - b_4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

$$R_2^4(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0.$$

Тут $b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (2.12)–(2.15), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Аналогічно до [27, 53], вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2.1)–(2.4) та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0$, $L_* \times 0$ області $G = G_z \times [0, T]$, де $[0, T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ($i = 1, 4$, $(\varphi, \psi, t) \in G$).

Для знаходження розподілу концентрацій розчинних речовин в області G_z необхідно здійснити перехід до змінних $x_{\alpha, \beta} = x(\varphi_\alpha, \psi_\beta)$, $y_{\alpha, \beta} = y(\varphi_\alpha, \psi_\beta)$, в результаті чого отримуємо значення концентрацій у вузлах сітки. Після цього необхідно провести інтерполяцію отриманих масивів.

2.2. Асимптотичний метод розв’язання модельних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» у пористих середовищах

2.2.1. Побудова асимптотичних наближень розв’язків сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в двозв’язних криволінійних областях

Розглядається процес конвективно-дифузійного масоперенесення трьох розчинних речовин при фільтрації в області $G = G_z \times (0, \infty)$ (рис. 2.1,а). В процесі масоперенесення дві речовини (\tilde{C}^1 , \tilde{C}^2) вступають у хімічну реакцію типу $a_1\tilde{C}^1 + a_2\tilde{C}^2 = a_3 \cdot \tilde{C}^3$

[138, 139], в результаті чого утворюється третя розчинна речовина \tilde{C}^3 та виділяється певна кількість теплової енергії.

Відповідна модельна задача типу „конвекція-дифузія-тепломасообмін” матиме вигляд:

$$(D_i(\tilde{T})\tilde{C}_x^i(x, y, t))_x + (D_i(\tilde{T})\tilde{C}_y^i(x, y, t))_y - v_x(x, y)\tilde{C}_x^i(x, y, t) - v_y(x, y) \times \\ \times \tilde{C}_y^i(x, y, t) - k(\tilde{T}) \cdot \tilde{a}_i \cdot (\tilde{C}^1(x, y, t))^{a_1} (\tilde{C}^2(x, y, t))^{a_2} = \tilde{C}_t^i(x, y, t), \quad (2.20)$$

$$D_4(\tilde{T}_{xx}(x, y, t) + \tilde{T}_{yy}(x, y, t)) - v_x(x, y)\tilde{T}_x(x, y, t) - v_y(x, y)\tilde{T}_y(x, y, t) + \\ + k^* \cdot f^{**}(\tilde{C}^1(x, y, t), \tilde{C}^2(x, y, t)) = \tilde{T}_t(x, y, t), \quad (2.21)$$

$$\tilde{C}^i|_{L^*} = \tilde{C}_*^i(M, t), \quad \tilde{C}|_{L^*} = \tilde{C}^{i*}(M, t), \quad \tilde{C}^i(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{i0}(x, y),$$

$$\tilde{T}|_{L^*} = \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T}|_{L^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T}(x, y, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y), \quad (2.22)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (2.23)$$

де $\tilde{C}^i(x, y, t)$ ($i = \overline{1, 3}$) – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{T}(x, y, t)$ – температура середовища, $D_i(\tilde{T}) = d_i(\tilde{T}) \cdot \varepsilon$ – коефіцієнти дифузії ($d_i(\tilde{T})$ – задані дійсні функції), $D_4 = d_4 \cdot \varepsilon$ – коефіцієнт температуропровідності, $\tilde{a}_j = a_j \cdot \varepsilon$ ($j = \overline{1, 2}$), $\tilde{a}_3 = -a_3 \cdot \varepsilon$, $k(\tilde{T})$ – функція швидкості хімічної реакції, $k^* = \tilde{k} \cdot \varepsilon$, \tilde{k} – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції, $\tilde{C}_*^i(M, t)$, $\tilde{C}^{i*}(M, t)$, $\tilde{C}_0^{i0}(x, y)$, $\tilde{T}_*(M, t)$, $\tilde{T}^*(M, t)$, $\tilde{T}_0^0(x, y)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв’язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Як і в п. 2.1 переходимо до відповідної задачі для області комплексного потенціалу G_w :

$$D_i(T)v^2(\varphi, \psi) \left(C_{\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi, \psi) (D_{i\varphi}(T) \times \\ \times C_{\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + D_{i\psi}(T)C_{\psi}^i(\varphi, \psi, t)) - v_{\varphi}^2(\varphi, \psi)C_{\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \\ - k(T) \cdot \tilde{a}_i \cdot (C^1(\varphi, \psi, t))^{a_1} (C^2(\varphi, \psi, t))^{a_2} = C_i^i(\varphi, \psi, t), \quad (2.24)$$

$$D_4v^2(\varphi, \psi) \left(T_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_{\varphi}^2(\varphi, \psi)T_{\varphi}(\varphi, \psi, t) + \\ + k^* \cdot (C^1(\varphi, \psi, t))^{a_1} (C^2(\varphi, \psi, t))^{a_2} = T_i(\varphi, \psi, t), \quad (2.25)$$

$$C^i \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_*^i(\psi, t), \quad C^i \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^{i*}(\psi, t), \quad C^i \Big|_{t=0} = C_0^{i0}(\varphi, \psi), \\ T \Big|_{\varphi=\varphi_*} = T_*(\psi, t), \quad T \Big|_{\varphi=\varphi^*} = T^*(\psi, t), \quad T \Big|_{t=0} = T_0^0(\varphi, \psi), \quad (2.26)$$

де $C^i(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}^i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $T(\varphi, \psi, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ та інші функції ($C_*, C^{i*}, C_0^{i0}, T_*, T^*, T_0^0$) інтерпретуються аналогічно.

Розв'язок (C^1, C^2, C^3, T) , задачі (2.24)–(2.26) у випадку $a_i = 1$ ($i = \overline{1,3}$) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C^i(\varphi, \psi, t) = C_0^i(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C_1^i(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Pi_j^i(\xi, \psi, t) + R_2^i, \quad (2.27)$$

$$T(\varphi, \psi, t) = T_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 T_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j E_j(\xi, \psi, t) + R_2^4, \quad (2.28)$$

де $R_2^l(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $l = \overline{1,4}$, – залишкові члени; $C_j^i(\varphi, \psi, t)$, $T_j(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C_0^i , T_0 – розв'язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу); C_1^i , T_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi_j^i(\xi, \psi, t)$, $E_j(\xi, \psi, t)$ ($j = \overline{0,2}$) – функції типу прилежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$; $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне ре-

гуляризуюче перетворення. При цьому вимагатимемо, щоб функції $d_i(T)$ та $k(T)$ дозволяла розклад в ряд за степенями ε у вигляді:

$$d_i(T) = I_0^i(T_0) + \varepsilon I_1^i(T_0, T_1) + J_0^i(T_0, T_1, E_0) + \varepsilon J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1) + \\ + \varepsilon^2 J_2^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) + S^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon), \quad (2.29)$$

$$k(\tilde{T}) = G_0(T_0) + \varepsilon G_1(T_0, T_1) + M_0(T_0, T_1, E_0) + \varepsilon M_1(T_0, T_1, E_0, E_1) + \\ + \varepsilon^2 M_2(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) + F(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon), \quad (2.30)$$

де $I_0^i(\bullet), I_1^i(\bullet), J_j^i(\bullet), S^i(\bullet), G_0(\bullet), G_1(\bullet), M_j(\bullet), F(\bullet)$ ($j = \overline{0,2}$) – неперервні функції своїх аргументів.

Функції C_j^i, T_j ($i = \overline{1,3}, j = \overline{0,1}$) знаходимо із таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) C_{j\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{jt}^i(\varphi, \psi, t) = g_j^i(\varphi, \psi, t), \\ C_j^i(\varphi, \psi, 0) = h_j^i(\varphi, \psi), \quad C_j^i(\varphi_*, \psi, t) = b_j^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) T_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{jt}(\varphi, \psi, t) = g_j^4(\varphi, \psi, t), \\ T_j(\varphi, \psi, 0) = h_j^4(\varphi, \psi), \quad T_j(\varphi_*, \psi, t) = b_j^4(\psi, t), \end{cases}$$

де $g_0^i(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_1^i(\varphi, \psi) = 0, \quad b_1^i(\psi, t) = 0, \quad i = \overline{1,4},$
 $h_0^i(\varphi, \psi) = C_{0\varphi}^{i0}(\varphi, \psi), \quad h_0^4(\varphi, \psi) = T_0^0(\varphi, \psi), \quad b_0^i(\psi, t) = C_{0\psi}^i(\psi, t),$
 $b_0^4(\psi, t) = T_{0\psi}^4(\psi, t), \quad g_1^i(\varphi, \psi, t) = I_0^i(T_0) v^2(\varphi, \psi) (C_{0\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{0\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t)) -$
 $- \alpha_i G_0(T_0) C_0^1(\varphi, \psi, t) C_0^2(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi) (I_{0\varphi}^i(T_0) C_{0\varphi}^i(\varphi, \psi, t) +$
 $+ I_{0\psi}^i(T_0) C_{0\psi}^i(\varphi, \psi, t)), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1, \quad g_1^4(\varphi, \psi, t) =$
 $= d_4 v^2(\varphi, \psi) (T_{0\varphi\varphi}(\xi, \psi, t) + T_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t)) + k^* f^{**} (C_0^1(\varphi, \psi, t), C_0^2(\varphi, \psi, t)).$

Розв'язками даних задач є функції:

$$C_0^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_{0*}^i(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_{00}^{i0}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \quad i = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} T_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
C_1^i(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi^*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g_1^i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
T_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi^*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi). \end{cases}
\end{aligned}$$

Функції $\Pi = \sum_{j=0}^2 \Pi_j^i \varepsilon^j$ ($i = \overline{1,3}$), $E = \sum_{j=0}^2 E_j \varepsilon^j$, на відміну від ро-

зглянутих аналогічних функцій в п. 2.1, знаходимо в результаті почергового розв'язку наступних задач:

$$\begin{cases} d_4 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (E_{j\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) E_{j\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_j^4(\xi, \psi, t), \\ E_j(0, \psi, t) = q_j^4(\psi, t), \\ E_j(\xi, \psi, t) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_0^i(T_0, T_1, E_0) \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi}^i(\xi, \psi, t) = \sigma_j^i(\xi, \psi, t), \\ \Pi_j^i(0, \psi, t) = q_j^i(\psi, t), \\ \Pi_j^i(\xi, \psi, t) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, i = \overline{1,3}, j = \overline{0,2}, \end{cases}$$

де $q_0^i(\psi, t) = C^{i*}(\psi, t) - C_0^i(\varphi^*, \psi, t)$, $q_0^4(\psi, t) = T^*(\psi, t) - T_0(\varphi^*, \psi, t)$,

$$\begin{aligned}
q_1^i(\psi, t) &= -C_1^i(\varphi^*, \psi, t), & q_1^4(\psi, t) &= -T_1(\varphi^*, \psi, t), & q_2^m(\psi, t) &= 0, \\
\sigma_0^4(\xi, \psi, t) &= 0, & \sigma_0^i(\xi, \psi, t) &= v^2(\varphi^*, \psi) J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t), \\
\sigma_1^i(\xi, \psi, t) &= \Pi_{0t}^i(\xi, \psi, t) - (I_1^i(T_0, T_1) + J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times \Pi_{0\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) (J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) \times \\
&\times J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) + 2v(\varphi^*, \psi) v'(\varphi^*, \psi) \xi J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t), \\
\sigma_2^i(\xi, \psi, t) &= \Pi_{1t}^i(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi \Pi_{0t}^i(\xi, \psi, t) - I_0^i(T_0) \times \\
&\times v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}^i(\xi, \psi, t) - (I_1^i(T_0, T_1) + J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times \Pi_{1\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) - \Pi_{0\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) J_2^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) v^2(\varphi^*, \psi) - v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times (J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + \Pi_{2\xi}^i(\xi, \psi, t) J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) + \\
&+ J_{2\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) + J_{0\psi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\psi}^i(\xi, \psi, t)) + \\
&+ 2v(\varphi^*, \psi) v'(\varphi^*, \psi) \xi (J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t)) - \\
&- ((v'(\varphi^*, \psi))^2 + v''(\varphi^*, \psi)) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) \times J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) + \alpha_i M_0(T_0, T_1, E_0) \times \\
&\times \tau(\xi, \psi, t), & \sigma_1^4(\xi, \psi, t) &= E_{0t}(\xi, \psi, t), & \sigma_2^4(\xi, \psi, t) &= E_{1t}(\xi, \psi, t) + \\
&+ 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi E_{0t}(\xi, \psi, t) - d_4 v^2(\varphi^*, \psi) E_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) - k^* \tau(\xi, \psi, t), \\
\tau(\xi, \psi, t) &= C_0^1(\varphi, \psi, t) \Pi_0^2(\xi, \psi, t) + C_0^2(\varphi, \psi, t) \Pi_0^1(\xi, \psi, t) + \Pi_0^1(\xi, \psi, t) \times \\
&\times \Pi_0^2(\xi, \psi, t).
\end{aligned}$$

Залишкові члени оцінюємо з наступних задач:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\varepsilon d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon) v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) + \\
&+ v^2(\varphi, \psi) (d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon))'_\varphi R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + \\
&+ (d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon))'_\psi R_{2\psi}^i(\varphi, \psi, t) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \\
&- \varepsilon \cdot \alpha_i k (R_2^4(\varphi, \psi, t, \varepsilon)) R_{2\xi}^1(\varphi, \psi, t) R_2^2(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^i(\varphi, \psi, t) - \\
&- b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\
&R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}),
\end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \varepsilon d_4 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^4(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + \\ + \varepsilon \cdot k \cdot f^{**}(R_2^1(\varphi, \psi, t), R_2^2(\varphi, \psi, t)) = R_{2t}^4(\varphi, \psi, t) - b_4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\ R_2^4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

де $b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (2.27)–(2.28), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$. Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2.20)–(2.21), та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0, L_* \times 0$ області $G = G_z \times [0, T]$, де $[0, T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ($i = \overline{1, 4}, (\varphi, \psi, t) \in G$).

2.2.2. Моделювання сингулярно збурених процесів типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в пористих багат шарових середовищах

Розглянемо модельну задачу процесу масопереносу забруднюючих речовин у багат шаровому кусково-однорідному водонасиченому пористому середовищі – двозв'язній криволінійній області G_z рис.2.2 а), обмеженій гладкими замкненими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній, що розділяється еквіпотенціальними лініями L_j ($j = \overline{1, m-1}$) на m підобластей G_z^j [18], яка описується системою рівнянь:

$$D_i(\tilde{C}_{xx}^i(x, y, t) + \tilde{C}_{yy}^i(x, y, t)) - v_x(x, y)\tilde{C}_x^i(x, y, t) - v_y(x, y)\tilde{C}_y^i(x, y, t) -$$

$$-k(\tilde{T}) \cdot a_i \cdot I_i \cdot (\tilde{C}^1(x, y, t))^{a_1} (\tilde{C}^2(x, y, t))^{a_2} = \sigma \tilde{C}_i^1(x, y, t), \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.31)$$

$$D_4(\tilde{T}_{xx}(x, y, t) + \tilde{T}_{yy}(x, y, t)) - v_x(x, y) \tilde{T}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{T}_y(x, y, t) + k^* \cdot (\tilde{C}^1(x, y, t))^{a_1} (\tilde{C}^2(x, y, t))^{a_2} = \tilde{T}_i(x, y, t), \quad (2.32)$$

$$(v_x, v_y) = \kappa \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad (2.33)$$

з початковими та крайовими умовами:

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^i|_{L_*} &= \tilde{C}_*^i(M, t), \quad \tilde{C}^i|_{L^*} = \tilde{C}^{i*}(M, t), \quad \tilde{C}^i(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{i0}(x, y), \\ \tilde{T}|_{L_*} &= \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T}|_{L^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T}(x, y, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y), \end{aligned} \quad (2.35)$$

і умовами узгодженості на еквіпотенціальних лініях L_j ($j = \overline{1, m-1}$):

$$\varphi|_{L_{j-}} = \varphi|_{L_{j+}} = \varphi_{*j}^*, \quad \kappa_j \cdot \varphi_n'|_{L_{j-}} = \kappa_{j+1} \cdot \varphi_n'|_{L_{j+}}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{C}^i|_{L_{j-}} = \tilde{C}^i|_{L_{j+}}, \quad \tilde{T}|_{L_{j-}} = \tilde{T}|_{L_{j+}}, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \left(D_{i,j}(T) \frac{\partial \tilde{C}^i}{\partial \tilde{n}} - v_n^j \tilde{C}^i \right) \Big|_{L_{j-}} &= \left(D_{i,j+1}(T) \frac{\partial \tilde{C}^i}{\partial \tilde{n}} - v_n^j \tilde{C}^i \right) \Big|_{L_{j+}}, \\ \left(D_{i,j} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{n}} - v_n^j \tilde{T} \right) \Big|_{L_{j-}} &= \left(D_{i,j+1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{n}} - v_n^j \tilde{T} \right) \Big|_{L_{j+}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Тут $\tilde{C}^i(x, y, t)$ ($i = \overline{1, 3}$) – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{T}(x, y, t)$ – температура середовища, $k(\tilde{T}) = k^*(\tilde{T}) \cdot \varepsilon$ – функція швидкості хімічної реакції, $k = k^* \cdot \varepsilon$, k^* – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції, a_i , $i = \overline{1, 3}$ – деякі фіксовані натуральні числа, значення яких залежать від конкретної реакції і визначають кількість молекул відповідних речовин, що візьмуть участь в реакції (для спрощення викладу розглянемо випадок $a_i = 1$), φ і $\vec{v}(v_x, v_y)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації

($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg 0$), φ_* , φ^* – довільні дійсні додатні числа, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної кривої, M – довільна точка відповідної кривої, v_n^j – нормальні складові швидкості на відповідних лініях розділу підобластей ($j = \overline{1, m-1}$), φ_{*j}^* – невідомі значення потенціалу на відповідних лініях розділу, $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*m-1}^* < \varphi^* < \infty$, $I_1 = I_2 = 1$, $I_3 = -1$ [87].

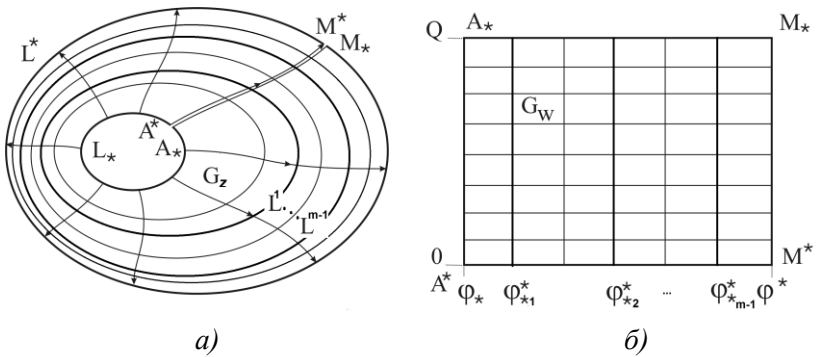


Рис. 2.2 Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Середовище характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa = \{\kappa_j, (x, y) \in G_z^j\}$, активної пористості $\sigma = \{\sigma_j, (x, y) \in G_z^j\}$, дифузії $D_i = \{D_{i,j} = d_{i,j} \cdot \varepsilon, (x, y) \in G_z^j, i = \overline{1, 3}\}$, теплопровідності $D_4 = \{D_{4,j} = d_{4,j} \cdot \varepsilon, (x, y) \in G_z^j\}$, де κ_j , σ_j , $d_{i,j}$ – деякі дійсні додатні числа ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, 4}$), $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (2.34)-(2.35) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області, а також вздовж ліній розділу підобластей розділу підобластей.

Постановка задачі в області комплексного потенціалу. Задача (2.33), (2.34), (2.36) вважається розвязаною шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ рис.2.2. б) (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_z = G_z \setminus L$; L – розріз області G_z вздовж деякої лінії течії A_*M^* [27] зокрема, знаходено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ та отримано динамічну сітку. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (2.31), (2.32) та умовах (2.35), (2.37), (2.38) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$D_i v^2(\varphi, \psi) \left(C_{\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) C_{\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - I_i \cdot k(T) \cdot C^1(x, y, t) C^2(x, y, t) = C_{,i}^i(\varphi, \psi, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.39)$$

$$D_4 v^2(\varphi, \psi) \left(T_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) T_{\varphi}(\varphi, \psi, t) + k \cdot C^1(x, y, t) C^2(x, y, t) = T_{,i}(\varphi, \psi, t), \quad (2.40)$$

$$C^i \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_{,*}^i(\psi, t), \quad C^i \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^{i*}(\psi, t), \quad C^i \Big|_{t=0} = C_0^{i0}(\varphi, \psi), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$N \Big|_{\varphi=\varphi_*} = N_*(\psi, t), \quad N \Big|_{\varphi=\varphi^*} = N^*(\psi, t), \quad N \Big|_{t=0} = N_0^0(\varphi, \psi),$$

$$T \Big|_{\varphi=\varphi_*} = T_*(\psi, t), \quad T \Big|_{\varphi=\varphi^*} = T^*(\psi, t), \quad T \Big|_{t=0} = T_0^0(\varphi, \psi), \quad (2.41)$$

$$C^i(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) = C^i(\varphi_{*j+}^*, \psi, t), \quad T(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) = T(\varphi_{*j+}^*, \psi, t),$$

$$D_{i,j-1}(C^i)'_{\varphi}(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) + \kappa_{j-1} C^i(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) =$$

$$= D_{i,j}(C^i)'_{\varphi}(\varphi_{*j+}^*, \psi, t) + \kappa_j C^i(\varphi_{*j+}^*, \psi, t),$$

$$D_{4,j-1} T'_{\varphi}(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) + \kappa_{j-1} T(\varphi_{*j-}^*, \psi, t) =$$

$$= D_{4,j} T'_{\varphi}(\varphi_{*j+}^*, \psi, t) + \kappa_j T(\varphi_{*j+}^*, \psi, t), \quad (j = \overline{2, m}), \quad (2.42)$$

де $T(\varphi, \psi, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $C^i(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}^i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $i = \overline{1, 3}$ інші функції $(C_{,*}^i, C^{i*}, C_0^{i0}, T_*, T^*, T_0^0)$ – інтерпретуються аналогічно.

$$\text{Наближені розв'язки } C^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_1^i, & \varphi_* < \varphi < \varphi_{*1}^*, \\ C_2^i, & \varphi_{*1}^* < \varphi < \varphi_{*2}^*, \\ \dots \\ C_m^i, & \varphi_{*(m-1)}^* < \varphi < \varphi^* \end{cases} \quad i$$

$$T(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} T_1, & \varphi_* < \varphi < \varphi_{*1}^*, \\ T_2, & \varphi_{*1}^* < \varphi < \varphi_{*2}^*, \\ \dots \\ T_m, & \varphi_{*(m-1)}^* < \varphi < \varphi^* \end{cases} \quad \text{задачі (9)-(13) з точністю } O(\varepsilon^2) \text{ знайдено у вигляді асимптотичних рядів:}$$

$$\begin{aligned} C_j^i(\varphi, \psi, t) &= C_{j,0}^i(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C_{j,1}^i(\varphi, \psi, t) + I_{1,j} \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s P_{j,s}^i(\varrho_{j-1}, \psi, t) + \\ &+ I_{2,j} \sum_{i=0}^2 \varepsilon^s \tilde{P}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t) + I_{3,j} \sum_{i=0}^2 \varepsilon^s P_s(\xi, \psi, t) + R_2^i, \quad i = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} T_j(\varphi, \psi, t) &= T_{j,0}(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 T_{j,1}(\varphi, \psi, t) + I_{1,j} \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s F_{j,s}^i(\varrho_{j-1}, \psi, t) + \\ &+ I_{2,j} \sum_{i=0}^2 \varepsilon^s \tilde{F}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t) + I_{3,j} \sum_{i=0}^2 \varepsilon^s F_s(\xi, \psi, t) + R_2^4, \end{aligned} \quad (2.44)$$

де $C_{j,0}^i(\varphi, \psi, t)$, $T_{j,0}(\varphi, \psi, t)$ – розв'язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу) $C_{j,1}^i(\varphi, \psi, t)$, $T_{j,1}(\varphi, \psi, t)$ – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії та масообміну всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $P_{j,s}^i(\xi, \psi, t)$, $F_{j,s}(\xi, \psi, t)$ ($s = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$; $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення, $\tilde{P}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t)$ та $\tilde{F}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t)$ – функції типу примежового шару в околах $\varphi = \varphi_{*j}^*$ ($j = \overline{1, m-1}$) (поправки в околах ліній розділу підобластей G_w^j ($j = \overline{1, m-1}$)) [42-44], $\tilde{\varphi}_j = (\varphi_{*j}^* - \varphi) \varepsilon^{-1}$, $\varrho_j = (\varphi - \varphi_{*j}^*) \varepsilon^{-1}$

$(j = \overline{1, m-1}) \quad I_{1,1} = 0, \quad I_{1,j} = 1 \quad (j = \overline{2, m}), \quad I_{2,m} = 0, \quad I_{2,j} = 1 \quad (j = \overline{1, m-1}),$
 $I_{3,m} = 1, \quad I_{3,j} = 0 \quad (j = \overline{1, m-1}), \quad R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad i = \overline{1, 4}$ – залишкові члени.

Підставляючи (2.43), (2.44) в (2.39)-(2.42), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε [27] отримуємо такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)(C_{1,s}^i)'_{\varphi} + \sigma_1(C_{1,s}^i)'_t = g_{1,s}^i(\varphi, \psi, t), \quad i = \overline{0, 3}, \quad s = \overline{0, 1} \\ C_{1,s}^i(\varphi, \psi, 0) = u_{1,s}^i(\varphi, \psi), \quad C_{1,s}^i(\varphi_*, \psi, t) = h_{1,s}^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)(C_{1,s}^i)'_{\varphi} + \sigma_j(C_{1,s}^i)'_t = g_{j,s}^i(\varphi, \psi, t), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad s = \overline{0, 1}, \\ C_{1,s}^i(\varphi, \psi, 0) = u_{j,s}^i(\varphi, \psi), \quad C_{1,s}^i(\varphi_{*(j-1)}, \psi, t) = h_{j,s}^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)(T_{1,s}^i)'_{\varphi} + \sigma_1(T_{1,s}^i)'_t = q_{1,s}^i(\varphi, \psi, t), \quad i = \overline{0, 3}, \quad s = \overline{0, 1} \\ T_{1,s}^i(\varphi, \psi, 0) = b_{1,s}^i(\varphi, \psi), \quad T_{1,s}^i(\varphi_*, \psi, t) = r_{1,s}^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)(C_{1,s}^i)'_{\varphi} + \sigma_j(C_{1,s}^i)'_t = g_{j,s}^i(\varphi, \psi, t), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad s = \overline{0, 1}, \\ C_{1,s}^i(\varphi, \psi, 0) = u_{j,s}^i(\varphi, \psi), \quad C_{1,s}^i(\varphi_{*(j-1)}, \psi, t) = h_{j,s}^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$g_{j,0}^i(\varphi, \psi, t) = 0, \quad u_{1,0}^i(\varphi, \psi) = C_0^{i0}(\varphi, \psi), \quad h_{1,0}^i(\psi, \chi, t) = C_*^i(\psi, t),$$

$$g_{j,1}^i = d_{i,j} \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot \left((C_{j,0}^i)'_{\varphi\varphi} + (C_{j,0}^i)'_{\psi\psi} \right) - I_i \cdot k^*(T_0) \cdot C_0^1 \cdot C_0^2, \quad u_{j,1}^i(\varphi, \psi) = 0,$$

$$h_{j,1}^i(\psi, t) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, m}), \quad h_{j,s}^i(\psi, t) = C_{j-1,s}^i(\varphi_{*j-1}, \psi, t) \quad (j = \overline{2, m}),$$

$$\varphi_{*0} = \varphi_*, \quad q_{j,0}^i(\varphi, \psi, t) = 0, \quad b_{1,0}^i(\varphi, \psi) = T_0^0(\varphi, \psi), \quad r_{1,0}^i(\psi, t) = T_*(\psi, t),$$

$$q_{j,1} = d_{4,j} v^2(\varphi, \psi) \left((T_{j,0}^i)'_{\varphi\varphi} + (T_{j,0}^i)'_{\psi\psi} \right) + k^* \cdot C_0^1 C_0^2, \quad b_{j,1}(\varphi, \psi) = 0, \quad r_{j,1}(\psi, t) = 0$$

$$(j = \overline{1, m}), \quad r_{j,s}^i(\psi, t) = T_{j-1,s}^i(\varphi_{*j-1}, \psi, t) \quad (j = \overline{2, m}).$$

У результаті їх розв'язання методом характеристик отримаємо:

$$C_{1,0}^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_*^i(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), & t \geq f_1(\varphi, \psi), \\ C_0^{i0}(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f_1(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$T_{1,0}^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} T_*(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), & t \geq f_1(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f_1(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$C_{1,1}^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_{1,1}^i(\tilde{\varphi}, \psi, f_1(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f_1(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f_1(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_{1,1}^i(f_1^{-1}(\tilde{t} + f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f_1(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$T_{1,1}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot q_{1,1}(\tilde{\varphi}, \psi, f_1(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f_1(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f_1(\varphi, \psi), \\ \int_0^t q_{1,1}(f_1^{-1}(\tilde{t} + f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f_1(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$C_{j,0}^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_{j-1,0}^i(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, t - f_j(\varphi, \psi)), & t \geq f_j(\varphi, \psi), \\ C_0^{i0}(f_j^{-1}(f_j(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f_j(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$T_{j,0}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} T_{j-1,0}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, t - f_j(\varphi, \psi)), & t \geq f_j(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f_j^{-1}(f_j(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f_j(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$C_{j,1}^i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{j,1}^i(\tilde{\varphi}, \psi, f_j(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f_j(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \chi)} d\tilde{\varphi} + \\ + C_{j-1,1}^i(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, t), & t \geq f_j(\varphi, \psi), \\ \frac{1}{\sigma_j} \int_0^t g_{j,1}^i(f_j^{-1}(\tilde{t} + f_j(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$T_{j,1}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{q_{j,1}(\tilde{\varphi}, \psi, f_j(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f_j(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \chi)} d\tilde{\varphi} + \\ + T_{j-1,1}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, t), & t \geq f_j(\varphi, \psi), \\ \int_0^t q_{j,1}(f_j^{-1}(\tilde{t} + f_j(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

де $f_j(\varphi, \psi) = \kappa_1 \sigma_1 \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$ – час проходження забруднюючими час-

тинками шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi))$ до точки $(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$

вздовж відповідної лінії течії, а $f_j(\varphi, \psi) = \kappa_j \sigma_j \int_{\varphi_{*(j-1)}}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$ – від точки $(x(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi), y(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi))$ до точки $(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ ($j = \overline{2, m}$), f_j^{-1} ($j = \overline{1, m}$) – функції, обернені відповідно до f_j ($j = \overline{1, m}$) відносно змінної φ (зазначимо, що такі функції існують, оскільки $v^2(\varphi, \psi)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а κ_j, σ_j ($j = \overline{1, m}$) – додатньо-визначені сталі).

Для знаходження примежових поправок Π_i ($i = \overline{0, n+1}, j = \overline{1, m}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ одержимо такі задачі:

$$d_{i,m} \cdot v^2(\varphi^*, \psi) P_{s\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) P_{s\xi}^i(\xi, \psi, t) = w_s^i(\xi, \psi, t), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$d_{4,m} \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (F_{s\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) F_{s\xi}(\xi, \psi, t) = w_s^4(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_s^i \rightarrow 0, \quad F_s \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$P_s^i(0, \psi, t) = p_s^i(\psi, t), \quad F_i(0, \psi, t) = p_s^4(\psi, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad s = \overline{0, 2},$$

$$\text{де } p_0^i(\psi, t) = C^{i*}(\psi, t) - C_{m,0}^i(\varphi^*, \psi, t), \quad p_0^4(\psi, t) = T^*(\psi, t) - T_{m,0}(\varphi^*, \psi, t),$$

$$p_1^i(\psi, t) = -C_{m,1}^i(\varphi^*, \psi, t), \quad p_1^4(\psi, t) = -T_{m,1}(\varphi^*, \psi, t), \quad p_2^i(\psi, t) = 0,$$

$$w_0^i(\xi, \psi, t) = 0, \quad w_1^i(\xi, \psi, t) = P_{0r}^i(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^4(\xi, \psi, t) = F_{0r}(\xi, \psi, t),$$

$$w_2^i(\xi, \psi, t) = P_{1r}^i(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_{\xi}(\varphi^*, \psi) \xi P_{0r}^i(\xi, \psi, t) -$$

$$-d_{m,1} v^2(\varphi^*, \psi) P_{0\psi\psi}^i(\xi, \psi, t) + k^*(T_0) \tau(\xi, \psi, t); \quad w_2^4(\xi, \psi, t) = F_{1r}(\xi, \psi, t) +$$

$$+ 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_{\xi}(\varphi^*, \psi) \xi F_{0r}(\xi, \psi, t) - k^* \tau(\xi, \psi, t) - d_{4,m} v^2(\varphi^*, \psi) F_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t),$$

$$\tau(\xi, \psi, t) = C_{m,0}^1(\varphi^*, \psi, t) P_0^2(\xi, \psi, t) + P_0^1(\xi, \psi, t) C_{m,0}^2(\varphi^*, \psi, t) +$$

$$+ P_0^1(\xi, \psi, t) P_0^2(\xi, \psi, t).$$

Розв'язки цих задач знайдено у вигляді:

$$P_0^i(\xi, \psi, t) = \frac{d_{i,m}}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left(C^{i*}(\psi, t) - C_{m,0}^i(\varphi^*, \psi, t) \right) e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi) \xi}{d_{i,m}}},$$

$$\begin{aligned}
F_0(\xi, \psi, t) &= \frac{d_{4,m}}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left(T^*(\psi, t) - T_{m,0}(\varphi^*, \psi, t) \right) e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \xi}, \\
P_1^i(\xi, \psi, t) &= \frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \xi} \int_0^{\widehat{\xi}} w_1^i(\widehat{\xi}, \psi, t) e^{\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \widehat{\xi}} d\widehat{\xi} \right) d\xi - C_{m,1}^i(\varphi^*, \psi, t), \\
T_1(\xi, \psi, t) &= \frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \xi} \int_0^{\widehat{\xi}} w_1^4(\widehat{\xi}, \psi, t) e^{\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \widehat{\xi}} d\widehat{\xi} \right) d\xi - T_{m,1}(\varphi^*, \psi, t), \\
P_2^i(\xi, \psi, t) &= \frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \xi} \int_0^{\widehat{\xi}} w_2^i(\widehat{\xi}, \psi, t) e^{\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{i,m}} \widehat{\xi}} d\widehat{\xi} \right) d\xi, \\
T_2(\xi, \psi, t) &= \frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \xi} \int_0^{\widehat{\xi}} w_2^4(\widehat{\xi}, \psi, t) e^{\frac{v^2(\varphi^*, \psi)}{d_{4,m}} \widehat{\xi}} d\widehat{\xi} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Задачі для знаходження поправок на поверхнях розділу шарів $\tilde{P}_{j,s}^i = \tilde{P}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t)$ ($j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{1, 3}$, $s = \overline{0, 2}$) та $\tilde{P}_{j,s}^i = \tilde{P}_{j,s}^i(\varrho_{j-1}, \psi, t)$ ($j = \overline{2, m}$, $i = \overline{1, 3}$, $s = \overline{0, 2}$) мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned}
& d_{i,j} (\tilde{P}_{j,s}^i)''_{\tilde{\varphi}_j \tilde{\varphi}_j} + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) (\tilde{P}_{j,s}^i)'_{\tilde{\varphi}_j} = \tilde{\omega}_{j,s}^i, \\
& d_{i,j+1} (P_{j+1,s}^i)''_{\varrho_j \varrho_j} - v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) (P_{j+1,s}^i)'_{\varrho_j} = \mathcal{G}_{j,s}^i, \\
& \tilde{P}_{j,s}^i(\tilde{\varphi}_j, \psi, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad P_{j+1,s}^i(\varrho_j, \psi, t) \xrightarrow{\varrho_j \rightarrow \infty} 0, \\
& \tilde{P}_{j,s}^i(0, \psi, t) = P_{j+1,s}^i(0, \psi, t), \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
& d_{i,j} \left((C_{j,s}^i)'_{\tilde{\varphi}_j}(0, \psi, t) + (\tilde{P}_{j,s}^i)'_{\tilde{\varphi}_j}(0, \psi, t) \right) + \\
& + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) \left(C_{j,s}^i(0, \psi, t) + \tilde{P}_{j,s}^i(0, \psi, t) \right) = \\
& = -d_{i,j+1} \left((C_{j+1,s}^i)'_{\varrho_j}(0, \psi, t) + (P_{j+1,s}^i)'_{\varrho_j}(0, \psi, t) \right) + \\
& + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) \left(C_{j+1,s}^i(0, \psi, t) + P_{j+1,s}^i(0, \psi, t) \right),
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{4,j}(\tilde{F}_{j,s})''_{\tilde{\varphi}_j\tilde{\varphi}_j} + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi)(\tilde{F}_{j,s})'_{\tilde{\varphi}_j} = \varpi_{j,s}^4, \\ d_{4,j+1}(\tilde{F}_{j+1,s})''_{\varrho_j\varrho_j} - v^2(\varphi_{*j}^*, \psi)(\tilde{F}_{j+1,s})'_{\varrho_j} = \mathcal{G}_{j,s}^4, \\ \tilde{F}_{j,s}(\tilde{\varphi}_j, \psi, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{F}_{j+1,s}(\varrho_j, \psi, t) \xrightarrow{\varrho_j \rightarrow \infty} 0, \\ \tilde{F}_{j,s}(0, \psi, t) = \tilde{F}_{j+1,s}(0, \psi, t), \quad (j = \overline{1, m-1}), \\ d_{4,j} \left((T_{j,s})'_{\tilde{\varphi}_j}(0, \psi, t) + (\tilde{F}_{j,s})'_{\tilde{\varphi}_j}(0, \psi, t) \right) + \\ + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) \left(T_{j,s}(0, \psi, t) + \tilde{F}_{j,s}(0, \psi, t) \right) = \\ = -d_{4,j+1} \left((T_{j+1,s})'_{\varrho_j}(0, \psi, t) + (\tilde{F}_{j+1,s})'_{\varrho_j}(0, \psi, t) \right) + \\ + v^2(\varphi_{*j}^*, \psi) \left(T_{j+1,s}(0, \psi, t) + \tilde{F}_{j+1,s}(0, \psi, t) \right), \end{array} \right.$$

де $\varpi_{j,0}^i = 0$, $\mathcal{G}_{j,0}^i = 0$, $\omega_{j,1}^i = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi)} \left(\sigma_j(\tilde{P}_{j,0}^i)'_t - d_j \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2} (\tilde{P}_{j,0}^i)''_{\tilde{\varphi}_j\tilde{\varphi}_j} - \right.$

$$\left. - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j} (\tilde{P}_{j,0}^i)'_{\tilde{\varphi}_j} \right), \quad \mathcal{G}_{j,1}^i = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi)} \left(\sigma_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,0}^i)'_t - d_{i,j+1} \frac{V_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2} (\tilde{P}_{j+1,0}^i)''_{\varrho_j\varrho_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{V_{j,1}}{\kappa_{j+1}} (\tilde{P}_{j+1,0}^i)'_{\varrho_j} \right), \quad \omega_{j,1}^4 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi)} \left(\sigma_j(\tilde{F}_{j,0})'_t - d_j \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2} (\tilde{F}_{j,0})''_{\tilde{\varphi}_j\tilde{\varphi}_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j} (\tilde{F}_{j,0})'_{\tilde{\varphi}_j} \right), \quad \mathcal{G}_{j,1}^4 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi)} \left(\sigma_{j+1}(\tilde{F}_{j+1,0})'_t - d_{i,j+1} \frac{V_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2} (\tilde{F}_{j+1,0})''_{\varrho_j\varrho_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{V_{j,1}}{\kappa_{j+1}} (\tilde{F}_{j+1,0})'_{\varrho_j} \right) \quad (j = \overline{2, m-1}, i = \overline{1, 3}), \quad \tilde{V}_{j,s}, V_{j,s}, - \text{ коефіцієнти при } s\text{-тих}$$

степенях ε у розкладах функцій $v^2(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi)$, $v^2(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \varrho_j, \psi)$ у ряд Тейлора відповідно в околі $\varphi = \varphi_{*j}^*$ ($j = \overline{1, m-1}$) [18].

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно до [27].

2.2.3. Моделювання просторового сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористому середовищі з урахуванням хімічної реакції

Розглядається просторова нелінійна сингулярно збурена задача конвективно-дифузійного тепломасоперенесення трьох розчинних речовин в області $G = G_{\bar{z}} \times (0, \infty)$ $G_{\bar{z}} = G_{\bar{z}} \times (0, H)$, де $G_{\bar{z}}$ ($\bar{z} = x + iy$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими $AB = \{\bar{z} = x + iy: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{\bar{z}: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{\bar{z}: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{\bar{z}: f_4(x, y) = 0\}$ (рис 2.3,а) [140]:

$$\operatorname{div} \left(D_i(\tilde{T}) \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_i \right) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_i - \tilde{\alpha}_i k(\tilde{T}) \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = \sigma(\tilde{C}_i)' , \quad (2.45)$$

$$\operatorname{div} \left(D_4 \cdot \operatorname{grad} \tilde{T} \right) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{T} + k^* f^{**}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \tilde{T}' , \quad (2.46)$$

$$\tilde{C}_i^i(x, y, z, 0) = \tilde{C}_D^{i0}(x, y, z), \quad \tilde{T}(x, y, z, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y, z), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{C}_i \Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{C}_{\tilde{P}^*}(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{C}_i^*(M, t),$$

$$\tilde{C}_i \Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{C}_{\tilde{P}^{**}}(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{C}_i^{**}(M, t),$$

$$\tilde{C}_i \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_{\tilde{P}^{**}}^*(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{C}_{\tilde{P}^{**}}^{**}(M, t), \quad (2.48)$$

$$\tilde{T} \Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{T}_*^*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{T}_{**}^*(M, t),$$

$$\tilde{T} \Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{T}^{**}(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{ABCD} = \tilde{T}_{**}^*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{T}_{**}^{**}(M, t), \quad (2.49)$$

$$\vec{v} = -\chi \operatorname{grad} h, \quad \operatorname{div} H \vec{v} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{ABB^*A^*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD^*C^*} = \varphi^*, \quad \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{ADD^*A^* \cup A^*D^*C^*B^* \cup B^*C^*CB \cup ADCB} = 0, \quad (2.50)$$

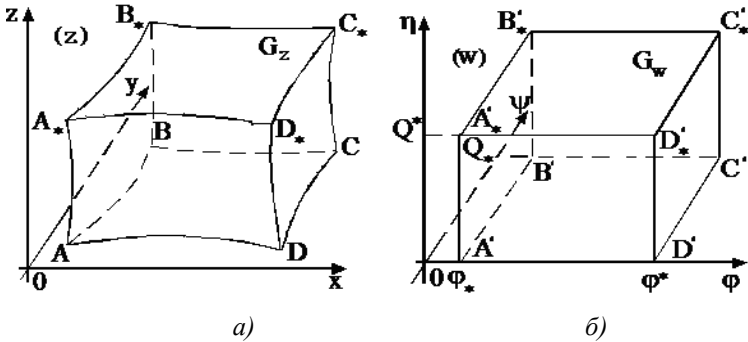


Рис. 2.3. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

де $\tilde{C}_i = \tilde{C}_i(x, y, z, t)$ – концентрація i -го сорту речовини у точці (x, y, z) в момент часу t , $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z, t)$ – температура потоку, H – висота проникного пласту, $\tilde{\alpha}_i = \varepsilon \alpha_i$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, χ – коефіцієнт фільтрації; φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_w , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, ($v_z = 0$), $h = h(x, y)$ – напір у точці $\tilde{z} = x + iy$, M – біжуча точка відповідної поверхні, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, $\tilde{C}_i^*(M, t)$, $\tilde{C}_i^*(M, t)$ та інші, які фігурують в умовах (2.48)–(2.49) достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (гранях) області G .

Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $z = z$, $t = t$ у рівняннях (2.45)–(2.46) та умовах (2.47)–(2.48), аналогічно п. 2.1, приходимо до відповідної «дифузійної задачі» для області G_w (рис. 2.3, б)

$$\begin{aligned} & \varepsilon d_i(T) \left(q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right) + \varepsilon (q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial D^i(T)}{\partial \varphi} \frac{\partial C_i}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial D^i(T)}{\partial \psi} \frac{\partial C_i}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial D^i(T)}{\partial z} \frac{\partial C_i}{\partial z} - \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial C_i}{\partial \varphi} - \\ & - \varepsilon k(T) \alpha_i C_1 C_2 = \sigma \frac{\partial C_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon d_4 \left(q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \\ & + k^* f^{**}(C_1, C_2) = \sigma \frac{\partial T}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$C_i(\varphi, \psi, z, 0) = C_{i0}^0(\varphi, \psi, z), \quad T(\varphi, \psi, z, 0) = T_0^0(\varphi, \psi, z), \quad (2.53)$$

$$C_i(\varphi_*, \psi, z, t) = C_{i*}(\psi, z, t), \quad C_i(\varphi^*, \psi, z, t) = C_i^*(\psi, z, t),$$

$$C_i(\varphi, 0, z, t) = C_{i**}(\varphi, z, t), \quad C_i(\varphi, Q, z, t) = C_i^{**}(\varphi, z, t),$$

$$C_i(\varphi, \psi, 0, t) = C_{i**}^*(\varphi, \psi, t), \quad C_i(\varphi, \psi, H, t) = C_{i*}^{**}(\varphi, \psi, t),$$

$$T(\varphi_*, \psi, z, t) = T_*^*(\psi, z, t), \quad T(\varphi^*, \psi, z, t) = T^*(\psi, z, t),$$

$$T(\varphi, 0, z, t) = T_{**}(\varphi, z, t), \quad T(\varphi, Q, z, t) = T^{**}(\varphi, z, t),$$

$$T(\varphi, \psi, 0, t) = T_{**}^*(\varphi, \psi, t), \quad T(\varphi, \psi, H, t) = T_*^{**}(\varphi, \psi, t), \quad (2.54)$$

де $\vec{q} = H \cdot \vec{\nu}$ – фільтраційна витрата, $C_i(\varphi, \psi, z, t) = \tilde{C}_i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z, t)$, $T(\varphi, \psi, z, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z, t)$.

Розв'язок (C^1, C^2, C^3, T) ($i = \overline{1, 3}$) поставленої задачі (2.51)–(2.54) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C_i(\varphi, \psi, z, t) = C_{i,0}(\varphi, \psi, z, t) + \varepsilon C_{i,1}(\varphi, \psi, z, t) + \sum_{p=0}^2 \varepsilon^p \Pi_p^i(\xi, \psi, z, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \eta, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \mu, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t) + \\
& + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^i(\varphi, \psi, z, t, \varepsilon), \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\varphi, \psi, z, t) &= T_0(\varphi, \psi, z, t) + \varepsilon T_1(\varphi, \psi, z, t) + 2 \sum_{p=0}^2 \varepsilon^p P_p(\xi, \psi, z, t) + \\
& + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \eta, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \mu, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t) + \\
& + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^4(\varphi, \psi, z, t, \varepsilon), \tag{2.56}
\end{aligned}$$

де R_1^i – залишкові члени $C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t)$ та $T_j(\varphi, \psi, z, t)$ ($j = \overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики, $\underline{\underline{P}}_p^i(\xi, \psi, z, t)$ і $P_p(\xi, \psi, z, t)$ ($p = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку із області G_{σ}); $\underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \eta, z, t)$, $\underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \eta, z, t)$, $\overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \mu, z, t)$, $\overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \mu, z, t)$, $\underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t)$, $\underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t)$, $\overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t)$, $\overline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t)$ ($l = \overline{0,4}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$, $z = 0$, $z = H$, що враховують вплив бічних джерел забруднень; $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = \psi \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = (Q - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\beta = z \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\alpha = (H - z) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги). При цьому, функції $d_i(T)$ та $k(T)$ розкладемо в ряд за степенями ε у вигляді

$$d_i(T) = I_0^i(\tau_0) + \sum_{l=1}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} I_l^i(\tau_0, \dots, \tau_l) + R_l^i(\tau_0, \dots, \tau_2, R_1^4, \varepsilon), \tag{2.57}$$

$$k(T) = J_0^i(\tau_0) + \sum_{l=1}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} J_l^i(\tau_0, \dots, \tau_{\frac{l}{2}}) + R_j^i(\tau_0, \dots, \tau_2, R_1^4, \varepsilon), \quad (2.58)$$

де $\tau_j = T_j + P_j + \underline{P}_j + \bar{P}_j + \underline{\underline{P}}_j + \bar{\bar{P}}_j$ ($i=0,1$), $\tau_{\frac{j}{2}} = \underline{P}_{\frac{j}{2}} + \bar{P}_{\frac{j}{2}} + \underline{\underline{P}}_{\frac{j}{2}} + \bar{\bar{P}}_{\frac{j}{2}}$ ($j=1,3$), $\tau_2 = P_2 + \underline{P}_2 + \bar{P}_2 + \underline{\underline{P}}_2 + \bar{\bar{P}}_2$, $I_0^i(\bullet), \dots, I_4^i(\bullet), J_0^i(\bullet), \dots, J_4^i(\bullet), R_j^i(\bullet), R_j^i(\bullet)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Аналогічно, після підстановки (2.55)–(2.58) в (2.51)–(2.54) та застосування стандартної «процедури прирівнювання», для знаходження регулярних частин асимптотики приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t) = g_j^i(\varphi, \psi, z, t), \\ C_{i,j}(\varphi, \psi, z, 0) = h_j^i(\varphi, \psi, z), C_{i,j}(\varphi_*, \psi, z, t) = b_j^i(\psi, z, t), \end{cases}$$

$$g_0^i(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0^i(\varphi, \psi, z) = C_{i0}^0(\varphi, \psi, z), \quad b_0^i(\psi, z, t) = c_*^i(\psi, z, t),$$

$$h_1^i(\varphi, \psi, z) = 0, \quad b_1^i(\psi, z, t) = 0,$$

$$g_1^i(\varphi, \psi, z, t) = I_0^i(q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial z^2}) +$$

$$+ q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial I_0^i}{\partial \varphi} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial \varphi} + \frac{\partial I_0^i}{\partial \psi} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial I_0^i}{\partial z} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial z} - \alpha_i J_0^i C_{1,0} C_{2,0}, \quad i = \bar{1}, \bar{3};$$

$$\begin{cases} \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_j(\varphi, \psi, z, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} T_j(\varphi, \psi, z, t) = g_j^4(\varphi, \psi, z, t), \\ T_j(\varphi, \psi, z, 0) = h_j^4(\varphi, \psi, z), T_j(\varphi_*, \psi, z, t) = b_j^4(\psi, z, t), \end{cases}$$

$$g_0^4(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0^4(\varphi, \psi, z) = T_0^0(\varphi, \psi, z), \quad b_0^4(\psi, z, t) = T_*(\psi, z, t),$$

$$h_1^4(\varphi, \psi, z) = 0, \quad b_1^4(\psi, z, t) = 0,$$

$$g_1^4(\varphi, \psi, z, t) = d_4(q^2(\varphi, \psi) (T_{0\varphi\varphi} + T_{0\psi\psi}) + T_{0zz}^i) + k^* f^{**}(C_{1,0}, C_{2,0}).$$

У результаті їх розв'язання отримано

$$\begin{aligned}
C_{i,0}(\varphi, \psi, z, t) &= \begin{cases} C_{i*}(\psi, z, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_{i0}^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, t), & t < f(\varphi, \psi); \end{cases} \\
C_{i,1}(\varphi, \psi, z, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^i(\tilde{\varphi}, \psi, z, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi); \end{cases} \\
T_0(\varphi, \psi, z, t) &= \begin{cases} T_*(\psi, z, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, t), & t < f(\varphi, \psi); \end{cases} \\
T_1(\varphi, \psi, z, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, z, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}
\end{aligned}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \sigma H \int_{\varphi_*}^{\varphi} q^{-2}(s, \tilde{\psi}) ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \tilde{\psi}$, $0 \leq \tilde{\psi} \leq Q$, $z(x, y, z) = \tilde{z}$, $0 \leq \tilde{z} \leq H$), від еквіпотенціальної поверхні $s = \varphi_*$ до еквіпотенціальної поверхні $s = \varphi$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція q^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функції $\Pi^i = \sum_{p=0}^2 \Pi_p^i \varepsilon^p$ та $P = \sum_{p=0}^2 P_p \varepsilon^p$ призначені для усунення нев'язок, внесених побудованими регулярними частинами $C_i = \sum_{j=0}^1 C_{i,j} \varepsilon^j$ та $T = \sum_{j=0}^1 T_j \varepsilon^j$ в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто повинні виконуватись умови

$(C_i + \Pi^i)|_{\varphi=\varphi^*} = C_i^* + O(\varepsilon^2)$, $(T + P)|_{\varphi=\varphi^*} = T^* + O(\varepsilon^2)$. Для знахо-

дження цих функцій, маємо такі задачі:

$$q^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{p\xi\xi}^i(\xi, \psi, z, t) + \frac{q^2(\varphi^*, \psi)}{H} \Pi_{p\xi}^i(\xi, \psi, z, t) = d_p^i(\xi, \psi, z, t),$$

$$\Pi_p^i \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Pi_p^i(0, \psi, z, t) = w_p^i(\psi, z, t), \quad p = \overline{0, 2},$$

$$q^2(\varphi^*, \psi) P_{p\xi\xi}(\xi, \psi, z, t) + \frac{q^2(\varphi^*, \psi)}{H} P_{p\xi}(\xi, \psi, z, t) = d_p^4(\xi, \psi, z, t),$$

$$P_p \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad P_p(0, \psi, z, t) = w_p^4(\psi, z, t), \quad p = \overline{0, 2},$$

де $d_0^i(\xi, \psi, z, t) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ $d_1^i(\xi, \psi, z, t) = \Pi_{0r}^i(\xi, \psi, z, t)$, $i = \overline{1, 3}$,

$$d_1^4(\xi, \psi, z, t) = P_{0r}(\xi, \psi, z, t), \quad d_2^i(\xi, \psi, z, t) = f_1^i(\psi, z, t) e^{\frac{-\xi}{H}} + f_2^i(\psi, z, t) \xi e^{\frac{-\xi}{H}},$$

$$f_1^i(\psi, z, t) = -c_i^{i*}(\varphi^*, \psi, z, t) - q^2(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial z^2}, \quad f_1^4(\psi, z, t) =$$

$$= -T_i^*(\varphi^*, \psi, z, t) - q^2(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 P_0}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2},$$

$$f_2^i(\psi, z, t) = 2q^{-1}(\varphi^*, \psi) q'(\varphi^*, \psi) \frac{\partial \Pi_0^i}{\partial t} - H q^{-2}(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial t^2}, \quad f_2^4(\psi, z, t) =$$

$$= 2q^{-1}(\varphi^*, \psi) q'(\varphi^*, \psi) \frac{\partial P_0}{\partial t} - H q^{-2}(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2},$$

$$w_0^i(\psi, z, t) = C_i^*(\psi, z, t) - C_{i,0}(\varphi^*, \psi, z, t), \quad w_1^i(\psi, z, t) = -C_{i,1}(\varphi^*, \psi, z, t),$$

$$i = \overline{1, 3}, \quad w_2^i(\psi, z, t) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad w_0^4(\psi, z, t) = T^*(\psi, z, t) -$$

$$-T_0(\varphi^*, \psi, z, t), \quad w_1^4(\psi, z, t) = -T_1(\varphi^*, \psi, z, t).$$

Функції типу примежового шару $\underline{\Pi}^i(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\Pi}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$,

$$\underline{P}^i(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{P}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2} \quad \text{і} \quad \bar{\Pi}^i(\varphi, \mu, z, t) = \sum_{l=0}^4 \bar{\Pi}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}, \quad \bar{P}^i(\varphi, \mu, z, t) =$$

$= \sum_{l=0}^4 \bar{P}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ призначені для усунення нев'язок в околах $\psi = 0$ та $\psi = Q$ відповідно, а також функції $\underline{\underline{P}}^i(\varphi, \psi, \beta, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\underline{P}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\underline{\underline{P}}^i(\varphi, \psi, \beta, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\underline{P}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ і $\bar{\bar{P}}^i(\varphi, \psi, \alpha, t) = \sum_{l=0}^4 \bar{\bar{P}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\bar{P}^i(\varphi, \psi, \alpha, t) = \sum_{l=0}^4 \bar{P}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ (призначені для усунення нев'язок в околах $z = 0$ та $z = H$) знаходимо в результаті проведення стандартної процедури "приврівнювання" аналогічно до [18, 28].

2.3. Математичне моделювання процесу масоперенесення в тонкій трубі з врахуванням масообміну із зовнішнім середовищем через бічну поверхню

Як приклад ефективності застосування запропонованого підходу розв'язування крайових задач, також досліджено сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного теплоперенесення у тонкій трубі з врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем та побудоване асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної модельної задачі з умовами третього роду на бічній границі. Такі задачі, зокрема, виникають при моделюванні роботи ґрунтового теплообмінника.

Ґрунтові теплообмінники використовуються як джерело теплової енергії для геотермальних теплових насосів. Для збору тепла рідина (як правило, водний розчин етиленгліколю) тече по трубі, розташованій в ґрунті або водоймі, і надходить до теплового насосу. Відбір тепла з ґрунту у випадку горизонтального ґрунтового теплообмінника здійснюється за допомогою прокладеної в ґрунті системи пластикових труб на глибині 1,5–3 метра, а у випадку верти-

кального – за допомогою довгої U-подібної трубки або декількох таких трубок, що закладені у вертикальну свердловину [85, 91]. Оскільки конвективне перенесення тепла в ґрунтовому теплообміннику превалює над дифузійним, що приводить до появи малого параметра при відповідних членах рівняння конвективно-дифузійного теплоперенесення, ефективним є застосування асимптотичного методу.

Для побудови моделі та задання початкових та граничних умов ґрунтовий теплообмінник "розігнемо" в пряму. При цьому прийемо наступні припущення: структура ґрунту однорідна в радіальному та вертикальному напрямках; термічним опором стінки ґрунтового теплообмінника нехтуємо; втрати тиску на згинах трубки не враховуються.

В трубці довжиною l та радіусом r_0 ($r_0 \ll l$) розглядаємо конвективно-дифузійний процес поширення тепла, який описується наступною модельною задачею [25]:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) - v(x) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.59)$$

$$T(x, r, t) \Big|_{r=0} = T_0^0(x, r), \quad T(0, r, t) = T_*(r, t), \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial T(x, r, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$\frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\alpha(T(x, r_0, t) - T_*(x, t)), \quad (2.61)$$

де $T(x, r, t)$ – температура в точці з координатою (x, r) відповідної області в момент часу t , $v(x)$ – швидкість конвективного перенесення, $\varepsilon = a$ – коефіцієнт температуропровідності теплоносія ($a = \lambda / (\rho c)$), λ – коефіцієнт теплопровідності, ρ – густина, c –

теплоємність), $(0 < \varepsilon \ll v^* < v(x))$, $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{-1/2}$ – коефіцієнт тепло-
віддачі, $T_*(x, t)$ – температура зовнішнього середовища. Вважаємо,
що всі функції, які фігурують в умовах (2.60)–(2.61) є достатньо
гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових то-
чок області $D = \{(x, r, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq t \leq t^* < \infty\}$.

Розв'язок одержано у вигляді асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned} T(x, r, t) = & T_0(x, r, t) + \varepsilon T_1(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n T_n(x, r, t) + \Pi_0(\xi, r, t) + \\ & \varepsilon \Pi_1(\xi, r, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, r, t) + P_0(x, \mu, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} P_{i/2}(x, \mu, t) + \dots \\ & + \varepsilon^{n+1} P_{n+1}(x, \mu, t) + \Gamma_0(x, \eta, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} \Gamma_{i/2}(x, \eta, t) + \dots \\ & + \varepsilon^{n+1} \Gamma_{n+1}(x, \eta, t) + R_n(x, r, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.62)$$

де $T_i(x, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асим-
птотики, $\Pi_i(\xi, r, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в
околі $x = l$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта
 G_z), $P_{i/2}(x, \mu, t)$, $\Gamma_{i/2}(x, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежо-
вого шару відповідно в околах $r = 0$ та $r = r_0$, $\xi = (l - x) \cdot \varepsilon^{-1}$,
 $\mu = r \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, $\eta = (r_0 - r) \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ – відповідні регуляризуючі перетворен-
ня, R_n – залишковий член.

Підставляючи (2.62) в (2.59)–(2.61) та прирівнявши коефіцієн-
ти при однакових степенях ε отримуємо задачі для знаходження
регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v(x) T_{i,x}(x, r, t) + T_{i,t}(x, r, t) = g_i(x, r, t), \\ T_i(x, r, 0) = w_i^1(x, r), \quad T_i(0, r, t) = w_i^2(r, t), \end{cases}$$

$$\text{де} \quad g_0(x, r, t) = 0, \quad w_0^1(x, r) = T_0^0(x, r), \quad w_0^2(r, t) = T_*(r, t),$$

$$g_i(x, r, t) = T_{i-1,x}(x, r, t) + T_{i-1,r}(x, r, t) + \frac{1}{r} T_{i-1}(x, r, t), \quad w_i^1(x, r) = 0,$$

$$w_i^2(r, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Розв'язки цих задач, аналогічно до [28], отримуємо у вигляді:

$$T_0(x, r, t) = \begin{cases} T_0^0(f^{-1}(f(x) - t), r), & t < f(x), \\ T_*(r, t - f(x)), & t \geq f(x), \end{cases}$$

$$T_i(x, r, t) = \begin{cases} \int_0^t g_i(f^{-1}(f(x) - t + \tilde{t}), r, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(x), \\ \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, r, f(\tilde{x}) + t - f(x))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq f(x). \end{cases}$$

З метою задовольнити другу із крайових умов будується зовнішня примежова функція $\Pi(\xi, r, t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, r, t)$ в околі $x = l$

таким чином, щоб функція $u(x, r, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^{n+1})$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг) $\xi = \varepsilon^{-1}(l - x)$, $x = l - \varepsilon\xi$. Врахувавши спів-

відношення: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ та розклад функції $v(l - \xi\varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі $x = l$, перепишемо оператор $L\Pi = \varepsilon\Delta\Pi - v(l - \varepsilon\xi)\Pi_x - \Pi_t$ у вигляді:

$$L\Pi = \varepsilon^{-1}\Pi_{\xi\xi} - \Pi_t + \varepsilon \left[\Pi_{rr} + \frac{1}{r}\Pi_r \right] + v(l - \varepsilon\xi)\varepsilon^{-1}\Pi_\xi.$$

Прирівнявши в рівності $L(\Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \dots + \varepsilon^{n+1}\Pi_{n+1}) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , одержимо такі рівняння із відповідними умовами для визначення Π_i :

$$\begin{cases} \Pi_{i\xi\xi}(\xi, r, t) + v(l)\Pi_{i\xi}(\xi, r, t) = d_i(\xi, r, t), \\ \Pi_{i\xi}(0, r, t) = v_i(r, t), \Pi_i(\xi, r, t)\Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$d_0(\xi, r, t) = 0, \quad d_i(\xi, r, t) = \Pi_{(i-1)l}(\xi, r, t) + \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \xi^i v^{(i)}(l) \Pi_{(k-i)\xi}(\xi, r, t)$$

$$(i = \overline{1, n+1}), \quad v_i(r, t) = -T_{i\xi}(l, r, t) \quad (i = \overline{0, n}), \quad v_{n+1}(r, t) = 0.$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, r, t) = \frac{T_{0\xi}(l, r, t)}{v(l)} e^{-v(l)\xi},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi, r, t) = & \left(\frac{v'(l)T_{0\xi}(l, y, t)}{v^3(l)} - \frac{T_{0\xi t}(l, y, t)}{v^2(l)} + \frac{T_{0\xi}(l, r, t)}{v(l)} \right) e^{-v(l)\xi} + \\ & + \left(\frac{v'(l)T_{0\xi}(l, r, t)}{2v(l)} \xi^2 + \frac{v'(l)T_{0\xi}(l, r, t)}{v^2(l)} \xi - \frac{T_{0\xi t}(l, r, t)}{v^2(l)} \xi \right) e^{-v(l)\xi}. \end{aligned}$$

З метою задовольнити другу і третю з умов (2.61) будуються зовнішні примежові функції $P = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} P_{i/2}(x, \mu, t)$ та

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \Gamma_{i/2}(x, \eta, t) \quad \text{відповідно. Для цього вводять заміни}$$

$\mu = r \cdot \varepsilon^{-1/2}$ та $\eta = (r_0 - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$. Задачі для знаходження цих функцій отримуються аналогічно до того, як це було зроблено для примежової функції P :

$$\begin{cases} P_{i/2, t}(x, \mu, t) = P_{i/2, \mu\mu}(x, \mu, t) - v(x)P_{i/2, x}(x, \mu, t) + \gamma_{i/2}^1(x, \mu, t), \\ P_{i/2}(x, \mu, 0) = 0, P_{i/2}(0, \mu, t) = 0, P_{i/2, \mu}(x, 0, t) = \mathcal{G}_{i/2}^1(x, t), \\ P_{i/2}(x, \mu, t) \Big|_{\mu \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де} \quad \gamma_0^1(x, \mu, t) = 0, \quad \gamma_1^1(x, \mu, t) = 0, \quad \gamma_i^1(x, \mu, t) = -P_{\left(\frac{i-1}{2}\right)xx}(x, \mu, t) -$$

$$-\frac{1}{\mu} P_{\left(\frac{i-1}{2}\right)\mu}(x, \mu, t), \quad i = \overline{2, 2n+1}, \quad \mathcal{G}_i^1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \text{ непарне,} \\ -T_{\frac{i}{2}\mu}(x, 0, t), & \text{якщо } i \text{ парне;} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{n+1}^1(x, t) = 0;$$

$$\begin{cases} \Gamma_{i/2t}(x, \eta, t) = \Gamma_{i/2\eta\eta}(x, \eta, t) - v(x)\Gamma_{i/2x}(x, \eta, t) + \gamma_{i/2}^2(x, \eta, t), \\ \Gamma_{i/2}(x, \eta, 0) = 0, \Gamma_{i/2}(0, \eta, t) = 0, \Gamma_{i/2\eta}(x, 0, t) = \mathcal{G}_{i/2}^2(x, t), \\ \Gamma_{i/2\eta}(x, \eta, t) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де} \quad \gamma_0^2(x, \eta, t) = 0, \quad \gamma_{\frac{1}{2}}^2(x, \eta, t) = \frac{1}{r_0} \Gamma_{0\eta}(x, \eta, t),$$

$$\gamma_{\frac{i}{2}}^2(x, \eta, t) = \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^k \mu^k}{r_0^{k+1}} \Gamma_{(\frac{i-k}{2})\eta}(x, \eta, t) - \Gamma_{(\frac{i-1}{2})xx}(x, \eta, t), \quad i = \overline{2, 2n+1},$$

$$\mathcal{G}_0^2(x, t) = \alpha^*(u_0(x, r_0, t) + \Gamma_0(x, 0, t) - T_*^*(x, t)) - T_{0\eta}(x, r_0, t),$$

$$\mathcal{G}_{\frac{i}{2}}^2(x, t) = \begin{cases} \alpha^* \left(\Gamma_{\frac{i}{2}}(x, 0, t) \right), \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ \alpha^* \left(T_{\frac{i}{2}}(x, r_0, t) + \Gamma_{\frac{i}{2}}(x, 0, t) \right) - T_{\frac{i}{2}\mu}(x, r_0, t), \text{ якщо } i \text{ парне;} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{n+1}^2(x, t) = \alpha \Gamma_{n+1}(x, 0, t).$$

Наведемо схему знаходження поправки $\Gamma_0(x, \eta, t)$. Введемо в області $\{(x, \eta, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq \eta \leq r_0 / \sqrt{\varepsilon}, 0 \leq t \leq t^*\}$ рівномірну сітку $\{(x_j, \eta_m, t_k) : x_j = j \cdot \Delta x; \quad \eta_m = m \cdot \Delta \eta; \quad t_k = k \cdot \Delta t\}$, де $\Delta x = l / N, \Delta \eta = r_0 / (M \sqrt{\varepsilon}), \Delta t = t^* / K, \quad j = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, K}$. Після чого застосуємо до відповідної задачі апроксимацію за різницевою схемою:

$$\begin{cases} \Gamma_{j,1}^k - (1 + \alpha \Delta \eta) \Gamma_{j,0}^k = -\delta(x_j, t_k), \Gamma_{j,M}^k - \Gamma_{j,M-1}^k = 0, \Gamma_{j,m}^0 = 0, \Gamma_{0,m}^k = 0, \\ \frac{\Gamma_{j,m}^k - \Gamma_{j,m}^{k-1}}{\Delta t} = \frac{\Gamma_{j,m+1}^k - 2\Gamma_{j,m}^k + \Gamma_{j,m-1}^k}{(\Delta \eta)^2} - v(x_j) \frac{\Gamma_{j,m}^k - \Gamma_{j-1,m}^k}{\Delta x}, \end{cases}$$

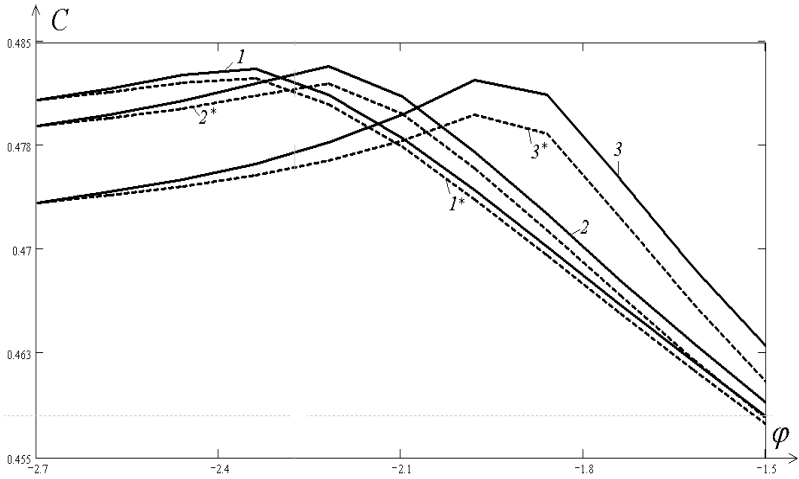
$$\text{де} \quad \Gamma_{j,m}^k = \Gamma_0(x_j, \eta_m, t_k), \quad \delta(x_j, t_k) = \Delta \eta \alpha^* (T_0(x_j, r_0, t_k) - T_*^*(x_j, t_k)) - T_{0\eta}(x_j, r_0, t_k), \quad j = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, K}.$$

2.4. Результати числових експериментів

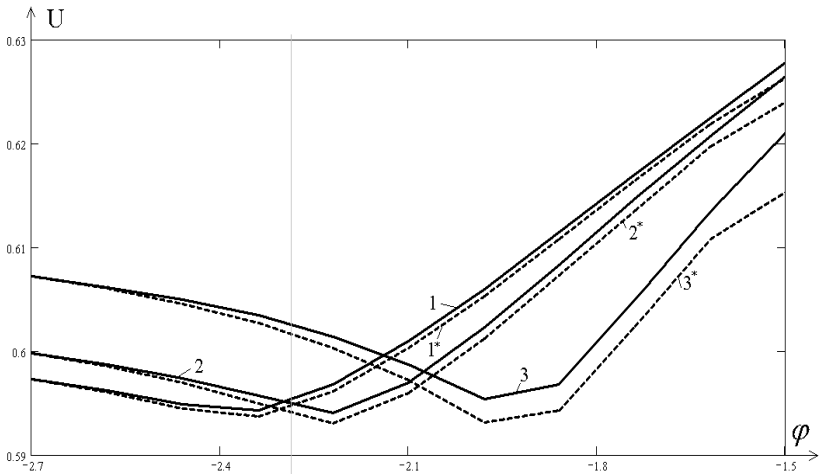
Наведемо результати розрахунку процесу типу “конвекція-дифузія” на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1) / (z - z_2))$, при $\varphi_* = -2.7$, $\varphi^* = -1.5$, $AD = \{z : \psi(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : \psi(x, y) = 2\pi\}$. На рис. 2.1,а зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w , а на рис. 2.1,а – відповідну динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}_i^{df} = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 10$, $\psi(x, y) = \bar{\psi}_j^{df} = (Q_* \cdot j) / 20$, $i = \overline{0, 10}$, $j = \overline{0, 20}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz / dw) \overline{(dz / dw)} \right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) , та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k = \overline{1, 4}$ при $t_1 = 0.035$, $t_2 = 1.098$, $t_3 = 0.213$, $t_4 = 0.432$, (криві 1-4 відповідно) [27].

Розподіли концентрацій $C(\varphi, \psi, t)$, $U(\varphi, \psi, t)$, $H(\varphi, \psi, t)$, $N(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин при $\varepsilon = 10^{-3}$, $k^* = 10$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$, $d_4 = 1$, $C_0^0(\varphi, \psi) = 0.4 + (1/4) \cdot \sin^2(\psi) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $U_0^0(\varphi, \psi) = 0.7 - (1/3) \cdot \cos^2(\psi + \pi/2) (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $H_0^0(\varphi, \psi) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $N_0^0(\varphi, \psi) = 0.2 + \sin(\psi + \pi/6) \times 10^{-1} \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $C_*(\varphi, t) = 0.4 + (1/4) \cdot \sin^2(\psi) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $U_*(\varphi, t) = 0.7 - (1/3) \cdot \cos^2(\psi + \pi/2) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $H_*(\varphi, t) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $N_*(\varphi, t) = 0.2 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot e^{-t} \cdot 30^{-1}$, $C^*(\varphi, t) = 0.4 + (1/4) \sin^2(\psi) \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$, $U^*(\varphi, t) =$

$= 0.7 - (1/3)\cos^2(\psi + \pi/2) \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$, $H^*(\psi, t) = 0.5 +$
 $+\sin(\psi + \pi/6)e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$, $N^*(\psi, t) = 0.2 + \sin(\psi + \pi/6) \times$
 $\times 10^{-1} \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$ зображено на рис. 2.4. Так на рис. 2.4
 зображено регулярні частини $C_0, C_0 + \varepsilon C_1$ (а), $U_0, U_0 + \varepsilon U_1$ (б)



а)



б)

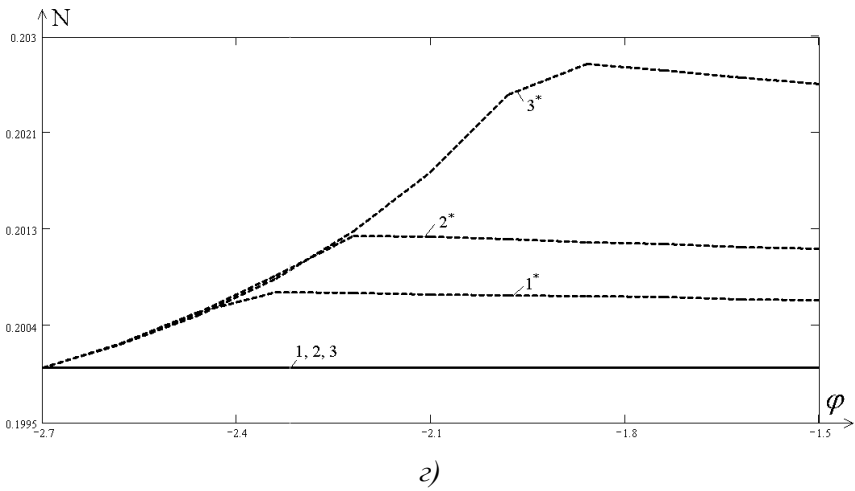
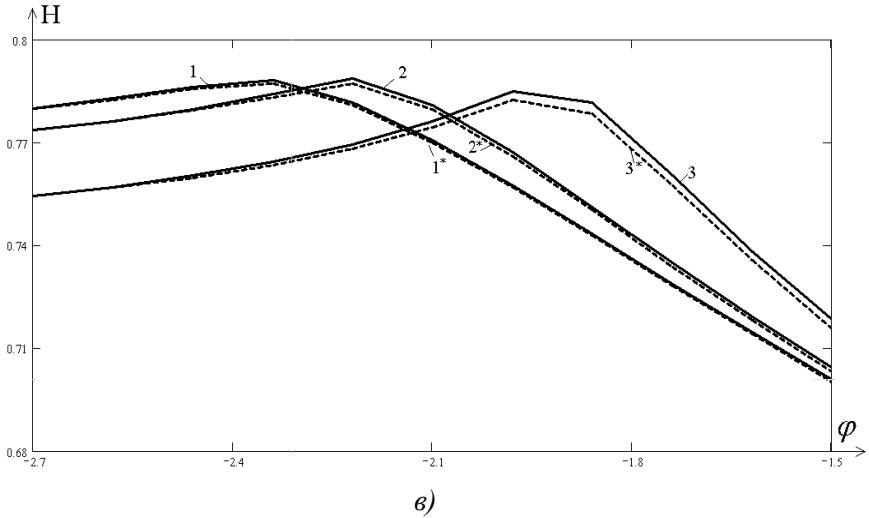
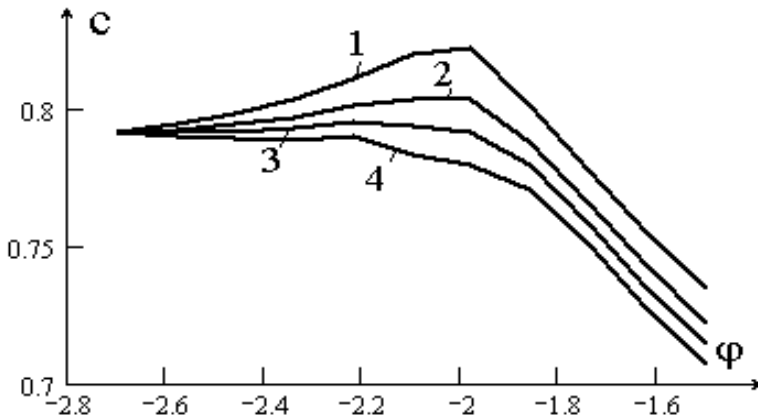


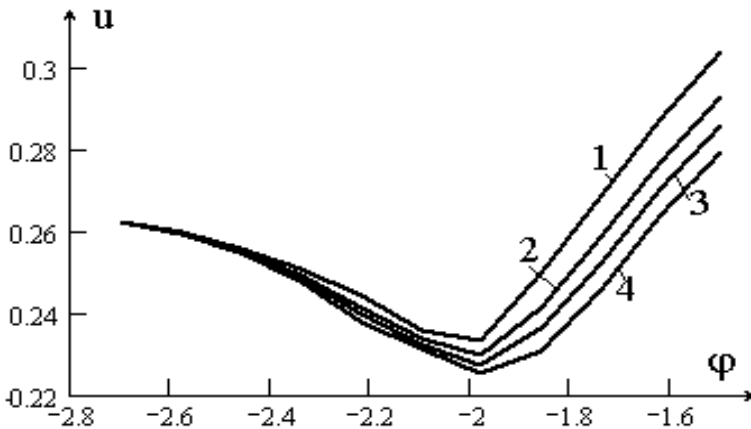
Рис.2.4. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

H_0 , $H_0 + \varepsilon H_1$ (в) та N_0 , $N_0 + \varepsilon N_1$ (г) (криві 1–3 та 1*–3* відповідно в моменти часу $t_1 = 0.0305$, $t_2 = 0.0537$, $t_3 = 0.1265$ вздовж лінії течії $\psi = 1.57079$) розв'язку поставленої задачі.

На рис.2.5 проілюстровано залежність розподілу концентрації розчинної речовини C (а) та U (б) від коефіцієнта дифузії вздовж лінії течії $\psi=0,9424$ в момент часу $t=0,1265$ при $\varepsilon_1=0,01$, $\varepsilon_2=0,05$, $\varepsilon_3=0,075$, $\varepsilon_4=0,1$ (криві 1-4 відповідно).



а)



б)

Рис.2.5. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини від коефіцієнта дифузії

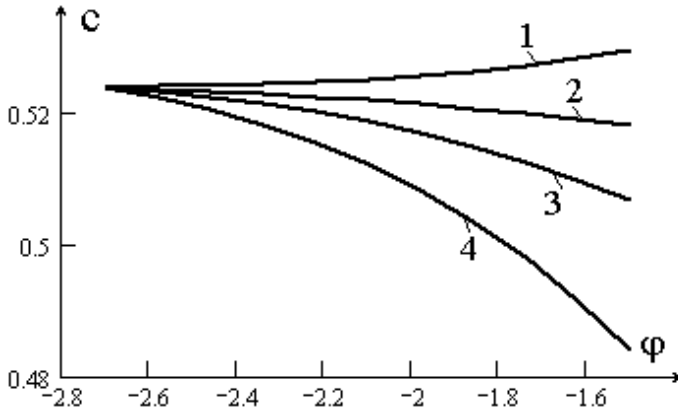


Рис.2.6. Вплив масообміну на розподіл концентрації C

Вплив масообміну на розподіл концентрації C (вздовж лінії течії $\psi = 2.513$ в момент часу $t = 0.37$) проілюстровано на рис. 2.6 при $\varepsilon = 0.01$, $k_1^* = 0, 5, 10, 20$ (криві 1-4 відповідно).

Наведемо результати розрахунку розглянутого в пункті 2.2.1 процесу на тому ж ідеальному фільтраційному фоні.

На рис. 2.7 зображено розподіли концентрацій $C^1(\varphi, \psi, t)$, $C^2(\varphi, \psi, t)$, $C^3(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин при:

$$C_{1,0}^0(\varphi, \psi) = 0.1 + (1/50) \exp(-\psi/2) (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}, \quad C_{2,0}^0(\varphi, \psi) = 0.15 - (1/10) \cos(\psi) (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1},$$

$$C_{3,0}^0(\varphi, \psi) = 0.01 + (1/50) \times \sin^2(\psi) (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}, \quad T_0^0(\varphi, \psi) = 10, \quad C_{1*}(\psi, t) = 0.1 + (1/50) \times \exp(-\psi/2) \exp(-t) / 3,$$

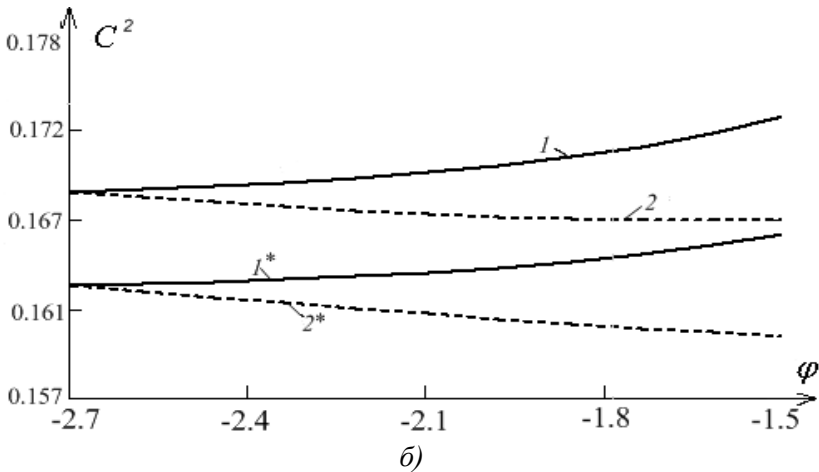
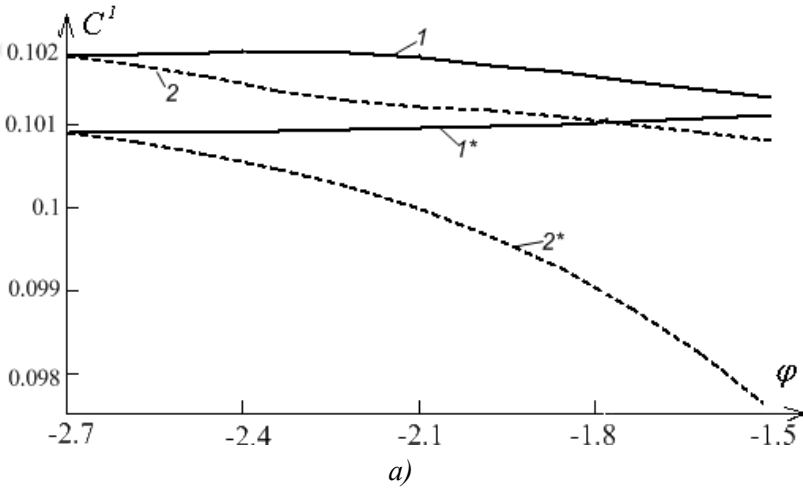
$$C_{2*}(\psi, t) = 0.15 - (1/10) (\exp(-t) / 3) \cos(\psi), \quad T^*(\varphi, \psi) = 10, \quad C_{3*}(\psi, t) = (1/50) \sin^2(\psi) \exp(-t) / 3 + 0.01, \quad T_*(\varphi, \psi) = 10,$$

$$C_1^*(\psi, t) = 0.1 + (1/50) \exp(-\psi/2) \exp(-2t) (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$C_2^*(\psi, t) = 0.15 - (1/10) \cdot \cos(\psi) \cdot \exp(-2t) \cdot (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$C_3^*(\psi, t) = 0.01 + (1/50) \sin^2(\psi) \cdot \exp(-2t) \cdot (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}.$$

Так на рис. 2.7,а зображено регулярні частини $C_{1,0}$ та $C_{1,0} + \varepsilon C_{1,1}$ при $k(T) = 10^2 e^{\frac{T-10}{10}}$ (криві 1-2 та 1*-2* в моменти часу $t = 0.03$ та $t = 0.74$ відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon = 0.01$, $d_1(T) = 10(1/T)(1 + \exp(T-10))$, $k^* = 2$ вздовж лінії $\psi = 2.51$. Аналогічно інтерпретуються результати для речовин C_2, C_3 на рис. 2.7,б та рис. 2.7,в.



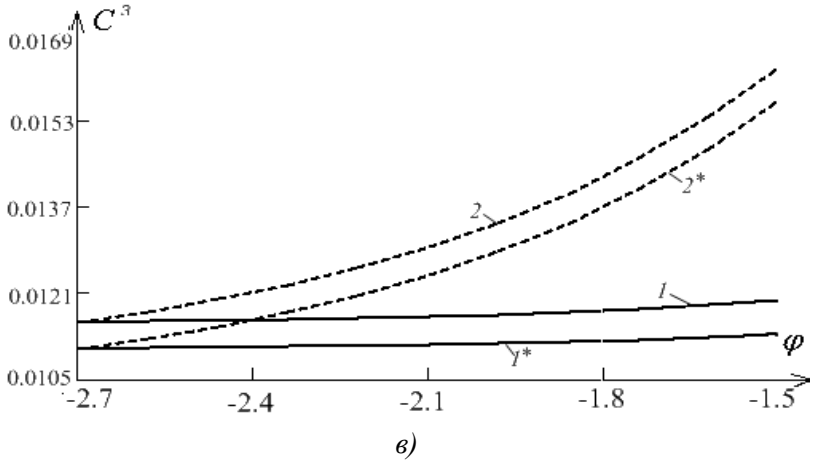


Рис. 2.7. Вплив дифузії та масообміну на розподіл концентрації розчинних речовин

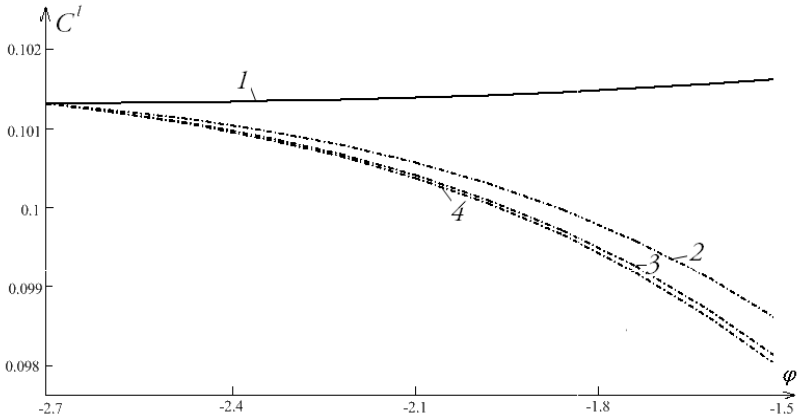


Рис. 2.8. Вплив швидкості хімічної реакції $\varepsilon k(T)$ на розподіл концентрації розчинної речовини

На рис. 2.8 зображено регулярні частини $C_{1,0}$ (крива 1), $C_{2,0} + \varepsilon C_{2,1}$ при $k(T) = (1/T)(100 + \exp(T - 10))$, $k(T) = 10(1/T) \times$

$\times(1 + \exp(T - 10))$, $k(T) = (1/T)(1 + \exp(T - 10))$ (криві 2-4 відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon = 0.01$, $t = 0.37$, $k^* = 2$, $\psi = 2.51$.

Збіжність асимптотичного розв'язку до точного проілюстровано на тестових прикладах.

Так для крайової задачі: $\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$, $C(x, t)|_{t=0} = w(x)$,

$C(x, t)|_{x=0} = C(x, t)|_{x=l} = 0$, точний розв'язок якої має вигляд [38]:

$$C(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varepsilon t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l w(\tilde{x}) \sin \frac{n\pi \tilde{x}}{l} d\tilde{x},$$

асимптотичне наближення розв'язку з точністю $O(\varepsilon^n)$ знайдено у вигляді ряду:

$$C_\varepsilon(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \underline{P}_0(\xi, t) + \varepsilon^{1/2} \underline{P}_{1/2}(\xi, t) + \dots + \bar{P}_0(\zeta, t) + \varepsilon^{1/2} \bar{P}_{1/2}(\zeta, t) + \dots + r(x, t, \varepsilon), \quad \xi = x / \sqrt{\varepsilon}, \quad \zeta = (l - x) / \sqrt{\varepsilon}.$$

Регулярні складові розв'язку $C_0(x, t)$ та $C_1(x, t)$ знаходяться шляхом розв'язання задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_0(x, t)}{\partial t} = 0, \\ C_0(x, 0) = w(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial C_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_i(x, t)}{\partial x^2}, \\ C_0(x, 0) = 0, \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

у вигляді $C_0(x, t) = w(x)$, $C_1(x, t) = w''(x)t$, ...

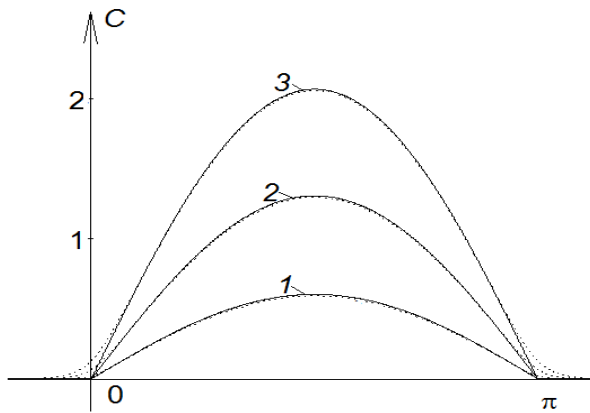
На рис 2.9,а зображено графіки точного розв'язку (суцільна крива) та асимптотичного (пунктирна крива) при $w(x) = 0.2 \sin(\pi x)$, $l = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ при значеннях безрозмірного часу $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$ (1-3 відповідно).

Для задачі: $\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + g(x,t) = \frac{\partial C}{\partial t}$, $C(x,t)|_{t=0} = 0$, точний розв'язок якої має вигляд

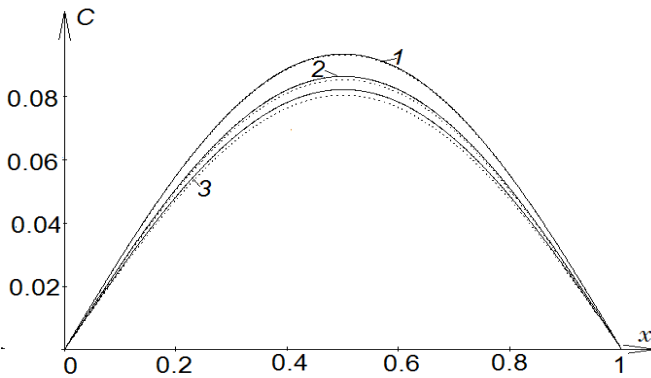
$$C(x,t) = \int_0^{t+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} g(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

асимптотичне наближення розв'язку з точністю $O(\varepsilon^n)$ представлено у вигляді ряду:

$$C_\varepsilon(x,t) = C_0(x,t) + \varepsilon C_1(x,t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x,t) + r(x,t).$$



a)



б)

Рис. 2.9. Порівняння точного та наближеного розв'язків

Після підстановки і розв'язання відповідних задач для складових, отримано:

$$u_0(x,t) = \int_0^t g(x,\tilde{t})d\tilde{t}, \quad u_i(x,t) = \int_0^t u_{(i-1),xx}(x,\tilde{t})d\tilde{t}, \quad i = \overline{1,n}.$$

На рис 2.9,б зображено графіки точного розв'язку (суцільна крива) та асимптотичного (пунктирна) при $\varepsilon = 10^{-4}$,

$$g(x,t) = \frac{t}{t+1} \sin(x), \text{ при } \begin{cases} 0 < t < 10, \\ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Наведемо результати розрахунку розглянутого в п. 2.2.2 процесу конвективної дифузії в двошаровому середовищі. Початковий розподіл забруднення та температури в середовищі відповідно становлять

$$\begin{aligned} C^1_0(\varphi, \psi) &= 0.1 + 0.01((7.14)^2 - \varphi^2) + 1)tg(\psi^2 / 50), \\ C^2_0(\varphi, \psi) &= 0.35 + 0.035((7.14)^2 - \varphi^2) + 1), & C^3_0(\varphi, \psi) &= 0 \\ T_0^0(\varphi, \psi) &= 10. \end{aligned}$$

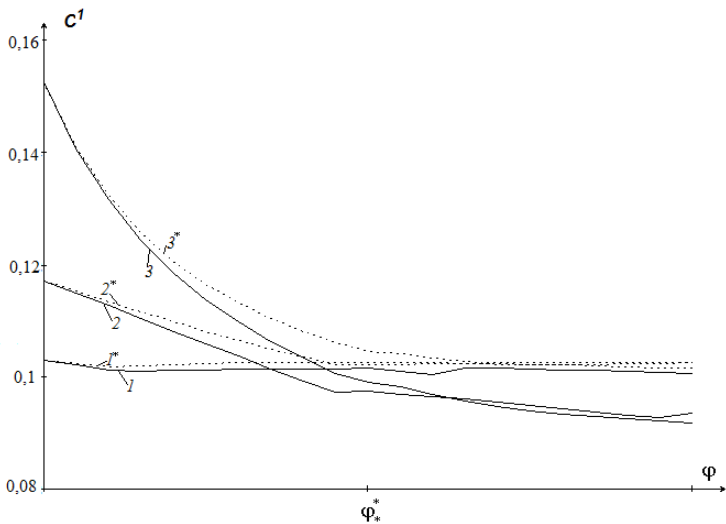


Рис.2.10 Розподіл концентрації забруднюючої речовини $C^1(\varphi, \psi, t)$.

На вході в область маємо

$$C_*^1(\psi, t) = 0.1 + 0.01 \operatorname{tg}((10t + \psi^2) / 50), \quad C_*^2(\psi, t) = 0.385,$$

$$C_*^3(\psi, t) = 0, \quad T_*(\psi, t) = 10.$$

Комп'ютерний експеримент проводився при таких значеннях коефіцієнтів системи (1)-(6): $\sigma_1 = 0.8$, $\sigma_2 = 0.7$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $d_{1,1} = 8$, $d_{1,2} = 7$, $d_{2,1} = 4$, $d_{2,2} = 5$, $d_{3,1} = 9$, $d_{3,3} = 10$, $\kappa_1 = 0.45$, $\kappa_2 = 0.3$.

На рис. 2.10 проілюстровано вплив дифузії та масообміну на розподіл концентрації забруднюючої речовини першого сорту. Так, криві 1*-3* відповідають конвективний складовим розв'язку $C_{j,0}^1(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{1,2}$) в моменти часу $t_1 = 0.5$, $t_2 = 2.1$, $t_3 = 4.8$, а криві 1-3 загальному розв'язку $C_j^1(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{1,2}$) в ті ж моменти часу.

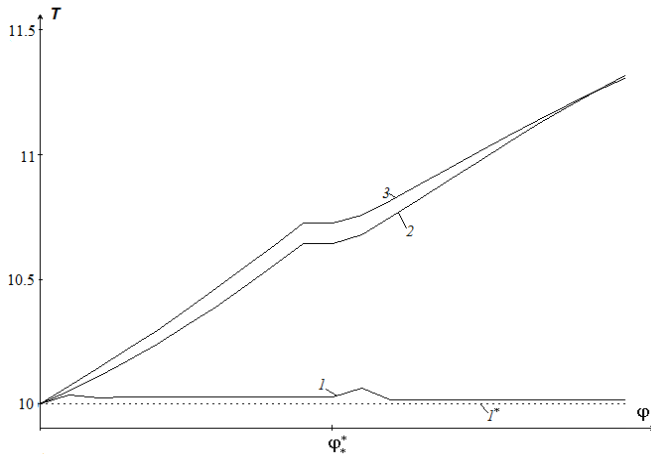


Рис. 2.11 Розподіл температури середовища $T(\varphi, \psi, t)$.

Зростання температури середовища в результаті теплоутворення внаслідок хімічної реакції зображено на рис. 2.11. Так, крива 1* відображає початковий розподіл температури в середовищі, а криві 1-3 відповідають розв'язку $T(\varphi, \psi, t)$ системи (9)-(13) в моме-

нти часу $t_1 = 0.2$, $t_2 = 2.4$, $t_3 = 4.8$.

Результати комп'ютерного моделювання процесу, описаного в пункті 2.3, представлені на рис. 2.12 – рис. 2.17. Вважаємо, що трубка ґрунтового теплообмінника радіусом $r_0 = 0,02$ м заповнена водним розчином етиленгліколя, властивості якого наступні: коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0.43$ Вт / м · с, густина $\rho = 1060$ кг / м³, теплоємність $c = 3.31$ кДж / кг. Отже, $\varepsilon = a = 1.2 \cdot 10^{-4}$ м² / с. Швидкість перенесення теплоносія в трубці теплообмінника $v(x) = 1$ м / с. Прийнято, що початковий розподіл температури в трубці $T_0^0(x, r) = 0^\circ$ С, а на вході поступає теплоносій з температурою $T_*(r, t) = 0^\circ$ С.

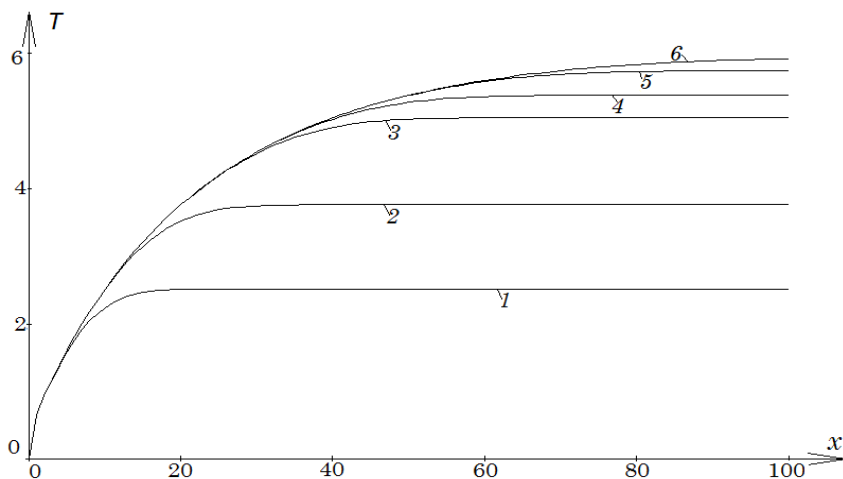


Рис. 2.12. Розподіл температури на поверхні трубки горизонтального теплообмінника

У випадку моделювання роботи горизонтального теплообмінника, розташованого нижче глибини промерзання ґрунту, роз-

рахунки проводились за температури ґрунту $T_*^* = 6^\circ\text{C}$. Зростання температури $T(x, r_0, t)$ горизонтального теплообмінника довжиною $l = 100\text{ м}$ за рахунок відбору ґрунтового тепла в моменти часу 10 с , 20 с , 40 с , 50 с , 70 с та 100 с (криві 1–6 відповідно) при $\alpha = 10\text{ Вт/м}^2$ (сухий піщаний ґрунт) зображено на рис. 2.12.

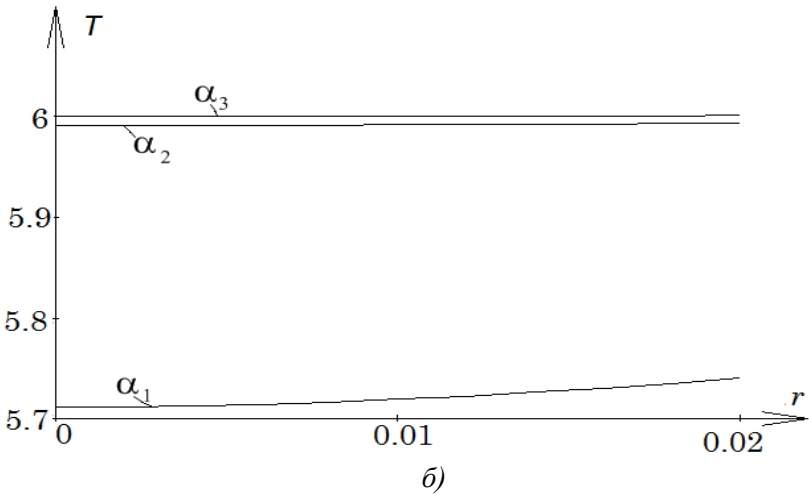
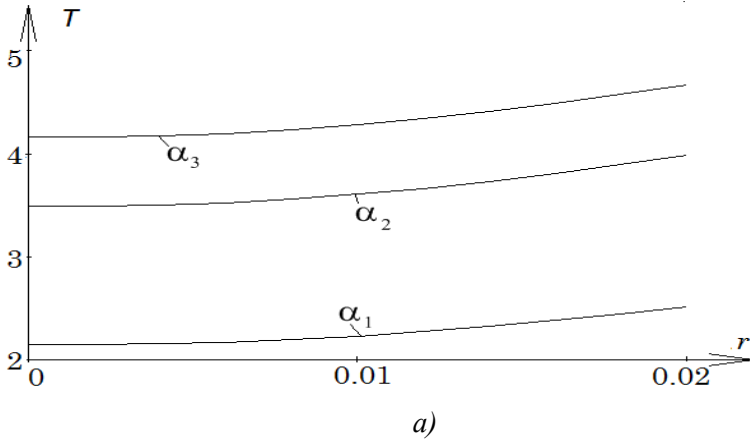


Рис. 2.13. Залежність розподілу температури від коефіцієнту тепловіддачі

На рис 2.12. проілюстровано розподіл температури вздовж радіальної координати трубки теплообмінника на виході в моменти часу $t = 2 \text{ с}$ (рис. 2.12,а) та $t = 40 \text{ с}$ (рис. 2.12,б) для різних типів ґрунтів, яким відповідають різні коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1 = 10 - 15 \text{ Вт/м}^2$ – сухий піщаний ґрунт, $\alpha_2 = 20 - 25 \text{ Вт/м}^2$ – сухий глинястий ґрунт, $\alpha_3 = 30 - 35 \text{ Вт/м}^2$ – ґрунт з ґрунтовими водами.

На рис 2.13 проілюстровано розподіл температури вздовж радіальної координати трубки теплообмінника на виході в моменти часу $t = 2 \text{ с}$ (рис. 2.13,а) та $t = 40 \text{ с}$ (рис. 2.13,б) для різних типів ґрунтів, яким відповідають різні коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1 = 10 - 15 \text{ Вт/м}^2$ – сухий піщаний ґрунт, $\alpha_2 = 20 - 25 \text{ Вт/м}^2$ – сухий глинястий ґрунт, $\alpha_3 = 30 - 35 \text{ Вт/м}^2$ – ґрунт з ґрунтовими водами.

Розподіл температури на поверхні трубки теплообмінника довжиною $l = 100 \text{ м}$ (рис. 2.14,а) та $l = 200 \text{ м}$ (рис. 2.14,б) для різних типів ґрунтів зображено на рис 2.14. Як видно з графіків, збільшення приросту теплової енергії є суттєвим на ділянці трубки до $100 - 120 \text{ м}$ в залежності від типу ґрунту (чим вища теплопровідність ґрунту, тим меншої довжини теплообмінник потрібно використовувати). В ґрунті з ґрунтовими водами теплоносій в трубці встигає прогрітись при довжині теплообмінника $50 - 60 \text{ м}$.

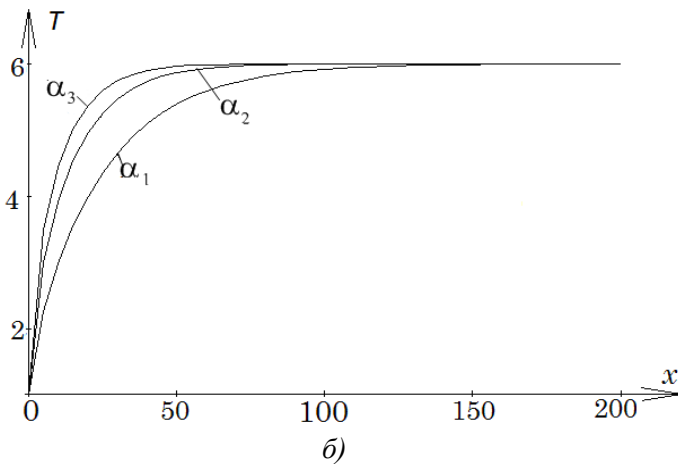
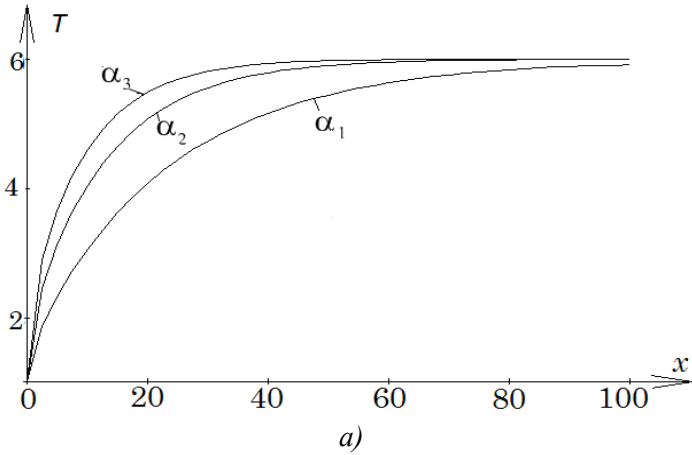


Рис. 2.14. Розподіл температури в трубах різної довжини

У випадку моделювання роботи вертикального теплообмінника необхідно задати співвідношення для визначення температури ґрунту за глибиною в конкретний момент часу, як це зроблено наприклад в [85, 91]. Прийнемо, що функція залежності температури ґрунту від глибини описується законом $T_*(x) = \beta_0 + \beta_1 x(l-x) + \beta_3 x^3(l-x)^3 + \dots + \beta_{2i+1} (x(l-x))^{(2i+1)} + \dots$, де β_i

визначаються шляхом апроксимації експериментальних даних вимірювання температури ґрунту.



Рис. 2.15. Функція визначення температури ґрунту за глибиною

Розрахунки проводились при таких значеннях $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\beta_3 = 2 \cdot 10^{-5}$, $\beta_5 = \dots = \beta_{2i+1} = \dots = 0$ (рис. 2.12), в припущенні відсутності теплообміну між частинами трубки, що розташовані поряд.

На рис. 2.16 показано розподіл температури $T(x, r_0, t)$ вертикального теплообмінника довжиною $l = 100$ м в моменти часу 10 с, 20 с, 40 с, 50 с, 70 с та 100 с (криві 1–6 відповідно) при $\alpha = 10$ (Bm / m^2).

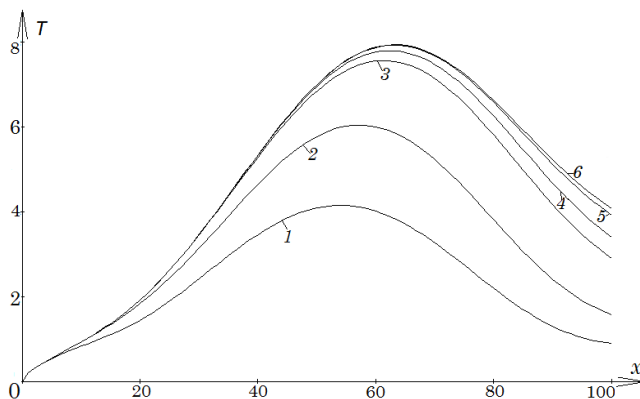
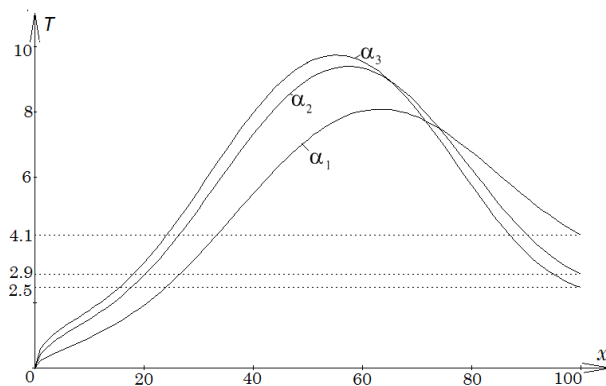


Рис. 2.16. Зростання температури на поверхні трубки вертикального теплообмінника

Якщо у випадку горизонтального теплообмінника високе значення тепловіддачі ґрунту дає більшу температуру теплоносія на виході, то у випадку ґрунтового теплообмінника вертикального типу кращі показники ефективності відбору ґрунтового тепла у теплообмінника меншої глибини (рис. 2.17.а), закладеного в ґрунт з меншою провідністю, оскільки при підйомі нагрітого на глибині теплоносія через холодні верхні шари ґрунту частина тепла віддається теплообмінником назад у зовнішнє середовище.



а)

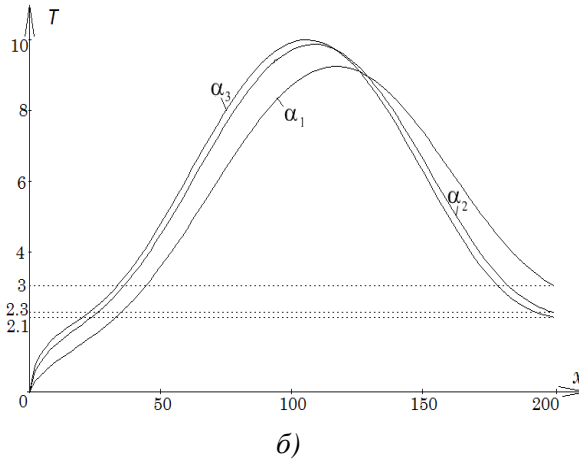


Рис. 2.17. Розподіл температури в трубках вертикального теплообмінника різної глибини

Оскільки глибина проникнення сезонних коливань температури складає близько 10–15 м, ефективним вирішенням цієї проблеми може бути теплоізоляція трубки теплообмінника у верхніх шарах ґрунту.

РОЗДІЛ 3. ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ - ДИФУЗІЯ” ДЛЯ ДВОЗВ’ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

Теорія обернених задач для параболічного і гіперболічного типів рівнянь почала інтенсивно розвиватись у останні десятиріччя минулого століття. Завдяки своїм можливостям визначення фізичних властивостей матеріалів і параметрів різноманітних за своєю природою процесів, обернені задачі набули широкого практичного застосування у багатьох галузях науки і техніки, зокрема, металургії, медицині, біології, космічній розвідці, екології та ін.

Особливу цінність застосування теорії обернених задач має у тих випадках, коли проведення безпосередніх вимірювань відповідних параметрів є неможливим, наприклад, через недоступність матеріалу чи середовища або швидкоплинність процесу. Результативними доробками в теорії обернених задач є праці Прилепка І.Я., Костіна А.Б., Лучка І.Я., Іванчова М.І. [78, 79].

Важливим прикладом обернених задач є задачі конвективної дифузії, які в своїх рівняннях мають невідомі коефіцієнти при старших похідних. В таких задачах невідомі коефіцієнти дифузії вигідніше шукати у вигляді функцій від часу або координат фізичної області, оскільки, в такому випадку, задання відповідних інтегральних, початкових або фінальних умов перевизначення буде більш доцільніше з точки зору економічних та технологічних затрат. Умови перевизначення являють собою умови, що характеризують певні фізичні властивості невідомих параметрів в потрібний момент часу або на деякій ділянці досліджуваної області.

Якщо вибрано конкретні умови перевизначення для поставленої моделі, тоді вихідна сингулярно-збурена задача буде

розв'язуватись почерговим знаходженням регулярних членів асимптотики із основного рівняння та умов перевизначення.

3.1. Асимптотичне розв'язання розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” з невідомим залежним від фізичних координат двозв'язної області коефіцієнтом дифузії

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $z = x + iy$, G_z – двозв'язна криволінійна область, обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній, $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (див.рис.2.1 а), розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(b(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(x, y, 0) = c_0^0(x, y, 0), \quad (3.2)$$

$$b(x, y) \frac{\partial c(x, y, 0)}{\partial t} = c_*^*(x, y), \quad (x, y) \in G_z, \quad (3.3)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \quad (3.4)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $b(x, y)$ - доста-

тньо гладка обмежена функція, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в просторі середовищі G_z .

Припустимо, що задача (3.4), шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, де $\Gamma = A^* A_* M_* M^*$ – розріз двозв'язної області G_z уздовж однієї з ліній течії, а $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \varrho_* < \psi < \varrho^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (див.рис.2.1 б), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$.

Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (3.1) та умовах (3.2), (3.3), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[a(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) + a_\varphi(\varphi, \psi) u_\varphi(\varphi, \psi) + a_\psi(\varphi, \psi) u_\psi(\varphi, \psi) \right] - v^2(\varphi, \psi) u_\varphi = u_t, \quad (3.5)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad (3.6)$$

$$a(\varphi, \psi) u_t(\varphi, \psi, 0) = u_*^*(\varphi, \psi), \quad (3.7)$$

де $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $a(\varphi, \psi) = b(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ і т.д.

Розв'язок кожної із періодичних щодо змінної ψ задач (3.5)–(3.7) для знаходження невідомих $u(\varphi, \psi, t)$ та $a(\varphi, \psi)$ з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi, \psi, t) = \left(u_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i u_i(\varphi, \psi, t) \right) + \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.8)$$

$$a(\varphi, \psi) = a_0(\varphi, \psi) + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i a_i(\varphi, \psi) + r_a(\varphi, \psi, \varepsilon), \quad (3.9)$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $a_i(\varphi, \psi)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема, $u_0(\varphi, \psi, t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу), $u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{1, n}$) – поправки, які враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки), $\pi_i(\xi, \psi, t)$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії), $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (розтягнена змінна), $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $r_a(\varphi, \psi, \varepsilon)$ – залишкові члени.

В результаті підстановки (3.8) та (3.9) в (3.5)-(3.7) та виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотики:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) &= 0, \\ u_0(\varphi_*, \psi, t) &= u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \\ a_0(\varphi, \psi)(u_{0t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0t}(\xi, \psi, 0)) &= u_*^*(\varphi, \psi), \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{k\varphi} + u_{kt} &= g_k(\varphi, \psi, t), \\ u_k(\varphi, \psi, 0) &= 0, u_k(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{aligned} \right. \\ & a_k(\varphi, \psi)(u_{0t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0t}(\xi, \psi, 0)) = \\ & = - \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\varphi, \psi)(u_{k-i_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{k-i_t}(\xi, \psi, 0)), \\ & g_k(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^{k-1} v^2(\varphi, \psi) \left[a_i(\varphi, \psi)(u_{k-i_{\varphi\varphi}}(\varphi, \psi, t) + \right. \end{aligned}$$

$$+u_{k-i_{\psi\psi}}(\varphi, \psi, t) + a_{i_{\varphi}}(\varphi, \psi)u_{k-i_{\varphi}}(\varphi, \psi, t) + a_{i_{\psi}}(\varphi, \psi)u_{k-i_{\psi}}(\varphi, \psi, t) \Big],$$

$$k = \overline{1, n}.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(\varphi, \psi) = \frac{u_*^*(\varphi, \psi)}{u_{0_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0_t}(\xi, \psi, 0)},$$

$$u_k(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_k(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\tilde{\varphi}, \psi), \\ \int_0^t g_k(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\tilde{\varphi}, \psi), \end{cases}$$

$$a_k(\varphi, \psi) = -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i(\varphi, \psi)(u_{k-i}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{k-i}(\xi, \psi, 0))}{u_{0_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0_t}(\xi, \psi, 0)}, \quad k = \overline{1, n},$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$, f^{-1} – функція обернена до f відносно

змінної φ , $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$.

З метою задовольнити другу із крайових умов будуватиметься зовнішня примежова функція $\pi = \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i \varepsilon^i$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким чином, щоб функція $u(\varphi, \psi, t)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг): $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$.

Врахувавши співвідношення: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$

перепишемо оператор

$$L\pi = \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[a(\varphi, \psi) \Delta \pi + a_\varphi(\varphi, \psi) \pi_\varphi + a_\psi(\varphi, \psi) \pi_\psi \right] - \\ - v^2(\varphi, \psi) \pi_\varphi - \pi_t \text{ у вигляді змінних } (\xi, \psi, t):$$

$$L\pi = v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left[a(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left(\frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon \pi_{\psi\psi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \pi_\xi + \varepsilon a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \pi_\psi \right] + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_\xi}{\varepsilon} - \pi_t$$

Розкладемо $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ і $a(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряди Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$:

$$v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = v^2(\varphi^*, \psi) - 2v(\varphi^*, \psi)v'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + (v''(\varphi^*, \psi) + \\ + v(\varphi^*, \psi)v''(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots,$$

$$a(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = (a_0(\varphi^*, \psi) + \varepsilon a_1(\varphi^*, \psi)) - (a_{0\varphi}(\varphi^*, \psi) + \\ + \varepsilon a_{1\varphi}(\varphi^*, \psi))\varepsilon\xi + \frac{1}{2}(a_{0\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi) + \varepsilon a_{1\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots$$

Похідні $a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ і $a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в околі $\varphi = \varphi^*$ запишуться так:

$$a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = -(\varepsilon a_{0\varphi}(\varphi^*, \psi) + \varepsilon^2 a_{1\varphi}(\varphi^*, \psi)) + (\varepsilon^2 a_{0\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi) + \\ + \varepsilon^3 a_{1\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi))\xi - \frac{1}{2}(\varepsilon^3 a_{0\varphi\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi) + \varepsilon^4 a_{1\varphi\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi))\xi^2 + \dots$$

$$a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = (a_{0\psi}(\varphi^*, \psi) + \varepsilon a_{1\psi}(\varphi^*, \psi)) - (a_{0\psi\psi}(\varphi^*, \psi) + \\ + \varepsilon a_{1\psi\psi}(\varphi^*, \psi))\varepsilon\xi + \frac{1}{2}(a_{0\psi\psi\psi}(\varphi^*, \psi) + \varepsilon a_{1\psi\psi\psi}(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε одержи-

мо, для визначення π_i , такі рівняння із відповідними умовами:

$$\begin{cases} a_0(\varphi^*, \psi) \pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тоді $\pi_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) e^{-\frac{u_t^*(\psi, 0)}{u^*(\varphi^*, \psi)} \xi}$.

$$\begin{cases} a_0(\varphi^*, \psi) \pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{0\xi}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} + a_{0\varphi}(\varphi^*, \psi) \times \\ \times \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) - (a_1(\varphi^*, \psi) - a_{0\varphi}(\varphi^*, \psi) \xi) \pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t), \\ \pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

В результаті розв'язання даної системи отримаємо:

$$\begin{aligned} \pi_1(\xi, \psi, t) = & \left[\left((u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \frac{u_{\varphi}^*(\varphi^*, \psi)}{u_t^*(\psi, 0)} - \frac{u_t^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \xi - \right. \\ & - u_1(\varphi^*, \psi, t) - \left. \left[(u_0(\varphi^*, \psi, t) - u^*(\psi, t)) \frac{u_t^*(\psi, 0)}{u_{\varphi}^{*2}(\varphi^*, \psi)} (u_{\varphi}^*(\varphi^*, \psi) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{u_{\varphi}^*(\psi, 0)}{u_t^*(\psi, 0) v^2(\varphi^*, \psi)} - u_{\varphi}^*(\varphi^*, \psi) \right) \right] \left[\left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{u_{\varphi}^*(\varphi^*, \psi)}{u_t^*(\psi, 0)} \xi \right) \right] e^{-\frac{u_t^*(\psi, 0)}{u^*(\varphi^*, \psi)} \xi}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що $\pi_k(\xi, \psi, t) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_{kj}(\varphi, \psi, t) \xi^j e^{-\frac{u_t^*(\psi, 0)}{u^*(\varphi^*, \psi)} \xi}$,

$k = \overline{1, n+1}$, де всі α_{kj} визначаються через α_{ij} ($i < k$) та граничні умови.

Для оцінки r та r_a маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i(\varphi, \psi) \varepsilon^i + r_a(\varphi, \psi, \varepsilon) \right) (r_{\varphi\varphi} + r_{\psi\psi}) + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{i=1}^n a_{i\varphi}(\varphi, \psi) \varepsilon^i + r_{a_\varphi}(\varphi, \psi, \varepsilon) \right) r_\varphi(\varphi, \psi) + \left(\sum_{i=1}^n a_{i\psi}(\varphi, \psi) \varepsilon^i + r_{a_\psi}(\varphi, \psi, \varepsilon) \right) \times \right. \\
& \left. \times r_\psi(\varphi, \psi) \right] - v^2(\varphi, \psi) r_\varphi = r_t + \varepsilon^{n+1} g_n(\varphi, \psi, t), \\
& r(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0; \\
& r_a(\varphi, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} p_n(\varphi, \psi, \varepsilon),
\end{aligned}$$

де $g_n(\varphi, \psi, t)$ та $p_n(\varphi, \psi, \varepsilon)$ виражаються через відомі члени рядів (3.8) та (3.9).

3.2. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у випадку невідомого залежного від часу коефіцієнта дифузії

Для області G (див. п. 3.1) розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon a(t) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.10)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad (3.11)$$

$$a(t) \int_{L_*} \frac{\partial c(M, t)}{\partial n} dl = c_*^*(t) l, \quad (3.12)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \quad (3.13)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon a(t)$ – коефіцієнт дифузії, $a(t)$ – достатньо гладка обмежена функція, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в пористому середовищі G_z .

Припустимо, що задача (3.13), шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, де $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$ – розріз двозв’язної області G_z уздовж однієї з ліній розділу течії, а $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (див.рис.2.1 б), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (3.10) та умовах (3.11), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\varepsilon a(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) u_{\varphi} = u_t, \quad (3.14)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad (3.15)$$

$$a(t) \int_{Q_*}^{Q^*} u_{\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t) Q, \quad (3.16)$$

де $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, і т.д.

Розв’язок кожної із періодичних щодо змінної ψ задач (3.14)-(3.16) на знаходження невідомих $u(\varphi, \psi, t)$ та $a(t)$ з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi, \psi, t) = \left(u_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i u_i(\varphi, \psi, t) \right) + \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \quad (3.17)$$

$$a(t) = a_0(t) + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i a_i(t) + r_a(t, \varepsilon), \quad (3.18)$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $a_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0(\varphi, \psi, t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{1, n}$) – поправки, які враховують “вплив” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки); $\pi_i(\xi, \psi, t)$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$ – відповідне регуляризуюче перетворення, $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon), r_a(t, \varepsilon)$ – залишкові члени.

В результаті підстановки (3.17) та (3.18) в (3.14)-(3.16) та виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження розв’язку:

$$\left[\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) &= 0, \\ u_0(\varphi_*, \psi, t) &= u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \\ a_0(t) \int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi &= u_*^*(t) Q, \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{k\varphi} + u_{kt} &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{k-i\varphi\varphi} + u_{k-i\psi\psi}), \\ u_k(\varphi, \psi, 0) &= 0, u_k(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$a_k(t) \int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = - \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) \int_{Q_*} u_{k-i\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi.$$

Розв'язки даних задач запишуться у вигляді:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(t) = \frac{u_*^*(t)Q}{\int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

$$u_k(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_k(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_k(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_k(t) = - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) \int_{Q_*} u_{k-i\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}, k = \overline{1, n}.$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$, f^{-1} – функція обернена до f по змінній

$$\varphi, g_k(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{k-i\varphi\varphi} + u_{k-i\psi\psi}).$$

З метою задовольнити другу із крайових умов будується зовнішня примежова функція $\pi = \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i \varepsilon^i$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким чином,

щоб функція $u(\varphi, \psi, t)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі

крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг): $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$.

Врахувавши співвідношення: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$,

перепишемо оператор $L\pi = \varepsilon a(t)v^2(\varphi, \psi)\Delta\pi - v^2(\varphi, \psi)\pi_\varphi - \pi_t$ у вигляді (у змінних (ξ, ψ, t)):

$$L\pi = a(t)v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left(\frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon\pi_{\psi\psi} \right) + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_\xi}{\varepsilon} - \pi_t.$$

Розкладемо $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$:
 $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = v^2(\varphi^*, \psi) - 2v(\varphi^*, \psi)v'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + (v'^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi)v''(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε і для визначення π_i одержимо такі рівняння із відповідними умовами:

$$\begin{cases} a_0(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тоді $\pi_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t))e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}$.

$$a_0(t)\pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - a_1(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t),$$

$$\pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

В результаті розв'язання даної системи маємо:

$$\pi_1(\xi, \psi, t) = \left[(u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left(\frac{a_1(t)\xi}{a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)\xi}{a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} - \frac{a_0'(t)\xi^2}{2a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - u_1(\varphi^*, \psi, t) - (u_t^*(\psi, t) - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t)) \frac{\xi}{v^2(\varphi^*, \psi)} \right] e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}.$$

Легко бачити, що $\pi_k(\xi, \psi, t) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_{kj}(\psi, t) \xi^j e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}$, $k = 1, n+1$, де всі

α_{kj} визначаються через α_{ij} ($i < k$) та через граничні умови.

Залишкові члени r_n та r_a шукаємо із співвідношень:

$$\varepsilon \left(\sum_{i=0}^n \varepsilon^i a_i(t) + r_a \right) v^2(\varphi, \psi) \left[r_{\varphi\varphi} + r_{\psi\psi} \right] - v^2(\varphi, \psi) r_\varphi = r_t + \varepsilon^{n+1} g_n(\varphi, \psi, t),$$

$$r(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = r(\varphi, Q_*, t, \varepsilon) = r(\varphi, Q^*, t, \varepsilon) = 0,$$

$$r_a(\varphi, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} p_n(\varphi, \psi, \varepsilon),$$

де $g_n(\varphi, \psi, t)$ та $p_n(\varphi, \psi, \varepsilon)$ виражаються через відомі члени рядів (3.17) та (3.18).

3.3. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії за наявності функції додадкових джерел забруднення та неповних даних

3.3.1. Моделювання процесів масоперенесення за наявності невідомих функції масообміну та залежного від часу коефіцієнта дифузії

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ (див. п.2.1), розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon a(t) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} + \varepsilon s(x, y) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad (3.20)$$

$$a(t) \int_{L_*} \frac{\partial c(M, t)}{\partial n} dl = c_*^*(t) l, \quad c(x, y, T) - \bar{c}(x, y, T) = \varepsilon \Delta h(x, y) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} (v_x, v_y) &= \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L} = \varphi_*, \\ \varphi|_{L^*} &= \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \end{aligned} \quad (3.22)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t , $\bar{c}(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t при відсутності функції забруднення ($s(x, y) = 0$), M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon a(t)$ – коефіцієнт дифузії, $a(t)$ – достатньо гладка обмежена функція, $\varepsilon \Delta h(x, y)$ – зміна концентрації в кінці модельного часу, $\Delta h(x, y)$ – функція координат фізичної області (відома), ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в пористому середовищі G_z .

Припустимо, що задача (3.22), шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, розв’язана (див. п.3.1). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (3.19) та умовах (3.20), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\varepsilon a(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) u_{\varphi} + \varepsilon q(\varphi, \psi) = u_t, \quad (3.23)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \quad u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad (3.24)$$

$$a(t) \int_{Q^*} u_{\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t) Q, \quad u(\varphi, \psi, T) - \bar{u}(\varphi, \psi, T) = \varepsilon h(\varphi, \psi), \quad (3.25)$$

де $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $q(\varphi, \psi) = s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$, і т.д.

Розв’язок кожної із періодичних щодо змінної ψ задач (3.23)-(3.25) на знаходження невідомих $u(\varphi, \psi, t)$ та $a(t)$ з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi, \psi, t) = (u_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon u_1(\varphi, \psi, t)) + \sum_{i=0}^2 \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \quad (3.26)$$

$$a(t) = a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a(t, \varepsilon), \quad (3.27)$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $a_i(t)$ ($i=0,1$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0(\varphi, \psi, t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_1(\varphi, \psi, t)$ – поправка, яка враховує “вплив” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки); $\pi_i(\xi, \psi, t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$ – відповідне регуляризуюче перетворення, $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon), r_a(t, \varepsilon)$ – залишкові члени.

В результаті підстановки (3.26) та (3.28) в (3.23)-(3.25) та виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження розв’язку:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ u_0(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \\ a_0(t) \int_{Q_*}^Q u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t) Q, \\ \begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{1\varphi} + u_{1t} = a_0(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{0\varphi\varphi} + u_{0\psi\psi}) + q(\varphi, \psi), \\ u_k(\varphi, \psi, 0) = 0, u_k(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases} \\ a_1(t) \int_{Q_*}^Q u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = -a_0(t) \int_{Q_*}^Q u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi. \end{cases}$$

Розв’язки даних задач запишуться у вигляді:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(t) = \frac{u_*^*(t)Q}{\int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_1(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi)) + q(\tilde{\varphi}, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi) \\ \int_0^t (g_1(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) + \\ + q(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi)) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$t \in [0, T].$$

$$a_1(t) = - \frac{a_0(t) \int_{Q_*} u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$, f^{-1} – функція обернена до f по змінній

$$\varphi, \quad g_1(\varphi, \psi, t) = a_0(t)v^2(\varphi, \psi)(u_{0\varphi\varphi} + u_{0\psi\psi}).$$

Для знаходження $q(\varphi, \psi)$, використавши другу частину (3.25), матимемо:

$$\begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q(\tilde{\varphi}, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi} = h(\varphi, \psi), T \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^T q(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - T + \tilde{t}), \psi) d\tilde{t} = h(\varphi, \psi), T < f(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Вибравши $T \geq \max_{\psi} (f(\varphi^*, \psi))$ (час проведення експерименту

досить великий–подібний природному процесу), або ввівши заміну для другого рівняння останньої системи $f^{-1}(f(\varphi, \psi) - T + \tilde{t}) = \theta$

отримаємо $d\tilde{t} = \frac{d\theta}{v^2(\theta, \psi)}$ звідки прийдемо до рівняння:

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi} q(\theta, \psi) \frac{1}{v^2(\theta, \psi)} d\theta = h(\varphi, \psi). \quad (3.28)$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним інтегральним рівнянням Вольтера I роду. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi} K(\varphi, \psi) q(\varphi, \psi) d\tilde{\varphi} = h(\varphi, \psi), \text{ де } K(\varphi, \psi) = \frac{1}{v^2(\varphi, \psi)}.$$

В області комплексного потенціалу:

$$\varphi_i = \varphi_* + ih_{\text{крок}}, \psi_j = Q_* + j \frac{(Q^* - Q_*)}{m}, h_{\text{крок}} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, (i = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}),$$

m, n - цілі, фіксуючи верхню межу для кожного $\psi = \psi_j, j = \overline{0, m}$ матимемо:

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi_i} K(\varphi, \psi_j) q(\varphi, \psi_j) d\varphi = h(\varphi_i, \psi_j), i = \overline{0, n}. \quad (3.29)$$

Отриману систему зведемо до СЛАР трикутного вигляду:

$$\sum_{l=1}^i A_l K(\varphi_l, \psi_j) q(\varphi_l, \psi_j) = h(\varphi_i, \psi_j), i = \overline{1, n}, \quad (3.30)$$

де A_i – коефіцієнти однієї із квадратурних формул яка використовується при заміні інтегралів в (3.28). У випадку формули прямокутників коефіцієнти A_i мають значення:

$$A_i^{\text{лів}} = \begin{cases} h_{\text{крок}}, i = \overline{0, n-1} \\ 0, i = n \end{cases}; \quad A_i^{\text{прав}} = \begin{cases} 0, i = 0 \\ h_{\text{крок}}, i = \overline{1, n} \end{cases}.$$

Розв'язавши (3.30) отримаємо формули для обчислення значень функції $q(\varphi, \psi)$ в точках (φ_i, ψ_j) :

$$q(\varphi_i, \psi_j) = \frac{h(\varphi_i, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{h_{\text{крок}} K(\varphi_i, \psi_j)}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m}. \quad (3.31)$$

На еквіпотенціальних лініях $\varphi = \varphi_*$ та $\varphi = \varphi^*$ покладемо $q(\varphi_*, \psi) = q(\varphi^*, \psi) = 0$, оскільки згідно (3.24) на A^*A_* і B^*B_* вже задані режими концентрації забруднюючої речовини, що визначаються функціями $u_*(\psi, t)$ і $u^*(\psi, t)$ відповідно.

Враховавши, що $\frac{h(\varphi_i, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{h_{\text{крок}}} = h_\varphi(\varphi_i, \psi_j)$ – різницева

форма запису похідної для функції $h(\varphi, \psi)$ по змінній φ , то з (3.31) слідує

$$q(\varphi, \psi) = h_\varphi(\varphi, \psi) v^2(\varphi, \psi) \quad (3.32)$$

Похідну $h_\varphi(\varphi, \psi)$ можемо замінити більш точною центральною похідною:

$$h_\varphi(\varphi_i, \psi_j) = \frac{h(\varphi_{i+1}, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{2h_{\text{крок}}}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m}.$$

До формули (3.32) можна також прийти через використання формули: $\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$ при взятті частинних похідних по змінній φ від обох частин інтегрального рівняння (3.28).

З метою задовольнити другу із крайових умов будується зовнішня примежова функція $\pi = \sum_{i=0}^2 \pi_i \varepsilon^i$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким чином, щоб функція $u(\varphi, \psi, t)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг): $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$.

Врахувавши співвідношення: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$,

перепишемо оператор $L\pi = \varepsilon a(t)v^2(\varphi, \psi)\Delta\pi - v^2(\varphi, \psi)\pi_\varphi + \varepsilon q(\varphi, \psi) - \pi_t$ у вигляді (у змінних (ξ, ψ, t)):

$$L\pi = a(t)v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left(\frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon\pi_{\psi\psi} \right) + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_\xi}{\varepsilon} + q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) - \pi_t.$$

Розкладемо $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ та $q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряди Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$:

$$v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = v^2(\varphi^*, \psi) - 2v(\varphi^*, \psi)v'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + (v'^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi)v''(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots,$$

$$q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = q(\varphi^*, \psi) - q'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + \frac{1}{2}q''(\varphi^*, \psi)\varepsilon^2\xi^2 + \dots$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε і для визначення π_i одержимо такі рівняння із відповідними умовами:

$$\begin{cases} a_0(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тоді $\pi_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t))e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}$.

$$a_0(t)\pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - a_1(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t),$$

$$\pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

В результаті розв'язання даної системи маємо:

$$\pi_1(\xi, \psi, t) = \left[(u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left(\frac{a_1(t)\xi}{a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)\xi}{a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} - \right. \right.$$

$$\left. -\frac{a'_0(t)\xi^2}{2a_0^2(t)v^2(\varphi^*,\psi)} \right) - u_1(\varphi^*,\psi,t) - (u_t^*(\psi,t) -$$

$$-u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t)) \frac{\xi}{v^2(\varphi^*,\psi)} \left. \right] e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}.$$

Для знаходження $\pi_2(\xi,\psi,t)$ розв'язуємо таку задачу Коші:

$$a_0(t)\pi_{2\xi\xi}(\xi,\psi,t) + \pi_{2\xi}(\xi,\psi,t) = 2v_\varphi(\varphi^*,\psi) \frac{\pi_{0t}(\xi,\psi,t)}{v^3(\varphi^*,\psi)} \xi +$$

$$+ \frac{\pi_{1t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)} - q_\varphi(\varphi^*,\psi)\xi - a_0(t)\pi_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t) - a_1(t)\pi_{1\xi\xi}(\xi,\psi,t).$$

$$\pi_2(0,\psi,t) = 0, \quad \pi_2 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

Розв'язком якої буде наступний вираз:

$$\pi_2(\xi,\psi,t) = \left[\left(a_0(t)(u_{\psi\psi}^*(\psi,t) - u_{0\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t)) + \frac{a'_0(t)}{a_0^2(t)v^2(\varphi^*,\psi)} \times \right. \right.$$

$$\left. \times (u_{1t}(\varphi^*,\psi,t) - a_1(t)(u_t^*(\psi,t) - u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t))) - \frac{a_1(t)}{a_0^2(t)} u_1(\varphi^*,\psi,t) \right) \xi -$$

$$- \left(a'_0(t) \frac{1}{a_0^2(t)v^2(\varphi^*,\psi)} (u_t^*(\psi,t) - u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t)) - \right.$$

$$\left. - a_1(t)(u_t^*(\psi,t) - u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t)) \right) \left(\frac{a_1(t)}{2a_0^2(t)} - \frac{a'_0(t)}{2a_0(t)v^2(\varphi^*,\psi)} \right) -$$

$$- \frac{a'_0(t)}{2a_0(t)v^2(\varphi^*,\psi)} \left(\frac{u_1(\varphi^*,\psi,t)}{2} - (u_t^*(\psi,t) - u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t)) \times \right.$$

$$\left. \left(\frac{a'_1(t)a_0(t) + 2a'_0(t)a_1(t)}{2a_0^3(t)} - \frac{a''_0(t)a_0(t) - a_0'^2(t)}{2a_0^2(t)v^2(\varphi^*,\psi)} \right) + \frac{u_{tt}^*(\psi,t) - u_{0_{tt}}(\varphi^*,\psi,t)}{2v^2(\varphi^*,\psi)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_0(\varphi^*, \psi, t) - u_t^*(\psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left(\frac{v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{v(\varphi^*, \psi)} + \frac{a_1(t)}{2a_0^2(t)} \right) \left(\xi^2 + 2a_0(t)\xi \right) + \\
& + \left(\frac{(u_0(\varphi^*, \psi, t) - u^*(\psi, t))a_0'(t)}{a_0^2(t)v^2(\varphi, \psi)} \left[\frac{a_1(t)}{6a_0^2(t)} + \frac{2v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{3v(\varphi^*, \psi)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{a_1(t)}{3a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)}{3a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \right] + \frac{(u_t^*(\psi, t) - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t))a_0'(t)}{3a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \times \\
& \times \left(1 + \frac{1}{2a_0^2(t)} a_0'(t) \right) + \frac{(a_0''(t)a_0(t) - 2a_0'^2(t))a_0'(t)}{6a_0^5(t)v^4(\varphi^*, \psi)} \times \\
& \times \left(\xi^3 + 3a_0(t)\xi^2 + 6a_0^2(t)\xi \right) - \frac{a_0'^2(t)}{8a_0^4(t)v^4(\varphi^*, \psi)} (u^*(\psi, t) - \\
& - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left(\xi^4 + 4a_0(t)\xi^3 + 12a_0^2(t)\xi^2 + \right. \\
& \left. 24a_0^3(t)\xi \right) - (q_\varphi(\varphi^*, \psi) \frac{\xi^2}{2} - \xi)a_0(t) \left] e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}.
\end{aligned}$$

Для знаходження r_1 і r_a маємо задачу:

$$\varepsilon(a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a)v^2(\varphi, \psi) \left[r_{\varphi\varphi} + r_{\psi\psi} \right] - v^2(\varphi, \psi)r_\varphi = r_t + \varepsilon^2 g_1(\varphi, \psi, t),$$

$$r_a(t, \varepsilon) = -\frac{(a_0(t) + \varepsilon a_1(t)) \int_{Q_*}^{Q^*} r_\varphi(\varphi_*, \psi, t) d\psi + \varepsilon^2 a_1(t) \int_{Q_*}^{Q^*} u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*}^{Q^*} (u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) + \varepsilon u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) + r_\varphi(\varphi_*, \psi, t)) d\psi},$$

$$r(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = r(\varphi, Q_*, t, \varepsilon) = r(\varphi, Q^*, t, \varepsilon) = 0,$$

де $g_1(\varphi, \psi, t)$ – функція, що виражається через відомі члени рядів (3.26) і (3.27):

$$\begin{aligned}
g_1(\varphi, \psi, t) = & -(a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a)v^2(\varphi, \psi) \left(u_{1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + \right. \\
& \left. + u_{1\psi\psi}(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \pi_{2_{\varphi\varphi}}(\xi, \psi, t) + \varepsilon \pi_{2_{\psi\psi}}(\xi, \psi, t) \right) - \varepsilon q(\varphi, \psi), \quad \xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

На підставі принципу максимуму для параболічних рівнянь маємо, що $|r| \leq M$.

3.3.2. Моделювання процесів масоперенесення за наявності невідомих функції масообміну та залежного від географічних координат коефіцієнта дифузії

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ (див. п.2.1, рис.2.1) розглянемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі [138]:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(b(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} + s(x, y) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.33)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(x, y, 0) = c_0^0(x, y), \quad (3.34)$$

$$b(x, y) \frac{\partial c(x, y, 0)}{\partial t} = c_*(x, y), \quad c(x, y, T) = P(x, y), \quad (x, y) \in G_z, \quad (3.35)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \quad (3.36)$$

тут $c(x, y, t)$ – невідома концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t ($0 \leq t \leq T$), $s(x, y)$ – функція додаткових джерел забруднення, M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon b(x, y)$

– коефіцієнт дифузії, $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр,

φ, v_x, v_y – потенціал та компоненти його швидкості в G_z .

Дана модель є узагальненою в тому розумінні, що вона дозволяє знайти функцію точкових джерел забруднення $s(x, y)$ за гранично допустимим розподілом концентрації шкідливої речовини $P(x, y)$. Це зручно тим, що в більшості випадків, ми знаємо таку норму концентрації, яка є допустимою, коли дозволена екологами зміна концентрації $\varepsilon \Delta h(x, y)$ для кожного моменту часу даного дослідження – невідома.

Припустимо, що задача (3.36), шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, де $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$ – розріз області G_z уздовж однієї з ліній течії, а $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \psi_* < \psi < \psi^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 2.1.6), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв’язаною.

Зробивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (3.33) та умовах (3.34) і (3.35), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\begin{aligned} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[a(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) + a_\varphi u_\varphi + a_\psi u_\psi \right] - \\ - v^2(\varphi, \psi) u_\varphi + q(\varphi, \psi) = u_t, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t),$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \quad (3.38)$$

$$a(\varphi, \psi) u_t(\varphi, \psi, 0) = u_*^*(\varphi, \psi), \quad u(\varphi, \psi, T) = F(\varphi, \psi), \quad (3.39)$$

де $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $a(\varphi, \psi) = b(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$, $q(\varphi, \psi) = s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$, $F(\varphi, \psi) = P(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$.

Розв'язок задачі (3.37) та (3.39) із умовами (3.38) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів

$$u(\varphi, \psi, t) = (u_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon u_1(\varphi, \psi, t)) + \sum_{i=0}^2 \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.40)$$

$$a(\varphi, \psi) = a_0(\varphi, \psi) + \varepsilon a_1(\varphi, \psi) + r_a(\varphi, \psi, \varepsilon), \quad (3.41)$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $a_i(\varphi, \psi)$ ($i=0,1$) – члени регулярної частини асимптотики, $\pi_i(\xi, \psi, t)$ – поправки на виході фільтраційної течії, $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$ – розтяг, $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $r_a(\varphi, \psi, \varepsilon)$ – залишкові члени.

В результаті підстановки (3.40) та (3.41) в (3.37)-(3.39) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε отримуємо такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотики:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) = q(\varphi, \psi), \\ u_0(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \\ a_0(\varphi, \psi)(u_{0\varphi}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0\varphi}(\xi, \psi, 0)) = u_{0*}^*(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{1\varphi} + u_{1t} = g_1(\varphi, \psi, t), \\ u_1(\varphi, \psi, 0) = 0, u_1(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

$$a_1(\varphi, \psi)(u_{0\varphi}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0\varphi}(\xi, \psi, 0)) = -a_0(\varphi, \psi)(u_{1\varphi}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{1\varphi}(\xi, \psi, 0)),$$

де $g_1(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left[a_0(\varphi, \psi)(u_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0\varphi\psi}(\varphi, \psi, t)) + a_{0\varphi}(\varphi, \psi)u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + a_{0\psi}(\varphi, \psi)u_{0\psi}(\varphi, \psi, t) \right]$.

У результаті їх розв'язання одержимо:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q(\varphi, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\varphi + u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi); \\ \int_0^t q(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi) d\tilde{t} + \\ + u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$a_0(\varphi, \psi) = \frac{u_*^*(\varphi, \psi)}{u_{0_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0_t}(\xi, \psi, 0)};$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_1(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi); \\ \int_0^t g_1(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$a_1(\varphi, \psi) = -\frac{a_0(\varphi, \psi)(u_{1_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{1_t}(\xi, \psi, 0))}{u_{0_t}(\varphi, \psi, 0) + \pi_{0_t}(\xi, \psi, 0)};$$

тут $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$, f^{-1} – функція обернена до f відносно

змінної φ .

З метою задовольнити другу із крайових умов (3.38) будується

зовнішня примежова функція $\pi = \sum_{i=0}^2 \pi_i \varepsilon^i$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким

чином, щоб функція $u(\varphi, \psi, t)$ задовольняла рівняння (3.37) та всі крайові умови (3.38). Для цього вводиться заміна (розтяг)

$$\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}.$$

Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$

перепишемо

оператор

$$L\pi = \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[a(\varphi, \psi) \Delta \pi + a_\varphi(\varphi, \psi) \pi_\varphi + a_\psi(\varphi, \psi) \pi_\psi \right] - \\ - v^2(\varphi, \psi) \pi_\varphi + q(\varphi, \psi) - \pi_t \text{ у вигляді змінних } (\xi, \psi, t):$$

$$L\pi = v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left[a(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left(\frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon \pi_{\psi\psi} \right) + \frac{1}{\varepsilon} a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \pi_\xi + \right. \\ \left. + \varepsilon a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \pi_\psi \right] + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_\xi}{\varepsilon} + q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) - \pi_t.$$

Розклавши функції $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$, $a(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$, $q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$, $a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$, $a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряди Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$ та прирівнявши у рівнянні $L\pi = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε одержимо, для визначення π_i ($i = \overline{0, 2}$), рівняння із відповідними умовами:

$$\left[\begin{array}{l} a_0(\varphi^*, \psi) \pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_0(\varphi^*, \psi) \pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_1(\xi, \psi, t), \\ \pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_0(\varphi^*, \psi) \pi_{2\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{2\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_2(\xi, \psi, t), \\ \pi_2(0, \psi, t) = 0, \\ \pi_2 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{array} \right.$$

ТУТ

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\xi, \psi, t) &= \frac{\pi_{0_t}(\xi, \psi, t) - q(\varphi^*, \psi)}{v^2(\varphi^*, \psi)} + (a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi - \\
&- a_1(\varphi^*, \psi))\pi_{0_{\xi\xi}}(\xi, \psi, t) + a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\pi_{0_\xi}(\xi, \psi, t), \\
\sigma_2(\xi, \psi, t) &= \frac{2v_\varphi(\varphi^*, \psi)\xi}{v^2(\varphi^*, \psi)}(\pi_{0_t}(\xi, \psi, t) - q(\varphi^*, \psi)) - a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\pi_{0_{\psi\psi}}(\xi, \psi, t) - \\
&- a_{0_\psi}(\varphi^*, \psi)\pi_{0_\psi}(\xi, \psi, t) + (a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi - a_1(\varphi^*, \psi))\pi_{1_{\xi\xi}}(\xi, \psi, t) + a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times \pi_{1_\xi}(\xi, \psi, t) + (a_{1_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi - \frac{1}{2}a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi^*, \psi))\pi_{0_{\xi\xi}}(\xi, \psi, t) + (a_{1_\varphi}(\varphi^*, \psi) - \\
&- a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi^*, \psi)\xi)\pi_{0_\xi}(\xi, \psi, t).
\end{aligned}$$

Розв'язками отриманих рівнянь будуть вирази

$$\begin{aligned}
\pi_0(\xi, \psi, t) &= (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t))e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*, \psi)}}, \\
\pi_1(\xi, \psi, t) &= \left[- (u_1(\varphi^*, \psi, t) + \tilde{c}(\varphi^*, \psi)) - l_1(\varphi^*, \psi, t)a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi - \right. \\
&- \left. l_2(\varphi^*, \psi, t)\left(\frac{a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)}{2}\xi^2 + a_0^2(\varphi^*, \psi)\xi\right) \right] e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*, \psi)}} - \frac{q(\varphi^*, \psi)}{v^2(\varphi^*, \psi)}\xi + \tilde{c}(\varphi^*, \psi), \\
\pi_2(\xi, \psi, t) &= \tilde{c}^*(\varphi^*, \psi) - \frac{q(\varphi^*, \psi)}{v^2(\varphi^*, \psi)}a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi - \left(\frac{2q(\varphi^*, \psi)v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{v^3(\varphi^*, \psi)} - \right. \\
&- \left. \frac{q_\varphi(\varphi^*, \psi)}{v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} - a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi \right) - \left[\tilde{c}^*(\varphi^*, \psi) - l_3(\varphi^*, \psi, t)\xi + l_4(\varphi^*, \psi, t) \times \right. \\
&\times \left(\frac{\xi^2}{2} + a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi \right) - l_5(\varphi^*, \psi, t)(\xi^3 + 3a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi^2 + 6a_0^2(\varphi^*, \psi)\xi) + \\
&+ l_6(\varphi^*, \psi, t)(\xi^4 + 4a_{0_\varphi}(\varphi^*, \psi)\xi^3 + 12a_0^2(\varphi^*, \psi)\xi^2 + 24a_0^3(\varphi^*, \psi)\xi) + \\
&+ \left. u_2(\varphi^*, \psi, t) \right] e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*, \psi)}},
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{c}(\varphi, \psi) = \frac{q(\varphi, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} \cdot \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\varepsilon},$$

$$\tilde{c}^*(\varphi, \psi) = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\varepsilon v^2(\varphi, \psi)} \cdot \left[q(\varphi, \psi) \left[\frac{v_\varphi(\varphi, \psi)}{v(\varphi, \psi)} \left(\frac{\varphi^* - \varphi_*}{\varepsilon} - 2a_0(\varphi, \psi) \right) + a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) \right] - \right. \\ \left. - q_\varphi(\varphi, \psi) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\varepsilon} - a_0(\varphi, \psi) \right) \right],$$

$$l_1(\varphi, \psi, t) = \frac{u_t^*(\psi, t) - u_{0_t}(\varphi, \psi, t)}{a_0(\varphi, \psi)v^2(\varphi, \psi)} - \frac{u^*(\psi, t) - u_0(\varphi, \psi, t)}{a_0(\varphi, \psi)} \left(a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) + \frac{a_1(\varphi, \psi)}{a_0(\varphi, \psi)} \right),$$

$$l_2(\varphi, \psi, t) = a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) \frac{u^*(\psi, t) - u_0(\varphi, \psi, t)}{a_0^2(\varphi, \psi)},$$

$$l_3(\varphi, \psi, t) = (u_{\psi\psi}^*(\psi, t) - u_{0_{\psi\psi}}(\varphi, \psi, t))a_0(\varphi, \psi) + (u_\psi^*(\psi, t) - u_{0_\psi}(\varphi, \psi, t))a_{0_\psi}(\varphi, \psi) + \\ + (l_1(\varphi, \psi, t) - a_0(\varphi, \psi)\tilde{l}_1(\varphi, \psi, t))a_1(\varphi, \psi) - a_{0_\varphi}(\varphi, \psi)\tilde{l}_1(\varphi, \psi) - \\ - \frac{u^*(\psi, t) - u_0(\varphi, \psi, t)}{a_0(\varphi, \psi)} (a_{1_\varphi}(\varphi, \psi) + a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi, \psi)) + \frac{u_{1_t}(\varphi, \psi, t)}{v^2(\varphi, \psi)} + 2a_{0_\psi}(\varphi, \psi) \times \\ \times (u_\psi^*(\psi, t) - u_{0_\psi}(\varphi, \psi, t))(a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) - 1),$$

$$\tilde{l}_1(\varphi, \psi, t) = \frac{u_1(\varphi, \psi, t) + \tilde{c}(\varphi, \psi)}{a_0(\varphi, \psi)} - l_1(\varphi, \psi, t)a_0(\varphi, \psi) - l_2(\varphi, \psi, t)a_0^2(\varphi, \psi),$$

$$l_4(\varphi, \psi, t) = \frac{2v_\varphi(\varphi, \psi)}{v^3(\varphi, \psi)} (u_t^*(\psi, t) - u_{0_t}(\varphi, \psi, t)) + \frac{2(u_\psi^*(\psi, t) - u_{0_\psi}(\varphi, \psi, t))}{a_0(\varphi, \psi)} \times$$

$$\times a_{0_\psi}(\varphi, \psi) + \frac{u^*(\psi, t) - u_0(\varphi, \psi, t)}{a_0^2(\varphi, \psi)} \left(a_0(\varphi, \psi)a_{0_{\psi\psi}}(\varphi, \psi) - 3(a_{0_\psi}(\varphi, \psi))^2 + \right. \\ \left. + a_0(\varphi, \psi)a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi, \psi) - a_{1_\varphi}(\varphi, \psi) \right) + a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) \left(2l_1(\varphi, \psi, t) - a_0(\varphi, \psi)l_0(\varphi, \psi, t) \right) - \\ - a_1(\varphi, \psi) \left(l_2(\varphi, \psi, t) - a_0(\varphi, \psi)l_1(\varphi, \psi, t) \right) - \frac{\tilde{l}_2(\varphi, \psi, t)}{v^3(\varphi, \psi)} + a_1(\varphi, \psi)l_2(\varphi, \psi, t) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (a_0(\varphi, \psi) - 1), \quad \tilde{l}_2(\varphi, \psi, t) = l_{1_t}(\varphi, \psi, t) a_0(\varphi, \psi) + l_{2_t}(\varphi, \psi, t) a_0^2(\varphi, \psi), \\ l_5(\varphi, \psi, t) &= (u^*(\varphi, \psi) - u_0(\varphi, \psi, t)) \left(\frac{2v_\varphi(\varphi, \psi)}{3v^3(\varphi, \psi)} + \frac{(a_{0_\varphi}(\varphi, \psi))^2}{3a_0^3(\varphi, \psi)} \right) - \\ & - \frac{a_1(\varphi, \psi) l_2(\varphi, \psi, t)}{6a_0(\varphi, \psi)} + \frac{\tilde{l}_3(\varphi, \psi, t)}{6v^2(\varphi, \psi)} - a_{0_\varphi}(\varphi, \psi) \left(\frac{l_2(\varphi, \psi, t)}{2} - \frac{l_1(\varphi, \psi, t) a_0(\varphi, \psi)}{3} \right), \\ \tilde{l}_3(\varphi, \psi, t) &= l_{2_t}(\varphi, \psi, t) \frac{a_0(\varphi, \psi)}{2}, \quad l_6(\varphi, \psi, t) = l_2(\varphi, \psi, t) \frac{a_0(\varphi, \psi) a_{0_\varphi}(\varphi, \psi)}{8}. \end{aligned}$$

Для знаходження $q(\varphi, \psi)$ використаємо фінальну умову перевізначення (3.39). Вибравши $T \geq \max_\psi(f(\varphi^*, \psi))$ (час проведення експерименту досить великий – подібний природному процесу), прийдемо до рівняння

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q(\varphi, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\varphi - \rho(\xi, \psi) \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \frac{q(\varphi, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\varphi = z(\varphi, \xi, \psi), \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \text{де } z(\varphi, \xi, \psi) &= F(\varphi, \psi) + \left[u_*(\psi, T - f(\varphi^*, \psi)) - u^*(\psi, T) \right] \rho(\xi, \psi) - \\ & - u_*(\psi, T - f(\varphi, \psi)), \quad \rho(\xi, \psi) = e^{-\frac{u_j^*(\psi, 0)}{u_j^*(\varphi^*, \psi)} \xi}, \quad \xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Всі значення функції $q(\varphi, \psi)$ в області комплексного потенціалу $G_w = \{\varphi_i = \varphi_* + ih_1, \psi_j = Q_* + jh_2, h_1 = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, h_2 = \frac{(Q^* - Q_*)}{m}, (i = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}), m, n \in Z\}$ шукаються із систем

$$\sum_{j=0}^i \beta_j K_{j,p} q_{j,p} - \rho_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p} = z_{i,p}, \quad i = \overline{0, n}, p = \overline{0, m}; \quad (3.43)$$

тут β_j – коефіцієнти відповідної квадратурної формули, якою за-

мінено інтеграл в (3.42), $K_{i,j} = \frac{1}{v^2(\varphi_i, \psi_j)}$, $q_{i,j} = q(\varphi_i, \psi_j)$,

$\rho_{i,j} = \rho(\varphi_i, \psi_j)$, $z_{i,j} = z(\varphi_i, \xi_i, \psi_j)$.

У випадку формули трапецій коефіцієнти β_j мають значення [13]

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{h_1}{2}, & j = 0, j = n; \\ h_1, & j = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Тоді (3.42) з врахуванням (3.43) запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} K_{0,p} q_{0,p} + K_{1,p} q_{1,p} + \dots + \frac{1}{2} K_{n,p} q_{n,p} = -\frac{z_{0,p}}{h_1 \rho_{0,p}}, \\ \frac{1}{2} (1 - \rho_{1,p}) K_{0,p} q_{0,p} + \left(\frac{1}{2} - \rho_{1,p}\right) K_{1,p} q_{1,p} - \rho_{1,p} K_{2,p} q_{2,p} - \dots \\ - \frac{1}{2} \rho_{1,p} K_{n,p} q_{n,p} = \frac{z_{1,p}}{h_1}, \\ \frac{1}{2} (1 - \rho_{2,p}) K_{0,p} q_{0,p} + (1 - \rho_{2,p}) K_{1,p} q_{1,p} + \left(\frac{1}{2} - \rho_{2,p}\right) K_{2,p} q_{2,p} - \dots \\ - \frac{1}{2} \rho_{2,p} K_{n,p} q_{n,p} = \frac{z_{2,p}}{h_1}, \\ \dots \\ \frac{1}{2} (1 - \rho_{n,p}) K_{0,p} q_{0,p} + (1 - \rho_{n,p}) K_{1,p} q_{1,p} + \dots + (1 - \rho_{n,p}) K_{n-1,p} q_{n-1,p} + \\ + \frac{1}{2} (1 - \rho_{n,p}) K_{n,p} q_{n,p} = \frac{z_{n,p}}{h_1}. \end{array} \right.$$

Розв'язавши отримані СЛАР відносно невідомих значень $q_{i,p}$,
($i = \overline{0, n}$, $p = \overline{0, m}$), зможемо остаточно знайти компоненти рядів
(3.40) і (3.41).

У формулі (3.42) врахована лише дія конвекції. Це допустимо в тих випадках, коли забруднююча речовина не є сильно токсичною (карбонати) і її деяка мінімальна надлишковість не призведе до дисбалансу в даному середовищі.

Для того щоб знайти загальний вплив масообміну на зміну концентрації для більш токсичних речовин (нітрати), використаємо умову (3.38) в якій фігуруватимуть усі знайдені члени рядів (3.40) та (3.41). Після певних перетворень одержимо

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\varphi - \tilde{A}(\varphi^*, \xi, \psi) \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\varphi + \varepsilon \int_{\varphi_*}^{\varphi} \left\{ a_0 \left[\left(\frac{q}{v^2} \right)'_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} \right] + \right. \\
 & + a_{0\varphi} \frac{q}{v^2} + a_{0\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} \left. \right\} d\tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{B}(\varphi^*, \xi, \psi) \int_{\varphi_*}^{\varphi} \left\{ a_0 \left[\left(\frac{q}{v^2} \right)'_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} \right] + \right. \\
 & + a_{0\varphi} \frac{q}{v^2} + a_{0\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} \left. \right\} d\tilde{\varphi} - \varepsilon^2 \tilde{C}(\varphi^*, \xi, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} - \\
 & - \varepsilon^2 \tilde{D}(\varphi^*, \xi, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi^2} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q}{v^2} d\tilde{\varphi} = \tilde{F}_0(\varphi, \xi, \psi, T), \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

тут

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(\varphi, \xi, \psi) &= \left[1 - \varepsilon \frac{a_{0\varphi}}{2} \xi - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{a_0} [a_{1\varphi} + a_{0\varphi\varphi}] \xi - \left(\frac{\xi^2}{2} + a_0 \xi \right) \left(2(a_{0\varphi})^2 a_0^{-1} - a_0^{-2} \times \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left(a_0 a_{0\psi\psi} - 3(a_{0\psi})^2 - a_{1\varphi} + a_0 a_{0\varphi\varphi} \right) \right\} - \left[\left(\frac{2v_{\varphi}}{3v^3} + \frac{(a_{0\psi})^2}{3a_0^3} \right) - \frac{(a_{0\varphi})^2}{2a_0^2} - \frac{1}{3} (a_{0\varphi})^2 \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left(\xi^3 + 3a_0 \xi^2 + 6a_0^2 \xi \right) + (a_{0\varphi})^2 \frac{1}{8a_0} \left(\xi^4 + 4a_0 \xi^3 + 12a_0^2 \xi^2 + 24a_0^3 \xi \right) \right] \cdot \rho(\xi, \psi), \\
 \tilde{B}(\varphi, \xi, \psi) &= \left[1 - \varepsilon a_{0\varphi} \left(\frac{\xi^2}{2} + (a_0 + a_0^{-1}) \xi \right) \right] \cdot \rho(\xi, \psi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\varphi, \xi, \psi) &= \left[(2a_0 + a_{0\varphi})a_{0\psi}\xi + \frac{a_{0\psi}}{a_0}\xi^2 \right] \cdot \rho(\xi, \psi), \\ \tilde{D}(\varphi, \xi, \psi) &= a_0(\varphi, \psi) \cdot \rho(\xi, \psi), \quad \tilde{F}_0(\varphi, \xi, \psi, t) = z(\varphi, \xi, \psi) - \\ &- \varepsilon E_1(\varphi, \psi, t) + E_2(\varphi^*, \xi, \psi, t), \quad E_1(\varphi, \psi, t) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left\{ a_0(\tilde{u}_{*\varphi\varphi} + \tilde{u}_{*\psi\psi}) + a_{0\varphi}\tilde{u}_{*\varphi} + a_{0\psi}\tilde{u}_{*\psi} \right\} d\tilde{\varphi}, \\ E_2(\varphi, \xi, \psi, t) &= \varepsilon \left(E_1(\varphi, \psi) + \frac{u_t^* - u_{0t}}{v^2} a_0 \xi + \frac{a_{0\varphi}}{2} \xi^2 (u^* - \tilde{u}_*) \right) \rho(\xi, \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left[a_0(\tilde{u}_{*\psi\psi} - u_{*\psi\psi}^*) + a_{0\psi}(\tilde{u}_{*\psi} - u_{*\psi}^*) + a_{0\varphi} \left(\frac{E_1(\varphi, \psi, t)}{a_0} - \frac{u_t^* - u_{0t}}{v^2} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{a_0} (u^* - \tilde{u}_*)(a_{1\varphi} + a_{0\varphi\varphi}) - \frac{u_{1t}}{v^2} - 2a_{0\psi}(u_{*\psi}^* - \tilde{u}_{*\psi})(a_0 - 1) \right] \xi - \\ &\left[2v'v^{-3}(u_t^* - u_{0t}) - 2a_0^{-1}(u_{*\psi}^* - \tilde{u}_{*\psi}) + a_{0\varphi} \left\{ \frac{2(u_t^* - u_{0t})}{a_0 v^2} - \frac{2a_{0\varphi}(u^* - \tilde{u}_*)}{a_0} \right. \right. \\ &- \left. \left. E_1 + a_0^2 \frac{u_t^* - u_{0t}}{a_0 v^2} \right\} - \frac{1}{a_0^2} (u^* - \tilde{u}_*) \left[a_0 a_{0\psi\psi} - 3(a_{0\psi\psi})^2 - a_{1\varphi} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. a_{0\varphi} a_{0\varphi\varphi} \right] \right] \left(\frac{\xi^2}{2} + a_0 \xi \right) + \left[(u^* - \tilde{u}_*) \left(\frac{2v'}{3v^3} + \frac{(a_{0\psi})^2}{3a_0^3} \right) + \frac{1}{6v^4} \frac{a_{0\varphi}(u_t^* - u_{0t})}{2a_0} - \right. \\ &- \left. \frac{(a_{0\varphi})^2 (u^* - \tilde{u}_*)}{2a_0^2} + \frac{a_{0\varphi}}{3} \left(\frac{u_t^* - u_{0t}}{v^2} - a_{0\varphi}(u^* - \tilde{u}_*) \right) \right] \left(\xi^3 + 3a_0 \xi^2 + 6a_0^2 \xi \right) - \\ &- \left. \frac{u^* (a_{0\varphi})^2}{8a_0} \left[\xi^4 + 4a_0 \xi^3 + 12a_0^2 \xi^2 + 24a_0^3 \xi \right] \right\} \rho(\xi, \psi), \\ \tilde{u}_*(\varphi, \psi, t) &= u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)). \end{aligned}$$

Використовуюючи формули (3.44) та різницеві схеми [задачу (3.45) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p} - A_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 + \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \left\{ \beta_{j,i} a'_{0\psi_{j,p}} \times \right. \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \left. \right\} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0,j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 + \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} + \\
& + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} \left. \right\} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} + \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \times \right. \\
& \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \left. \right\} - \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j \left(2v'_{\psi_{j,p}} + \frac{v_{j,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \\
& - \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 + \frac{4v_{j,p} v'_{\psi_{j,p}}}{h_2} + \frac{2v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p} = \\
& = F_{0,i,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,p} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \left\{ \beta_{j,i} a_{0,j,p} \times \right. \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p+2} - 2q_{k,p+1}) - 4v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p+1}) \left. \right\} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} \times \\
& \times a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}}{h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0,j,p} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0,p} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p} \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p+2} - 2q_{k,p+1}) - 4v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p+1}) \right\} + \\
& + \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}}{h_2 v_{k,p}^2} + \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j (v_{j,p}^2 h_2)^{-1} q_{j,p+1} \right\} + \\
& + \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j v_{j,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{j,p} h_2^{-1} (q_{j,p+2} - 2q_{j,p+1}) - 4v'_{\psi_{j,p}} q_{j,p+1}) \right\}
\end{aligned}$$

$$(i = \overline{0, n}, p = 0);$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p} - A_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,0,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} - \\
& - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \left\{ \beta_{j,i} a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} 2v'_{\psi_{k,p}} \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \right\} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0,j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0,0,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} \left. \right\} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} + \\
& + \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} 2v'_{\psi_{k,p}} \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \right\} + \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j 2v'_{\psi_{j,p}} \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \\
& - \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 - \frac{2v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p} = F_{0,i,p} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,0,p} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \left\{ \beta_{j,i} a_{0,j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{v_{k,p}^3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} - 2v'_{\psi_{k,p}}) (q_{k,p+1} + q_{k,p-1}) \} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a'_{0\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1} + q_{k,p-1}}{2h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0j,p} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{00,p} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} + \\
& + \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=1}^n \{ \beta_j a_{0j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1} + q_{k,p-1}}{h_2} \frac{1}{v_{k,p}^3} (h_2^{-1} v_{k,p} - 2v'_{\psi_{k,p}}) \} + \\
& + \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1} + q_{k,p-1}}{2h_2 v_{k,p}^2} + \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=1}^n \{ \beta_j (2v_{j,p}^2 h_2)^{-1} \times \\
& \times (q_{j,p+1} - q_{j,p-1}) \} + \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=1}^n \{ \beta_j \frac{q_{j,p+1} + q_{j,p-1}}{h_2} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} - 2v'_{\psi_{k,p}}) \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} (q_{j,p+1} + q_{j,p-1}) \}, \quad (i = \overline{0, n}, p = \overline{1, m-1}); \\
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p} - A_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{00,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \times \\
& \times \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \{ \beta_{j,i} a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(-2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \} - \\
& - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0j,p} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{00,p} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p} \\
& - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \{ \beta_j a_{0j,p} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p} \} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \{ \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(-2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p} \} - \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j \left(-2v'_{\psi_{j,p}} + \frac{v_{j,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p} - \\
& - \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 - \frac{4v_{j,p} v'_{\psi_{j,p}}}{h_2} + \frac{v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p} = \\
& = F_{0,i,p} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0_{j,p}} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0_{0,p}} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \{ \beta_{j,i} a_{0_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \\
& \times v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p-2} - 2q_{k,p-1}) + 2v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p-1}) \} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a'_{0\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p-1}}{h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0_{j,p}} \frac{q_{j-1,p}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0_{0,p}} \frac{q_{1,p}}{h_1 v_{0,p}^2} + \varepsilon B_{i,p} \times \\
& \times \sum_{j=1}^n \{ \beta_j a_{0_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p-2} - 2q_{k,p-1}) + 2v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p-1}) \} - \\
& - \varepsilon B_{i,p} \sum_{j=0}^n \beta_j a'_{0\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p-1}}{h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon^2 C_{i,p} \sum_{j=1}^n \{ \beta_j \times (v_{j,p}^2 h_2)^{-1} q_{j,p-1} \} + \\
& + \varepsilon^2 D_{i,p} \sum_{j=1}^n \{ \beta_j v_{j,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{j,p} h_2^{-1} (q_{j,p-2} - 2q_{j,p-1}) + \\
& + 2v'_{\psi_{j,p}} q_{j,p-1}) \} , \quad (i = \overline{0, n}, p = m); \tag{3.46}
\end{aligned}$$

тут використані позначення:

$$\delta_{0,i} = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ 1, & i \geq 1; \end{cases} \quad \beta_{j,i} = \begin{cases} \frac{h_1}{2}, & j = 0, i; \\ h_1, & j = \overline{1, i-1}; \end{cases} \quad A_{i,p} = \tilde{A}(\varphi^*, \xi_i, \psi_p), \quad B_{i,p} = \tilde{B}(\varphi^*, \xi_i, \psi_p),$$

$$C_{i,p} = \tilde{C}(\varphi^*, \xi_i, \psi_p), \quad D_{i,p} = \tilde{D}(\varphi^*, \xi_i, \psi_p), \quad F_{0,i,p} = \tilde{F}_0(\varphi_i, \xi_i, \psi_p, T),$$

$$v_{i,p} = v(\varphi_i, \psi_p), \quad q_{j,p} = q(\varphi_j, \psi_p), \quad a_{0_{i,p}} = a_0(\varphi_i, \psi_p),$$

$$v'_{\varphi_{i,p}} = \begin{cases} \frac{v_{i+1,p} - v_{i-1,p}}{2h_1}, i = \overline{1, n-1}; \\ \frac{v_{i+1,p} - v_{i,p}}{h_1}, i = 0; \\ \frac{v_{i,p} - v_{i-1,p}}{h_1}, i = n; \end{cases} \quad v'_{\psi_{i,p}} = \begin{cases} \frac{v_{i,p+1} - v_{i,p-1}}{2h_2}, p = \overline{1, m-1}; \\ \frac{v_{i,p+1} - v_{i,p}}{h_2}, p = 0; \\ \frac{v_{i,p} - v_{i,p-1}}{h_2}, p = m; \end{cases}$$

$$v''_{\psi\psi_{i,p}} = \begin{cases} \frac{v_{i,p+1} - 2v_{i,p} + v_{i,p-1}}{h_2^2}, p = \overline{1, m-1}; \\ \frac{v_{i,p+2} - 2v_{i,p+1} + v_{i,p}}{h_2^2}, p = 0; \\ \frac{v_{i,p} - 2v_{i,p-1} + v_{i,p-2}}{h_2^2}, p = m; \end{cases}$$

$$a'_{0\varphi_{i,p}} = \begin{cases} \frac{a_{0_{i+1,p}} - a_{0_{i-1,p}}}{2h_1}, i = \overline{1, n-1}; \\ \frac{a_{0_{i+1,p}} - a_{0_{i,p}}}{h_1}, i = 0; \\ \frac{a_{0_{i,p}} - a_{0_{i-1,p}}}{h_1}, i = n; \end{cases} \quad a'_{0\psi_{i,p}} = \begin{cases} \frac{a_{0_{i,p+1}} - a_{0_{i,p-1}}}{2h_2}, p = \overline{1, m-1}; \\ \frac{a_{0_{i,p+1}} - a_{0_{i,p}}}{h_2}, p = 0; \\ \frac{a_{0_{i,p}} - a_{0_{i,p-1}}}{h_2}, p = m. \end{cases}$$

Система (3.46) є нелінійною відносно змінних $q_{j,p}$ ($i = \overline{0, n}, p = \overline{0, m}$), оскільки функції a_0, a_1, u_0, u_1 та коефіцієнти із позначень до формули (3.45) залежать від функції забруднення q .

Наближення розв'язку задачі (3.45) дискретною задачею (3.46) побудуємо шляхом поетапної параметризації членів регулярної асимптотики з використанням ідей методу блочної ітерації.

Задаємо початкове наближення $q^{(0)}_{i,p}$ ($i = \overline{0, n}, p = \overline{0, m}$), наприклад розв'язок (3.42). Знаходимо значення

$a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, A^{(0)}, B^{(0)}, C^{(0)}, D^{(0)}, F_0^{(0)}$.

Тоді ітераційний процес згідно (3.14) буде реалізовуватись таким чином:

$$\begin{aligned}
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - A_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0_{0,p}}^{(s-1)} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 + \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \times \\
& \times \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \{ \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0_{0,p}}^{(s-1)} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \{ \beta_j a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 + \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} \} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \times \\
& \times \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \{ \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left(2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \times \\
& \times \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \} - \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j \left(2v'_{\psi_{j,p}} + \frac{v_{j,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j \times \\
& \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 + \frac{4v_{j,p} v'_{\psi_{j,p}}}{h_2} + \frac{2v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p}^{(s)} = F_{0,i}^{(s-1)} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0_{0,p}}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \{ \beta_{j,i} a_{0_{j,p}}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p+2}^{(s-1)} - 2q_{k,p+1}^{(s-1)}) - 4v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p+1}^{(s-1)}) - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}^{(s-1)}}{h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{j,p}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \beta_0 a_{0,p}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} + \\
& \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p+2}^{(s-1)} - 2q_{k,p+1}^{(s-1)}) - 4v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p+1}^{(s-1)}) \right\} + \\
& + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}^{(s-1)}}{h_2 v_{k,p}^2} + \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j \times \right. \\
& \times (v_{j,p}^2 h_2)^{-1} q_{j,p+1}^{(s-1)} \left. \right\} + \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j v_{j,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{j,p} h_2^{-1} (q_{j,p+2}^{(s-1)} - 2q_{j,p+1}^{(s-1)}) - \right. \\
& \left. - 4v'_{\psi_{j,p}} q_{j,p+1}^{(s-1)}) \right\}, \quad (i = \overline{0, n}, p = 0); \\
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - A_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - \\
& - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \left\{ \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} 2v'_{\psi_{k,p}} \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \right\} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \times \\
& \times \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{2v_{k,p}^2}{h_2^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} \right\} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \times \\
& \times \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} 2v'_{\psi_{k,p}} \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \right\} + \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j 2v'_{\psi_{j,p}} \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 - \frac{2v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p}^{(s)} = F_{0,i,p}^{(s-1)} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,0,p}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \left\{ \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \frac{1}{v_{k,p}^3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} - 2v'_{\psi_{k,p}}) (q_{k,p+1}^{(s-1)} + q_{k,p-1}^{(s-1)}) \left. \right\} - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}^{(s-1)} + q_{k,p-1}^{(s-1)}}{2h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \beta_0 a_{0,0,p}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} + \\
& + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}^{(s-1)} + q_{k,p-1}^{(s-1)}}{h_2} \frac{1}{v_{k,p}^3} (h_2^{-1} v_{k,p} - 2v'_{\psi_{k,p}}) \right\} + \\
& + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p+1}^{(s-1)} + q_{k,p-1}^{(s-1)}}{2h_2 v_{k,p}^2} + \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j \times \right. \\
& \times (2v_{j,p}^2 h_2)^{-1} (q_{j,p+1}^{(s-1)} - q_{j,p-1}^{(s-1)}) \left. \right\} + \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j \frac{q_{j,p+1}^{(s-1)} + q_{j,p-1}^{(s-1)}}{h_2} h_2^{-1} \times \right. \\
& \times (v_{k,p} h_2^{-1} - 2v'_{\psi_{k,p}}) \left. \right\} \frac{1}{v_{j,p}^3} (q_{j,p+1}^{(s-1)} + q_{j,p-1}^{(s-1)}) \left. \right\}, \quad (i = \overline{0, n}, p = \overline{1, m-1}); \\
& \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - A_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \times \\
& \times \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,0,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} + \\
& + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=0}^i \left\{ \beta_{j,i} (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \times \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \left(-2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \left. \right\} \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \left. \right\} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{j,p}}{h_1} - 2v'_{\varphi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon B_{i,p} \beta_0 a_{0,p}^{(s-1)} \left[\frac{v_{0,p}}{h_1} + 2v'_{\varphi_{0,p}} \right] \frac{1}{v_{0,p}^3} q_{0,p}^{(s)} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \left[6(v'_{\psi_{k,p}})^2 - \frac{4v_{k,p} v'_{\psi_{k,p}}}{h_2} + \frac{v_{k,p}^2}{h_2^2} - 2v_{k,p} v''_{\psi_{k,p}} \right] \frac{1}{v_{k,p}^4} q_{k,p}^{(s)} \left. \right\} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \times \\
& \times \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\varphi_{j,p}} K_{j,p} q_{j,p}^{(s)} - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \left\{ \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \times \right. \\
& \times \left(-2v'_{\psi_{k,p}} + \frac{v_{k,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{k,p}^3} q_{k,p}^{(s)} \left. \right\} - \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j \left(-2v'_{\psi_{j,p}} + \frac{v_{j,p}}{h_2} \right) \frac{1}{v_{j,p}^3} q_{j,p}^{(s)} - \\
& - \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j \left[6(v'_{\psi_{j,p}})^2 - \frac{4v_{j,p} v'_{\psi_{j,p}}}{h_2} + \frac{v_{j,p}^2}{h_2^2} - 2v_{j,p} v''_{\psi_{j,p}} \right] \frac{1}{v_{j,p}^4} q_{j,p}^{(s)} = \\
& = F_{0,i,p}^{(s-1)} + \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} - \varepsilon \delta_{0,i} \beta_{0,i} a_{0,0,p}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} - \\
& - \varepsilon \delta_{0,i} \sum_{j=1}^i \left\{ \beta_{j,i} a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p-2}^{(s-1)} - 2q_{k,p-1}^{(s-1)}) + \right. \\
& - \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \frac{q_{j-1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{j,p}^2} + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \beta_0 a_{0,0,p}^{(s-1)} \frac{q_{1,p}^{(s-1)}}{h_1 v_{0,p}^2} + \\
& + \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j a_{0,j,p}^{(s-1)} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} v_{k,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{k,p} h_2^{-1} (q_{k,p-2}^{(s-1)} - 2q_{k,p-1}^{(s-1)}) + 2v'_{\psi_{k,p}} q_{k,p+1}^{(s-1)}) \right\} - \\
& \varepsilon B_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=0}^n \beta_j (a_0^{(s-1)})'_{\psi_{j,p}} \sum_{k=0}^j \beta_{k,j} \frac{q_{k,p-1}^{(s-1)}}{h_2 v_{k,p}^2} - \varepsilon^2 C_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j \times \right. \\
& \times (v_{j,p}^2 h_2)^{-1} q_{j,p-1}^{(s-1)} \left. \right\} + \varepsilon^2 D_{i,p}^{(s-1)} \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_j v_{j,p}^{-3} h_2^{-1} (v_{j,p} h_2^{-1} (q_{j,p-2}^{(s-1)} - 2q_{j,p-1}^{(s-1)}) + \right. \\
& \left. + 2v'_{\psi_{j,p}} q_{j,p-1}^{(s-1)}) \right\}, \quad (i = \overline{0, n}, p = m); \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.47)
\end{aligned}$$

На кожній s -ій ітерації процесу (3.47) розв'язується СЛАР відносно змінних $q_{i,p}^{(s)}$ ($i = \overline{0, n}, p = \overline{0, m}$). Процес продовжуємо до

виконання умови $\max_{i,j} \left(\left| q_{i,j}^{(s)} - q_{i,j}^{(s-1)} \right| \right) \leq \tilde{\varepsilon}$ ($\tilde{\varepsilon}$ – задана точність). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв’язку, то зменшуємо $\tilde{\varepsilon}$ та збільшуємо параметри розбиття m і n . Після цього розв’язуємо різницеву задачу (3.46) заново.

Для відшукування r та r_a маємо співвідношення

$$\varepsilon v^2 \left[(a_0 + \varepsilon a_1 + r_a)(r_{\varphi\varphi} + r_{\psi\psi}) + (a_{0\varphi} + \varepsilon a_{1\varphi} + r_{a_\varphi})r_\varphi + (a_{0\psi} + \varepsilon a_{1\psi} + r_{a_\psi})r_\psi \right] - v^2 r_\varphi = r_t + \varepsilon^2 \tilde{g}(\varphi, \psi, t)$$

$r(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0$, $r_a(\varphi, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{p}(\varphi, \psi, \varepsilon)$, тут $\tilde{g}(\varphi, \psi, t)$ та $\tilde{p}(\varphi, \psi, \varepsilon)$ виражаються через знайдені члени рядів (3.40) та (3.41).

Вимагаючи достатню гладкість початкової та граничних умов та їх узгодженість в початковий момент часу, на основі принципу максимуму для диференціальних рівнянь в частинних похідних приходимо до оцінок $|r(\varphi, \psi, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, $|r_a(\varphi, \psi, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$.

3.4 Обернені сингулярно-збурені крайові задачі для системи рівнянь двокомпонентної конвективної дифузії

В однорідному пористому середовищі розглянемо обернену модельну задачу, що описує процес поширення забруднюючих речовин:

$$\varepsilon b_1(t) \left(C_{1xx}(x, y, t) + C_{1yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) C_{1x}(x, y, t) - v_y(x, y) \times \\ \times C_{1y}(x, y, t) - \varepsilon a_1 k \cdot (C_1(x, y, t))^{a_1} \cdot (C_2(x, y, t))^{a_2} = C_{1t}(x, y, t), \quad (3.48)$$

$$\varepsilon b_2(t) \left(C_{2xx}(x, y, t) + C_{2yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) C_{2x}(x, y, t) - v_y(x, y) \times \\ \times C_{2y}(x, y, t) - \varepsilon a_2 k \cdot (C_1(x, y, t))^{a_1} \cdot (C_2(x, y, t))^{a_2} = C_{2t}(x, y, t), \quad (3.49)$$

$$\varepsilon b_3(t) \left(C_{3xx}(x, y, t) + C_{3yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) C_{3x}(x, y, t) - v_y(x, y) \times \\ \times C_{3y}(x, y, t) + \varepsilon a_3 k \cdot (C_1(x, y, t))^{a_1} \cdot (C_2(x, y, t))^{a_2} = C_{3t}(x, y, t), \quad (3.50)$$

$$C_j|_{L^*} = C_{j*}(M, t), \quad C_j|_{L^*} = C_j^*(M, t), \quad C_j(x, y, 0) = C_{j0}^0(x, y),$$

$$b_j(t) \int_{L^*} \frac{\partial C_j(M, t)}{\partial n} dl = C_{j*}^*(t), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.51)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \quad (3.52)$$

тут $C_j(x, y, t)$ – концентрації трьох різних речовин фільтраційної течії в точці $(x, y) \in G_z$ (див. рис. 2.1.а) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon b_j(t)$ – коефіцієнти дифузії відповідних хімічних речовин, a_j – стехіометричні коефіцієнти в елементарних рівняннях масообміну, k – константа швидкості протікання реакцій масообміну, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $C_{j*}(M, t)$, $C_j^*(M, t)$, $C_{j0}^0(x, y)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області $G = G_z \times (0, \infty)$, $C_{j*}^*(t)$ – відомі функції перевизначення.

Дана модель описує процес поширення частинок забруднюючої речовини $C_1(x, y, t)$ (кислота) та нейтралізуючої речовини $C_2(x, y, t)$ (луг) у фільтраційному середовищі. Причому кожна з ре-

човин втрачає свої частинки при взаємодії, внаслідок чого утворюється речовина $C_3(x, y, t)$ (сіль).

Вважаємо, що задача (3.52) є розв'язаною – знайдено функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$, витрату Q . Тоді здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (3.48)-(3.50) та умовах (3.51), прийдемо до відповідної задачі для області $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon b_j(t) & \left(u_{j\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{j\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) u_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + \\ & + \varepsilon \delta_j a_j k \cdot (u_1(\varphi, \psi, t))^{\alpha_1} \cdot (u_2(\varphi, \psi, t))^{\alpha_2} = u_{jt}(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$u_j(\varphi_*, \psi, t) = u_{j*}(\psi, t), \quad u_j(\varphi^*, \psi, t) = u_j^*(\psi, t),$$

$$u_j(\varphi, \psi, 0) = u_{j0}^0(\varphi, \psi), \quad (3.54)$$

$$b_j(t) \int_{Q_*}^{Q^*} u_{j\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_{j*}^*(t), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.55)$$

де $\delta_j = \begin{cases} -1, & j = 1, 2; \\ 1, & j = 3; \end{cases}$ $u_j(\varphi, \psi, t) = C_j(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ і т.д.

Розв'язки задач (3.53) та (3.54) на знаходження невідомих $u_j(\varphi, \psi, t)$ і $b_j(t)$ з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів

$$\begin{aligned} u_j(\varphi, \psi, t) & = \left(u_{j,0}(\varphi, \psi, t) + \varepsilon u_{j,1}(\varphi, \psi, t) \right) + \\ & \sum_{i=0}^2 \pi_{j,i}(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r_j(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$b_j(t) = b_{j,0}(t) + \varepsilon b_{j,1}(t) + r_{b_j}(t, \varepsilon), \quad (3.57)$$

де $u_{j,i}(\varphi, \psi, t)$, $b_{j,i}(\varphi, \psi)$ – члени регулярної частини асимптотики,

$\pi_{j,k}(\xi, \psi, t)$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії), $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (розтягнена змінна), $r_j(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $r_{b_j}(\varphi, \psi, \varepsilon)$ – залишкові члени ($j = \overline{1,3}$; $i = \overline{0,1}$; $k = \overline{0,2}$).

В результаті підстановки (3.56) і (3.57) в (3.53) одержимо:

$$L(u_j) + \varepsilon k \delta_j a_j [I_1 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_4 + I_2 \cdot I_3 + I_2 \cdot I_4] = 0, \quad (3.58)$$

де $L(u_j) = \varepsilon a(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{j\varphi\varphi} + u_{j\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) u_{j\varphi} - u_{j,t}$, $j = \overline{1,3}$;

$$I_1 = \sum_{i=0}^{a_1} \varepsilon^i C_{a_1}^i u_{1,0}^{a_1-i} u_{1,1}^i, \quad I_2 = \sum_{\substack{m_1 \geq 0, \dots, m_6 \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_6 = a_1 \\ m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \neq 0}} (\varepsilon^{m_2 + m_4 + 2m_5} C_{a_1}(m_1, \dots, m_6) u_{1,0}^{m_1} u_{1,1}^{m_2} \pi_{1,0}^{m_3} \times$$

$$\times \pi_{1,1}^{m_4} \pi_{1,2}^{m_5} r_1^{m_6}), \quad I_3 = \sum_{i=0}^{a_2} \varepsilon^i C_{a_2}^i u_{2,0}^{a_2-i} u_{2,1}^i,$$

$$I_4 = \sum_{\substack{m_1 \geq 0, \dots, m_6 \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_6 = a_2 \\ m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \neq 0}} \varepsilon^{m_2 + m_4 + 2m_5} C_{a_2}(m_1, \dots, m_6) u_{2,0}^{m_1} u_{2,1}^{m_2} \pi_{2,0}^{m_3} \pi_{2,1}^{m_4} \pi_{2,2}^{m_5} r_2^{m_6},$$

$$C_{a_1}^i = \frac{a_1!}{i!(a_1 - i)!}, \quad C_{a_2}^i = \frac{a_2!}{i!(a_2 - i)!}, \quad C_{a_1}(m_1, \dots, m_6) = \frac{a_1!}{m_1! m_2! \dots m_6!},$$

$$C_{a_2}(m_1, \dots, m_6) = \frac{a_2!}{m_1! m_2! \dots m_6!}.$$

Прирівнявши в (3.54), (3.55), (3.58) коефіцієнти при однакових степенях ε отримаємо такі задачі для знаходження $u_{j,i}$, $b_{j,i}$

($j = \overline{1,3}$; $i = \overline{0,1}$):

$$\left[\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{j,0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{j,0t}(\varphi, \psi, t) &= 0, \\ u_{j,0}(\varphi, \psi, t) &= u_{j,*}(\psi, t), \quad u_{j,0}(\varphi, \psi, 0) = u_{j,0}^0(\varphi, \psi), \end{aligned} \right.$$

$$b_{j,0}(t) \int_{Q_*} u_{j,0\varphi}(\varphi, \psi, t) d\psi = u_{j,*}^*(t),$$

$$\left[\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{j,1\varphi} + u_{j,1t} &= b_{j,0}(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{j,0\varphi\varphi} + u_{j,0\psi\psi}) + k\delta_j a_j u_{1,0}^{a_1} u_{2,0}^{a_2}, \\ u_{j,1}(\varphi, \psi, 0) &= 0, \quad u_{j,1}(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$b_{j,1}(t) \int_{Q_*}^{\varphi} u_{j,0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = -b_{j,0}(t) \int_{Q_*}^{\varphi} u_{j,1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi.$$

Розв'язки даних задач запишуться у вигляді

$$u_{j,0}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_{j*}(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi); \\ u_{j0}^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$b_{j,0}(t) = \frac{u_{j*}^*(t)}{\int_{Q_*}^{\varphi} u_{j,0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi};$$

$$u_{j,1}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{j,1}(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi); \\ \int_0^t g_{j,1}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$b_{j,1}(t) = -\frac{b_{j,0}(t) \int_{Q_*}^{\varphi} u_{j,1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*}^{\varphi} u_{j,0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}, \quad j = \overline{1, 3}; \quad (3.59)$$

$$\text{де} \quad g_{j,1}(\varphi, \psi, t) = b_{j,0}(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{j,0\varphi\varphi} + u_{j,0\psi\psi}) + k\delta_j a_j u_{1,0}^{a_1} u_{2,0}^{a_2},$$

$$f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \quad f^{-1} - \text{функція обернена до } f \text{ по змінній } \varphi.$$

Щоб задовольнити другу крайову умову (3.54) будеться зовнішня примежова функція $\pi_j = \sum_{i=0}^2 \pi_{j,i} \varepsilon^i$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким чином, щоб функція $u_j(\varphi, \psi, t)$ ($j = 1, 2, 3$) задовольняла рівняння (3.53) і крайові умови (3.54). Для цього вводиться розтяг

$$\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}.$$

Перепишемо (3.43) у вигляді

$$\begin{aligned} b_j(t)v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left(\frac{\pi_{j\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon\pi_{j\psi\psi} \right) + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_{j\xi}}{\varepsilon} - \\ - \pi_{jt} + I_j = 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

де $I_j = \varepsilon k \delta_j a_j [I_1 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_4 + I_2 \cdot I_3 + I_2 \cdot I_4]$, $j = \overline{1,3}$.

Із (3.60) маємо диференціальні рівняння для знаходження поправок $\pi_{j,k}$ ($j = \overline{1,3}$; $k = \overline{0,2}$):

$$\begin{cases} b_{j,0}(t)\pi_{j,0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{j,0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_{j,0}(0, \psi, t) = u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_{j,0} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{j,0}(t)\pi_{j,1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{j,1\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_{3,j}(\xi, \psi, t), \\ \pi_{j,1}(0, \psi, t) = -u_{j,1}(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_{j,1} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{j,0}(t)\pi_{j,2\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{j,2\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_{4,j}(\xi, \psi, t), \\ \pi_{j,2}(0, \psi, t) = 0, \\ \pi_{j,2} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

$$\text{де } \sigma_{3,j}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{j,0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - b_{j,1}(t)\pi_{j,0\xi\xi}(\xi, \psi, t),$$

$$\sigma_{4,j}(\xi, \psi, t) = 2v_\varphi(\varphi^*, \psi) \frac{\pi_{j,0t}(\xi, \psi, t)}{v^3(\varphi^*, \psi)} \xi + \frac{\pi_{j,1t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - b_{j,0}(t)\pi_{j,0\psi\psi}(\xi, \psi, t) -$$

$$-b_{j,1}(t)\pi_{j,1\xi\xi}(\xi, \psi, t) - \frac{k\delta_j a_j}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left[\left((u_{2,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_2} \sum_{i=1}^{a_1} C_{a_1}^i (u_{1,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_1-i} \pi_{1,0}^i \right) + \right]$$

$$+ \left((u_{1,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_1} \sum_{i=1}^{a_2} C_{a_2}^i (u_{2,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_2-i} \pi_{2,0}^i \right) + \left(\sum_{i=1}^{a_1} C_{a_1}^i (u_{1,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_1-i} \pi_{1,0}^i \right) \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^{a_2} C_{a_2}^i (u_{2,0}(\varphi^*, \psi, t))^{a_2-i} \pi_{2,0}^i \right].$$

Розв'язки одержаних рівнянь запишуться так:

$$\pi_{j,0}(\xi, \psi, t) = (u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t)) e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}(t)}},$$

$$\pi_{j,1}(\xi, \psi, t) = \left[(u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t)) \left(\frac{b_{j,1}(t)\xi}{b_{j,0}^2(t)} - \frac{b'_{j,0}(t)\xi}{b_{j,0}(t)v^2(\varphi^*, \psi)} - \frac{b'_{j,0}(t)\xi^2}{2b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - \right. \\ \left. - u_{j,1}(\varphi^*, \psi, t) - (u_{jt}^*(\psi, t) - u_{j,0t}(\varphi^*, \psi, t)) \frac{\xi}{v^2(\varphi^*, \psi)} \right] e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}(t)}},$$

$$\pi_{j,2}(\xi, \psi, t) = \left[(b_{j,0}(t)(u_{j\nu\nu}^*(\psi, t) - u_{j,0\nu\nu}(\varphi^*, \psi, t)) + \right. \\ \left. + \frac{b'_{j,0}(t)}{b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} (u_{j,1t}(\varphi^*, \psi, t) - b_{j,1}(t)(u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t))) - \right. \\ \left. - \frac{b_{j,1}(t)}{b_{j,0}^2(t)} u_{j,1}(\varphi^*, \psi, t) \right] \xi - \left((b'_{j,0}(t) \frac{1}{b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} (u_{jt}^*(\psi, t) - \right. \\ \left. - u_{j,0t}(\varphi^*, \psi, t)) - b_{j,1}(t)(u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t)) \right) \left(\frac{b_{j,1}(t)}{2b_{j,0}^2(t)} - \right. \\ \left. - \frac{b'_{j,0}(t)}{2b_{j,0}(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - \frac{b'_{j,0}(t)}{2b_{j,0}(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \left(\frac{u_{j,1}(\varphi^*, \psi, t)}{2} - (u_j^*(\psi, t) - \right. \\ \left. - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t)) \right) \left(\frac{b'_{j,1}(t)b_{j,0}(t) + 2b'_{j,0}(t)b_{j,1}(t)}{2b_{j,0}^3(t)} - \frac{b''_{j,0}(t)b_{j,0}(t) - b_{j,0}'^2(t)}{2b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} + \right) \\ \left. + \frac{u_{jt}^*(\psi, t) - u_{j,0t}(\varphi^*, \psi, t)}{2v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - \frac{u_{j,0t}(\varphi^*, \psi, t) - u_{jt}^*(\psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left(\frac{v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{v(\varphi^*, \psi)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_{j,1}(t)}{2b_{j,0}^2(t)} \Big) \Big(\xi^2 + 2b_{j,0}(t)\xi \Big) + \left(\frac{(u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t) - u_j^*(\psi, t))a'_0(t)}{b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi, \psi)} \left[\frac{b_{j,1}(t)}{6b_{j,0}^2(t)} + \right. \right. \\
& + \frac{2v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{3v(\varphi^*, \psi)} + \left. \left. \left(\frac{b_{j,1}(t)}{3b_{j,0}^2(t)} - \frac{b'_{j,0}(t)}{3b_{j,0}(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \right] + \frac{(u_{j,1}^*(\psi, t) - u_{j,0,1}(\varphi^*, \psi, t))b'_{j,0}(t)}{3b_{j,0}^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{1}{2b_{j,0}^2(t)} b'_{j,0}(t) \right) + \frac{(b''_{j,0}(t)b_{j,0}(t) - 2b_{j,0}'^2(t))b'_{j,0}(t)}{6b_{j,0}^5(t)v^4(\varphi^*, \psi)} \Big) \Big(\xi^3 + 3b_{j,0}(t)\xi^2 + \\
& + 6b_{j,0}^2(t)\xi \Big) - \frac{b_{j,0}^2(t)}{8b_{j,0}^4(t)v^4(\varphi^*, \psi)} (u_j^*(\psi, t) - u_{j,0}(\varphi^*, \psi, t)) \Big(\xi^4 + 4b_{j,0}(t)\xi^3 + \\
& + 12b_{j,0}^2(t)\xi^2 + 24b_{j,0}^3(t)\xi \Big) \Big] e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}(t)}} - \frac{k\delta_j a_j}{v^2(\varphi^*, \psi)} + \\
& (I_{5,j} + I_{6,j} + I_{7,j} + I_{8,j} + I_{9,j}), \quad (j=1,2,3); \tag{3.61}
\end{aligned}$$

тыт

$$I_{5,j} = \begin{cases} a_1 u_{2,0}^{a_2}(\varphi^*, \psi, t) u_{1,0}^{a_1-1}(\varphi^*, \psi, t) (u_1^*(\psi, t) - u_{1,0}(\varphi^*, \psi, t)) \xi e^{-\frac{\xi}{b_{1,0}(t)}}, & j=1; \\ a_1 u_{2,0}^{a_2}(\varphi^*, \psi, t) u_{1,0}^{a_1-1}(\varphi^*, \psi, t) (u_1^*(\psi, t) - \\ - u_{1,0}(\varphi^*, \psi, t)) \left(e^{-\frac{\xi}{b_{1,0}(t)}} - e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}(t)}} \right), & j=2,3; \end{cases}$$

$$I_{6,j} = \begin{cases} u_{2,0}^{a_2} \sum_{i=2}^{a_1} C_{a_1}^i u_{1,0}^{a_1-i} (u_1^* - u_{1,0})^i \frac{b_{1,0}^2}{i(ib_{j,0} - b_{1,0})} \left(e^{-\frac{\xi i}{b_{1,0}}} - e^{-\frac{\xi i}{b_{j,0}}} \right), & a_1 \geq 2; \\ 0, & a_1 = 1; \end{cases}$$

$$I_{7,j} = \begin{cases} a_2 u_{1,0}^{a_1}(\varphi^*, \psi, t) u_{2,0}^{a_2-1}(\varphi^*, \psi, t) (u_2^*(\psi, t) - \\ - u_{2,0}(\varphi^*, \psi, t)) \xi e^{-\frac{\xi}{b_{2,0}(t)}}, \quad j=2; \\ a_2 u_{1,0}^{a_1}(\varphi^*, \psi, t) u_{2,0}^{a_2-1}(\varphi^*, \psi, t) (u_2^*(\psi, t) - u_{2,0}(\varphi^*, \psi, t)) \times \\ \times \left(e^{-\frac{\xi}{b_{2,0}(t)}} - e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}(t)}} \right), \quad j=1,3; \end{cases}$$

$$I_{8,j} = \begin{cases} u_{1,0}^{a_1} \sum_{i=2}^{a_2} C_{a_2}^i u_{2,0}^{a_2-i} (u_2^* - u_{2,0})^i \frac{b_{2,0}^2}{i(ib_{j,0} - b_{2,0})} \left(e^{-\frac{\xi i}{b_{2,0}}} - e^{-\frac{\xi i}{b_{j,0}}} \right), \quad a_2 \geq 2; \\ 0, \quad a_2 = 1; \end{cases}$$

$$I_{9,j} = \sum_{i=1}^{a_1} \sum_{p=1}^{a_2} C_{a_1}^i C_{a_2}^p u_{1,0}^{a_1-i} u_{2,0}^{a_2-p} (u_1^* - u_{1,0})^i (u_2^* - u_{2,0})^p \times$$

$$b_{1,0}^2 b_{2,0}^2 \left(e^{-\xi \left(\frac{i}{b_{1,0}} + \frac{p}{b_{2,0}} \right)} - e^{-\frac{\xi}{b_{j,0}}} \right)$$

$$\times \frac{1}{\left[ib_{2,0} b_{j,0} + pb_{1,0} b_{j,0} - b_{1,0} b_{2,0} \right] \left[ib_{2,0} + pb_{1,0} \right]}.$$

Для знаходження залишкових членів маємо таку задачу:

$$\varepsilon v^2 \left[\left(b_{j,0} + \varepsilon b_{j,1} + r_{b_j} \right) \left(r_{j\varphi\varphi} + r_{j\psi\psi} \right) - v^2 r_{j\varphi} + \varepsilon \delta_j a_j k r_1^{a_1} r_2^{a_2} = r_{j\bar{1}} + \varepsilon^2 \tilde{g}_j(\varphi, \psi, t), \right.$$

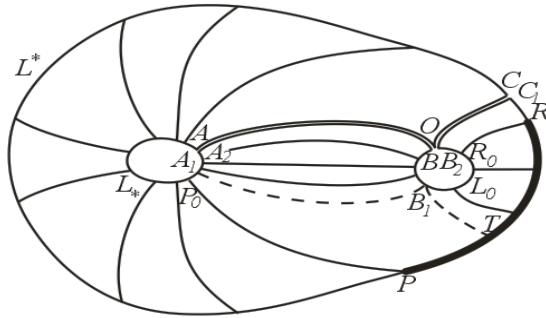
$$\left. r_j(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r_j(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r_j(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0, \quad r_{b_j}(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{p}_j(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1,3}; \right.$$

тут $\tilde{g}_j(\varphi, \psi, t)$ та $\tilde{p}_j(\varphi, \psi, \varepsilon)$ виражаються через знайдені члени рядів (3.56) та (3.57).

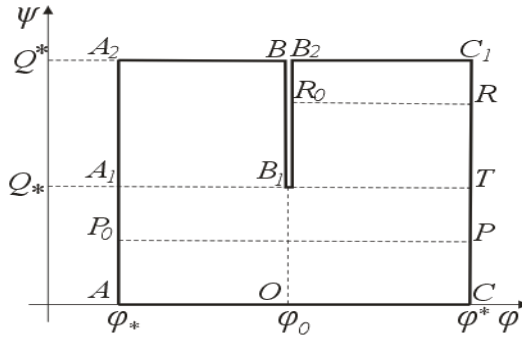
На основі принципу максимуму для диференціальних рівнянь в частинних похідних приходимо до оцінок $|r_j(\varphi, \psi, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, $|r_{b_j}(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, $j = \overline{1,3}$.

3.5. Автоматизоване керування процесом конвективного масопереносу в многозв'язних областях

Розглянемо процес конвективного масопереносу в тризв'язній області (пористому пласті) G_z , обмеженій трьома замкнутими гладкими контурами L^* , L_0 , L_* комплексної площини (z) (рис. 3.1, а)). Ділянка PR контуру L^* , яка розчиняє та перерозподіляє речовину, яка поступає до нього (тобто рівномірно розподіляє її), в окремі проміжки часу слугує водозабором.



а)



б)

Рис. 3.1. Фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б).

У зв'язку із деякими особливостями (наприклад, особливістю геологічної породи дна) фільтраційну зону L_0 можна розташувати лише у такому положенні, що до водозабору частково потраплятиме і неочищена вода, що поступатиме з контуру L_* обминаючи басейн L_0 .

Необхідно розрахувати коефіцієнт λ ($\lambda < 1$) (потужність фільтрів на L_0 , що характеризує ступінь поглинання басейном забруднень) такий, що концентрація розчиненої речовини у воді, що потраплятиме до водозабору PR в кожен момент часу не перевищувала допустимого значення c_{gr} .

Відповідну задачу в представимо у вигляді [136]:

$$-v_x u_x - v_y u_y = u_t, \quad (3.62)$$

$$u|_{t=0} = u_0^0(x, y), \quad u|_{L_*} = u_*(P, t),$$

$$u|_{L_0^*} = \ell^{-1} \lambda \int_{L_0^0} u(P, t) dl, \quad P \in L_0^0, \quad (3.63)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (3.64)$$

де $u = u(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії речовини в точці (x, y) у момент часу t , $z = x + iy \in G_z, 0 \leq t < \infty$, $(v_x, v_y) = \text{grad} \varphi$ – вектор швидкості фільтраційного потоку, а φ – потенціал фільтрації, $\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi^*$, P – біжуча точка відповідної ділянки границі даної області, u_0^* , u_* , u_0^0 ($u_0^* < u_*$) – задані достатньо гладкі та узгоджені функції,

$$L_0^* = \{z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} > 0\}, \quad L_0^0 = \{z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} \leq 0\},$$

$$L_0 = L_0^0 \cup L_0^*, \quad Q = \int_{L_0} -v_y dx + v_x dy, \quad \vec{n} - \text{вектор внутрішньої нормалі до}$$

∂G_z , ℓ – довжина ділянки L_0^* . Гранична умова на контурі L_0^* певним чином залежить від зміни концентрації у відповідному басейні внаслідок взаємовпливу характеристик процесів у внутрішності L_0 і пористого середовища (басейн, обмежений контуром L_0 , миттєво розчиняє та перерозподіляє речовину, яка поступає до нього через ділянку L_0^0 , а, отже, має місце її рівномірний розподіл вздовж L_0^*).

У [27] наведено алгоритми розв’язання модельних задач на конформні відображення для тризв’язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Тому вважатимемо фільтраційну задачу (3.64) розв’язаною, зокрема, розраховане поле швидкостей $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$.

Перейшовши від змінних (x, y) фізичної області G_z до змінних (φ, ψ) області комплексного потенціалу G_ω , задачу (3.62)–(3.63) зведемо до відповідної періодичної задачі:

$$\begin{aligned} -v^2(\varphi, \psi)c_\varphi &= c_t, (\varphi, \psi, t) \in G_\omega \times (0, \infty) = \Omega; \\ c|_{AO} &= c|_{A_1O_1}, c|_{BO} = c|_{BO_2}, c|_{CO_1} = c|_{C_1O_2}; \\ v^2(\varphi, \psi) &= \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2; \quad c(\varphi, \psi, t) = u(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t); \\ c_0(\varphi, \psi, t) &= u(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi), t), (x, y) \in L_0^*; \\ c_*(\psi, t) &= u(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t); \quad c_0^0(\varphi, \psi) = u(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Пошук розв’язку модельної задачі (3.65) зводиться до розв’язання задачі конвективного масопереносу в області $G_\omega^0 = G_\omega^1 \cup G_\omega^2$, де $G_\omega^1 = \{(\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi \leq Q^*\}$, $G_\omega^2 = \{(\varphi, \psi) : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi \leq (Q^* - \bar{Q})\}$, згідно з методом харак-

теристик, а в області $G_{\omega}^* = \{(\varphi, \psi) : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi \leq Q_*\}$ маємо задачу із запізненням.

Відповідно до умов постановки задачі одержимо оцінку значення концентрації на ділянці TR , а саме $\tilde{c}_{gr}(t) = c_{gr} - \int_{TR} c_0(\varphi^*, \psi, t) d\psi$, де $c_0(\varphi, \psi, t)$ - концентрація розчиненої речовини в області G_{ω}^* , яка знаходиться в процесі розв'язання задачі (3.65). Параметр керування λ пов'язаний зі значеннями концентрацій на контурах, що обмежують тризв'язну область, співвідношенням:

$$\int_{TR} \lambda(\psi, t) d\psi = \frac{\int \tilde{c}_{gr}(t + f(\varphi^*, \psi)) d\psi}{c_{01}(t) \ell_{L_0^*}}. \quad (3.66)$$

Тут $c_{01}(t) = I_{L_0^*}^{-1} \int_{L_0^*} c_1(\varphi_*, \psi, t) d\psi$, $c_1(\varphi_*, \psi, t)$ - розв'язок задачі конвективного масопереносу (3.65) в області G_{ω}^2 . Рівняння (3.66) є інтегральним рівнянням першого роду, яке в загальному випадку або не має розв'язків взагалі, або розв'язок є не єдиним. За узгодженості функцій, що фігурують в (3.66), $\lambda(\psi, t)$ можна шукати накладаючи додаткові обмеження та умови. Так, вимагаючи, щоб в кожен момент часу розподіл концентрації розчиненої речовини вздовж ділянки RT контуру L^* був рівномірний, отримаємо залежність для відшукування значень параметра керування ψ :

$$\lambda(\psi, t) = \frac{\tilde{c}_{gr}(t + f(\varphi^*, \psi))}{c_{01}(t)}. \quad (3.67)$$

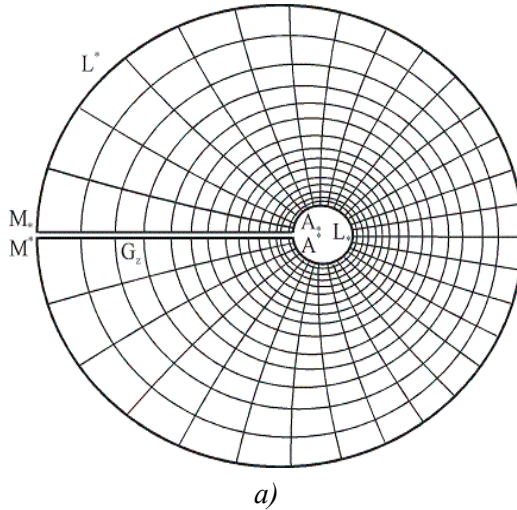
Час, за який до водозабору підступить очищена вода, розрачуємо з умови $t \geq f(\varphi^*, \psi), \forall \psi \in [\psi(T), \psi(R)]$. За умови збоїв в роботі очисних споруд на контурі L_0 , час, впродовж якого варто при-

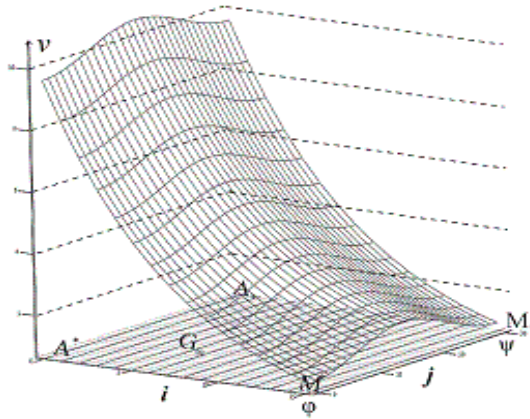
пинити водозабір на ділянці RT контуру L^* , знайдемо з умови:

$$t = \min\{f(\varphi^*, \psi) - f(\varphi_0, \psi) \mid \psi \in [\psi(R), \psi(P)]\}.$$

3.6. Результати числових експериментів

Наведемо результати розрахунку процесу описаного в п. 3.1 типу “конвекція-дифузія” на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1) / (z - z_2))$, при $\varphi_* = -3.7$, $\varphi^* = -1.7$,





б)

Рис. 3.2. Фізична область G_z (а) та поверхня швидкості над відповідною областю комплексного потенціалу G_w .

$L_* = \{z : \psi(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : \psi(x, y) = 2\pi\}$. На рис.3.2.а та рис.3.2.б зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z :
 $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 15$, $\psi(x, y) = \bar{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 30$, $i = \overline{0, 15}$,
 $j = \overline{0, 30}$, величину швидкості фільтрації $v = ((dz/dw)(\overline{dz/dw}))^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) .

Зміну коефіцієнта $a(\varphi, \psi)$ при $u_0^0(\varphi, \psi) = 0.3 + \frac{1}{(3 + (\varphi + 3.7)^2)}$,
 $u_*(\psi, t) = 0.3 + \frac{e^t}{3}$, $u^*(\varphi, \psi) = 0.3 + \frac{e^{-\varphi}}{(3 + (\varphi + 3.7)^2)}$, $u^*(\varphi, \psi) = 0.3 + \frac{e^t}{7}$

проілюстровано на рис.3.3.

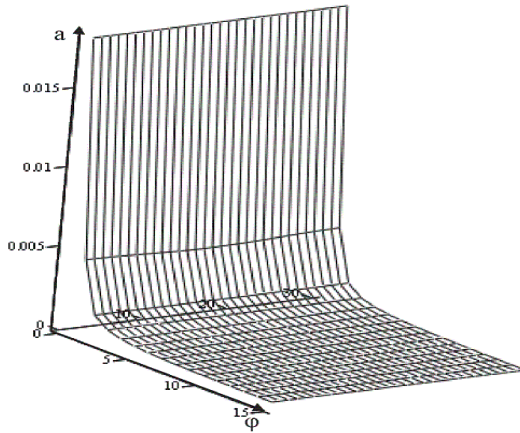


Рис.3.3 Розподіл значень функції-коефіцієнта $a(\varphi, \psi)$

Розподіл концентрації розчинної речовини $u(\varphi, \psi, t)$ вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = \varphi_2$ в момент часу $t = t_{10}$ при $\varepsilon_1 = 0.0001$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $\varepsilon_3 = 0.003$, $\varepsilon_4 = 0.005$ зображено на рис. 3.4 (криві 1-4 відповідно).

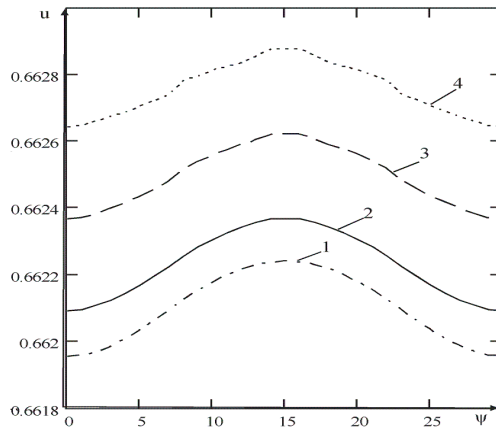


Рис.3.4 Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж лінії $\varphi = \varphi_2$.

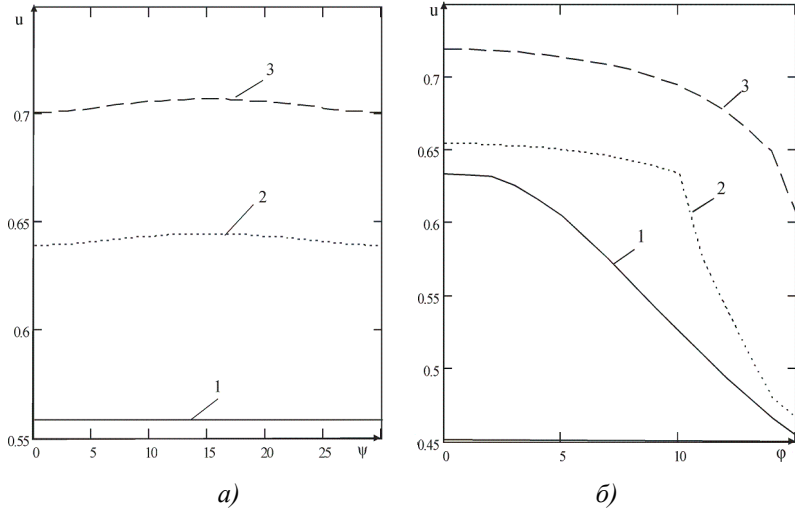


Рис.3.5 Розподіл концентрації розчинної речовини у фіксовані моменти часу.

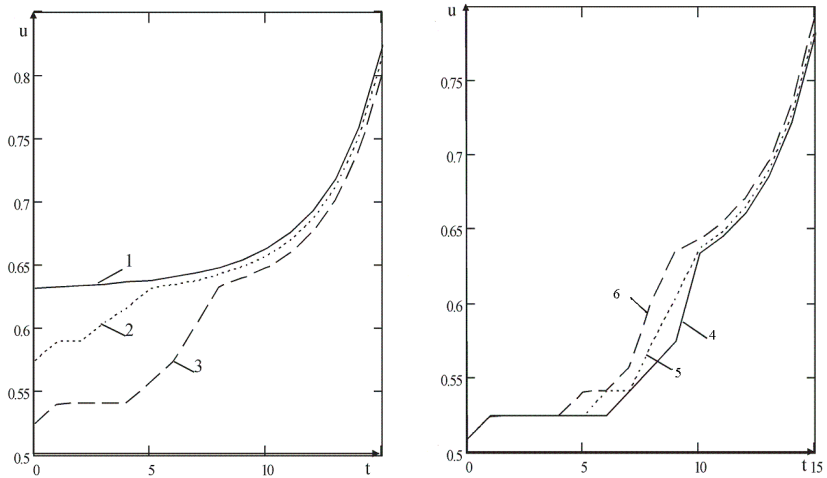


Рис.3.6 Розподіл концентрації розчинної речовини у часі.

На рис.3.5.а зображено розподіл концентрації розчинної речовини вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = \varphi_8$ в моменти часу

$t = t_1, t = t_9, t = t_{13}$ (криві 1-3 відповідно), а на рис.3.5 б - вздовж лінії течії $\psi = \psi_8$ в моменти часу $t = t_1, t = t_9, t = t_{13}$ (криві 1-3 відповідно). На рис. 3.6 проілюстровано розподіл в часі концентрації розчинної речовини в точках $(\varphi_1, \psi_{20}), (\varphi_6, \psi_{20}), (\varphi_9, \psi_{20}), (\varphi_{10}, \psi_1), (\varphi_{10}, \psi_5)$ та $(\varphi_{10}, \psi_{20})$ (криві 1-6 відповідно).

Результати розрахунку процесу, описаного в п.3.2 отримано за умов $u_*(\psi, t) = \left((1 - 4te^{-2t})23 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*)\varphi_* + \varphi_*^* \right)^{-1}$,

$$u^*(\psi, t) = \left((2 - e^{-t})23 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*)\varphi_*^* + \varphi_*^* \right)^{-1},$$

$$u_*(\psi, 0) = u_0^0(\varphi_*, \psi), \quad u^*(\psi, 0) = u_0^0(\varphi^*, \psi),$$

$$u_0^0(\varphi, \psi) = \left(\varphi(Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 23 + (\varphi_*^* + \varphi_* - \varphi) \right)^{-1},$$

$$u_*^*(t) = \frac{1}{2 + e^{-t}}.$$

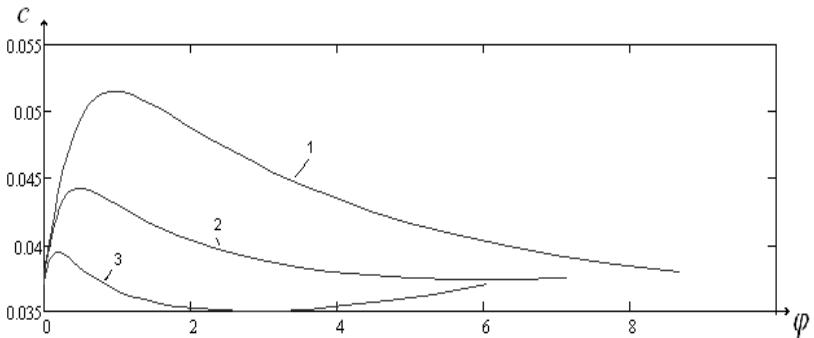


Рис 3.7. Режими концентрації забруднюючої речовини в різні моменти часу вздовж фіксованої лінії течії.

Розподіл концентрації забруднюючої речовини зображено на рис.3.7 в моменти часу $t_1 = 0.0359$, $t_2 = 0.1265$, $t_3 = 0.5236$ вздовж лінії течії $\psi = 1,256$ при $\varepsilon = 0.01$ (криві 1-3 відповідно). На рис. 3.8 представлено розподіл значень коефіцієнта $a(t)$.

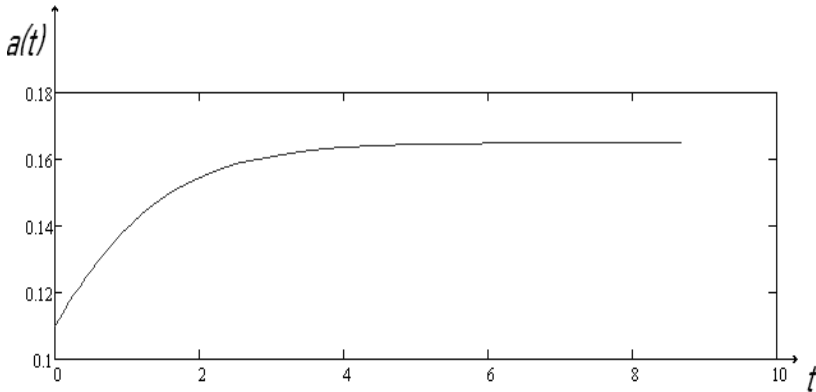


Рис.3.8. Графік коефіцієнта-функції $a(t)$

Результати комп'ютерного моделювання процесу конвективної дифузії пункту 3.3.1 на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1) / (z - z_2))$, при $\varphi_* = -2.31$, $\varphi^* = -1.25$, $Q_* = 0$, $Q^* = 2\pi$.

На рис.3.9.а та рис.3.9.б зображено величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2}$ та час проходження між еквіпотенціальними лініями $t = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) для області

КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦІАЛУ $G_w : \varphi_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 28,$
 $\psi_j = Q_* + ((Q^* - Q_*) \cdot j) / 28, \quad i = \overline{0, 28}, \quad j = \overline{0, 28}.$

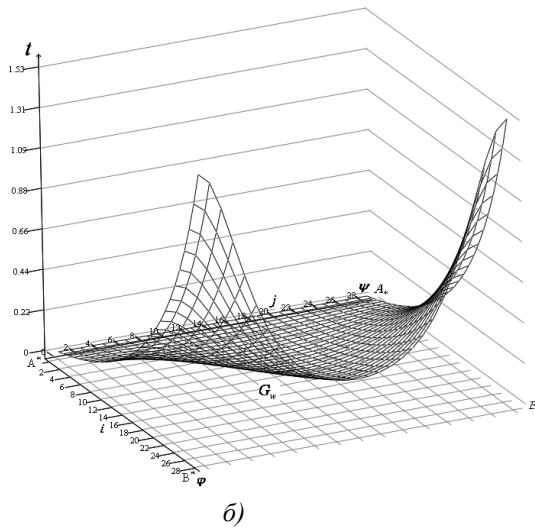
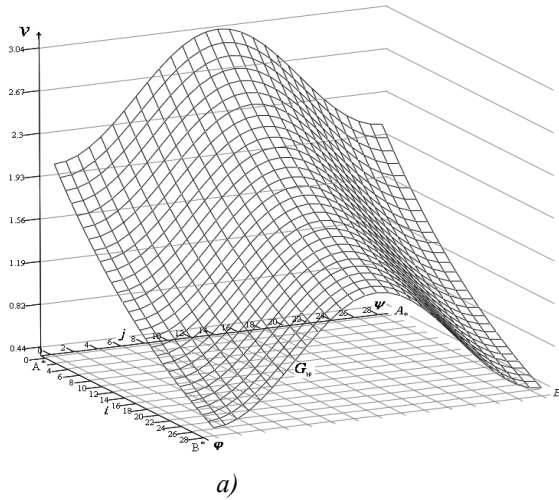
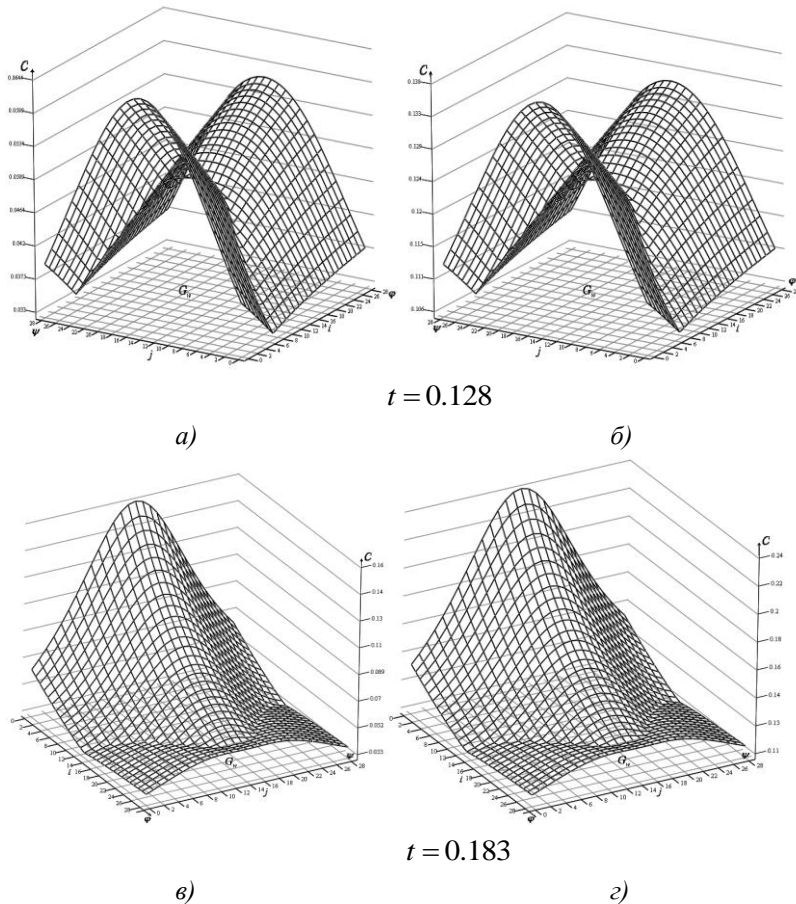


Рис.3.9. Поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (а), та поверхня часу(б).

Зміна у часі концентрації $u(\varphi, \psi, t)$ розчинної речовини над областю комплексного потенціалу G_w при $\varepsilon = 0.015$,
 $u_*(\psi, t) = \left((1 - 2te^t)25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^2 \right)^{-1}$, $u^*(\psi, t) = \left((1 - 5te^t) \times \right.$
 $\left. \times 25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^2 \right)^{-1}$, $u_0^0(\varphi, \psi) = \left((Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2 \right)^{-1}$,
 $u_*(t) = \frac{(t + e^{-5})^2}{(e^{-5t} - 3)(t^2 + 7)^2}$, $h(\varphi, \psi) = \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2 + 5}$, проілюстрована на
 рис.3.10.



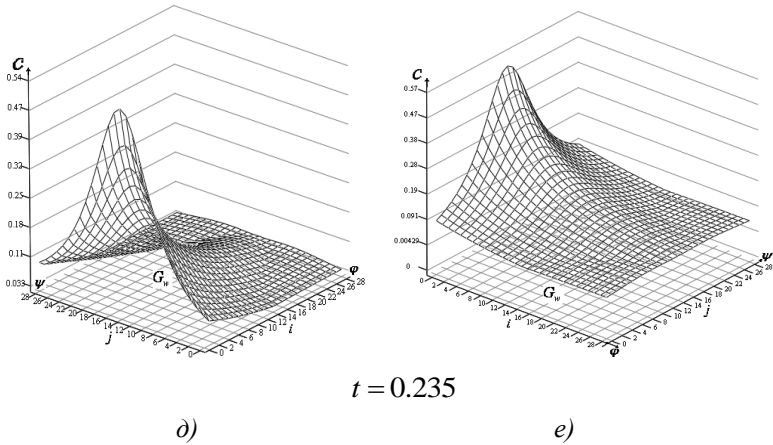


Рис.3.10. Зміна концентрації забруднюючої речовини в різні моменти часу з врахуванням конвективних, дифузійних поправок(а,в,д) та додаткових джерел забруднення(б,г,е).

Основний вплив на зміну початкового розподілу концентрації забруднюючої речовини, очевидно, здійснює конвективний перенос (конвекція). Із меншим впливом на перерозподіл забруднення діють дифузійні поправки (дифузія). Загалом вплив конвекції і дифузії, як механічної і міжмолекулярної дії на розповсюдження забруднення із контура L_* (фактично джерела забруднення із режимом $c_*(M,t)$) в область G_z , стає помітнішим із часом (див.рис.3.10(а,в,д)), і залежить від режиму $c^*(M,t)$ на контурі L^* , що по суті є втоком (точніше буфером, шлюзом), в околі якого концентрація нашої хімічної речовини може швидко відводитись чи накопичуватись в залежності від конкретно вибраної функції $c^*(M,t)$.

В області комплексного потенціалу G_w вплив конвекції здійснюється переносом забруднюючої речовини із швидкістю $v(\varphi_i, \psi_j)$ по лініях течії ψ_j відносно екіпотенціальних ліній φ_i .

Дифузія ж намагається вирівняти концентрацію в околі деякої точки, а відтак і по всій області G_w . Дія дифузії залежить від коефіцієнта $\varepsilon a(t)$. Так, наприклад, на рис.3.11.а та рис.3.11.б відповідно в моменти часу $t_1 = 0.1, t_2 = 0.156$ зображено вплив дифузії і конвекції (криві $1^* - 3^*$) на початковий розподіл концентрації забруднюючої речовини (криві 1-3) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -2.083, \varphi_2 = -1.894, \varphi_3 = -1.666$ при $\varepsilon = 0.01$.

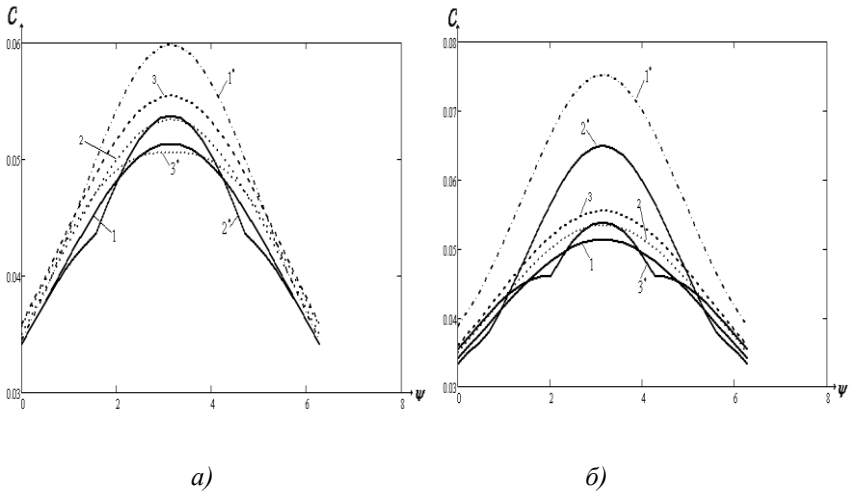
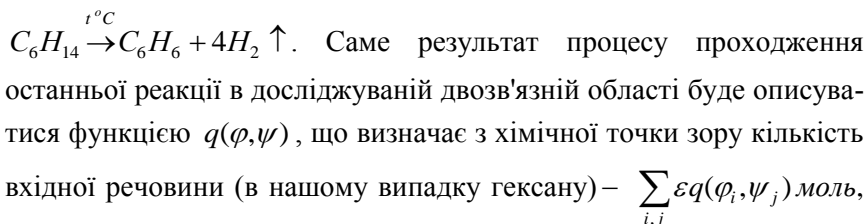


Рис.3.11. Вплив конвекції та дифузії на початковий розподіл концентрації у фіксовані моменти часу.

Суттєво на зміну концентрації забруднюючої речовини впливають точкові джерела забруднення, що визначаються функцією $q(\varphi, \psi)$. Знаючи конкретний вид забруднення (токсичні речовини, тверді солі, важкі ізотопи радіоактивних металів, та ін.), можна пояснити природу функції $q(\varphi, \psi)$. Наприклад, для виробництва певних барвників, медикаментів, вибухових речовин, засобів захисту

рослин та синтетичних волокон використовують бензол (C_6H_6) — безбарвна, токсична, нерозчинна у воді рідина, т.кип. $80.1^\circ C$. Внаслідок застарілих технологій можливе попадання бензолу в стічні води. Однак, при використанні нафтопродуктів чи безпосередньо при каталітичному крекінгу нафти можливе попадання у водойми гексану. Попадання гексану (C_6H_{14}) у водні ресурси можливе і при неякісному спаленні високооктанових вуглеводів, опари яких разом із дощем конденсуються і потрапляють на господарські угіддя. Потрапляння гексану у водойми, пористі середовища (грунти) в яких досліджуються процеси поширення C_6H_6 , може призвести до утворення додаткової кількості бензолу, яка сумарно становитиме $\sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j)$ моль. Дійсно при нагріванні сонцем ґрунту чи

водойми в яких міститься гексан відбувається реакція :



яка в результаті реакції утворює більш небезпечний вид забруднення (в нашому випадку бензол).

Вважаємо тепер, що в досліджуваній області — наприклад, території біля водойм Прип'яті і Дніпра (після вибуху ЧАЕС), чи зони видобутку природнього урану (ізотопи ${}^{235}_{92}U$ та ${}^{238}_{92}U$) — м. Грін-Бей (США, озеро Мічіган) та м. Су-Сент-Марі (Канада, озеро Верхнє), розглядаються процеси забруднення плутонієм. Наявність на даних територіях урану ${}^{238}_{92}U$ масою $238 \cdot \sum_{i,j} \varepsilon q(\varphi_i, \psi_j)$ з призводитиме до утворення нової кількості плутонію ${}^{239}_{94}Pu$, яка становить

тиме $\sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j)$ моль (це $239 \cdot \sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j) \varepsilon$). Справді, без поділу, після захоплення повільних “мандруючих” нейтронів ядрами ізотопу урану ${}_{92}^{238}U$, утворюється радіоактивний ізотоп ${}_{92}^{239}U$ [174] : ${}_{92}^{238}U + {}_0^1n \rightarrow {}_{92}^{239}U$, з періодом піврозпаду 23хв. Подальший розпад відбувається з випромінюванням електрона й виникненням трансуранового елемента — нептунію: ${}_{92}^{239}U \rightarrow {}_{93}^{239}Np + {}_{-1}^0e$. Нептуній, у свою чергу, β -радіоактивний з періодом піврозпаду близько двох днів: ${}_{93}^{239}Np \rightarrow {}_{94}^{239}Pu + {}_{-1}^0e$. Утворений плутоній відносно стабільний, оскільки його період піврозпаду порядку 24 000 років.

Очевидно, знаходження функції $q(\varphi, \psi)$ за (3.31) і визначення її дії на зміну концентрації забруднення із знайдених компонент (3.26) дозволяє обійти роз'язання складних багатостадійних задач фізики та хімії.

Функція $\varepsilon h(\varphi, \psi)$ являє собою ту граничну зміну концентрації забруднюючої речовини при якій не можливе існування флори і фауни, та при якій виникає загроза життю людей певного соціуму.

Знаючи функцію $q(\varphi, \psi)$ для конкретно заданої $\varepsilon h(\varphi, \psi)$, ми можемо апіорно оцінити ситуацію для розглядуваної екосистеми і вжити необхідні заходи для поліпшення екологічного благополуччя населення.

На рис.3.12.а та рис.3.12.б відповідно в моменти часу $t_1 = 0.121$, $t_2 = 0.28$ зображено розподіли концентрації забруднюючої речовини з врахуванням поправок на виході, конвекції і дифузії (криві 1–3) та додаткових джерел забруднення (криві 1*–3*) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -1.856$, $\varphi_2 = -1.742$, $\varphi_3 = -1.629$ при $\varepsilon = 0.01$.

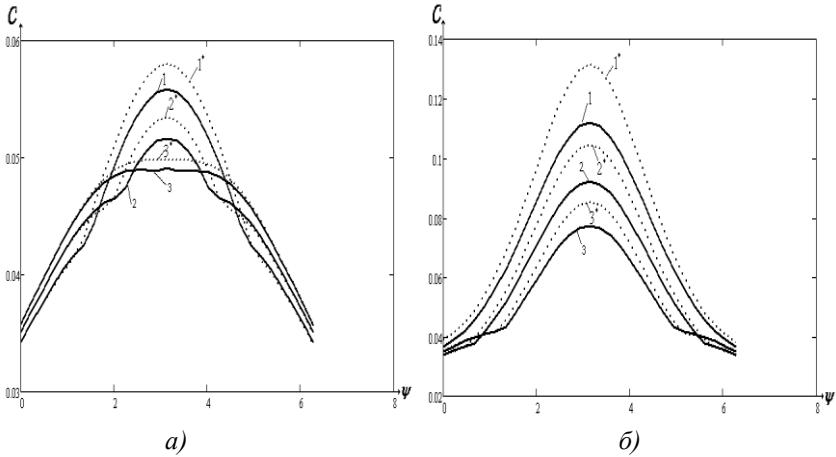


Рис.3.12. Вплив додаткових джерел забруднення на розподіл концентрації розчинної речовини у різні моменти часу

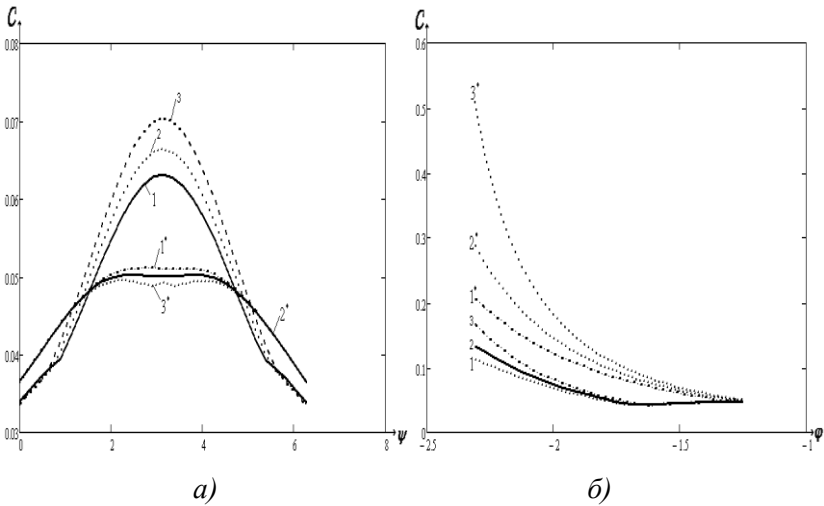


Рис.3.13. Зміна концентрації розчинної речовини з плином часу.

Зміна концентрації шкідливої речовини з врахуванням конвекції, дифузії, поправок на виході та додаткових джерел забруднен-

ня в моменти часу $t_1 = 0.156, t_2 = 0.169, t_3 = 0.183$ вздовж фіксованих екіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -1.856$ (криві 1–3 відповідно), $\varphi_2 = -1.477$ (криві 1*–3*) при $\varepsilon = 0.01$ продемонстрована на рис.3.13.а. А зміна концентрації вздовж фіксованих ліній течії $\psi_1 = 1.122$ (криві 1–3), $\psi_2 = 3.366$ (криві 1*–3*) в моменти часу $t_1 = 0.245, t_2 = 0.262, t_3 = 0.28$ при $\varepsilon = 0.01$ зображена на рис. 3.13 б.

На розподіл концентрації також впливає вибір параметра ε , оскільки тим самим змінюється коефіцієнт дифузії $\varepsilon a(t)$, а відтак посилюється або послаблюється вплив самої дифузії. Так, на рис.3.14.а показано розподіл концентрації вздовж фіксованої екіпотенціальної лінії $\varphi = -2.121$ в момент часу $t = 0.245$ при $\varepsilon_1 = 0.015$ (крива 1), $\varepsilon_2 = 0.02$ (крива 2). На рис.3.14.б показано розподіл концентрації вздовж фіксованої лінії течії $\psi = 2.02$ в момент часу $t = 0.245$ при $\varepsilon_1 = 0.015$ (крива 1), $\varepsilon_2 = 0.02$ (крива 2).

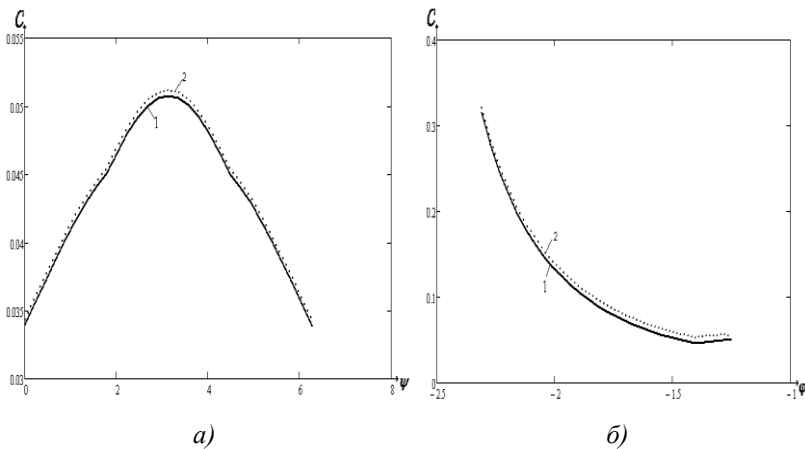


Рис.3.14.Зміна концентрації забруднюючої речовини при виборі малого параметра ε .

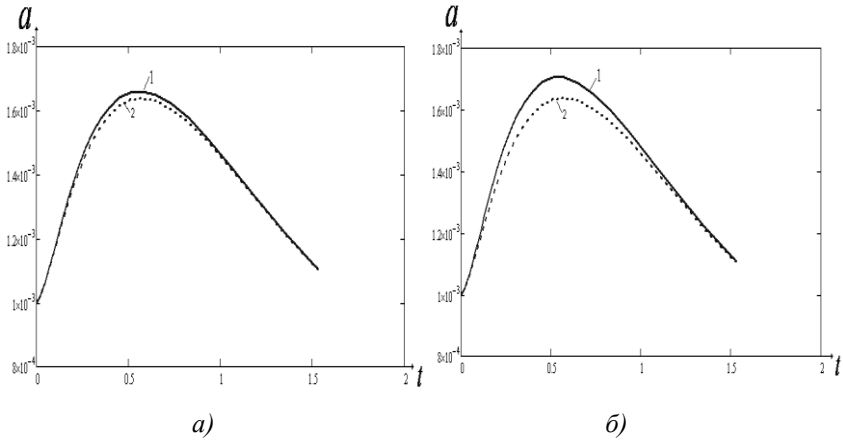


Рис.3.15.Залежність коефіцієнта дифузії від додаткових джерел забруднення при заданих значеннях параметра ε .

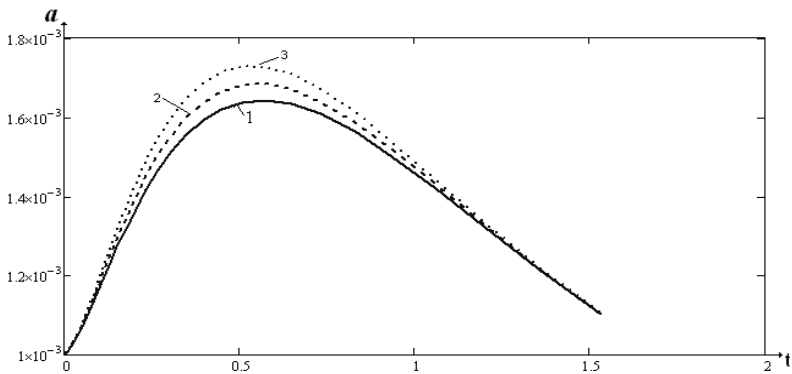


Рис.3.16.Зміна коефіцієнта дифузії при $\varepsilon_1 = 0.007$, $\varepsilon_2 = 0.01$, $\varepsilon_3 = 0.02$.

Із знайдених компонент асимптотичних рядів (3.26) та (3.27) видно, що коефіцієнт дифузії (зокрема функція $a_1(t)$) також залежить від функції $q(\varphi, \psi)$. На рис.3.15.а та рис.3.15.б відповідно при $\varepsilon_1 = 0.005$, $\varepsilon_1 = 0.015$ показано коефіцієнт дифузії без врахування (крива 2) та з врахуванням (крива 1) додаткових джерел забруднен-

ня. На рис.3.16 зображено зміну коефіцієнта дифузії при виборі різних значень параметра ε з врахуванням функції додаткових джерел забруднення $q(\varphi, \psi)$.

Для комп'ютерних розрахунків задачі пункту 3.3.2 використовуємо область G_w таку як і в пункті 3.3.1 поклавши:

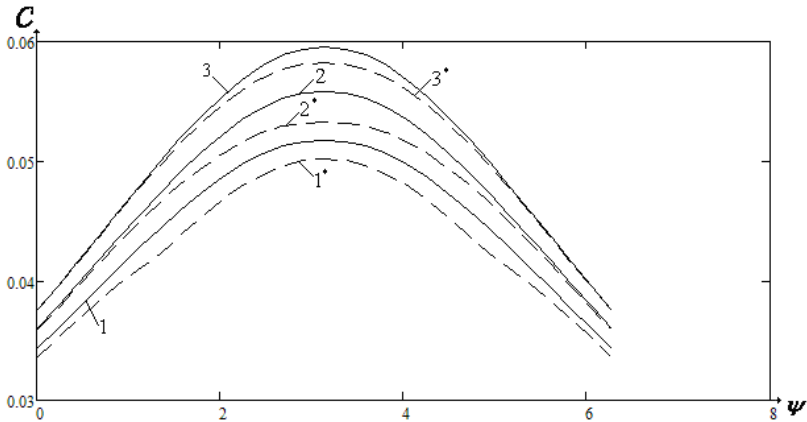
$$u_*(\psi, t) = \frac{1}{(1 - te^{-t})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2},$$

$$u^*(\psi, t) = \frac{1}{(1 - 4te^{-2t})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^{*2}},$$

$$u_0^0(\varphi, \psi) = \frac{1}{(Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2}, \quad u_*^*(\varphi, \psi) = \frac{1}{10^5(\varphi^2 + \psi^2 + \varphi^2\psi^2)},$$

$$F(\varphi, \psi) = \frac{1}{(1 - Te^{-T})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^2} \cdot \frac{\varphi^* - \varphi}{\varphi^* - \varphi_*} +$$

$$\frac{1}{(1 - 4Te^{-2T})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^2} \cdot \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi^* - \varphi_*}.$$



a) $t = 0.058$

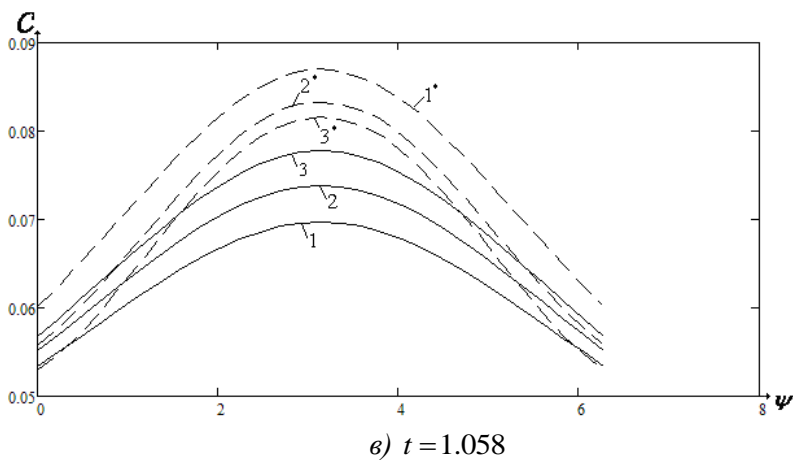
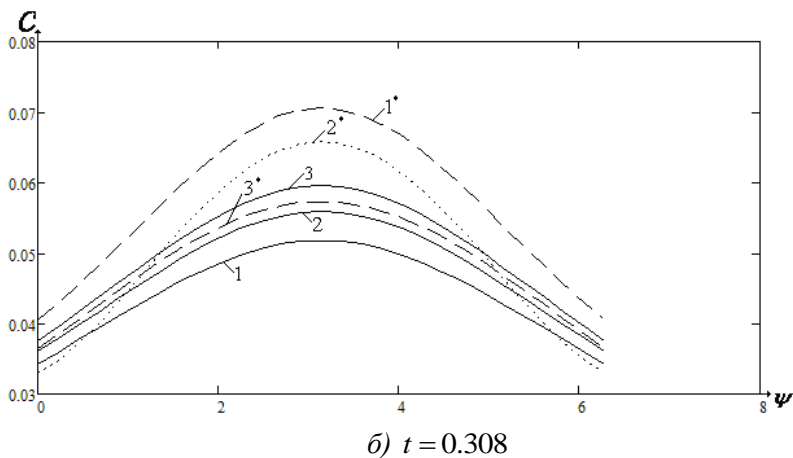


Рис. 3.17. Вплив конвекції та дифузії на початковий розподіл концентрації у фіксовані моменти часу вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -2.234$, $\varphi_2 = -1.856$, $\varphi_3 = -1.477$.

На рис. 3.17.а, 3.17.б, 3.17.в відповідно в моменти часу $t_1 = 0.058$, $t_2 = 0.308$, $t_3 = 1.058$ зображено вплив дифузії і конвекції (криві 1* – 3*) на початковий розподіл концентрації забруднюючої речовини (криві 1–3) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній

$\varphi_1 = -2.234$, $\varphi_2 = -1.856$, $\varphi_3 = -1.477$ при $\varepsilon = 0.01$.

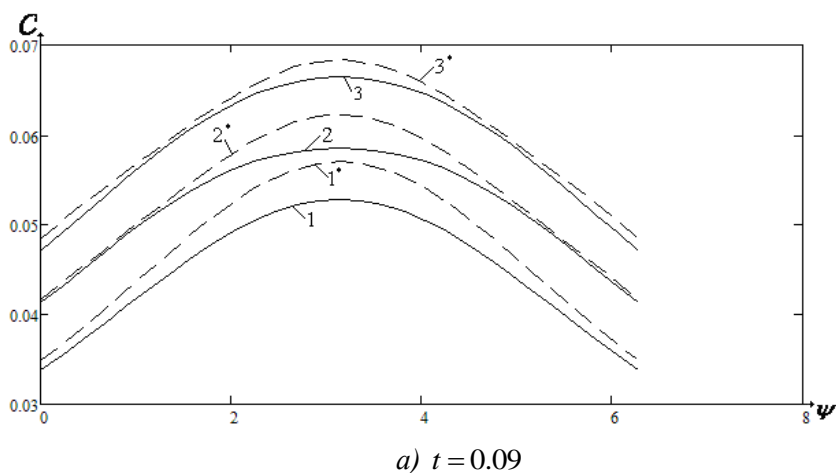
Суттєво на зміну концентрації забруднюючої речовини впливають точкові джерела забруднення, що визначаються функцією $q(\varphi, \psi)$. Знаючи конкретний вид забруднення (токсичні речовини, тверді солі, важкі ізотопи радіоактивних металів, та ін.), можна пояснити природу функції $q(\varphi, \psi)$. Наприклад, для виробництва певних барвників, медикаментів, вибухових речовин, засобів захисту рослин та синтетичних волокон використовують бензол (C_6H_6) – безбарвна, токсична, нерозчинна у воді рідина. Внаслідок застарілих технологій можливе попадання бензолу в стічні води. Однак, при використанні нафтопродуктів чи безпосередньо при каталітичному крекінгу нафти можливе попадання у водойми гексану. Попадання гексану (C_6H_{14}) у водні ресурси можливе і при неякісному спаленні високооктанових вуглеводів, опари яких разом із дощем конденсуються і потрапляють на господарські угіддя. Потрапляння гексану у водойми, пористі середовища (грунти) в яких досліджуються процеси поширення C_6H_6 , може призвести до утворення додаткової кількості бензолу, яка сумарно становитиме $T \sum_{i,j} q(\varphi_i, \psi_j)$

моль. Дійсно при нагріванні сонцем ґрунту чи водойми в яких міститься гексан відбувається реакція $C_6H_{14} \xrightarrow{t^\circ C} C_6H_6 + 4H_2 \uparrow$. Саме результат процесу проходження останньої реакції в досліджуваній двозв'язній області буде описуватися функцією $q(\varphi, \psi)$, що визначає з хімічної точки зору $T \frac{43}{39} \sum_{i,j} q(\varphi_i, \psi_j)$ моль вхідної речовини, яка в результаті реакції утворює більш небезпечний вид забруднення – бензол.

Очевидно, знаходження функції $q(\varphi, \psi)$ із (3.42) і визначення її дії на зміну концентрації забруднення через знайдені компоненти ряду (3.40) дозволяє обійти розв'язання складних багатоступінних задач фізики та хімії.

Знаючи функцію $q(\varphi, \psi)$ для конкретно заданої $F(\varphi, \psi)$, ми можемо апріорно оцінити ситуацію для розглядуваної екосистеми і вжити необхідні заходи для поліпшення екологічного благополуччя населення.

На рис. 3.18.а, 3.18.б, 3.18.в відповідно в моменти часу $t_1 = 0.09$, $t_2 = 0.398$, $t_3 = 1.353$ зображено розподіли концентрації забруднюючої речовини з врахуванням конвекції і дифузії (криві 1–3) та додаткових джерел забруднення (криві 1*–3*) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -2.045$, $\varphi_2 = -1.666$, $\varphi_3 = -1.288$ при $\varepsilon = 0.015$.



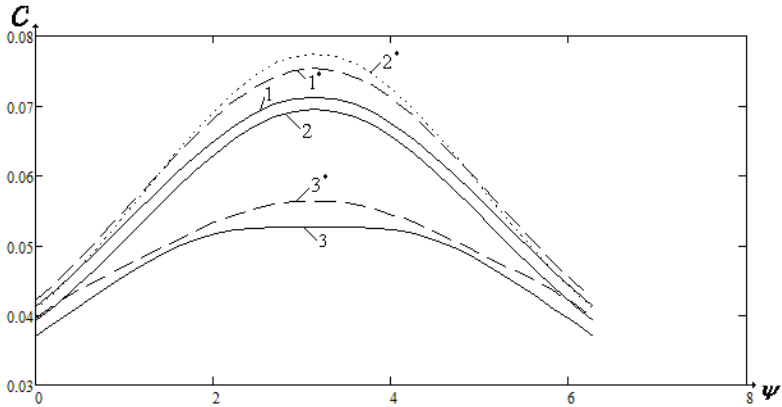
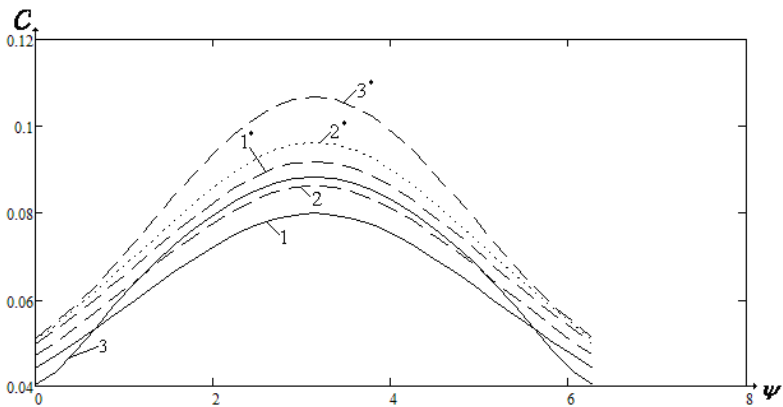
б) $t = 0.398$ в) $t = 1.353$

Рис. 3.18. Вплив додаткових джерел забруднення на розподіл концентрації у різні моменти часу вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -2.045$,

$$\varphi_2 = -1.666, \varphi_3 = -1.288.$$

Крім негативної дії на екологічну ситуацію у досліджуваних областях, забруднюючі речовини можуть впливати на напружено-деформований стан ґрунту, що важливо знати під час проектування гідротехнічних споруд. Тому потрібно досліджувати дію фізико-

хімічних процесів на стан ґрунтового середовища та на розміщення на ньому споруд. Актуально знати динаміку поширення забруднень в часі, оскільки зможемо прогнозувати напружено-деформований стан ґрунту.

Поширення забруднення суттєво залежить від масообміну, котрий характеризується функцією $q(\varphi, \psi)$, що може описувати розклад гідрокарбонатів на сіль та воду.

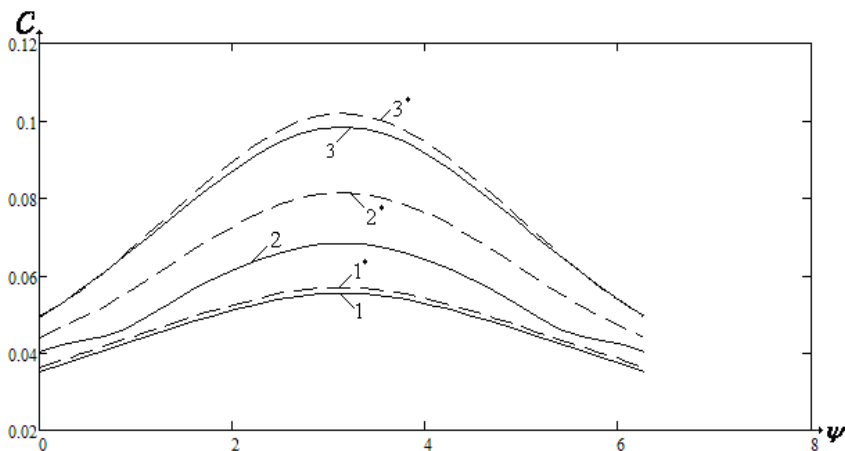


Рис. 3.19. Зміна концентрації забруднення в різні моменти часу вздовж еквіпотенціальних ліній

Зміна концентрації шкідливої речовини з врахуванням конвекції, дифузії та додаткових джерел забруднення в моменти часу $t_1 = 0.073$, $t_2 = 0.35$, $t_3 = 1.533$ вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -1.818$ (криві 1–3 відповідно), $\varphi_2 = -1.439$ (криві 1*–3*) при $\varepsilon = 0.015$ продемонстрована на рис. 3.19. Динаміка зміни концентрації забруднюючої речовини в точках $M_1 = (-2.272, 2.244)$, $M_2 = (-2.196, 2.468)$, $M_3 = (-2.159, 2.693)$ при

$\varepsilon = 0.005$ без врахування (криві 1–3) та з врахуванням (криві $1^* - 3^*$) функції $q(\varphi, \psi)$ проілюстрована на рис. 3.20.

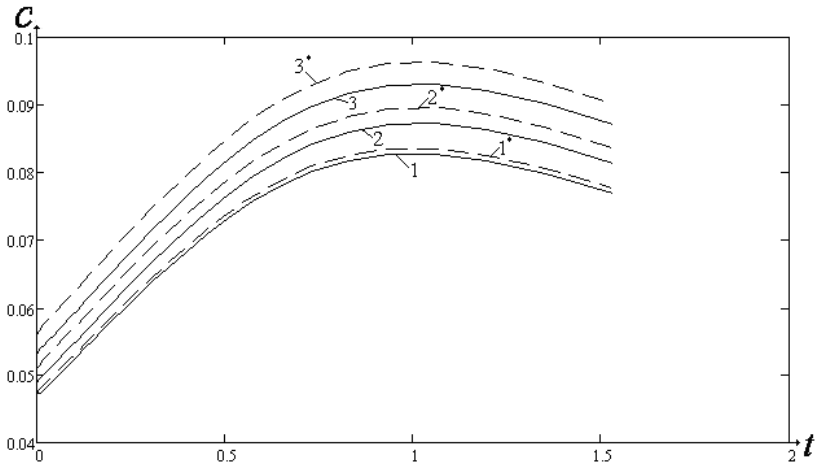


Рис. 3.20. Динамічний вплив реакцій масообміну першого порядку на концентрацію забруднення

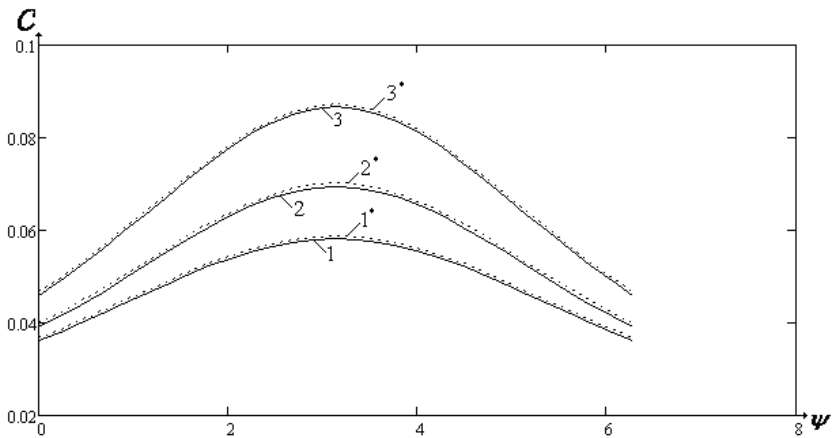


Рис. 3.21. Залежність розподілу концентрації забруднюючої речовини від малого параметра

На розподіл концентрації також впливає вибір параметра ε , оскільки тим самим змінюється вплив дифузії. Так, на рис. 3.21 показано розподіл концентрації вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -1.969$, $\varphi_2 = -1.629$, $\varphi_3 = -1.401$ в момент часу $t = 0.51$ при $\varepsilon_1 = 0.015$ (криві 1 – 3), $\varepsilon_2 = 0.02$ (криві 1* – 3*).

Дифузія, за своєю дією на розподіл забруднення, фактично є середньою між конвекцією та хімічними реакціями. Вона відіграє помітну роль при малих швидкостях фільтрації і залежить від температури:

$$\varepsilon b = b_0 e^{-E_D/RT_a},$$

де b_0 – передекспоненціальний множник, E_D – енергія активації дифузії, R – універсальна газова стала, T_a – абсолютна температура.

Однак енергія активації хімічної реакції значно більша за енергію активації дифузії. Тому із зростанням температури швидкість реакції зростає швидше, ніж швидкість дифузії, і, починаючи із деякої температури, дифузія стає лімітуючою стадією. При не великих температурах реакція проходить у “кінетичній області”.

Із знайдених компонент асимптотичних рядів (3.40) та (3.41) видно, що коефіцієнт дифузії також залежить від функції $q(\varphi, \psi)$. На рис. 3.22 при $\varepsilon_1 = 0.015$ показано значення коефіцієнта дифузії вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -1.931$, $\varphi_2 = -1.591$, $\varphi_3 = -1.321$ без врахування (криві 1-3) та з врахуванням (криві 1* – 3*) додаткових джерел забруднення.

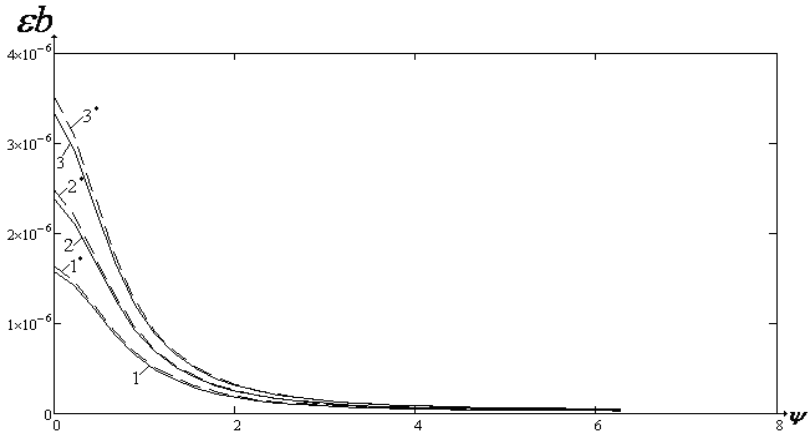


Рис. 3.22. Залежність коефіцієнта дифузії від додаткових джерел забруднення вздовж еквіпотенціальних ліній

На рис. 3.23 зображено зміну коефіцієнта дифузії вздовж фіксованої еквіпотенціальної лінії $\varphi = -1.515$ при виборі різних значень параметра ε з врахуванням функції додаткових джерел забруднення $q(\varphi, \psi)$.

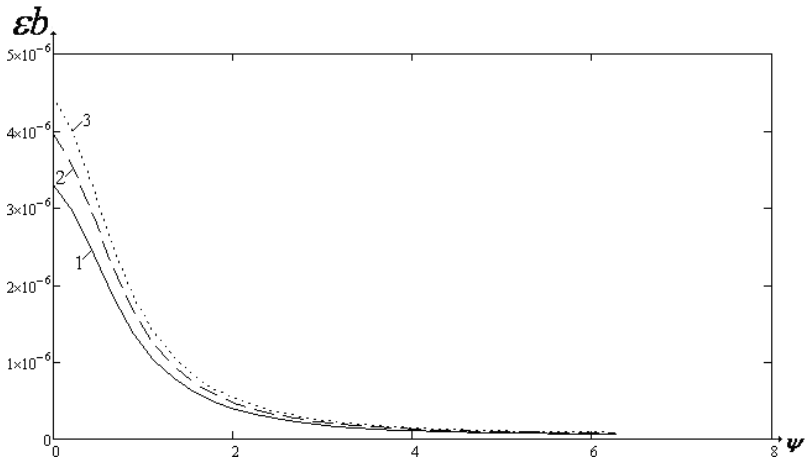


Рис. 3.23. Залежність коефіцієнта дифузії від малого параметра та джерела забруднення

Компютерне моделювання процесу описаного в пункті 3.4 здійснено за умов:

$$u_{1*}(\psi, t) = \frac{1}{6 \left[(1 - 2te')25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

$$u_{1*}^*(\psi, t) = \frac{1}{6 \left[(1 + te^{-3t})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

$$u_{10}^0(\varphi, \psi) = \frac{1}{6 \left[(Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2 \right]}, \quad u_{1*}^*(\varphi, \psi) = \frac{t^2 + e^{-5}}{(e^{-5t} - 1)(t^2 + 7)^2},$$

$$u_{2*}(\psi, t) = \frac{1}{2 \left[(1 - 2te^{\frac{t}{3}})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

$$u_{2*}^*(\psi, t) = \frac{1}{2 \left[(1 + 2te^{-8t})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

$$u_{20}^0(\varphi, \psi) = \frac{1}{2 \left[(Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2 \right]}, \quad u_{2*}^*(\varphi, \psi) = \frac{t^3 + e^{-5}}{(e^{-5t} - 1)(t^3 + 4)^2},$$

$$u_{3*}(\psi, t) = \frac{1}{3 \left[(1 - 2te^{\frac{t}{2}})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

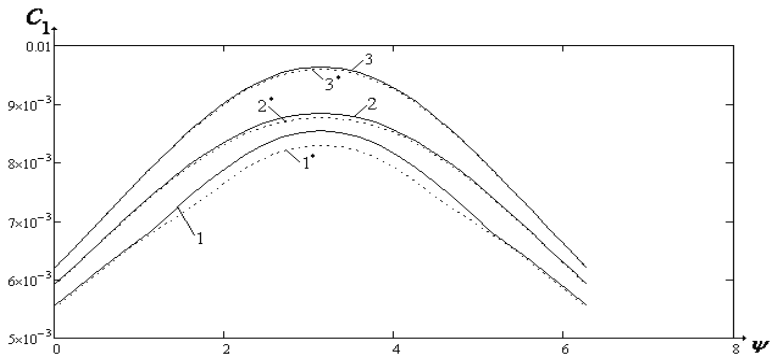
$$u_{3*}^*(\psi, t) = \frac{1}{3 \left[(1 + te^{-5t})25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2 \right]},$$

$$u_{30}^0(\varphi, \psi) = \frac{1}{3 \left[(Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2 \right]}, \quad u_{3*}^*(\varphi, \psi) = \frac{t^4 + e^{-5}}{(e^{-5t} - 1)(t^2 + 3)^2}.$$

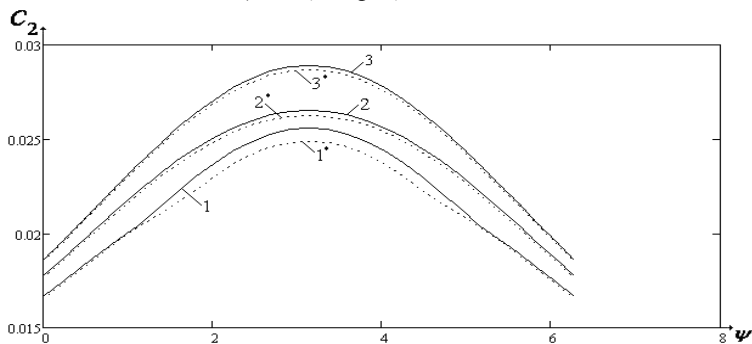
Істотно на зміну концентрацій забруднюючих речовин впливає масообмін. Внаслідок хімічних реакцій можливе виділення енергії. Не беручи до уваги енергетичного виходу (вважаючи що скелет ґрунту поглинає цю енергію), проведемо розрахунки для

реакцій у яких $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Не обмежуючи загальності, покладемо $k = 1$.

На рис. 3.24.а – 3.24.в, 3.25.а – 3.25.в, 3.26.а – 3.26.в відповідно в моменти часу $t_1 = 0.109$, $t_2 = 0.27$, $t_3 = 0.937$ зображено розподіли концентрації забруднюючих речовин з врахуванням конвекції і дифузії (криві 1–3) та реакцій масообміну (криві 1*–3*) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -2.121$, $\varphi_2 = -1.742$, $\varphi_3 = -1.364$ при $\varepsilon = 0.01$.



а) концентрація кислоти



б) концентрація лугу

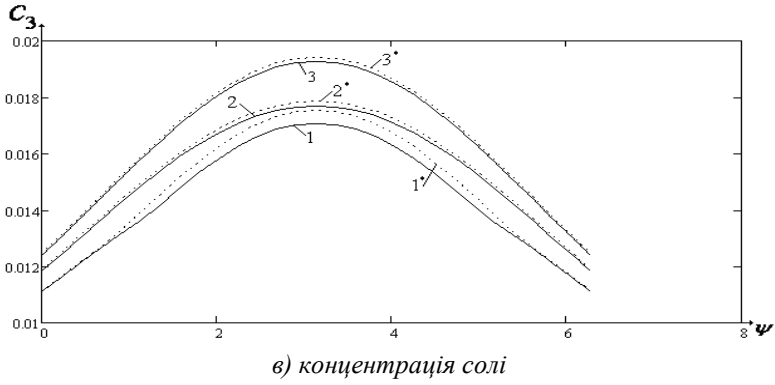
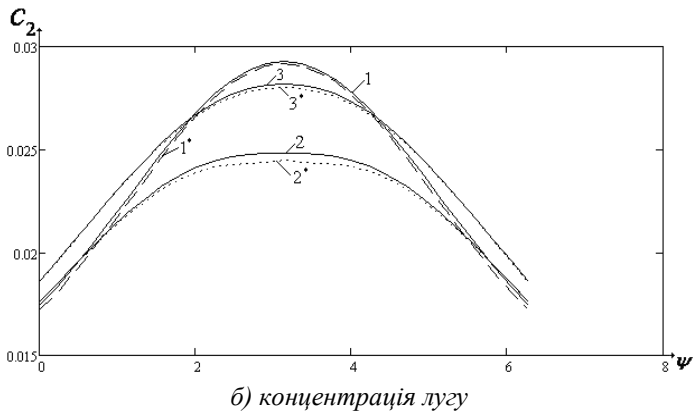
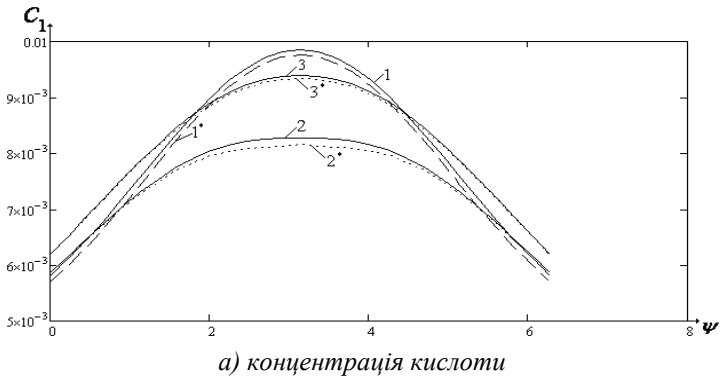


Рис. 3.24. Вплив масообміну на розподіл концентрації хімічних речовин при $t = 0.109$



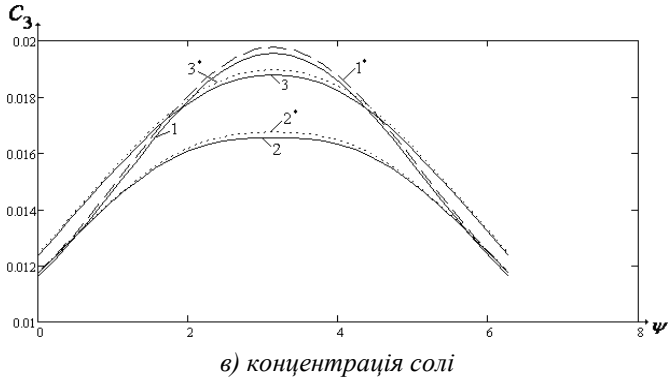
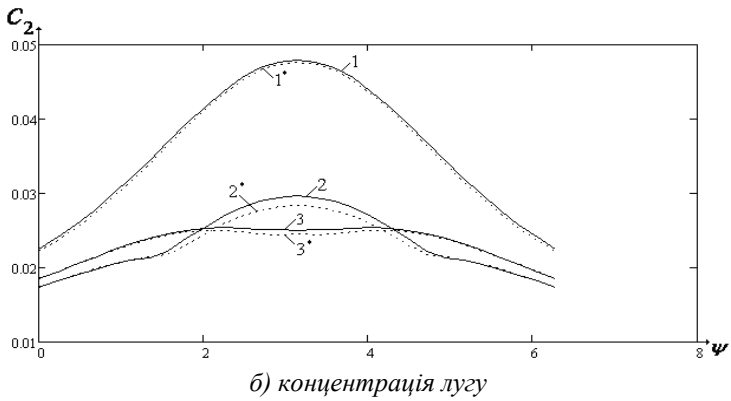
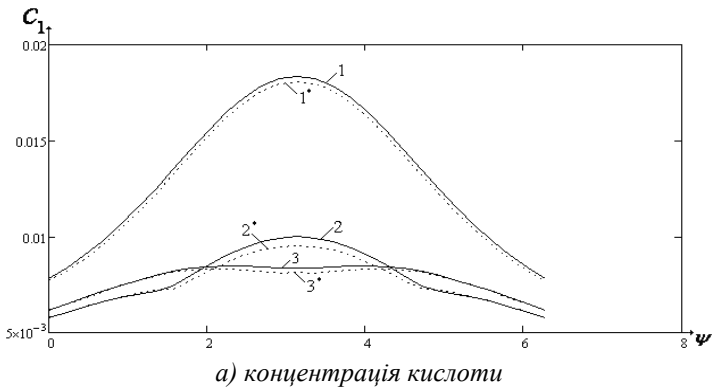
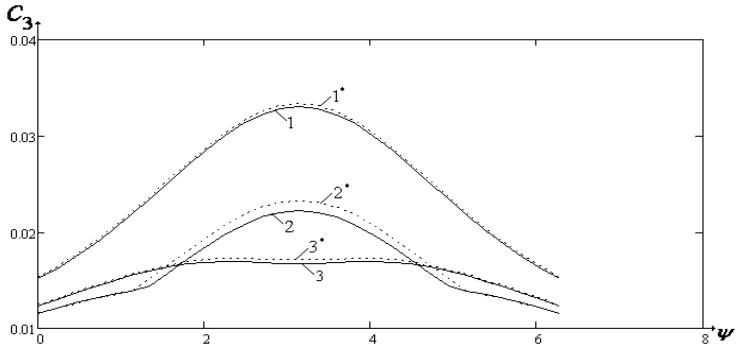


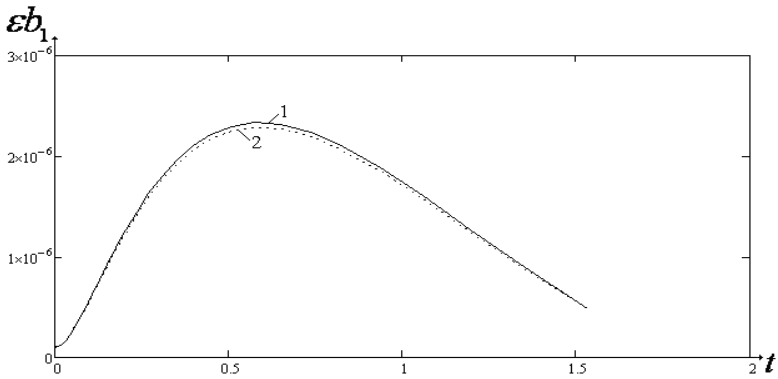
Рис. 3.25. Вплив масообміну на розподіл концентрації хімічних речовин при $t = 0.27$



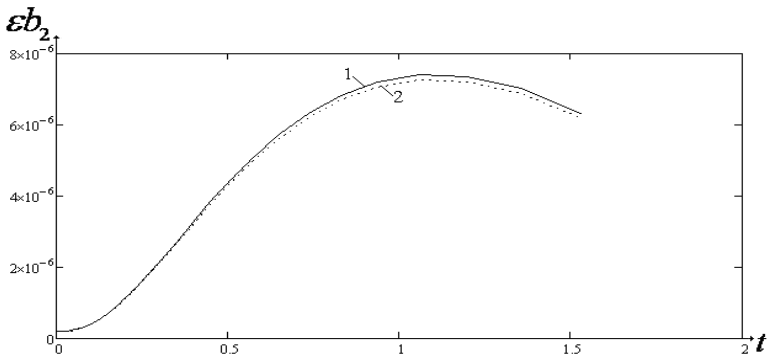


в) концентрація солі

Рис. 3.26. Вплив масообміну на розподіл концентрації хімічних речовин при $t = 0.937$



а) коефіцієнт дифузії кислоти



б) коефіцієнт дифузії луку

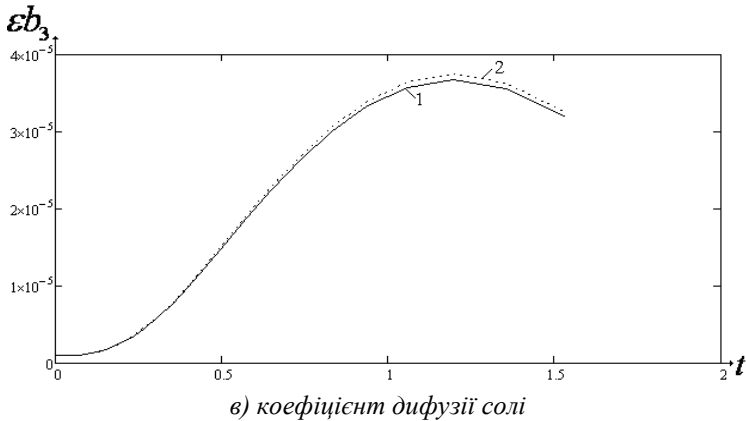
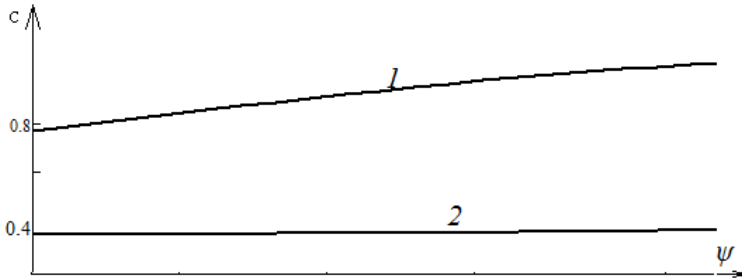


Рис. 2.15. Залежність коефіцієнтів дифузії від масообміну.

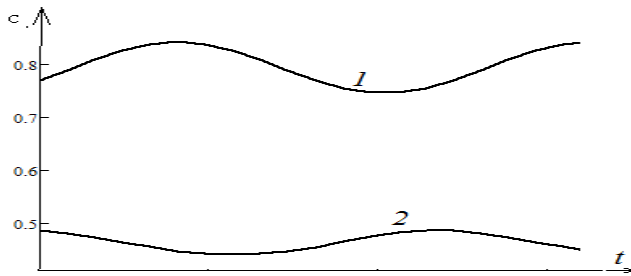
Значення коефіцієнтів дифузії при $\varepsilon = 0.015$ без врахування (крива 1) та з врахуванням (крива 2) масообміну проілюстрована на рис. 3.27.

Результати числових розрахунків описаного в пункті 3.5 процесу отримано на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = -1$ та $z_2 = 1$. На рис. 3.28 зображено розподіл концентрації розчинної речовини на ділянці TR при вимкнутому фільтрі (крива 1) і у випадку врахування роботи фільтра (крива 2) для $c|_{L_0^*} = 1.1^\psi (0.2 \sin(3^{-1}\psi\pi) \sin(2\pi t) + 0.793)$, $c_{gr} = 0.4$, $c|_{L_*} = 0.2 \times \sin(3^{-1}\psi\pi) \sin(2\pi t) + 0.793$.

Зокрема, на рис. 3.28, а) показано розподіл концентрації розчиненої речовини вздовж усієї ділянки TR у фіксований момент часу $t = 0.4$, на рис. 3.28, б) представлено залежність концентрації розчиненої речовини від часу вздовж лінії течії $\psi = 0.235$.



a)



б)

Рис. 3.28 Розподіл концентрації розчинної речовини

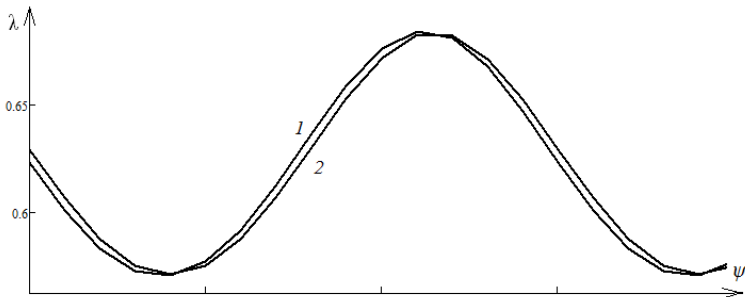


Рис. 3.29 Розподіл значень параметра фільтра вздовж контуру $B_1 R_0$ у фіксовані моменти часу

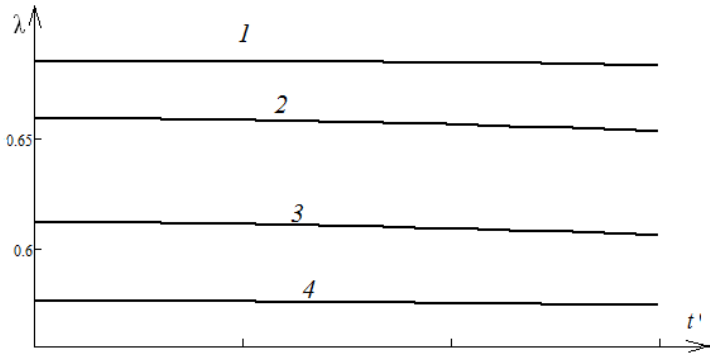


Рис. 3.30 Зміна значень параметра фільтра з часом у фіксованих точках контуру B_1R_0

На рис. 3.29 проілюстровано розподіл значень параметра фільтра вздовж контуру B_1R_0 у моменти часу $t=0.137$ (крива 1), $t=0.392$ (крива 2). Зміну значень параметра фільтра з часом у фіксованих точках контуру B_1R_0 (кривій 1 відповідає $\psi = 0.733$, 2 - $\psi = 0.6$, 3 - $\psi = 0.467$, 4 - $\psi = 0.333$) представлено на рис. 3.30.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИFUZІЙНО-АДСОРБЦІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСЕННЯ В МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Моделювання процесів масоперенесення в мікропористих середовищах є перспективним напрямком досліджень стосовно використання фільтрів з мікропористим завантаженням для очищення забруднених технологічних потоків. Такі матеріали забезпечують швидку фільтрацію через явно виражені порожнини. Підвищена пропускна здатність біпористих матеріалів дає можливість скоротити витрату енергії і зменшити розміри пристроїв для очищення води, а їх використання дозволить створювати відносно недорогі, швидкі і ефективні методики очистки зон забруднення. Здатність контролю і спрямованого дизайну мікропористих матеріалів дає можливість збільшення ефективності їх використання. Одним з прикладів таких матеріалів є мікропористі вуглеводні матеріали, які ефективно поглинають органічні речовини з водних розчинів, а також піддаються регенерації, при чому сорбент не втрачає своїх властивостей, а продуктами регенерації є низькомолекулярні нетоксичні сполуки (CO_2 , H_2O , N_2).

Ще одним типовими середовищами частинок мікропористої структури є цеоліти. Вони являють собою алюмосилікати, у складі яких містяться лужноземельні метали, і відрізняються строго регулярною структурою пор, що за звичайних температурних умов заповнені молекулами води. Якщо з цеоліту видалити воду, то його пори можуть бути знову заповнені водою або іншою речовиною, що й зумовлює їх широке використання в процесах осушування, очищення і розділення речовин. Поглинання речовини цеолітом відбувається в адсорбційних порожнинах. Проте, не всі речовини

можуть проникати в ці порожнини, відповідно і поглинатися в них. Цеоліти є молекулярними ситами і часто використовуються для розділення речовин на основі не лише вибіркової адсорбції, а й різниці в розмірах і формі молекул [115].

4.1. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач процесу однокомпонентного масоперенесення в біпористих середовищах

Розглянемо прикладну задачу прогнозування поширення забруднюючої речовини в біпористому середовищі, тобто середовищі, частинки скелету якого самі володіють розвинутою пористою структурою і за рахунок цього адсорбують забруднення з потоку. Процес однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в однорідному середовищі частинок мікропористої структури (рис. 4.1) описується системою диференціальних рівнянь вигляду (не зменшуючи загальності, розглянуто одновимірний випадок):

$$\sigma_1 \frac{\partial C}{\partial t} = D_* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C}{\partial x} - D_*^* \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial t} = D^* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (4.2)$$

$$C(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad U(x, r, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (4.3)$$

$$C(x, t) \Big|_{x=0} = C_*(t), \quad U(x, r, t) \Big|_{r=R} = k \cdot C(x, t), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial U(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.5)$$

де $C(x, t)$ – концентрація в міжчастинковому просторі, $U(x, r, t)$ – концентрація в мікропористих частинках, l – довжина мікропо-

ристого середовища (фільтра), R – радіус частинки, $k > 0$ – константа адсорбційної рівноваги.

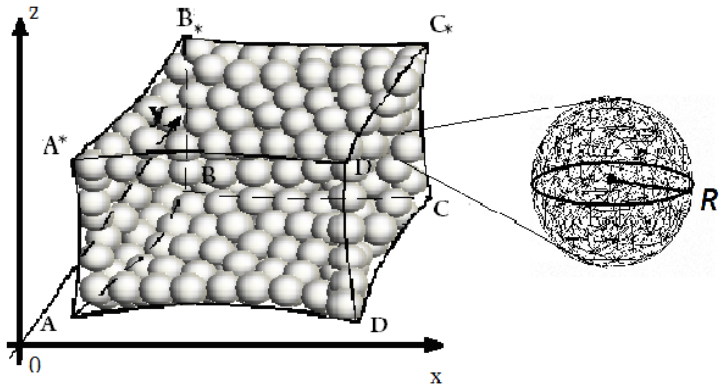


Рис. 4.1. Мікропористе середовище

Коефіцієнти D^* та D_* відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт D_* характеризує вплив внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (4.3)–(4.5) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області.

Введемо безрозмірні величини наступним чином $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{t} = t \cdot v_{xp} / l \cdot \sigma_1$, отримаємо:

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} = \frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{v(\tilde{x})}{v_{xp}} \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} - \frac{D_* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right) \Bigg|_{\tilde{r}=1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} = \frac{l \cdot D^*}{\sigma_2 \cdot v_{xp} \cdot R^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right),$$

$$\frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} = \left[\frac{M^2 / \varrho \partial \partial}{(M / \varrho \partial \partial) \cdot M} \right] = \left[\frac{M^2 / \varrho \partial \partial}{M^2 / \varrho \partial \partial} \right], \quad \frac{D_* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} = \left[\frac{(M / \varrho \partial \partial) \cdot M}{(M / \varrho \partial \partial) \cdot M} \right],$$

$$\frac{l \cdot D^*}{\sigma_2 \cdot v_{xp} \cdot R^2} = \left[\frac{M \cdot (M^2 / \varrho \partial \partial)}{(M / \varrho \partial \partial) \cdot M^2} \right] = \left[\frac{M^3 / \varrho \partial \partial}{M^3 / \varrho \partial \partial} \right].$$

Розглядається випадок превалювання конвективної складової масоперенесення над дифузійною та масообмінною, тобто коли

$$\varepsilon = \frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} = \frac{1}{Pe} \quad \varepsilon \text{ малим параметром (} Pe \text{ – число Пекле)}$$

($v_{xp} \geq v(x) > v_* \gg \varepsilon > 0$). Два інших параметри $\frac{D_* \cdot l}{v_{xp} \cdot R}$ та $\frac{l \cdot D^*}{v_{xp} \cdot R^2}$,

взагалі кажучи, можуть бути довільними. Оскільки

$$D_* = \frac{3(1-\sigma_1) D^*}{\sigma_1 R} \quad [115], \text{ то, позначивши } \mu = \frac{l \cdot D^*}{v_{xp} \cdot R^2}, \text{ отримаємо}$$

$$\frac{D_* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} = \frac{3(1-\sigma_1)}{\sigma_1} \mu, \text{ де } \sigma_1 \text{ – пористість середовища (наприклад, для}$$

цеолітів становить близько 50-65%), σ_2 – пористість мікропорис-

тих частинок. Таким чином, у випадку, коли $l \cdot D^* \ll v_{xp} \cdot R^2$, отри-

муємо систему з двома малими параметрами ε та μ . Далі оцінює-

мо відношення ε / μ . Взагалі кажучи, можливі різні випадки спів-

відношення цих параметрів: $\mu = \beta \cdot \varepsilon^\alpha$, де α – довільне дійсне чи-

сло, β – додатне скінченне (не співмірне з даними параметрами)

число. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач ди-

фузії в біпористому середовищі, досліджено зокрема в [69, 152,

193]. Зокрема встановлено значення коефіцієнтів дифузії D^* та D_*

наприклад, для бензену та гексану для деяких типів цеолітів, що є

величинами порядку 10^{-5} та $10^{-15} \text{ м}^2 / \text{год}$ відповідно. За таких значень параметри ε та μ є величинами одного порядку.

Отже, перейшовши до безрозмірних величин, отримаємо

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon d_* \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} - v(\tilde{x}) \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} - \varepsilon d_* \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right) \Bigg|_{\tilde{r}=1}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon d_* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (4.7)$$

Асимптотичне наближення розв'язку задачі шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [14] (повернемось до позначень змінних x, r, t , маючи на увазі, що це є безрозмірені змінні):

$$C(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \Pi_0(\xi, t) + \varepsilon \Pi_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, t) + R_n^1(x, t, \varepsilon), \quad (4.8)$$

$$U(x, r, t) = U_0(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, r, t) + F_0(x, \rho, t) + \varepsilon^{1/2} F_{1/2}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} F_{i/2}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_{n+1}(x, \rho, t) + R_n^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (4.9)$$

де $C_i(x, t)$, $U_i(x, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$), $F_{i/2}(x, \rho, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу прилежового шару в околах $x=1$ та $r=1$, $\xi = (1-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ і $\rho = (1-r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, R_n^1 , R_n^2 – залишкові члени.

Підставляючи (4.8), (4.9) в (4.6)–(4.7) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного $i = \overline{0, n}$ такі задачі:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, \rho, t) = g_i(x, \rho, t), \\ U_i(x, \rho, 0) = h_i(x, \rho), \end{cases} \quad (4.10)$$

де $g_i(x, \rho, t) = d^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{i-1}(x, \rho, t) - (2/r) \frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, \rho, t) \right)$, $g_0(x, \rho, t) = 0$,

$h_0(x, \rho) = 0$, $h_i(x, \rho) = 0$ ($i = \overline{1, n}$);

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = u_i(x, t), \\ C_i(x, 0) = w_i^1(x), \quad C_i(0, t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

$u_0(x, t) = 0$, $w_i^1(x) = 0$, $w_i^2(t) = 0$, $w_0^1(x) = c_0^0(x)$, $w_0^2(t) = c_*(t)$,

$$u_i(x, t) = d_* \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - d_*^* \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, 1, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1}(x, 1, t) + \right. \\ \left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}}(x, 1, t) \right).$$

Поправки $\Pi = \sum_{i=0}^{i+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t)$ та $F = \sum_{i=0}^{2n+2} \varepsilon^{\frac{i}{2}} F_{\frac{i}{2}}(x, \rho, t)$ будуються

з метою задовольнити відповідно другу з крайових умов (4.4) та умови (4.5). Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2},$$

а також розклад функцій $v(1 - \varepsilon \xi)$ та $\frac{2}{1 - \sqrt{\varepsilon} \rho}$ в ряди Тейлора в околах $x=1$ та $r=1$ від-

повідно, отримаємо задачі для знаходження примежових функцій, аналогічно до [27]:

$$\begin{cases} d_* \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_i(\xi, t) + v(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_i(\xi, t) = \mu_i(\xi, t), \\ \Pi_i(0, t) = v_i(t), \quad \Pi_i(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\mu_i(t, \xi) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{i-1}(\xi, t) + v'(1)\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-1}(\xi, t) - \frac{1}{2} v''(1)\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-2}(\xi, t) + \\ + \dots + (-1)^i v^{(i)}(1)\xi^i \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t), \quad \mu_0(\xi, t) = 0 \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n+1},$$

$$v_i(t) = -C_i(1, t) \quad \text{при} \quad i = \overline{0, n}, \quad v_{n+1}(t) = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_i(x, \rho, t) = d^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_i(x, \rho, t) + \gamma_i(x, \rho, t), \\ F_i(x, \rho, 0) = 0, F_i(x, 0, t) = \lambda_i(x, t), \frac{\partial}{\partial \rho} F_i(x, \rho, t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{array} \right.$$

$$\gamma_0(x, \rho, t) = 0, \quad \gamma_i(x, \rho, t) = -d^* \sum_{m=1}^{2i} 2\rho^{m-1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i-\frac{m}{2}}(x, \rho, t) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n+1},$$

$$\lambda_i(x, t) = k(C_i(x, t) + \Pi_i(x, t)) \quad \text{при} \quad i = \overline{0, n}, \quad \lambda_{n+1}(x, t) = k(\Pi_{n+1}(x, t));$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) = d^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=1}^{2i+1} 2\rho^{m+1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i-\frac{m}{2}}(x, \rho, t), \\ F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, 0) = 0, F_{i+\frac{1}{2}}(x, 0, t) = 0, \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язки поставлених вище задач з точністю $O(\varepsilon^2)$ отримано у вигляді:

$$U_i(x, r, t) = 0, \quad i = \overline{0, 1}; \quad C_0(x, t) = \begin{cases} C_*(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x)), t \geq \sigma_1 f(x), \\ 0, t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

$$C_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^z \frac{u_1(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x) + f(\tilde{x})), \tilde{x})}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, t \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t u_1(\tilde{t}, f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x))) d\tilde{t}, t < \sigma_1 f(x); \end{cases}$$

$f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$, $f^{-1}(x)$ – функція, обернена до функції $f(x)$;

$$\Pi_0(\xi, t) = d_* \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi, t) = & v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} (v'(1) \frac{\partial C_0(1, t)}{\partial \xi} (\frac{\xi^2}{2d_*} + \frac{\xi}{v(1)} + \frac{d_*}{v^2(1)}) - \\ & - \sigma_1 v^{-1}(1) \frac{\partial^2 C_0(1, t)}{\partial \xi \partial t} (\xi + \frac{d_*}{v(1)}), \end{aligned}$$

$$\Pi_2(\xi, t) = \xi^4 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_1 + \xi^3 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_2 + \xi^2 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_3 + \xi e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_4 + s_5,$$

де

$$\begin{aligned} s_1 = & \frac{(v'(1))^2}{v(1)d_*^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi}, \quad s_2 = (\frac{v'(1)}{2v(1)d_*} - \frac{\sigma_1}{3v(1)d_*} - 1) \frac{v'(1)}{v(1)d_*} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \\ & - \frac{\sigma_1 v'(1)}{6v^2(1)d_*^2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t}, \quad s_3 = (\frac{3v'(1)}{v(1)d_*} - 1) \frac{v'(1)}{2v(1)^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{2\sigma_1 v'(1)}{v^3(1)d_*} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} + \\ & + \frac{\sigma_1^2}{2v^3(1)d_*} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2}, \quad s_4 = -\frac{5\sigma_1 v'(1)}{v^4(1)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} + (\frac{1}{v(1)} - 1) \frac{\sigma_1^2}{v^3(1)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2} + \\ s_5 = & -(\frac{3}{v(1)} + d_*) \frac{v'(1)d_*}{v(1)^4} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} - \frac{5\sigma_1 v'(1)d_*}{v^5(1)} \frac{\partial C_0}{\partial \xi \partial t} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} + \\ & + (\frac{1}{v(1)} - 1) \frac{\sigma_1^2 d_*}{v^4(1)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}}. \end{aligned}$$

Поправки $F_{i/2}(x, \rho, t)$ знайдено числовими методами, використовуючи неявні різницьві схеми [148, 149].

Для оцінки залишкових членів масмо задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} R_n^1(x, t, \varepsilon) = \varepsilon d_* \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_n^1(x, t, \varepsilon) - v(x) \frac{\partial}{\partial x} R_n^1(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} b_1(x, t, \varepsilon), \\ \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) = \varepsilon d^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) \right) + \\ + \varepsilon^{n+1} b_2(x, r, t, \varepsilon), \\ R_n^1(x, 0, \varepsilon) = 0, R_n^1(0, t, \varepsilon) = 0, \left. \frac{\partial R_n^1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \\ \left. \frac{\partial R_n^2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, R_n^2(x, 1, t, \varepsilon) = k R_n^1(x, t, \varepsilon), R_n^2(x, r, 0, \varepsilon) = 0, \end{array} \right.$$

де $b_1(x, t, \varepsilon)$ та $b_2(x, r, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутоків уже відомих членів рядів (4.8), (4.9), а також коефіцієнтів при ε розкладу функції $v(1 - \varepsilon \xi)$ в ряд Тейлора в околі $x = 1$. Вимагаючи достатньої гладкості та узгодженості початкових і граничних умов, на основі принципу типу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження: $R_n^1(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, $R_n^2(x, r, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Перевірку моделі на адекватність у випадку відсутності конвективного перенесення проведено, зокрема, в [115, 202-205].

4.2. Ідентифікація параметрів нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в мікропористих середовищах

Для описаного в п. 4.1 процесу, розглянемо обернену задачу ідентифікації дифузійних параметрів процесу, що описується рівняннями (4.1)–(4.2) з невідомими $d_* = a(t)$ та $d^* = a^*(x, t)$ за почат-

кових та крайових умов (4.3)–(4.5), а також умов перевизначення [75, 76]:

$$a(t) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = C_*^*(t), \quad a^*(x,t) \frac{\partial U(x,r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = U_*^*(x,t). \quad (4.10)$$

Функції $a(t)$ та $a^*(x,t)$, які є достатньо гладкими та обмеженими функціями, відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок і знаходяться з умов (4.2). Асимптотичне наближення розв'язку задачі (4.1)–(4.5), (4.10) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (4.8), (4.9) і

$$a(t) = a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + \dots + \varepsilon^n a_n(t) + R_n^3(t, \varepsilon), \quad (4.11)$$

$$a^*(x,t) = a_0^*(x,t) + \varepsilon a_1^*(x,t) + \dots + \varepsilon^n a_n^*(x,t) + R_n^4(x,t, \varepsilon), \quad (4.12)$$

де $a_i(t)$, $a_i^*(x,t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $R_n^s(\bullet)$, $s = \overline{2, 4}$ – залишкові члени [15, 16, 29-31].

Підставляючи (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) в (4.1)–(4.5), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики для кожного $i = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, r, t) = g_i(x, r, t), \\ U_i(x, r, 0) = h_i(x, r), \\ \nu(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = u_i(x, t), \\ C_i(x, 0) = w_i^1(x), \quad C_i(0, t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (4.13)$$

$$g_i(x, r, t) = \sum_{m=0}^{i-1} a_m^*(x, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{(i-1-m)}(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{(i-1-m)}(x, r, t) \right),$$

$$h_i(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad i > 0, \quad g_0(x, r, t) = 0, \quad h_0(x, r) = U_0^0(x, r),$$

$$u_i(x, t) = \sum_{m=0}^{i-1} a_m(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{(i-1-m)}(x, t) - d_*^* \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1}(x, R, t) + \right. \\ \left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}}(x, R, t) \right), \quad w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при } i > 0, \quad u_0(x, t) = 0, \\ w_0^1(x) = c_0^0(x), \quad w_0^2(t) = c_*(t).$$

Для знаходження коефіцієнтів дифузії мікро- та макросередовищ маємо рівності:

$$a_i^*(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_0(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_0(x, R, t) \right) = \kappa_i^1(x, t),$$

$$a_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} C_0(0, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Pi_0(0, t) \right) = \kappa_i^2(t),$$

$$\kappa_0^1(x, t) = q_*^*(x, t), \quad \kappa_0^2(t) = c_*^*(t), \quad \kappa_i^1(x, t) = - \sum_{m=0}^{i-1} a_m^*(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-m}(x, R, t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-m}(x, R, t) \right), \quad \kappa_i^2(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} a_m(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} C_{i-m}(0, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Pi_{i-m}(0, t) \right) \quad \text{при} \\ i = \overline{1, n}.$$

Поправки $\Pi_p(\xi, t)$ ($p = \overline{0, n+1}$) та $F_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t)$ ($j = \overline{0, 2n+2}$)

знаходяться в результаті розв'язання таких задач:

$$\begin{cases} a_0(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + v(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(0, t) = v_p(t), \quad \Pi_p(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

де $\mu_0(t, \xi) = 0$, $v_0(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t)$, при $p = \overline{1, n}$, $v_p(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_p(1, t)$,

$$\mu_p(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) - \sum_{m=1}^p a_m(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_{p-m}(\xi, t) + \sum_{m=1}^p \frac{(-1)^{m+1} v^{(m)}(1)}{m!} \xi^m \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-m}(\xi, t), \quad \mu_{n+1}(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_n(\xi, t) - \sum_{m=1}^{n+1} a_m(t) \frac{\partial}{\partial \xi^2} \Pi_{n+1-m}(\xi, t) - \\
& - d_*^* \frac{\partial}{\partial r} F_n(x, 0, t) + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^{m+1} v^{(m)}(1)}{m!} \xi^m \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{n+1-m}(\xi, t), \quad v_{n+1}(t) = 0; \\
& \left\{ \begin{aligned} & a_0^*(x, t) \frac{\partial}{\partial \rho^2} F_{j/2}(x, \rho, t) - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j/2}(x, \rho, t) = \gamma_{j/2}(x, \rho, t), \\ & F_{j/2}(x, \rho, 0) = 0, F_{j/2}(x, 0, t) = \lambda_{j/2}(x, t), \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j/2}(x, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \right. \\
& \gamma_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t) = \begin{cases} \frac{2}{\rho} \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{\frac{j-2m-1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{\frac{j}{2}-m}(x, \rho, t), \\ \text{при } j \text{ парне,} \\ \frac{2}{\rho} \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{\frac{j-2m-1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=0}^{j/2-1/2} a_m^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{\frac{j}{2}-m}(x, \rho, t), \\ \text{при } j \text{ непарне,} \end{cases} \\
& \gamma_0(x, \rho, t) = 0, \quad \gamma_{n+1}(x, \rho, t) = -\frac{2}{\rho} F_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(x, \rho, t), \quad \lambda_{n+1}(x, t) = k \Pi_{n+1}(x, t), \\
& \lambda_0(x, t) = k(C_0(x, t) + \Pi_0(x, t)).
\end{aligned}$$

Аналогічно до п. 4.1, отримуємо розв'язки поставлених вище задач у вигляді:

$$\begin{aligned}
U_0(x, r, t) &= U_0^0(x, r), \\
C_0(x, t) &= \begin{cases} C_*(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x)), t \geq \sigma_1 f(x), \\ C_0^0(f^{-1}(f(x) - \frac{t}{\sigma_1})), t < \sigma_1 f(x), \end{cases} \\
a_0(t) &= \frac{c_*^*(t)}{(C_0(0, t))'_x}, \quad a_0^*(x, t) = \frac{U_*^*(x, t)}{(U_0(x, R, t))'_r},
\end{aligned}$$

$$\Pi_0(\xi, t) = a_0(t) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t) v^{-1}(l) e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi},$$

$$q_1(x, r, t) = \frac{1}{\sigma_2} \int_0^t a^*(x, \tilde{t}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_0(x, r, \tilde{t}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_0(x, r, \tilde{t}) \right) d\tilde{t},$$

$$C_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^x \frac{u_1(\tilde{x}, \sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x) + f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t u_1(f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)), \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

$$a_1(t) = -\frac{a_0(t)(C_1(0, t))'_x}{(C_0(0, t))'_x}, \quad a_1^*(x, t) = -\frac{a_0^*(x, t)(U_1(x, R, t))'}{(U_0(x, R, t))'}$$

$$\Pi_1(\xi, t) = \alpha_1(t) e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi} + \alpha_2(t) \xi e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi} + \alpha_3(t) \xi^2 e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi},$$

$$\begin{aligned} \text{де } \alpha_1(t) &= -\frac{\partial}{\partial \xi} C_1(l, t) - \frac{1}{v(l)} \left(\frac{\sigma_1 a'_{0r}(t) a_0(t)}{v^3(l)} - \frac{\sigma_1 a'_{0r}(t)}{a_0(t)} + \frac{a_0^2(t) v'(l)}{v^2(l)} - \right. \\ &- a_1(t) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t) - \frac{\sigma_1 a_0^2(t)}{v^3(l)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(l, t), \quad \alpha_2(t) = \left(\frac{a_0(t) v'(l)}{v^2(l)} - \frac{\sigma_1 a'_{0r}(t)}{v^2(l)} + \right. \\ &+ \frac{\sigma_1 a'_{0r}(t)}{a_0^2(t)} + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \left. \right) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t) - \frac{\sigma_1 a_0(t)}{v^2(l)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(l, t), \\ \alpha_3(t) &= \frac{v'(l)}{2v(l)} \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t). \end{aligned}$$

Легко бачити, що $\Pi_2(\xi, t) = \sum_{\beta=0}^{\alpha+1} \alpha_{\alpha\beta}(t) \xi^\beta e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi}$, $\alpha = \overline{1, n+1}$, де

всі $\alpha_{\alpha\beta}$ визначаються через $\alpha_{\alpha h}$ ($h < \beta$) та граничні умови.

Поправки $F_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t)$ ($j = \overline{0, 4}$) та задачі для оцінки залишкових членів отримуються аналогічно до п. 4.1.

У випадку, коли невідомими є функція адсорбційної рівноваги $d_*^* = d(t)$ та коефіцієнт впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в міжчастинковому просторі $k = k(t)$ при наявності умов перевизначення:

$$d(t) \int_0^l U(x, R, t) dx = D_*^*(t), \quad k(t) \int_0^l C(x, t) dx = K_*^*(t), \quad (4.14)$$

розв'язок задачі з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (4.8), (4.9) та

$$d(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i d_i(t) + R_n^3(t, \varepsilon), \quad (4.15)$$

$$k(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i k_i(t) + R_n^4(t, \varepsilon). \quad (4.16)$$

Після виконання процедури підстановки та прирівнювання, отримаємо задачі (4.13), де $g_0(x, r, t) = 0$, $h_0(x, r) = U_0^0(x, r)$, $u_0(x, t) = 0$, $w_0^1(x) = C_0^0(x)$, $w_0^2(t) = C_*(t)$, $h_i(x, r) = 0$,

$$g_i(x, r, t) = d_*^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{i-1}(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, r, t) \right),$$

$$u_i(x, t) = d_*^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - \sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1-m}(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1-m}(x, R, t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}-m}(x, R, t) \right), \quad w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Коефіцієнт внутрішньочастинкового дифузійного перенесення на міжчастинковий та функцію адсорбційної рівноваги знаходимо в процесі розв'язання наступних задач, що отримуються шляхом підстановки рядів (4.8), (4.9), (4.15), (4.16) в (4.14) прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε :

$$d_i(t) \int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_1(x, 0, t)) dx = \chi_i(t),$$

$$k_i(t) \int_0^l (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx = \kappa_i(t);$$

$$\chi_i(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) \int_0^1 (U_{i-m}(x, R, t) + F_{i-m}(x, 0, t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_{i-m+\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx,$$

$$\kappa_i(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} k_m(t) \int_0^l (C_{i-m}(x, t) + \Pi_{i-m}(\xi, t)) dx, \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n},$$

$$\chi_0(t) = D_*^*(t), \quad \kappa_0(t) = K_*^*(t).$$

$$\text{Примежові функції } \Pi = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi, t) \text{ та } F = \sum_{j=0}^{2n+2} \varepsilon^{\frac{j}{2}} F_j(x, \rho, t)$$

будуються аналогічно до п.4.1:

$$\begin{cases} d_* \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + \nu(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(0, t) = \nu_p(t), \quad \Pi_p(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_0(t, \xi) = 0, \quad \mu_p(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) - \nu'(1) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-1}(\xi, t) - \\ - \frac{1}{2} \nu''(1) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-2}(\xi, t) + \dots + (-1)^i \nu^{(i)}(1) \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t) \quad (p = \overline{1, n+1}), \end{aligned}$$

$$\nu_p(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_p(1, t) \quad (p = \overline{1, n}), \quad \nu_{n+1}(t) = 0, \quad \nu_0(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t);$$

$$\begin{cases} d^*(x, t) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{j/2}(x, \rho, t) - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j/2}(x, \rho, t) = \gamma_{j/2}(x, \rho, t), \\ F_{j/2}(x, \rho, 0) = 0, \quad F_{j/2}(x, 0, t) = \lambda_{j/2}(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j/2}(x, \rho, t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \gamma_0(x, \rho, t) = 0, \quad \lambda_0(x, t) = k_0(t)(C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) - U_0(x, R, t),$$

$$\gamma_{j/2}(x, \rho, t) = -2d^* \sum_{m=1}^j \rho^{m-1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{(j-m)/2}(x, \rho, t) \text{ при } j = \overline{0, 2n+2},$$

$$\lambda_{\frac{j}{2}}(x, t) = \sum_{m=0}^{\frac{j}{2}} k_m(t) (C_{\frac{j}{2}-m}(x, t) + \Pi_{\frac{j}{2}-m}(\xi, t)) - U_{\frac{j}{2}}(x, R, t),$$

$$\lambda_{n+1}(x, t) = k_0(t) \Pi_{n+1}(\xi, t) + \sum_{m=1}^n k_m(t) (C_{n+1-m}(x, t) + \Pi_{n+1-m}(\xi, t)).$$

Регулярні частини асимптотики в даному випадку будуть такі ж. Для примежових функцій та членів ряду (4.15)–(4.16) отримано такі вирази:

$$\Pi_0(\xi, t) = d_* v^{-1}(1) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}}, \quad k_0(t) = \frac{K_*(t)}{\int_0^1 (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx},$$

$$d_0(t) = \frac{D_*(t)}{\int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(t, \xi) &= v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} (v'(1) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) (\frac{\xi^2}{2d_*} + \frac{\xi}{v(1)} + \frac{d_*}{v^2(1)}) - \\ &- \sigma_1 v^{-1}(1) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(1, t) (\xi + \frac{d_*}{v(1)})), \end{aligned}$$

$$k_1(t) = -\frac{k_0(t) \int_0^1 (C_1(x, t) + \Pi_1(\xi, t)) dx}{\int_0^1 (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx},$$

$$d_1(t) = -\frac{d_0(t) \int_0^1 (U_1(x, R, t) + F_1(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{3}{2}}(x, 0, t)) dx}{\int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx}.$$

Зауважимо, що запропонована методологія асимптотичного розвинення розв'язку задачі (4.6)–(4.7) та ідентифікації її параметрів також може бути поширена на випадки інших співвідношень між параметрами ε та μ .

4.3. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в багат шарових біпористих середовищах

Суттєво покращити показники очищення технологічних потоків дозволяє застосування багат шарових середовищ, кожен шар яких складається з різних за розміром та фізико-хімічними характеристиками частинок мікропористої структури з використанням принципу фільтрації в напрямку спадної крупності завантаження. Складність теоретичного опису властивостей неоднорідних середовищ з математичної точки зору пов'язана з тим, що фізичні процеси в таких середовищах описуються сингулярно збуреними крайовими задачами, коефіцієнти яких швидко змінюються на межах розділу різних компонентів матеріалу. Крім того, необхідно враховувати граничні умови на всіх поверхнях контакту, які в свою чергу також можуть змінюватися в процесі зовнішнього впливу.

Розглянемо модельну задачу процесу масоперенесення забруднюючих речовин у багат шаровому кусково-однорідному водонасиченому двопо-ристому середовищі – криволінійному паралелепіпеді $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$, що розділяється еквіпотенціальними поверхнями $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) на m підобластей $G_z^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$ (рис. 2.2.а), $G_z^j = E_{(j-1)} F_{(j-1)} F_j E_j E_{*(j-1)} F_{*(j-1)} F_{*j} E_{*j}$, $G_z^m = E_{m-1} F_{m-1} CDE_{*(m-1)} F_{*(m-1)} C_* D_*$, $j = \overline{2, m-2}$. Середовище харак-

теризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa = \{\kappa_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, пористості $\sigma = \{\sigma_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ і дифузії $D = \{D_j = d_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ міжчастикового простору, а кожна з підобластей складається з мікрочастинок різного розміру (R_j – радіус мікрочастинок в j -му шарі) та структури, що характеризується відповідно коефіцієнтами пористості $\sigma^* = \{\sigma_j^*, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, дифузії $D^* = \{D_j^* = d_j^* \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ в мікрочастинках та коефіцієнтами впливу внутрішньочастиноквого переносу на міжчастинковий $S = \{S_j = s_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ і адсорбційної рівноваги $k = \{k_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, де $\kappa_j, \sigma_j, d_j, \sigma_j^*, d_j^*, s_j, k_j$ – деякі дійсні додатні числа ($j = \overline{1, m}$), ε – малий параметр. Відповідна модельна задача в області $G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь

$$\operatorname{div} \left(D_j \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_j \right) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_j - S_j \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial r} \Bigg|_{r=R_j} = \sigma_j \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial t}, \quad (4.17)$$

$$D_j^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial r} \right) = \sigma_j^* \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t}, \quad (4.18)$$

з початковими та граничними умовами:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j(x, y, z, t) \Big|_{t=0} &= \tilde{C}_j^0(x, y, z), \quad \tilde{C}_1 \Big|_{ABB_*A_*} = \tilde{C}_*(M, t), \quad \tilde{C}_m \Big|_{CDD_*C_*} = \tilde{C}^*(M, t), \\ \tilde{C}_j \Big|_{BCC_*B_*} &= \tilde{C}_{j^{**}}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ADD_*A_*} = \tilde{C}_{j^{**}}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_{j^{***}}(M, t), \\ \tilde{C}_j \Big|_{A_*B_*C_*D_*} &= \tilde{C}_{j^{***}}(M, t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{t=0} = \tilde{q}_j^0(x, y, z, r), \quad \tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{r=R} = k_j \tilde{C}_j(x, y, z, t),$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{U}_j(x, y, z, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.20)$$

і умовами узгодженості на екіпотенціальних поверхнях $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} &= \tilde{C}_{j+1} \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}, \\ \left(D_j \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial \vec{n}} - v_n^j \tilde{C}_j \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} &= \left(D_{j+1} \frac{\partial \tilde{C}_{j+1}}{\partial \vec{n}} - v_n^j \tilde{C}_{j+1} \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При цьому відповідна фільтраційна задача описується рівняннями (4.22) з крайовими умовами (4.23) та умовами узгодженості (4.24):

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (4.22)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (4.23)$$

$$\varphi \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \varphi \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}} = \varphi_{*j}^*, \quad \kappa_j \cdot \varphi'_n \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \kappa_{j+1} \cdot \varphi'_n \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}. \quad (4.24)$$

Тут $\tilde{C}_j(x, y, z, t)$ – концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, а $\tilde{U}_j(x, y, z, r, t)$ – концентрація у внутрішньочастинковому просторі в j -му шарі, φ і $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал (квазіпотенціал) і вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty, |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), φ_* і φ^* – довільні дійсні додатні числа, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, M – довільна точка відповідної поверхні, v_n^j – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$), φ_{*j}^* – невідомі значення потенціалу на

відповідних поверхнях розділу $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$,

$0 < \varphi_* < \varphi_{*1} < \varphi_{*2} < \dots < \varphi_{*m-1} < \varphi^* < \infty$. Всі функції, які фігурують в умовах (4.19) – (4.21) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області, а також на поверхнях $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) розділу підобластей.

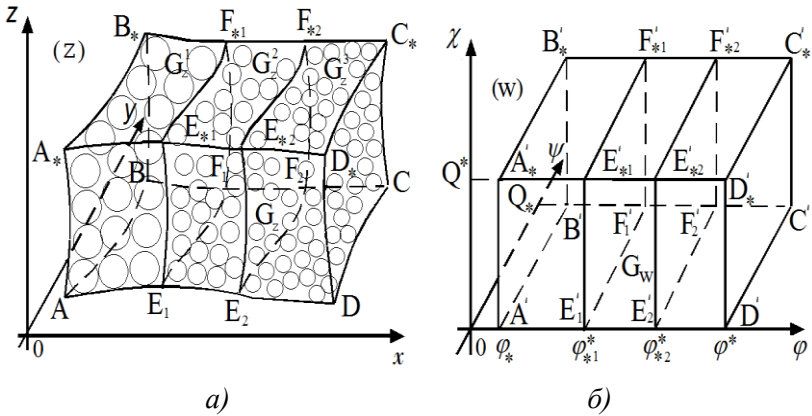


Рис.2.2. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б) при $j = 3$

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi$ [18] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (4.19) на умови: $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\chi|_{ABCD} = 0$, $\chi|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, задача (4.22)–(4.23) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область ком-

плексного потенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \chi < Q^*\}$ (рис. 2.2,б), де φ_{*j}^* ($j = \overline{1, m-1}$), Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата. Припустимо, що ця задача є розв’язаною [18], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} і параметри φ_{*j}^* ($j = \overline{1, m-1}$), Q_* , Q^* , Q . Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$ у рівняннях (4.17), (4.18) та умовах (4.19)–(4.20) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, R) \times (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon d_j \left(\frac{v^2}{\kappa_j} C_{j\varphi\varphi}'' + b_{11} C_{j\psi\psi}'' + b_{12} C_{j\chi\chi}'' + b_{21} C_{j\psi}' + b_{22} C_{j\chi}' \right) - \\ - \frac{v^2}{\kappa_j} C_{j\varphi}' - \varepsilon s_j U_{jr}' \Big|_{r=R_j} = \sigma_1 C_{jt}', \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\varepsilon d_j \left(U_{jrr}'' + \frac{2}{r} U_{jr}' \right) = \sigma_j^* U_{jt}', \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} C_j(\varphi, \psi, \chi, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(\varphi, \psi, \chi), \quad C_1(\varphi_*, \psi, \chi, t) = C_*(\psi, \chi, t), \\ C_m \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^*(\psi, \chi, t), \quad C_j \Big|_{\psi=0} = C_{j**}(\varphi, \chi, t), \quad C_j \Big|_{\psi=Q_*} = C_j^{***}(\varphi, \chi, t), \\ C_j \Big|_{\chi=0} = C_{j***}(\varphi, \psi, t), \quad C_j \Big|_{\chi=Q^*} = C_j^{****}(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{t=0} = q_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{r=R} = k_j C_j(\varphi, \psi, \chi, t), \\ \frac{\partial U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} C(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) = C(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{1, m-1}), \\ D_j \cdot C_\varphi'(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_j \cdot C(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) = \\ = D_{j+1} \cdot C_\varphi'(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_{j+1} \cdot C(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t), \end{aligned} \quad (4.29)$$

де $C_j = C_j(\varphi, \psi, \chi, t) = \tilde{C}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t)$, інші функції інтерпретуються аналогічно;
 $b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2$, $b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_x'^2 + \chi_y'^2 + \chi_z'^2$,
 $b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''$, $b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_{xx}'' + \chi_{yy}'' + \chi_{zz}''$.

Наближення розв'язку задачі (4.25)–(4.29) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} C_j = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot C_{j,i} + I_{1,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{j,i} + I_{2,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{j,i} + \\ & + I_{3,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \Pi_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot P_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \Gamma_{j,i/2} + \\ & \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot H_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot E_{j,i/2} + R_{j,n+1}^C, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$U_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} F_{j,i} + R_{j,n+1}^U, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.31)$$

Тут $C_{j,i} = C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$, $U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\tilde{\tilde{P}}_{j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi = \varphi_{*j}^*$ ($j = \overline{1, m-1}$) (поправки в околах поверхонь $E_j' F_j' F_{*j}' E_{*j}'$ ($j = \overline{1, m-1}$) розділу підобластей G_w^j ($j = \overline{1, m-1}$)) [44-46], $\Pi_i = \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $P_{j,i/2} = P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{j,i/2} = \Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{j,i/2} = H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{j,i/2} = E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах

$\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\chi = 0$, $\chi = Q^*$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\tilde{\phi}_j = (\varphi_{*j}^* - \varphi) / \varepsilon$, $\tilde{\tilde{\phi}}_j = (\varphi - \varphi_{*j}^*) / \varepsilon$ ($j = \overline{1, m-1}$),
 $\xi = (\varphi^* - \varphi) / \varepsilon$, $\mu = \psi / \sqrt{\varepsilon}$, $\eta = (Q_* - \psi) / \sqrt{\varepsilon}$, $\lambda = \chi / \sqrt{\varepsilon}$,
 $\gamma = (Q^* - \chi) / \sqrt{\varepsilon}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $F_{j,i} = F_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу прилежового шару в околі $r = R_j$ ($\rho_j = (R_j - r) / \sqrt{\varepsilon}$),
 $R_{j,n+1}^C = R_{j,n+1}^C(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon)$, $R_{j,n+1}^U = R_{j,n+1}^U(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t, \varepsilon)$ ($j = \overline{1, m}$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється із використанням принципу максимуму), $I_{1,1} = 0$, $I_{1,j} = 1$ ($j = \overline{2, m}$), $I_{2,m} = 0$, $I_{2,j} = 1$ ($j = \overline{1, m-1}$), $I_{3,m} = 1$, $I_{3,j} = 0$ ($j = \overline{1, m-1}$).

Підставляючи (4.30), (4.31) в (4.25)–(4.29), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного та-
 кі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} \tilde{v}^2 \frac{\partial C_{1,i}}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial C_{1,i}}{\partial t} = g_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t), i = \overline{0, n}, \\ C_{1,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi), C_{1,i}(\varphi_*, \psi, \chi, t) = u_{1,i}^2(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \tilde{v}^2 \frac{\partial C_{j,i}}{\partial \varphi} + \sigma_j \frac{\partial C_{j,i}}{\partial t} = g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t) (j = \overline{2, m}, i = \overline{0, n}), \\ C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi), \\ C_{j,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t) = C_{j-1,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t), \end{cases} \quad (4.33)$$

$$g_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = 0, \quad u_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi) = C_j^0(\varphi, \psi, \chi) (j = \overline{1, m}), \quad u_{1,0}^2(\psi, \chi, t) = C_*(\psi, \chi, t),$$

$$g_{j,i}^1 = d_j \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \varphi^2} + b_{1,1} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \psi^2} + b_{1,2} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \chi^2} + \right.$$

$$+b_{2,1} \frac{\partial C_{j,i-1}}{\partial \psi} + b_{2,2} \frac{\partial C_{j,i-1}}{\partial \chi} - s_j \left(\frac{\partial U_{j,i-1}}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,i-1}}{\partial r} + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial F_{j,i-1/2}}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R_j}$$

$$(j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}), \quad u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}),$$

$$u_{1,i}^2(\psi, \chi, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n});$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t), \\ U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, 0) = u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r), \end{cases} \quad (4.34)$$

$$g_{j,0}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = 0, \quad u_{j,0}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) =$$

$$= d_j^* \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1}}{\partial r} \right), \quad u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = 0, \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}).$$

Розв'язки цих задач отримано у вигляді:

$$C_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} C_{j-1,0}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t - f_j(\varphi, \psi, \chi)), & t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi), \\ C_0^0(f_j^{-1}(f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi), & t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r),$$

$$C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \kappa_j \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}^1(\widehat{\varphi}, \psi, \chi, f_j(\widehat{\varphi}, \psi, \chi) + t - f_j(\varphi, \psi, \chi))}{\widehat{v}_j^2(\widehat{\varphi}, \psi, \chi)} d\widehat{\varphi} + \\ + C_{j-1,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t), t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi), \\ \frac{1}{\sigma_j} \cdot \int_0^t g_{j,i}^1(f_j^{-1}(\widehat{t} + f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi, \widehat{t}) d\widehat{t}, \\ t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \frac{1}{\sigma_j} d_j^* \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{j,i-1}(\varphi, \psi, \chi, r, \widehat{t}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{j,i-1}(\varphi, \psi, \chi, r, \widehat{t}) \right) d\widehat{t},$$

де $f_j(\varphi, \psi, \chi) = \kappa_j \sigma_j \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{d\widehat{\varphi}}{\widehat{v}_j^2(\widehat{\varphi}, \psi, \chi)}$ – час проходження відповідни-

ми частинками від точки

$(x(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), y(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), z(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi)) \in E_{j-1} F_{j-1} F_{*(j-1)} E_{*(j-1)}$ до

точки $(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) \in G_z^j$ вздовж відповідної лінії

течії ($j = \overline{2, m}$), f_j^{-1} ($j = \overline{2, m}$) – функції, обернені відповідно до f_j

($j = \overline{2, m}$) відносно змінної φ (такі функції існують, оскільки

$\tilde{v}^2(\varphi, \psi, \chi)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а κ_j, σ_j ($j = \overline{2, m}$) – додатньо-визначені сталі).

Для знаходження примежових поправок $\Pi_{j,i}$

($i = \overline{0, n+1}, j = \overline{1, m}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ одержано такі задачі:

$$\begin{cases} d_m \frac{\partial^2 \Pi_i^{\Pi_i}}{\partial \xi^2} + \kappa_m \frac{\partial}{\partial \xi} = g_i^3(\xi, \psi, \chi, t), \\ \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_i(0, \psi, \chi, t) = u_i^4(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (4.35)$$

де $g_0^4(\xi, \psi, \chi, t) = 0, \quad u_0^4(\psi, \chi, t) = C^*(\psi, \chi, t) - C_{m,0}(\varphi^*, \psi, \chi, t),$

$$g_1^4(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{\kappa_m^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_m \frac{\partial \Pi_0}{\partial t} - d_m \frac{V_1}{\kappa_m^2} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} - \frac{V_1}{\kappa_m} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \right),$$

$$u_i^4(\psi, \chi, t) = -C_{m,i}(\varphi^*, \psi, \chi, t),$$

$$g_i^4(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{\kappa_m^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_m \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{i-1} - \sum_{s=1}^i \left(d_m \frac{V_s}{\kappa_m^2} \frac{\partial^2 \Pi_{i-s}}{\partial \xi^2} + \frac{V_s}{\kappa_m} \frac{\partial \Pi_{i-s}}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - d_m \sum_{s=0}^{i-2} \left(B_{1,1,s} \frac{\partial^2 \Pi_{i-2-s}}{\partial \psi^2} + B_{2,1,s} \frac{\partial \Pi_{i-2-s}}{\partial \psi} + B_{1,2,s} \frac{\partial^2 \Pi_{i-2-s}}{\partial \chi^2} + B_{2,2,k} \frac{\partial \Pi_{i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right)$$

($i = \overline{2, n+1}$), $u_{n+1}^4(\psi, \chi, t) = 0, \quad V_s, B_{1,1,s}, B_{1,2,s}, B_{2,1,s}, B_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s -тих степенях ε у розкладі відповідних функцій

$$\tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi),$$

$b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{d_m}{\kappa_m} \cdot (C^*(\psi, \chi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, \chi, t)) \cdot e^{-\frac{\kappa_m \xi}{d_m}},$$

$$\Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \cdot \int_0^\xi \left(e^{-\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} \cdot \int_0^{\tilde{\xi}} g_i^4(\widehat{\xi}, \psi, \chi, t) \cdot e^{\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} d\widehat{\xi} \right) d\tilde{\xi} - C_i(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\Pi_{n+1}(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \cdot \int_0^\xi \left(e^{-\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} \cdot \int_0^{\tilde{\xi}} g_{n+1}^4(\widehat{\xi}, \psi, \chi, t) \cdot e^{\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} d\widehat{\xi} \right) d\tilde{\xi}.$$

Для знаходження примежових поправок $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{0, n+1}$) та $\tilde{\tilde{P}}_{j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки на поверхні розділу шарів $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) отримаємо такі задачі:

$$d_j \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \kappa_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,i}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,i}^5, \quad d_{j+1} \frac{\partial \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}}{\partial \tilde{\tilde{\phi}}_j^2} - \kappa_{j+1} \frac{\partial \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}}{\partial \tilde{\tilde{\phi}}_j} = g_{j,i}^6,$$

$$\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\tilde{\phi}}_j \rightarrow -\infty} 0,$$

$$\tilde{P}_{s,i}(0, \psi, \chi, t) = \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t),$$

$$d_j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j,i}(0, \psi, \chi, t) \right) + \kappa_j (C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \tilde{P}_{j,i}(0, \psi, \chi, t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= -d_{j+1} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) \right) + \\
&+ \kappa_{j+1} \left(C_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) + \tilde{P}_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) \right), (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}), \\
&\left\{ \begin{aligned}
d_j \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \kappa_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j} &= g_{j,n+1}^5, \quad d_{j+1} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j+1,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \kappa_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,n+1}^6, \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{P}_{j+1,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \\
\tilde{P}_{s,n+1}(0, \psi, \chi, t) &= \tilde{P}_{j+1,n+1}(0, \psi, \chi, t), \\
d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_j \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) &= \\
= -d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t), &(j = \overline{1, m-1}),
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{де} \quad g_{j,0}^5 &= 0, \quad g_{j,0}^6 = 0, \quad g_{j,1}^5 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial t} - \right. \\
&- d_j \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j} \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j} \left. \right), \quad g_{j,1}^5 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,0}}{\partial t} - \right. \\
&- d_{j+1} \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}} \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j} \left. \right), \quad g_{j,i}^5 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-1}}{\partial t} - \right. \\
&- \sum_{s=1}^i \left(d_j \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j \partial \tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j} \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right) - d_j \sum_{s=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,j,s} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \psi^2} + \tilde{B}_{2,1,j,s} \times \right. \\
&\times \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \psi} + \tilde{B}_{1,2,j,s} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \chi^2} + \tilde{B}_{2,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \chi} \left. \right) \left. \right), \quad g_{j,i}^6 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sigma_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-1}}{\partial t} - \sum_{s=1}^i \left(d_j \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}^2} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right) - \right. \\
& - d_j \sum_{s=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \psi^2} + \tilde{B}_{2,1,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \psi} + \tilde{B}_{1,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \chi^2} + \right. \\
& \left. \left. + \tilde{B}_{2,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right) \quad (j = \overline{2, m-1}, i = \overline{1, n+1}), \tilde{V}_{j,s}, \tilde{V}_{j,s}, \tilde{B}_{1,1,j,s}, \tilde{B}_{1,1,j,s}, \\
& \tilde{B}_{1,2,j,s}, \tilde{B}_{1,2,j,s}, \tilde{B}_{2,1,j,s}, \tilde{B}_{2,1,j,s}, \tilde{B}_{2,2,j,s}, \tilde{B}_{2,2,j,s} \quad (j = \overline{1, m-1}) - \text{коефіцієнти при } s\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ у розкладах функцій } \tilde{v}^2(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \\
& \tilde{v}^2(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \\
& b_{1,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{2,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \\
& b_{2,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{2,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{2,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi) \text{ у} \\
& \text{ряд Тейлора відповідно в околі } \varphi = \varphi_{*j}^* \quad (j = \overline{1, m-1}).
\end{aligned}$$

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{2(\kappa_{j+1} - \kappa_j)} \left(d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,0}(0, \psi, \chi, t) + \right. \\
& \left. + d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_j C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} C_{j+1,0}(0, \psi, \chi, t) \right) \cdot e^{\frac{\kappa_j \cdot \tilde{\phi}_j}{d_j}} \\
& (j = \overline{1, m-1}),
\end{aligned}$$

$$\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t) = \frac{1}{2(\kappa_j - \kappa_{j-1})} \left(d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) - \right.$$

$$\left. -d_{j-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j-1,0} (0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j-1} C_{j-1,0} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_j C_{j,0} (0, \psi, \chi, t) \right) \times \\ \times e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}_{j-1}} \quad (j = \overline{2, m}),$$

$$\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}} \int_0^{\tilde{\phi}} g_{j,i}^5(\hat{\phi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\tilde{\phi} + \frac{1}{\kappa_{j+1} - \kappa_j} \times \\ \times \left(d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,i} (0, \psi, \chi, t) + d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) + \right. \\ \left. + \kappa_j C_{j,i} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} C_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}),$$

$$\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_{j-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}} \int_0^{\tilde{\phi}} g_{j,i}^6(\hat{\phi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\tilde{\phi} + \frac{1}{\kappa_j - \kappa_{j-1}} \times \\ \times \left(d_{j-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j-1,i} (0, \psi, \chi, t) + d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j,i} (0, \psi, \chi, t) + \right. \\ \left. + \kappa_{j-1} C_{j-1,i} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_j C_{j,i} (0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}} \int_0^{\tilde{\phi}} g_{j,n+1}^5(\hat{\phi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\tilde{\phi}$$

$$(j = \overline{1, m-1}),$$

$$\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_{j-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}} \int_0^{\tilde{\phi}} g_{j,n+1}^6(\hat{\phi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\tilde{\phi} \quad (j = \overline{2, m}).$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будемо поправки $P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{(j,i/2)}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{(j,i/2)}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{(j,i/2)}(\varphi, \psi, \gamma, t)$ ($j = \overline{1, m}$ $i = \overline{0, 2n+1}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) d_j \frac{\partial^2 P_{j,i}}{\partial \mu^2} - \tilde{v}^2(\varphi, 0, \chi) \frac{\partial P_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^7(\varphi, \mu, \chi, t), \\ P_{j,i}(\varphi, \mu, \chi, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^7(\varphi, \chi, t), \end{array} \right. \quad (4.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,1}(\varphi, Q^*, \chi) d_j \frac{\partial^2 \Gamma_{j,i}}{\partial \eta^2} - \tilde{v}^2(\varphi, Q^*, \chi) \frac{\partial \Gamma_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^8(\varphi, \eta, \chi, t), \\ \Gamma_{j,i}(\varphi, \eta, \chi, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \Gamma_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^8(\varphi, \chi, t), \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) d_j \frac{\partial^2 H_{j,i}}{\partial \lambda^2} - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0) \frac{\partial H_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^9(\varphi, \psi, \lambda, t), \\ H_{j,i}(\varphi, \psi, \lambda, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, H_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^9(\varphi, \psi, t), \end{array} \right. \quad (4.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^*) d_j \frac{\partial^2 E_{j,i}}{\partial \gamma^2} - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^*) \frac{\partial E_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t), \\ E_{j,i}(\varphi, \psi, \gamma, t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0, E_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^{10}(\varphi, \psi, t), \end{array} \right. \quad (4.31)$$

$$\text{де, } g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \mu, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{i}{2}} d_j \frac{\partial^2 P_{j,0}}{\partial \mu^2} - \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}} d_j \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \mu}, \quad g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \mu, \chi, t) =$$

$$= \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j,(i-s)/2}}{\partial \mu^2} + \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j,(i-s)/2}}{\partial \mu} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{1,2, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{2,2, \frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi} \right)$$

($i = \overline{2, 2n+1}$), $g_{j,0}^7(\varphi, \mu, \chi, t) = 0$, \tilde{V}_s , $\tilde{B}_{1,1,s}$, $\tilde{B}_{1,2,s}$, $\tilde{B}_{2,1,s}$ і $\tilde{B}_{2,2,s}$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, $u_{j,0}^7(\varphi, \chi, t) = C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, 0, \chi, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, 0, \chi, t)$,

$$u_{j,\frac{i}{2}}^7(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, 0, \chi, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, 0, \chi, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \\ 0, \text{ якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = 0, \quad g_{j,\frac{1}{2}}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{1,1,\frac{1}{2}}^* d_j \frac{\partial^2 \Gamma_{j,0}}{\partial \eta^2} - \tilde{B}_{2,1,\frac{1}{2}}^* d_j \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \eta},$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{1,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \eta^2} + \tilde{B}_{2,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \eta} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi} \right),$$

$i = \overline{2, 2n+1}$, \tilde{V}_s^* , $\tilde{B}_{11,s}^*$, $\tilde{B}_{12,s}^*$, $\tilde{B}_{21,s}^*$ і $\tilde{B}_{22,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$,

$b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$,

$$u_{j,0}^8(\varphi, \chi, t) = C_j^{**}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$u_{j,\frac{i}{2}}^8(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, Q^*, \chi, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \\ 0, \text{ якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = 0,$$

$$g_{j,\frac{1}{2}}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = \bar{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \varphi} - d_j (\bar{B}_{1,2,\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,0}}{\partial \lambda^2} - \bar{B}_{2,2,\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \lambda}),$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \\ - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2}}{\partial \lambda^2} + \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \lambda} \right) \right) -$$

$$-\sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1,\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1,\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi} \Big),$$

$i = \overline{2, 2n+1}$, \bar{V}_s , $\bar{B}_{1,1,s}$, $\bar{B}_{1,2,s}$, $\bar{B}_{2,1,s}$ і $\bar{B}_{2,2,s}$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ в ряд Тейлора в околі $\chi = 0$,

$$u_{j,0}^9(\varphi, \psi, t) = C_{j,0}^{***}(\varphi, \psi, t) - C_{j,0}(\varphi, \psi, 0, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, \psi, 0, t),$$

$$u_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, 0, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, 0, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = 0, \quad g_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \varphi} - d_j(\bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,0}}{\partial \gamma^2} - \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \gamma}),$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,(i-s)/2}}{\partial \gamma^2} + \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \gamma} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi} \right),$$

$i = \overline{2, 2n+1}$, \bar{V}_s^* , $\bar{B}_{1,1,s}^*$, $\bar{B}_{1,2,s}^*$, $\bar{B}_{2,1,s}^*$ і $\bar{B}_{2,2,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$ в ряд Тейлора в околі $\chi = Q^*$,

$$w_{j,0}^7(\varphi, \psi, t) = C_j^{***}(\varphi, \psi, t - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t),$$

$$u_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, Q^*, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, Q^*, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}. \end{cases}$$

Для функцій $F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t)$ отримуємо задачі:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = d_j^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) + g_{j,i/2}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t), \\ F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, 0) = 0, F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, 0, t) = u_{j,i/2}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

де $g_{j,0}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = 0$,

$$g_{j,i/2}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = \sum_{s=1}^i \frac{2\rho^{s-1}}{R^s} d_j^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j,i-1}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t),$$

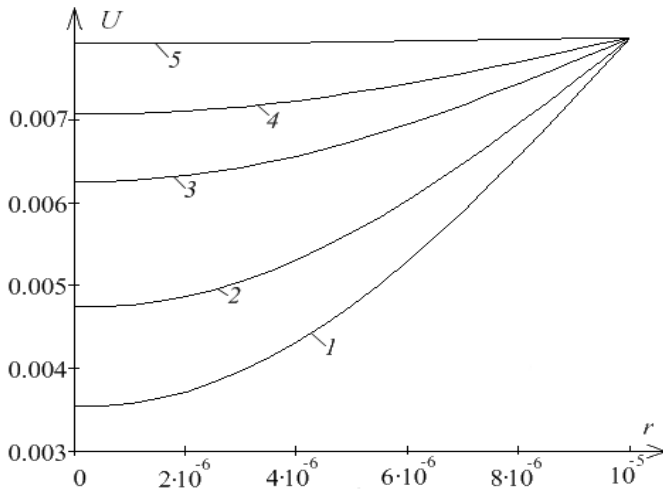
$$u_{j,i/2}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} k_j (C_{j,i/2} + I_{1,j} \tilde{P}_{j,i/2} + I_{2,j} \tilde{P}_{j,i/2} + I_{3,j} \Pi_{j,i/2} + \\ + P_{j,i/2} + \Gamma_{j,i/2} + H_{j,i/2} + E_{j,i/2}), \text{ якщо } i \text{ парне;} \\ k_j (P_{j,i/2} + \Gamma_{j,i/2} + H_{j,i/2} + E_{j,i/2}), \text{ якщо } i \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$u_{j,n+1}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t) = k_j (I_{1,j} \tilde{P}_{j,i/2} + I_{2,j} \tilde{P}_{j,i/2} + I_{3,j} \Pi_{j,i/2} + P_{j,i/2} + \Gamma_{j,i/2} + H_{j,i/2} + E_{j,i/2}).$$

Застосована методика “розщеплення” вихідної задачі та конструкція побудови розв’язку шляхом доповнення розв’язку відповідної виродженої задачі різними поправками, зокрема поправками в околах поверхонь розділу шарів, дозволяє вперше отримати розв’язок задачі (4.17)–(4.20) із наперед заданою точністю.

4.4. Результати комп'ютерного моделювання сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного масопере-несення в мікропористому середовищі

В якості технічного об'єкта для комп'ютерного моделювання процесу, описаного в п. 4.1, вибрано каркасно-засипний фільтр довжиною $l=1\text{ м}$, із засипкою частинок мікропористої структури розміром $R=10^{-5}\text{ м}$. Комп'ютерне моделювання проходило при наступних параметрах: $\varepsilon=10^{-10}$, $d_* = 1\text{ м}^2 / \text{год}$, $d^* = 1\text{ м}^2 / \text{год}$, $d_*^* = 0.3\text{ м} / \text{год}$, $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.8$, $v(x) = 1\text{ м} / \text{год}$, $k = 0.8$, $C_*(t) = \begin{cases} 0.005 \cos((15t + \pi) + 0.005), & t \leq \pi / 15, \\ 0.01, & t > \pi / 15. \end{cases}$



a)

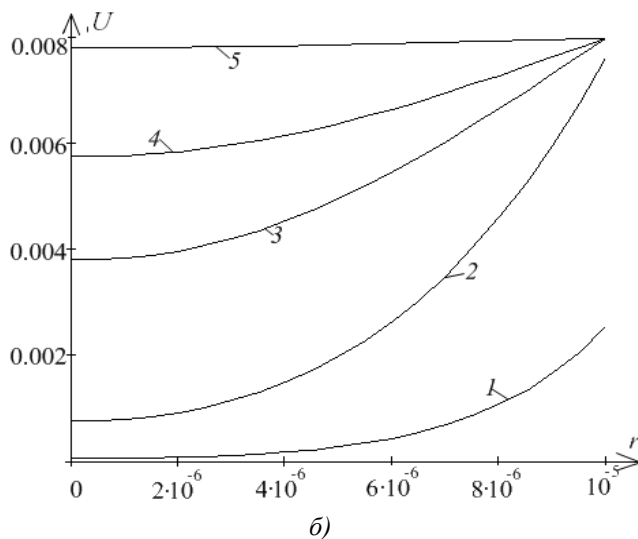


Рис.4.3.Розподіл концентрації в мікрочастинках

На рис. 4.3,а зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропористій частинці в моменти часу $t=0.5\text{год}$, $t=0.6\text{год}$, $t=0.8\text{год}$, $t=1\text{год}$, $t=1.8\text{год}$ (криві 1-5 відповідно) з центром в точці з координатою $x=0.2$. Ці ж результати відображено на рис.4.3,б при $x=0.6$.

Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі відображено на рис. 4.4. Так, крива 1 відповідає конвективній складовій розв'язку, тобто без врахування адсорбції мікропористими частинками, а криві 2, 3, 4 – розв'язку $C(x,t)$ в моменти часу $t=0.9\text{год}$, $t=1\text{год}$, $t=1.5\text{год}$. Як показав експеримент, очищення відбувається до певного моменту часу (забруднення мікропористих частинок). При заданих умовах це $t=0.9\text{год}$, після чого починає знижуватись інтенсивність очищення, хоча часинки ще не є повністю забруднені. Максимальне відхилення розрахованого значення концентрації на виході фільтра при заданих умовах

з врахуванням адсорбції складає 14 %.

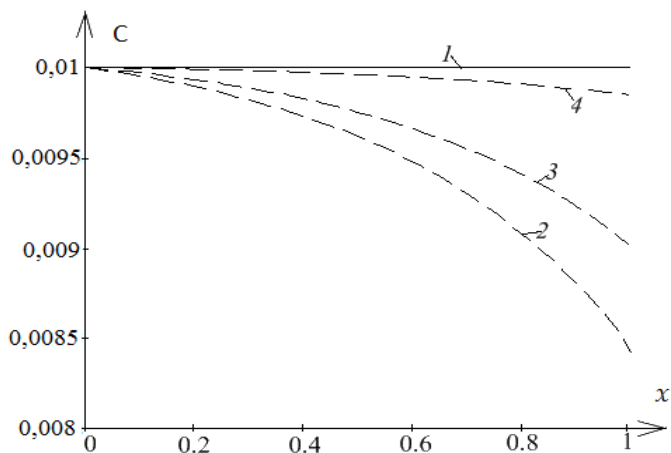


Рис.4.4. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі

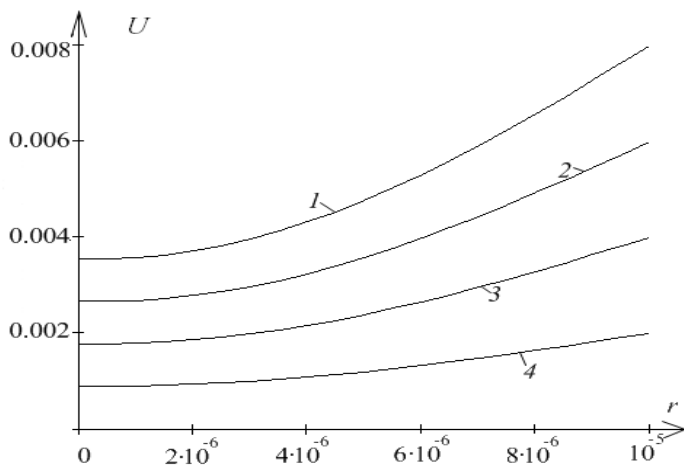


Рис. 4.5. Вплив коефіцієнта адсорбційної рівноваги на розподіл концентрації забруднюючої речовини в частинці при різних значеннях коефіцієнта масообміну

На рис. 4.5 зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропористій частинці з координатою $x=0.2$ в момент часу $t=0.5$ при $k_1=0.8$, $k_2=0.6$, $k_3=0.4$, $k_4=0.2$ (криві 1-4 відповідно).

Ідентифіковані в п. 4.2 значення коефіцієнтів дифузії в макрота мікросередовищах зображено на рис.4.6. Так, на рис. 4.6,а наведено графік $a_0(t)$, а на рис. 4.6,б – графік $a_0^*(x,t)$ в мікропорах з координатами $x=0$, $x=0.57$, $x=0.86$, $x=1$ (криві 1-4 відповідно).

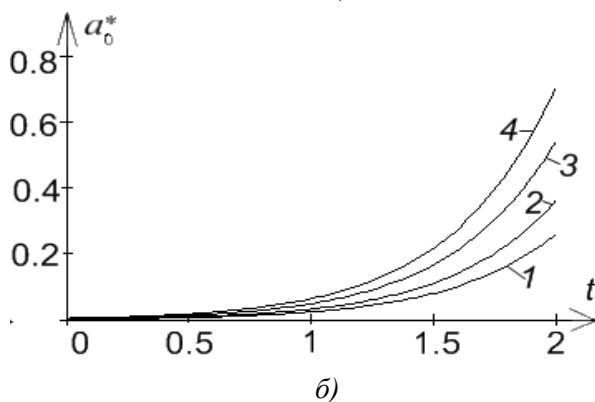
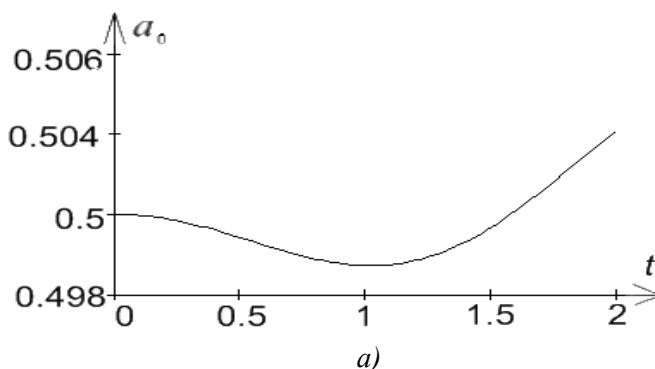


Рис.4.6. Ідентифіковані коефіцієнти дифузії макрота (а) та мікросередовища (б)

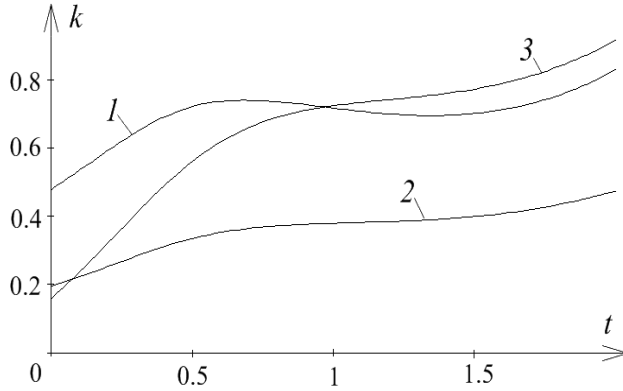


Рис. 4.7. Значення функції адсорбційної рівноваги

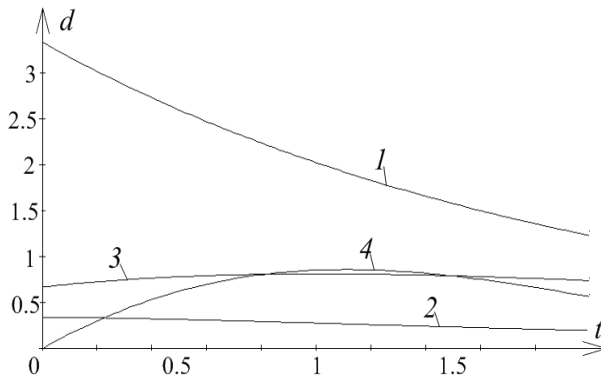


Рис. 4.8. Значення коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий

На рис. 4.7 зображено графік шуканої функції адсорбційної рівноваги при $K_*(t)$. Зокрема крива 1 відповідає функції $k(t) = k_0(t) + \varepsilon k_1(t)$ при $K_{*1}(t) = 0.3e^{\frac{t}{2}}$, крива 2 – при $K_{*2}(t) = 0.4 + 0.3\sin(0.7t - \frac{3\pi}{8})$, крива 3 – при $K_{*3}(t) = 0.4t + 0.1$.

Результат ідентифікації коефіцієнта впливу внутрішньочас-

тинкового дифузійного переносу на міжчастинковий при різних значеннях $D_*^*(t)$ зображено на рис.4.8. Зокрема крива 1 відповідає функції $d(t) = d_0(t) + \varepsilon d_1(t)$ при $D_{*1}^*(t) = 1$, крива 2 – $D_{*2}^*(t) = 0.1 + 0.05 \ln(t+1)$, крива 3 – $D_{*3}^*(t) = \frac{t+1}{5}$, крива 4 – $D_{*4}^*(t) = 0.5 \sin(t)$.

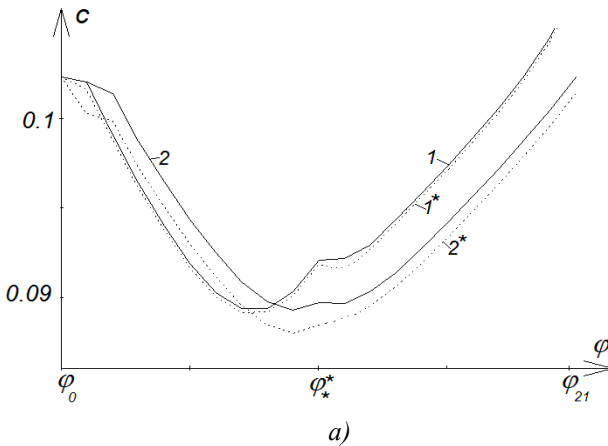
Для проведення комп'ютерного моделювання процесу масо-перенесення забруднюючих речовин у двошаровому кусково-однорідному двопористому середовищі (п. 4.3), що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії та ін. використано ідеальний фільтраційний фон для області G_z , обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_2(x, y, z) = (x - 420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + z^2 + (y - 615.536707)^2 - 418885.4382$, $f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615.53670744)^2 + z^2 - 418885.4382$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = 160000y^2 + (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 - 932548.33996z^2$, вибрано положення поверхні розділу EFF_*E_* : $f_*(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$ [18]. При цьому перша підобласть складається з мікрочастинок радіусом $R_1 = 10^{-4}$ м, а друга – з частинок радіусом $R_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ м і розглянуто два випадки різного задання відповідних коефіцієнтів:

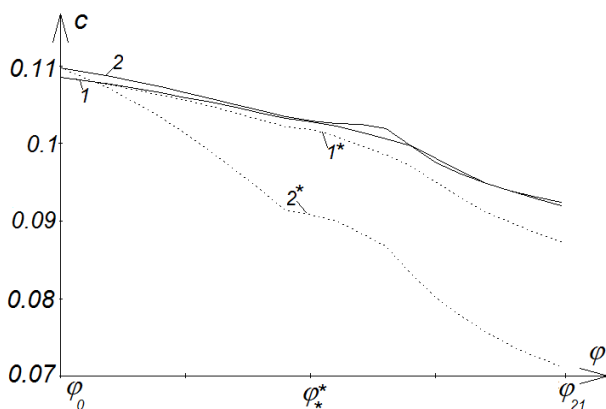
$$1) \kappa_1 = 0.45 \text{ м / добу}, \quad \kappa_2 = 0.3 \text{ м / добу}, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.5, \\ D_1 = 0.008 \text{ м}^2 / \text{ добу}, \quad D_2 = 0.005 \text{ м}^2 / \text{ добу}, \quad \sigma_1^* = 0.37, \quad \sigma_2^* = 0.48, \\ k_1 = 0.8, \quad k_2 = 0.95, \quad D_1^* = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{ добу}, \quad D_2^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{ добу}, \\ S_1 = 0.005 \text{ м / добу}, \quad S_2 = 0.004 \text{ м / добу};$$

$$2) \kappa_1 = 0.45 \text{ м / добу}, \quad \kappa_1 = 0.375 \text{ м / добу}, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.6,$$

$D_1 = 0.008 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_2 = 0.007 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $\sigma_1^* = 0.5$, $\sigma_2^* = 0.8$,
 $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.95$, $D_1^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_2^* = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{добу}$,
 $S_1 = 0.01 \text{ м} / \text{добу}$, $S_2 = 0.008 \text{ м} / \text{добу}$.

Відповідно побудовано розрахункові динамічні сітки G_z^1 при $\varphi_* = -7.14$, $\varphi^* = 10.2$, G_z^2 при $\varphi_* = -7.9$, $\varphi^* = 9.03$, які отримані в залежності від вибору задання відповідних коефіцієнтів при $N = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$. Значення φ_* та φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового біпористого середовища $v_{\text{сеп}}$ була приблизно рівною $1 \text{ м} / \text{добу}$. Також для областей G_z^j ($j = \overline{1,2}$) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять: $Q = 1.91 \text{ м}^3 / \text{добу}$ та $Q = 2.38 \text{ м}^3 / \text{добу}$, потенціали на поверхнях розділу $\varphi_*^* = 3.06$ і $\varphi_*^* = 1.13$ та обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ [19].





б)

Рис. 4.9. Розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж лінії течії $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$ для областей G_z^1 , G_z^2 в моменти часу $t=1$ доба (а) та $t=15$ діб (б)

На рис. 4.9 проілюстровано вплив дифузії та адсорбції на розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі. Криві 1 та 2 відповідають конвективній складовій

$$C_0(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} C_{1,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^*, \\ C_{2,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases} \quad \text{для областей } G_z^1 \text{ та } G_z^2, \text{ а}$$

$$\text{криві } 1^* \text{ та } 2^* - \text{розв'язку } C(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} C_1(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^*, \\ C_2(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases} \quad \text{для}$$

областей G_z^1 та G_z^2 відповідно в моменти часу $t=1$ доба (а) та $t=15$ діб (б) за таких умов:

$$C_1^0(\varphi, \psi, \chi) = C_2^0(\varphi, \psi, \chi) = 0.1 + 0.01 \left(\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{100} + 1 \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\psi^2 + \chi^2}{50} \right),$$

$$C_*(\psi, \chi, t) = 0.1 + 0.01 \operatorname{tg}(0.02(\psi^2 + 5t + \chi^2)),$$

$$U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = k_j \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{100(r - R_j)}{R_j} \right) + 1 \right) C_j^0(\varphi, \psi, \chi).$$

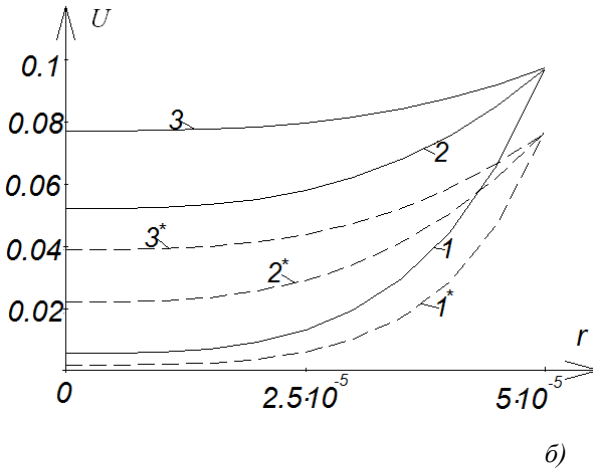
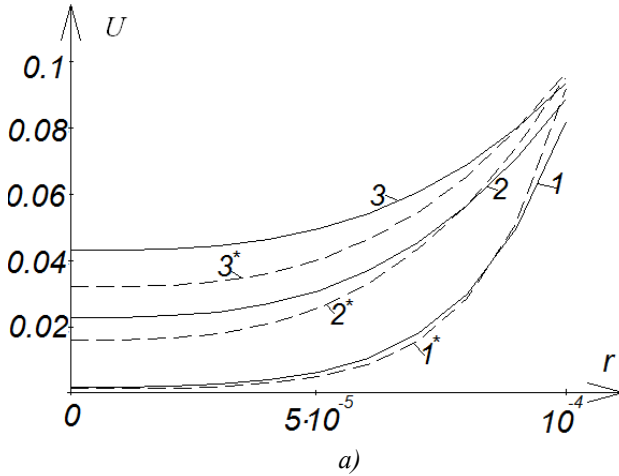


Рис.4.10. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікрочастинках

На рис. 4.10 зображено накопичення забруднюючої речовини в мікропористих частинках в першому шарі $U_1(\varphi_5, \psi_1, \chi_4, r, t)$ (а) та

в другому шарі $U_2(\varphi_{15}, \psi_1, \chi_4, r, t)$ (б), де $\varphi_5 = -3.39$, $\varphi_{15} = 4.52$, $\psi_1 = 2.9$, $\psi_4 = 3.14$, $\chi_4 = 0$. Криві 1-3 відповідають значенням концентрації забруднюючої речовини у виділених частинках в моменти часу $t = 1$ доба, $t = 15$ діб, $t = 20$ діб в першому випадку задання коефіцієнтів (область G_z^1), а криві 1*-3* – в другому (область G_z^2).

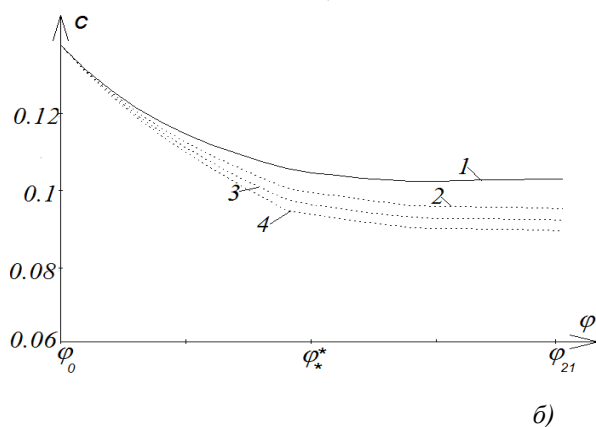
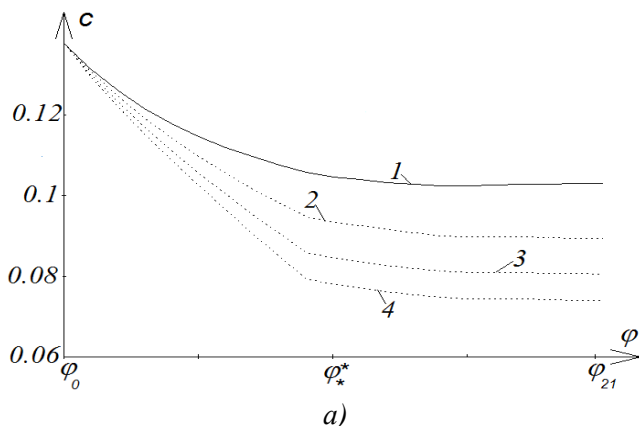


Рис. 4.11. Залежність розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі від фізичних властивостей частинок

Вплив фізико-хімічних характеристик мікропористих частинок на розподіл концентрації забруднюючої речовини в області G_z^1 проілюстровано на рис. 4.11. Зокрема досліджено вплив коефіцієнта впливу внутрішньо-частинкового переносу на міжчастинковий в першій підобласті S_1 (рис.4.11,а) та коефіцієнта адсорбційної рівноваги в першій підобласті $k_1 = 0.8$ (рис.4.11,б) на розподіл концентрації забруднюючої речовини у міжчастинковому просторі за таких вхідних даних: $\kappa_1 = 0.45 \text{ м / добу}$, $\kappa_2 = 0.3 \text{ м / добу}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.7$, $D_1 = D_2 = 0.008 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_1^* = 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_2^* = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $k_2 = 0.9$, $S_2 = 0.005 \text{ м / добу}$, $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0.3$, $R_1 = R_2 = 10^{-5} \text{ м}$.

Суцільна крива рис.4.11,а рис.4.11,б відповідає конвективній складовій процесу (відсутній вплив дифузії та адсорбції мікропористими частинками), крива 1 рис.4.11,а відповідає значенню $S_1 = 0.005$ крива 2 – $S_1 = 0.009$, крива 3 – $S_1 = 0.012$, а на рис.4.11,б крива 2 відповідає значенню $k_1 = 0.4$, крива 2 – $k_1 = 0.65$, крива 3 – $k_1 = 0.87$ вздовж лінії течії $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$ в момент часу $t = 15 \text{ діб}$.

РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ БАГАТО- КОМПОНЕНТНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В БІПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Характерною особливістю виробничих стічних вод є значна багатокомпонентність забруднень. Проведений у роботах [68, 73, 127, 129, 146, 196] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси одно- та багатокомпонентного конвективно-дифузійно масоперенесення в пористих та мікропористих середовищах.

Моделювання процесів тепломасоперенесення в мікропористих середовищах є перспективним напрямком досліджень стосовно прогнозування ефективності роботи очисних пристроїв, що поєднують адсорбційні, хімічні та теплові процеси.

5.1. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення двох сортів розчинних речовин у мікропористих середовищах

Нехай в біпористому середовищі відбувається процес конвективно-дифузійного багатокомпонентного масоперенесення із адсорбцією розчинних речовин мікропористими частинками. Відповідну модельну задачу в області $G = G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однорідний криволінійний паралелепіпед (рис. 3.1), обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ та поверх-

нями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ опишемо системою диференціальних рівнянь з початковими та граничними умовами [22, 117]:

$$\varepsilon D_{j1} \Delta \tilde{C}_1 + \varepsilon D_{j2} \Delta \tilde{C}_2 - \vec{v} \cdot \text{grad } \tilde{C}_j - \varepsilon \left(S_{j1} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial r} + S_{j2} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \sigma_1 \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial t}, \quad j=\overline{1,2}, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon D_{j1}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial r} \right) + \varepsilon D_{j2}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial r} \right) = \sigma_2 \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{C}_j(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \tilde{C}_j^0(x, y, z), \quad \tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{t=0} = \tilde{U}_j^0(x, y, z, r), \quad (5.3)$$

$$\tilde{C}_j \Big|_{ABB_*A_*} = \tilde{C}_{j^*}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{CDD_*C_*} = \tilde{C}_{j^*}^*(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{BCC_*B_*} = \tilde{C}_{j^{**}}(M, t),$$

$$\tilde{C}_j \Big|_{ADD_*A_*} = \tilde{C}_{j^{**}}^*(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_{j^{***}}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = \tilde{C}_{j^{***}}^*(M, t),$$

$$\tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{r=R} = k_{j1} \tilde{C}_1(x, y, z, t) + k_{j2} \tilde{C}_2(x, y, z, t),$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_j(x, y, z, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5.4)$$

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{ADD_*A_* \cup A_*D_*C_*B_* \cup BCC_*B_* \cup ADCB} = 0, \quad (5.5)$$

де $\tilde{C}_j(x, y, t)$ – концентрація j -го сорту забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі, $\tilde{U}_j(x, y, z, r, t)$ – концентрація j -го сорту забруднюючої речовини в мікрочастинках, D_{js} та D_{js}^* – коефіцієнти дифузії в між частинковому просторі та в мікрочастинках відповідно, S_{js} – коефіцієнти впливу внутрішньочастинкового пере-

несення на міжчастинковий ($j=1,2, s=1,2$), k_{js} – коефіцієнти адсорбційної рівноваги, R – радіус мікрочастинки, $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – вектор, а $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($\sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} \gg \varepsilon > 0$, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$) в точці $z = (x, y, z)$, M , n – біжуча точка та нормаль до відповідної поверхні ε – малий параметр, σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища, $\tilde{C}_j^0(x, y, z)$, $\tilde{U}_j^0(x, y, z, r)$, $\tilde{C}_{j*}(M, t)$ та інші функції, що фігурують в (5.4) достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та по ребрах області G .

Нехай задача (5.5) шляхом конформного відображення [18] $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$, де $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*, Q_{**} < \chi < Q^{**}\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу, $\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ – функції течії (комплексно спряжені до $\varphi = \varphi(x, y, z)$). Параметр $Q = Q_0 \cdot Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії G_z ($Q_0 = Q^* - Q_*$, $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний прошарки) знаходиться в процесі розв'язування цієї задачі. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$, $t = t$ у рівнянні (5.1), (5.2) та умовах (5.3), (5.4), приходимо до відповідної задачі для області G_w :

$$\varepsilon \sum_{s=1}^2 D_{js} (v^2 \frac{\partial^2 C_s}{\partial \varphi^2} + b_{11} \frac{\partial^2 C_s}{\partial \psi^2} + b_{12} \frac{\partial^2 C_s}{\partial \chi^2} + b_{21} \frac{\partial C_s}{\partial \psi} + b_{22} \frac{\partial C_s}{\partial \chi}) -$$

$$-v^2 \frac{\partial C_j}{\partial \varphi} - \varepsilon \left(S_{j1} \frac{\partial U_1}{\partial r} + S_{j2} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \sigma_1 \frac{\partial C_j}{\partial t}, \quad (5.6)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U_j}{\partial t} = \varepsilon D_{j1}^* \left(\frac{\partial U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \varepsilon D_{j2}^* \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right), \quad (5.7)$$

$$C_j(\varphi, \psi, \chi, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(\varphi, \psi, \chi), \quad U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{t=0} = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad (5.8)$$

$$C_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_{j*}, \quad C_j \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C_j^*, \quad C_j \Big|_{\psi=Q_*} = C_{j**}, \quad C_j \Big|_{\psi=Q^*} = C_j^{**},$$

$$C_j \Big|_{\chi=Q_*} = C_{j***}, \quad C_j \Big|_{\chi=Q^{**}} = C_j^{***},$$

$$U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{r=R} = k_{j1} C_1(\varphi, \psi, \chi, t) + k_{j2} C_2(\varphi, \psi, \chi, t),$$

$$\frac{\partial q_j(\varphi, \psi, \chi, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5.9)$$

$$C_j = C_j(\varphi, \psi, \chi, t) = \tilde{C}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t),$$

$$U_j = U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \tilde{U}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), r, t),$$

$$C_{j*}(\psi, \chi, t) = \tilde{C}_{j*}(x(\varphi_*, \psi, \chi), y(\varphi_*, \psi, \chi), z(\varphi_*, \psi, \chi), t),$$

$$C_j^*(\psi, \chi, t) = \tilde{C}_j^*(x(\varphi^*, \psi, \chi), y(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi), t),$$

$$C_{j**}(\varphi, \chi, t) = \tilde{C}_{j**}(x(\varphi, Q_*, \chi), y(\varphi, Q_*, \chi), z(\varphi, Q_*, \chi), t),$$

$$C_j^{**}(\varphi, \eta, t) = \tilde{C}_j^{**}(x(\varphi, Q^*, \chi), y(\varphi, Q^*, \chi), z(\varphi, Q^*, \chi), t),$$

$$C_{j***}(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}_{j***}(x(\varphi, \psi, Q_{**}), y(\varphi, \psi, Q_{**}), z(\varphi, \psi, Q_{**}), t),$$

$$C_j^{***}(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}_j^{***}(x(\varphi, \psi, Q^{**}), y(\varphi, \psi, Q^{**}), z(\varphi, \psi, Q^{**}), t),$$

$$C_j^0(\varphi, \psi, \chi) = \tilde{C}_j^0(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)),$$

$$U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = \tilde{U}_j^0(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), r),$$

$$v = v(\varphi, \psi, \chi) = v(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)),$$

$$b_{11} = b_{11}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad b_{12} = b_{12}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2,$$

$$b_{21} = b_{21}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}, \quad b_{22} = b_{22}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_{xx} + \chi_{yy} + \chi_{zz}.$$

Розв'язок останньої одержано у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} C_j(\varphi, \psi, \chi, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i C_{(j,i)}(\varphi, \psi, \chi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_{(j,i)}(\xi, \psi, \chi, t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \mu, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Gamma_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \eta, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} H_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \lambda, t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} E_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \phi, t) + R_{j,n}^1(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U_{(j,i)}(\varphi, \psi, \chi, r, t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} F_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) + R_{j,n}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де $C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$, $U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, \chi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_w), $P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \phi, t)$, $F_{j,i/2}(\varphi, \rho, \psi)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = Q_*$, $\psi = Q^{**}$, $\chi = Q_{**}$, $\chi = Q^{**}$ та в околі $r = R$, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (Q_* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\eta = (Q^* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\lambda = (Q_{**} - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\phi = (Q^{**} - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\rho = (R - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, $R_{j,n}^1$, $R_{j,n}^2$ – залишкові члени.

Підставляючи (5.10), (5.11) в (5.6)–(5.9), та прирівнявши ко-

ефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi, \chi) \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t), \\ C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = w_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi), \quad C_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^2(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t), \\ U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, 0) = w_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r), \end{cases} \quad (5.13)$$

де $g_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = 0$, $w_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi) = C_j^0(\varphi, \psi, \chi)$, $w_{j,0}^2(\psi, \chi, t) = C_{j*}(\psi, \chi, t)$,

$$g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = \sum_{s=1}^2 D_{js} (v^2 \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \varphi^2} + b_{11} \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \psi^2} + b_{12} \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \chi^2} + b_{21} \frac{\partial C_{s,i-1}}{\partial \psi} + b_{22} \frac{\partial C_{s,i-1}}{\partial \chi}) - S_{js} \left(\frac{\partial U_{s,i-1}}{\partial r} + \frac{\partial F_{s,i-1}}{\partial r} + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial F_{s,i-1/2}}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R},$$

$$w_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi) = 0, \quad w_{j,i}^2(\psi, \chi, t) = 0, \quad g_{j,0}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = 0,$$

$$w_{j,0}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = D_{j1}^* \left(\frac{\partial^2 U_{1,i-1}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{1,i-1}}{\partial r} \right) + D_{j2}^* \left(\frac{\partial U_{s,i-1}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{2,i-1}}{\partial r} \right), \quad w_{j,i}^3(\varphi, \psi, r) = 0, \quad (i = \overline{1, n},$$

$$j = \overline{1, 2}).$$

Аналогічно до п. 3.3, розв'язки цих задач отримано у вигляді:

$$C_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} C_j^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \chi) - t), \psi, \chi), & t < f(\varphi, \psi, \chi), \\ C_{j*}(t - f(\varphi, \psi, \chi), \psi, \chi), & t \geq f(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r),$$

$$U_{j,1}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \frac{1}{\sigma_2} \sum_{s=1}^2 D_{js}^* \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{s,0}(\varphi, \psi, \chi, r, \tilde{t}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{s,0}(\varphi, \psi, \chi, r, \tilde{t}) d\tilde{t}, \\
C_{j,i}(t, \varphi, \chi, \psi) = & \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t g_{j,i}^1(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \chi) - t + \tilde{t}, \psi, \chi), \psi, \chi, \tilde{t}) d\tilde{t}, \\ t < f(\varphi, \psi, \chi), \\ \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}^1(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, f(\tilde{\varphi}, \psi, \chi) + t - f(\varphi, \psi, \chi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \chi)} d\tilde{\varphi}, \\ t \geq f(\varphi, \psi, \chi). \end{cases}
\end{aligned}$$

Для знаходження примежових поправок $\Pi_{j,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$, $j = \overline{1, 2}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,i}}{\partial \xi} = g_{j,i}^3(\xi, \psi, \chi, t), \quad j = \overline{1, 2}, \\ \Pi_{j,0}(\xi, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_{j,i}(0, \psi, \chi, t) = w_{j,i}^3(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (5.14)$$

де $g_{j,0}^3(\xi, \psi, \chi, t) = 0$, $w_{j,0}^3(\psi, \chi, t) = C_j^*(\psi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi^*, \psi, \chi, t)$,

$$\begin{aligned}
g_{j,1}^3(\xi, \psi, \chi, t) = & \frac{1}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_1 \frac{\partial \Pi_{j,0}}{\partial t} + 2\xi v(\varphi^*, \psi, \chi) v'(\varphi^*, \psi, \chi) \times \right. \\
& \times (D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,0}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,0}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,0}}{\partial \xi}), \quad g_{j,i}^3(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \times \\
& \times (\sigma_1 \frac{\partial \Pi_{j,i-1}}{\partial t} + \sum_{s=1}^i V_s (D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-s}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-s}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,i-s}}{\partial \xi}) + \\
& + \sum_{s=0}^{i-2} B_{11,s} (D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \psi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \psi^2}) + \sum_{s=0}^{i-2} B_{12,s} (D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \chi^2} + \\
& + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \chi^2}) + \sum_{s=0}^{i-2} B_{21,s} (D_{j1} \frac{\partial \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \psi} + D_{j2} \frac{\partial \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \psi}) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=0}^{i-2} B_{22,s} (D_{j1} \frac{\partial \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \chi} + D_{j2} \frac{\partial \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \chi}) \quad (i = \overline{2, n+1}), \quad w_{j,i}^3(\psi, \chi, t) =$$

$$= C_j^*(\psi, \chi, t) - C_{j,i}(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad w_{j,n+1}^3(\psi, \chi, t) = 0, \quad V_s, \quad B_{11,s},$$

$$B_{12,s}, \quad B_{21,s}, \quad B_{22,s} - \text{коефіцієнти при } s\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ у розкладі від-}$$

$$\text{повідних функцій } \tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi), \quad b_{11}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi),$$

$$b_{12}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi), \quad b_{21}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi), \quad b_{22}(\varphi^* - \varepsilon \xi, \psi, \chi) \text{ у ряд Тейлора}$$

$$\text{в околі } \varphi = \varphi^*.$$

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{j,0}(\xi, \psi, \eta, t) &= D_{j0} \left(C_j^*(\psi, \eta, t) - C_{j,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) e^{-\frac{1}{D_{j0}} \xi}, \\
 \Pi_{j,i}(\xi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{D_{j0}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{1}{D_{j0}} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,i}^3(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) e^{\frac{1}{D_{j0}} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - C_{j,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) (i = \overline{1, n}), \\
 \Pi_{j,n+1}(\xi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{D_{j0}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{1}{D_{j0}} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{n+1}^3(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) e^{\frac{1}{D_{j0}} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будемо поправки $P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \phi, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$):

$$\begin{cases} b_{11}(\varphi, Q_*, \eta) (D_{j1} \frac{\partial^2 P_{1,i}}{\partial \mu^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 P_{2,i}}{\partial \mu^2}) - \tilde{v}^2(\varphi, Q_*, \chi) \frac{\partial P_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^4(\varphi, \mu, \chi, t), \\ P_{j,i}(\varphi, \mu, \chi, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad P_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^4(\varphi, \chi, t), \quad j = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}(\varphi, Q^*, \eta) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Gamma_{1,i}}{\partial \eta^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Gamma_{2,i}}{\partial \eta^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, Q^*, \chi) \frac{\partial \Gamma_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^5(\varphi, \eta, \chi, t), \\ \Gamma_{j,i}(\varphi, \eta, \chi, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \Gamma_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^5(\varphi, \chi, t), j = \overline{1, 2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**}) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 H_{1,i}}{\partial \lambda^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 H_{2,i}}{\partial \lambda^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^{**}) \frac{\partial H_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^6(\varphi, \psi, \lambda, t), \\ H_{j,i}(\varphi, \psi, \lambda, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, H_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = w_{j,i}^6(\varphi, \psi, t), j = \overline{1, 2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**}) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 E_{1,i}}{\partial \phi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 E_{2,i}}{\partial \phi^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^{**}) \frac{\partial E_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^7(\varphi, \psi, \phi, t), \\ E_{j,i}(\varphi, \psi, \phi, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, E_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = w_{j,i}^7(\varphi, \psi, t), j = \overline{1, 2}, \end{array} \right.$$

$$\text{де } g_{j,0}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_0}{\partial \mu^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \mu},$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i = (D_{11} P_{1,i} + D_{12} P_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j, (i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \mu^2} + \right. \\ \left. + \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \mu} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{12, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{22, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \chi}, \end{aligned}$$

$$i = \overline{2, 2n+1}, \quad w_{j,0}^4(\varphi, \chi, t) = C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^4(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j, i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j, i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_0}{\partial \eta^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial \eta},$$

$$\tilde{\Gamma}_i = (D_{11} \Gamma_{1,i} + D_{12} \Gamma_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j, (i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-s)/2}}{\partial \eta^2} + \right.$$

$$+ \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{(i-s)/2}}{\partial \eta} \Big) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{12, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{22, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \chi},$$

$$i = \overline{2, 2n+1}, \quad w_{j,0}^5(\varphi, \chi, t) = C_j^{**}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^5(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = 0, \quad g_{j, \frac{i}{2}}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \varphi} - \bar{B}_{12, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \lambda^2} - \bar{B}_{22, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \lambda},$$

$$\tilde{H}_i = (D_{11} H_{1,i} + D_{12} H_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} -$$

$$- \sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{12, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-s)/2}}{\partial \lambda^2} + \bar{B}_{22, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_{(i-s)/2}}{\partial \lambda} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{11, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi^2} -$$

$$- \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{21, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi}, \quad i = \overline{2, 2n+1},$$

$$w_{j,0}^6(\varphi, \psi, t) = C_{j,***}(\varphi, \psi, t) - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^6(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \varphi} - \bar{B}_{12, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_0}{\partial \phi^2} - \bar{B}_{22, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial \phi},$$

$$\tilde{E}_i = (D_{11} E_{1,i} + D_{12} E_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} -$$

$$- \sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{12, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-s)/2}}{\partial \phi^2} + \bar{B}_{22, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_{(i-s)/2}}{\partial \phi} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} -$$

$$- \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{11, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{21, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi}, \quad i = \overline{2, 2n+1},$$

$$w_{j,0}^7(\varphi, \psi, t) = C_j^{***}(\varphi, \psi, t - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t),$$

$$w_{j,\frac{i}{2}}^7(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$\tilde{V}_s, \tilde{B}_{11,s}, \tilde{B}_{12,s}, \tilde{B}_{21,s}, \tilde{B}_{22,s}, \tilde{V}_s^*, \tilde{B}_{11,s}^*, \tilde{B}_{12,s}^*, \tilde{B}_{21,s}^*, \tilde{B}_{22,s}^*, \bar{V}_s, \bar{B}_{11,s}, \bar{B}_{12,s}, \bar{B}_{21,s}, \bar{B}_{22,s}, \bar{V}_s^*, \bar{B}_{11,s}^*, \bar{B}_{12,s}^*, \bar{B}_{21,s}^*, \bar{B}_{22,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{11}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{12}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{21}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $b_{22}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$, $v^2(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{11}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{12}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{21}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{22}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $v^2(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{11}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{12}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{21}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{22}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $v^2(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$, $b_{11}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$, $b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$, $b_{21}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$ і $b_{22}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$ в ряди Тейлора в околах $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$, $\chi = Q_{**}$ і $\chi = Q^{**}$ відповідно.

Примежові функції $F_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t)$ знаходяться в результа-

ті розв'язання наступних задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \frac{\partial F_{j,i/2}}{\partial t} = D_{j1}^* \frac{\partial^2 F_{1,i/2}}{\partial \rho^2} + D_{j2}^* \frac{\partial^2 F_{2,i/2}}{\partial \rho^2} + g_{j,\frac{i}{2}}^8, \\ F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, 0) = 0, F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, 0, t) = w_{j,i/2}^8(\varphi, \psi, \chi, t), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{де } g_{j,0}^8 = 0, g_{j,\frac{i}{2}}^8 = \sum_{s=1}^i \frac{2\rho^{s-1}}{R^s} (D_{j1}^* \frac{\partial F_{1,(i-1)/2}}{\partial \rho} - D_{j2}^* \frac{\partial F_{2,(i-1)/2}}{\partial \rho}),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^8(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^2 k_{js} (C_{s,i/2} + \Pi_{s,i/2} + P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}), \\ \text{якщо } j \text{ парне;} \\ \sum_{s=1}^2 k_{js} (P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}), \\ \text{якщо } j \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$w_{j,n+1}^8(\varphi, \psi, \chi, t) = \sum_{s=1}^2 k_{js} (\Pi_{s,i/2} + P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}).$$

Слід зазначити, що при дослідженні багатокомпонентних процесів зазвичай використовують певні усереднені значення коефіцієнтів дифузії замість матриці коефіцієнтів D_{js} та D_{js}^* .

5.2. Сингулярно збурені процеси багато-компонентного конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах

Процес трикомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в середовищі частинок мікропористої структури, за умови, що дві речовини (C_1, C_2) вступають у хімічну реакцію з утворенням третьої речовини та виділенням тепла описується системою диференціальних рівнянь з відповідними початковими та граничними умовами:

$$\sigma \frac{\partial C_j}{\partial t} = D_j(T) \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C_j}{\partial x} - \tilde{\alpha}_j K(T) C_1 C_2 - S_j^*(T) \left(\frac{\partial U_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (5.15)$$

$$\sigma^* \frac{\partial U_j}{\partial t} = D_j^*(T) \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} \right) - \tilde{\alpha}_j K(T) U_1 U_2, \quad j = \overline{1,3}, \quad (5.16)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial T}{\partial x} + Kf^{**}(C_1, C_2), \quad (5.17)$$

$$C_j(x, t)|_{t=0} = C_j^0(x), \quad U_j(x, r, t)|_{t=0} = U_j^0(x, r), \quad T(x, t)|_{t=0} = T^0(x), \quad (5.18)$$

$$C_j(0, t) = C_{j*}(t), \quad \left. \frac{\partial C_j(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad T(0, t) = T_*(t), \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (5.19)$$

$$U_j(x, r, t)|_{r=R} = k_j \cdot C_j(x, t), \quad \left. \frac{\partial U_j(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.20)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Тут $C_j(x, t)$ – концентрація j -го сорту розчинної речовини у міжчастинковому просторі в точці x в момент часу t , $U_j(x, r, t)$ – концентрація j -го сорту розчинної речовини в точці r мікрочастинки з координатами x в момент часу t , $T(x, t)$ – температура середовища, $K(T)$ – швидкість хімічної реакції, $\tilde{\alpha}_j = \varepsilon \alpha_j$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $D_j(T) = \varepsilon d_j(T)$ та $D_j^*(T) = \varepsilon d_j^*(T)$ відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а функції $S_j^*(T) = \varepsilon S_j(T)$ характеризують вплив внутрішньочастинкового дифузійного перенесення на міжчастинковий, $k_j > 0$ – константи адсорбційної рівноваги для кожного сорту розчинних речовин, $a = \varepsilon \tilde{a}$ – коефіцієнт теплопровідності, K характеризує швидкість підвищення температури середовища внаслідок хімічної реакції. Припускаємо, що мікрочастинки миттєво нагріваються чи охолоджуються, тобто немає зміни температури вздовж радіуса мікропористої частинки. Також вважаємо, що функції швидкості хімічної реакції, впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове та інші, лінійно залежать від температури, тобто

$d_j(T) = d_{j,1}T + d_{j,2}$, $d_j^*(T) = d_{j,1}^*T + d_{j,2}^*$, $S_j(T) = S_{j,1}T + S_{j,2}$,
 $K(T) = K_1T + K_2$. Всі функції, які фігурують в умовах (5.18)–(5.20) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області.

Асимптотичне наближення розв'язку задачі матиме вигляд [24, 117, 141]:

$$\begin{aligned}
 C_j(x, t) = & C_{j,0}(x, t) + \varepsilon C_{j,1}(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_{j,n}(x, t) + \Pi_{j,0}(\xi, t) + \\
 & + \varepsilon \Pi_{j,1}(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{j,n+1}(\xi, t) + R_{j,n}^1(x, t, \varepsilon),
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 U_j(x, r, t) = & U_{j,0}(x, r, t) + \varepsilon U_{j,1}(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n U_{j,n}(x, r, t) + \\
 & + F_{j,0}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} F_{j,i/2}(x, \rho, t) + \dots + \\
 & + \varepsilon^{n+1} F_{j,n+1}(x, \rho, t) + R_{j,n}^2(x, r, t, \varepsilon),
 \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & T_0(x, t) + \varepsilon T_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n T_n(x, t) + P_0(\xi, t) + \\
 & + \varepsilon P_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} P_{n+1}(\xi, t) + R_n^3(x, t, \varepsilon),
 \end{aligned} \quad (5.23)$$

де $C_{j,i}(x, t)$, $U_{j,i}(x, r, t)$, $T_i(x, t)$ ($i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, 3}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_{j,i}(\xi, t)$, $P_i(\xi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x=1$, $F_{j,i/2}(x, \rho, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $r=R$, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\rho = (R - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, $R_{j,n}^1$, $R_{j,n}^2$, R_n^3 – залишкові члени.

Після підстановки рядів (5.21)–(5.23) в задачу (5.15)–(5.20) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , отримано такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial C_{j,i}(x,t)}{\partial x} + \sigma_1 \frac{\partial C_{j,i}(x,t)}{\partial t} = g_{j,i}^1(x,t), \\ C_{j,i}(x,0) = w_{j,i}^1(x), \quad C_{j,i}(0,t) = w_{j,i}^2(t), \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial U_{j,i}(x,r,t)}{\partial t} = g_{j,i}^2(x,r,t), \\ U_{j,i}(x,r,0) = w_{j,i}^3(x,r), \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} + \sigma_1 \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = g_i^3(x,t), \\ T_i(x,0) = w_i^3(x), \quad T_i(0,t) = w_i^4(t), \end{cases} \quad (5.26)$$

де $g_{j,0}^1(x,t) = 0$, $w_{j,0}^1(x) = C_j^0(x)$, $w_{j,0}^2(t) = C_{j*}(t)$, $g_{j,1}^1(x,t) = (d_{j,1}T_0 +$

$$+ d_{j,2}) \frac{\partial^2 C_{j,0}(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) C_{1,0}(x,t) C_{2,0}(x,t) - (S_{j,1} T_0 + S_{j,2}) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} - \frac{\partial F_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_{j,1/2}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R},$$

$$g_{j,i}^1(x,t) = \sum_{s=1}^{i-1} T_s d_{j,1} \frac{\partial^2 C_{j,i-1-s}(x,t)}{\partial x^2} + (d_{j,1} T_0 + d_{j,2}) \frac{\partial^2 C_{j,i-1}(x,t)}{\partial x^2} -$$

$$- \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) \sum_{s=0}^{i-1} C_{1,s}(x,t) C_{2,i-1-s}(x,t) - \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} K_{j,s} T_s C_{1,l}(x,t) \times$$

$$\times C_{2,i-1-s-l}(x,t) - \sum_{s=0}^{i-1} S_{j,s} T_s \left(\frac{\partial U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial F_{j,i-1/2-s}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R} - (S_{j,1} T_0 + S_{j,2}) \left(\frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial F_{j,1/2}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R}, \quad w_{j,i}^1(x) = 0, \quad w_{j,i}^2(t) = 0, \quad g_{j,0}^2(x,r,t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
w_{j,0}^3(x,r) &= U_j^0(x,r), & g_{j,1}^2(x,r,t) &= (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \left(\frac{\partial^2 U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \times \right. \\
&\times \frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} \Big) - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) U_{1,0}(x,r,t) U_{2,0}(x,r,t), & g_{j,i}^2(x,r,t) &= \\
&= (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1}(x,r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1}(x,r,t)}{\partial r} \right) + \sum_{s=0}^{i-1} d_{j,1}^* T_s \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r^2} + \right. \\
&+ \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} \Big) - \alpha_j (K_2 + K_1 T_0) U_{1,i-1}(x,r,t) U_{2,i-1}(x,r,t) - \\
&- \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} T_s K_{j,s} U_{2,i-1-s-l}(x,r,t) U_{1,l}(x,r,t), & w_{j,i}^3(x,r) &= K C_{1,0}(x,t) \times \\
&\times C_{2,0}(x,t), & g_0^3(x,t) &= 0, \quad w_0^3(x) = T^0(x), \quad w_0^4(t) = T_*(t), \\
g_i^3(x,t) &= a \frac{\partial^2 T_{i-1}(x,t)}{\partial x^2} + K f^{**} (C_{1,i}(x,t), C_{2,i}(x,t)), & w_i^3(x) &= 0, \quad w_i^4(t) = 0 \\
&(i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, 3}).
\end{aligned}$$

Розв'язки наведених задач знайдено методом характеристик:

$$C_{j,0}(x,t) = \begin{cases} C_j^0(f^{-1}(\sigma f(x) - t)), & t < \sigma f(x), \\ C_{j*}(t - \sigma f(x)), & t \geq \sigma f(x), \end{cases}$$

$$U_{j,0}(x,r,t) = U_j^0(x,r), \quad U_{j,i}(x,r,t) = \frac{1}{\sigma^*} \int_0^t g_{j,i}^2(x,r,\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$C_{j,i}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_{j,i}^1(f^{-1}(\sigma f(x) - t + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \sigma f(x), \\ \int_0^x \frac{g_{j,i}^1(\tilde{x}, \sigma f(\tilde{x}) + t - \sigma f(x))}{v^2(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq \sigma f(x), \end{cases}$$

$$T_i(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_i^3(f^{-1}(\sigma f(x) - t + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t} + T_0(f^{-1}(\sigma f(x) - t)), \\ t < \sigma f(x), \\ \int_0^x \frac{g_i^3(\tilde{x}, \sigma f(\tilde{x}) + t - \sigma f(x))}{v^2(\tilde{x})} d\tilde{x} + T_*(t - \sigma f(x)), \\ t \geq \sigma f(x), \quad i = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ та

розклавши функцію $v(1 - \xi\varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі $x = 1$, одержано рівняння із відповідними умовами для визначення примежових функцій $\Pi_{j,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$, $j = \overline{1, 3}$) та P_i ($i = \overline{0, n+1}$):

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 P_i(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v(1) \frac{\partial P_i(\xi, t)}{\partial \xi} = g_i^4(\xi, t), \\ \left. \frac{\partial P_i(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} = \mu_i(t), \quad P_i(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \\ \left(d_{j,1} P_i(\xi, t) + d_{j,2} \right) \frac{\partial^2 \Pi_{j,i}(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v(1) \frac{\partial \Pi_{j,i}(\xi, t)}{\partial \xi} = g_{j,i}^5(\xi, t), \\ \left. \frac{\partial \Pi_{j,i}(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} = \nu_{j,i}(t), \quad \Pi_{j,i}(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\text{де } g_0^4(\xi, t) = 0, \quad g_i^4(\xi, t) = \sigma \frac{\partial P_{i-1}(\xi, t)}{\partial t} - \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^{(s)}(1) \xi^s \frac{\partial P_{i-1-s}(\xi, t)}{\partial \xi} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} K \Pi_{(1, i-1-s-l)}(\xi, t) \Pi_{(2, l)}(\xi, t), \quad \mu_i(t) = -\frac{\partial T_{i-1}(1, t)}{\partial \xi} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\mu_{n+1}(t) = 0, \quad g_0^5(\xi, t) = 0, \quad g_{j,1}^5(\xi, t) = \sigma \frac{\partial \Pi_{j,0}(\xi, t)}{\partial t} - d_{j,1} P_1(\xi, t) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial^2 \Pi_{j,0}(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v'(1)\xi \frac{\partial \Pi_{j,0}(\xi, t)}{\partial \xi}, \quad g_{j,i}^5(\xi, t) = \sigma \frac{\partial \Pi_{j,i-1}(\xi, t)}{\partial t} - \sum_{s=0}^{i-1} d_{j,1} P_{s+1}(\xi, t) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \Pi_{j,i-1-s}(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^{(s)}(1) \xi^s \frac{\partial \Pi_{j,i-1-s}(\xi, t)}{\partial \xi} - \\
& - \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} (K_{j,1} P_0 + K_{j,1}) \Pi_{(1,i-1-s-l)}(\xi, t) \Pi_{(2,l)}(\xi, t) \quad (i = \overline{2, n+1}), \\
v_{j,i}(t) &= -\frac{\partial C_{j,i-1}(1, t)}{\partial \xi} \quad (i = \overline{0, n}), \quad v_{j,n+1}(t) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно [14] отримуємо задачі для поправок $F_{j,i/2}(x, \rho, t)$:

$$\begin{cases} \sigma^* \frac{\partial F_{j,i/2}(x, \rho, t)}{\partial t} = (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial^2 F_{j,i/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho^2} + \gamma_{j,i/2}(x, \rho, t), \\ F_{j,i/2}(x, \rho, 0) = 0, F_{j,i/2}(x, 0, t) = \mathcal{G}_{j,i/2}^1(x, t), \left. \frac{\partial F_{j,i/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho} \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{j,0}(x, \rho, t) &= 0, \quad \gamma_{j, \frac{1}{2}}(x, \rho, t) = \frac{2}{R} (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial F_{j,0}(x, \rho, t)}{\partial \rho}, \quad \gamma_{j,1}(x, \rho, t) = \\
&= \frac{2}{R} (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial F_{j,1/2}(x, \rho, t)}{\partial \rho} + d_{j,1}^* T_1 \frac{\partial^2 F_{j,0}(x, \rho, t)}{\partial \rho^2} - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) \times \\
& \times F_{1,0}(x, \rho, t) F_{2,0}(x, \rho, t), \quad \mathcal{G}_{j,i/2}(x, t) = \begin{cases} k(C_{j, \frac{i}{2}}(x, t) + \Pi_{j, \frac{i}{2}}(x, t)), & i \text{ парне}; \\ 0, & i \text{ непарне}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Розв'язок останньої задачі отримано за допомогою числових методів, зокрема методу сіток.

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [28] на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь.

5.3. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих частинок

При моделюванні процесів очищення забруднених технологічних потоків часто доводиться враховувати не лише зміну концентрації забруднюючої речовини, а й самих сорбуючих частинок, які конвективно переносяться в фільтраційному потоці. Нехай домішкова речовина конвективно-дифузійно переноситься разом з адсорбуючими мікропористими частинками. Відповідна модельна сингулярно збурена задача конвективно-адсорбційно-дифузійного масо-перенесення в двопористому середовищі матиме вигляд [19, 113]:

$$\sigma_1 \frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C}{\partial x} - D(Q) \int_0^R \frac{\partial U(x, \tilde{r}, t)}{\partial t} d\tilde{r}, \quad (5.27)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon D_u \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (5.28)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = -\alpha v(x) \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (5.29)$$

$$C(x, 0) = C_0^0(x), \quad C(0, t) = C_*(t), \quad C(l, t) = C^*(t), \quad (5.30)$$

$$U(x, r, 0) = U_0^0(x, r), \quad U(0, r, t) = U_*(r, t),$$

$$U(x, R, t) = kC(x, t), \quad U'_r(x, r, t)|_{r=0} = 0, \quad (5.31)$$

$$Q(x, 0) = Q_0^0(x), \quad Q(0, t) = Q_*(t), \quad Q_x(x, t)|_{x=L} = 0, \quad (5.32)$$

де $C(x, t)$ – концентрація забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в точці з координатою x в момент часу t , $U(x, r, t)$ – концентрація забруднюючої речовини в мікропористих частинках, $Q(x, t)$ – концентрація мікропористих частинок, D_c та D_u – коефіцієнти дифузії відповідно в міжчастинковому просторі та в порах частинок, $D(Q)$ – коефіцієнт впливу внутрішньочастинково-

го переносу на міжчастинковий, який залежить від об'ємної концентрації адсорбуючих частинок, $0 < \alpha \leq 1$, σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовищ, L – довжина фільтра. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (5.30)–(5.32) є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках відповідної області, а також на поверхнях частинок ($U_0^0(x, R) = kC_0^0(x), U_*(R, t) = kC_*(t)$).

Для знаходження концентрації мікропористих частинок $Q(x, t)$ маємо задачу (5.29), (5.32), розв'язок якої знайдено у вигляді:

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q_*((t - \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x)), t \geq \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \\ Q_0^0(f^{-1}(f(x) - \frac{\alpha t}{\sigma_1})), t < \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \end{cases} \quad (5.33)$$

де $f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$ – час проходження виділеної частинки від точки з координатою $\tilde{x} = 0$ до точки $\tilde{x} = x$; f^{-1} – функція, обернена до функції f (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $v^{-1}(\tilde{x})$ – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Розв'язок задач (5.27), (5.28) та (5.30), (5.31) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів:

$$C(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \Pi_0(\xi, t) + \varepsilon \Pi_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, t) + R_n^1(x, t, \varepsilon), \quad (5.33)$$

$$U(x, r, t) = U_0(x, r, t) + \varepsilon U_1(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, r, t) + R_n^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (5.34)$$

де $C_i(x, t)$, $U_i(x, r, t)$, $(i = \overline{0, n})$ – члени відповідних регулярних ча-

стин асимптотики, $\Pi_p(\xi, t)$ ($p = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x = L$, $\xi = (L - x) \cdot \varepsilon^{-1}$ – змінна розтягу, $R_n^1(x, t, \varepsilon)$ та $R_n^2(x, r, t, \varepsilon)$ – залишкові члени.

Підставляючи (5.33)–(5.34) в (5.27)–(5.32), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики для кожного $i = \overline{0, n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, r, t) = D_u \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_i(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_i(x, r, t) \right), \\ \nu(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = g_i(x, t), \\ U_i(x, r, 0) = h_i^1(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial r} U_i(x, 0, t) = 0, \quad U_i(x, R, t) = h_i^2(x, t), \\ C_i(x, 0) = w_i^1(x), \quad C_i(0, t) = w_i^2(t), \end{array} \right. \quad (5.35)$$

$$h_0^1(x, r) = U_0^0(x, r), \quad h_i^1(x, r) = 0 \quad \text{при } i > 0, \quad h_i^2(x, t) = kC_i(x, t) \quad \text{при } i \geq 0;$$

$$g_0(x, t) = -D(Q) \int_0^R \frac{\partial U_0(x, \tilde{r}, t)}{\partial t} d\tilde{r}, \quad w_0^1(x) = C_0^0(x), \quad w_0^2(t) = C_*(t),$$

$$g_i(x, t) = D_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - D(Q) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при}$$

$i > 0$.

Алгоритм чисельного розв'язування поставленої задачі:

1. Введемо рівномірну сітку

$$\left\{ (x_j, r_m, t_j) : x_j = j \cdot \Delta x, r_m = m \cdot \Delta r, t_j = f(x_j); \quad j = \overline{1, N}, m = \overline{1, M} \right\},$$

та зробимо наступне присвоєння: $I = 0$, де I – лічильник;

2. Задаємо початкові умови $C_i(x, t_0) = w_i^1(x)$,

$$U_i(x, r, t_0) = h_i^1(x, r);$$

3. Для кожного $j = \overline{1, N}$:

3.1. Знаходимо $U_i(x, r, t_k)$ методом сіток з допомогою явної різницевої схеми при умові на границі $U_i(x, R, t_k) = h_i^2(x, t_{k-1})$; після цього, за допомогою методу характеристик, знаходимо

$$C_i(x, t_k) = \begin{cases} \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, (t_k - \sigma_1 f(x) + \sigma_1 f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x} + \varphi_i^1(t_k - \sigma_1 f(x)), \\ t_k \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_i(f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)), \tilde{t}) d\tilde{t} + C_i(f^{-1}(f(x) - \frac{t_k}{\sigma_1}), t_{k-1}), \\ t_k < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

де $\varphi_0(t_k) = C_*(t_k)$, $\varphi_i(t_k) = 0$ при $i > 0$.

3.2. Враховуємо зміщення адсорбуючих частинок за рахунок конвективного перенесення:

$$U_i(x, r, t_k) = \begin{cases} U_*(r, t_k - \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x)), t_k \geq \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \\ U_i(f^{-1}(f(x) - \frac{\alpha t_k}{\sigma_1}), r, t_k), t_k < \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x). \end{cases}$$

4. Якщо $I = 0$ то робимо присвоєння $cr_i^1(x, t) = C_i(x, t)$, $ur_i^1(x, r, t) = U_i(x, r, t)$, $I = I + 1$, $N = 2N$, переходимо до пункту 1. Якщо $I \neq 0$, то $cr_i^2(x, t) = C_i(x, t)$, $ur_i^2(x, r, t) = U_i(x, r, t)$;

5. Якщо $\|cr_i^1(x, t) - cr_i^2(x, t)\| < \varepsilon$ і $\|ur_i^1(x, r, t) - ur_i^2(x, r, t)\| < \varepsilon$, то $cr_i^2(x, t)$ – шукана концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, $ur_i^2(x, r, t)$ – концентрація забруднень в мікрочастинках інакше – здійснюємо присвоєння: $cr_i^1(x, t) = cr_i^2(x, t)$, $ur_i^2(x, r, t) = ur_i^1(x, r, t)$, $N = 2N$. Переходимо до пункту 1.

Функції $\Pi(\xi, t) = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi, t)$ призначені для усунення не-

узгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами

$c(x,t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_i(x,t)$ в околі ділянки $x=L$ (виходу фільтраційної

течії). Таким чином повинна виконуватись умова:

$(C(L,t) + \Pi(0,t))|_{x=L} = C^*(t) + O(\varepsilon^n)$. Ці функції знаходимо в ре-

зультаті розв'язку наступних задач:

$$\begin{cases} D_c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + v(L) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p\xi}(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \Pi_p(0, t) = v_p(t), \Pi_p(\xi, t)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\mu_p(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) + v'(L) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-1}(\xi, t) - \frac{1}{2} v''(L) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-2}(\xi, t) + \dots +$$

$$+ (-1)^p v^{(p)}(L) \xi^p \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t) \quad \text{при } p > 0, \quad v_p(t) = -c_p(L, t) \quad \text{при}$$

$$p = \overline{0, n}, \quad \mu_0(\xi, t) = 0, \quad v_{n+1}(t) = 0.$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, t) = D_c \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(L, t) v^{-1}(L) e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi, t) = & v^{-1}(L) e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} (v'(L) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(L, t) (\frac{\xi^2}{2D_c} + \\ & + \frac{\xi}{v(L)} + \frac{D_c}{v^2(L)}) - \sigma_1 v^{-1}(L) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(L, t) (\xi + \frac{D_c}{v(L)})), \end{aligned}$$

$$\Pi_2(\xi, t) = \xi^4 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_1 + \xi^3 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_2 + \xi^2 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_3 + \xi e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_4 + s_5, \quad \text{де}$$

$$s_1 = \frac{(v'(L))^2}{v(L)D_c^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi}, \quad s_2 = \left(\frac{v'(L)}{2v(L)D_c} - \frac{\sigma_1}{3v(L)D_c} \right) \frac{v'(L)}{v(L)D_c} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{\sigma_1 v'(L)}{6v^2(L)D_c^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi \partial t},$$

$$s_3 = \left(\frac{3v'(L)}{v(L)D_c} - 1 \right) \frac{v'(L)}{2v(L)^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{2\sigma_1 v'(L)}{v^3(L)D_c} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2v^3(L)D_c} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2},$$

$$s_4 = \left(-\frac{3v'(L)}{v(L)D_c} - 1\right) \frac{v'(L)}{v(L)^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{5\sigma_1 v'(L)}{v^4(L)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} + \left(\frac{1}{v(L)} - 1\right) \frac{\sigma_1^2}{v^3(L)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2},$$

$$s_5 = -\left(\frac{3}{v(L)} + D_c\right) \frac{v'(L)D_c}{v(L)^4} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi} - \frac{5\sigma_1 v'(L)D_c}{v^5(L)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi} +$$

$$+\left(\frac{1}{v(L)} - 1\right) \frac{\sigma_1^2 D_c}{v^4(L)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2} e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}.$$

5.4. Результати комп'ютерного моделювання

Для проведення комп'ютерного моделювання процесу двокомпонентного масоперенесення забруднюючих речовин в мікропористому середовищі використаний ідеальний фільтраційний фон для області G_z [18] при таких значеннях коефіцієнтів: $\kappa = 0.45 \text{ м} / \text{добу}$, $\sigma_1 = 0.87$, $\sigma_2 = 0.94$, $D_{11} = 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{12} = 10^{-9} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{21} = 10^{-9} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{22} = 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{11}^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{22}^* = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{12}^* = 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $D_{21}^* = 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{добу}$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.95$, а також початкових і граничних умовах: $C_1^0(\varphi, \psi, \chi) = C_2^0(\varphi, \psi, \chi) = 0$, $U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = 0$,

$$C_{1*}(\psi, \chi, t) = \begin{cases} 0.02 \cos(5t + \pi) + 0.02, & t \leq \frac{\pi}{5}, \\ 0.04, & t > \frac{\pi}{5}, \end{cases}$$

$$C_{2*}(\psi, \chi, t) = \begin{cases} 0.017 \cos(10t + \pi) + 0.017, & t \leq \frac{\pi}{10}, \\ 0.034, & t > \frac{\pi}{10}. \end{cases}$$

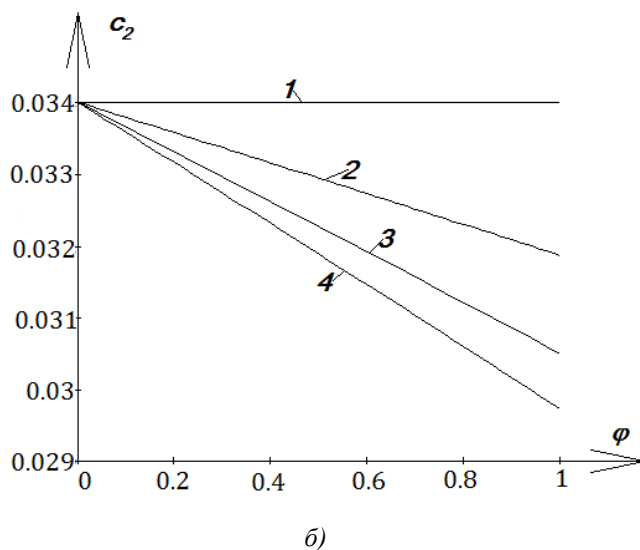
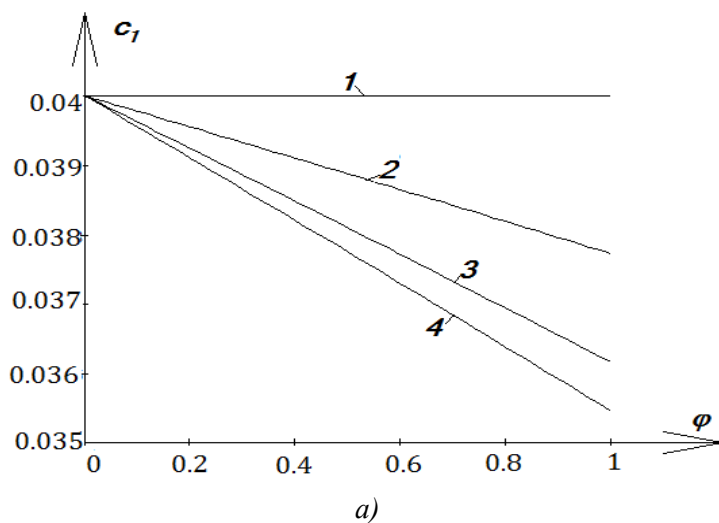


Рис. 5.2. Розподіл концентрації першого (а) та другого(б) сортів забруднюючих речовин вздовж лінії течії $\{\bar{\varphi} = (\varphi, 1, 1), 0 \leq \varphi \leq 1\}$ в момент часу $t = 5$ діб

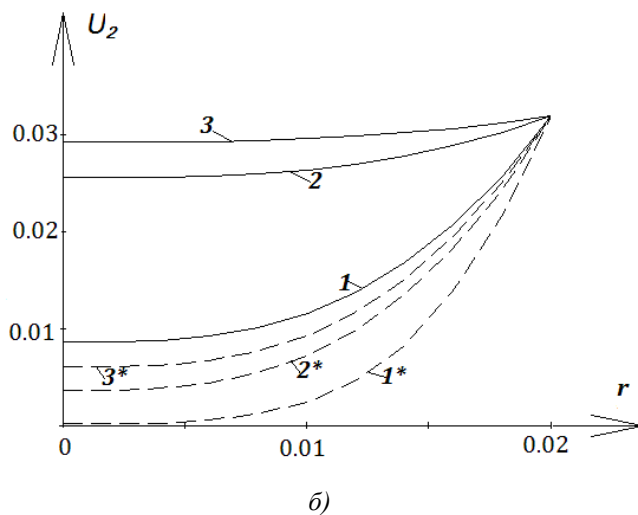
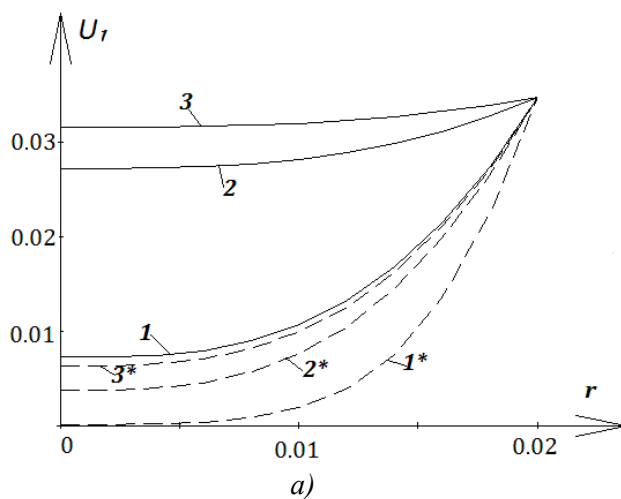


Рис. 5.3. Розподіл концентрацій першого (а) та другого (б) сортів забруднюючих речовин в мікрочастинках

На рис. 5.2 проілюстровано вплив внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове. Криві 1 на рис. 5.2,а і рис. 5.2,б від-

повідують конвективним складовим розв'язку $C_{1,0}(\varphi, \psi, \chi, t)$ і $C_{2,0}(\varphi, \psi, \chi, t)$ відповідно вздовж лінії течії $\{\bar{\varphi} = (\varphi, 1, 1), 0 \leq \varphi \leq 1\}$ в момент часу $t = 5$ діб, криві 2-4 – розв'язку $C_i(\varphi, \psi, \chi, t) = C_{i,0}(\varphi, \psi, \chi, t) + \varepsilon C_{i,1}(\varphi, \psi, \chi, t)$ для першого (а) і другого (б) сортів забруднюючих речовин відповідно в той же момент часу при таких значеннях коефіцієнтів впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове: $S_{11} = S_{22} = 10^{-3} \text{ м / добу}$, $S_{12} = S_{21} = 0 \text{ м / добу}$ (криві 2), $S_{11} = S_{22} = 10^{-3} \text{ м / добу}$, $S_{12} = S_{21} = 10^{-4} \text{ м / добу}$ (криві 3), $S_{11} = S_{22} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м / добу}$, $S_{12} = S_{21} = 10^{-4} \text{ м / добу}$ (криві 4).

На рис. 5.3 зображено накопичення двох сортів забруднюючої речовини в мікрочастинках $U_1(\varphi_1, \psi_1, \chi_1, r, t)$ (а) і $U_2(\varphi_1, \psi_1, \chi_1, r, t)$ (б), де $\varphi_1 = 0.02$, $\psi_1 = 0.1$, $\chi_1 = 0.1$. Криві 1-3 відповідають значенням концентрацій забруднюючих речовин у виділених частинках в моменти часу $t = 1$ доба, $t = 3$ діб, $t = 5$ діб при $D_{11}^* = D_{22}^* = 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{добу}$, а криві 1*-3* при $D_{11}^* = D_{22}^* = 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{добу}$.

Результати комп'ютерного моделювання процесу, описаного в п. 5.2, зображені на рис. 5.4 – рис. 5.6. Обчислення проводились для середовища (фільтра) довжиною $L = 1 \text{ м}$, що складається з мікропористих частинок радіусом $R = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, при наступних параметрах процесу: $\varepsilon = 10^{-5}$, $d_{1,1} = 1 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,2} = 0.85 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,1} = 0.65 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,2} = 0.89 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,1} = 0.7 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,2} = 0.9 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,1}^* = 0.005 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,2}^* = 0.001 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,1}^* = 0.006 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,2}^* = 0.001 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,1}^* = 0.006 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,2}^* = 0.008 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $K_1 = 10 \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{добу} \cdot \text{C}$, $K_2 = 5 \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{добу}$, $v(x) = 1 \text{ м / добу}$, $a = 1 \text{ м}^2 / \text{добу}$,

$$K = 5 \cdot 10^6 \text{ C} \cdot \text{M}^6 / \text{K} \cdot \text{C}^2 \cdot \text{добу}, \quad \sigma = 0.7, \quad \sigma^* = 0.8, \quad k_1 = 0.6, \quad k_2 = 0.4, \\ k_3 = 1, \quad C_j^0(x) = 0 \text{ K} \cdot \text{C} / \text{M}^3, \quad U_j^0(x, r) = 0 \text{ K} \cdot \text{C} / \text{M}^3, \quad T^0(x) = 10^0 \text{ C},$$

$$C_{3*}(t) = 0 \text{ K} \cdot \text{C} / \text{M}^3, \quad C_{1*}(t) = \begin{cases} 0.003(1 + \cos(5t + \pi)), & t \leq \pi/5, \\ 0.006\psi, & t > \pi/5, \end{cases}$$

$$C_{2*}(t) = \begin{cases} 0.0425(1 + \cos(10t + \pi)), & t \leq \pi/10, \\ 0.085\psi, & t > \pi/10. \end{cases}$$

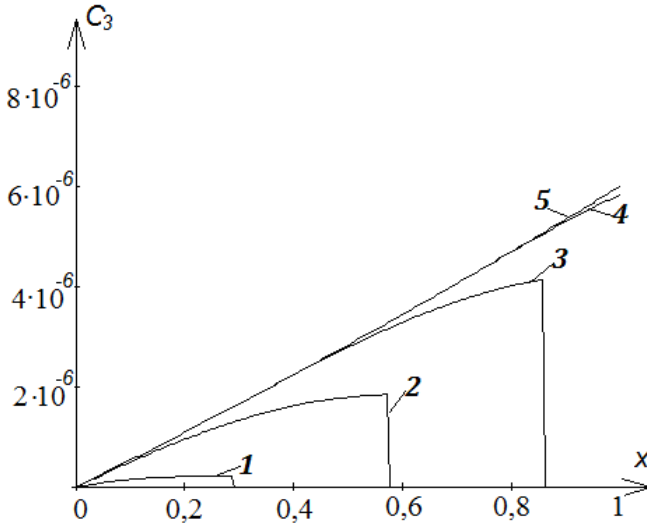


Рис.5.4. Розподіл концентрації речовини, що утворюється в результаті хімічної реакції

На рис. 5.4 зображено розподіл концентрації $C_3(x, t)$ речовини, що утворюється внаслідок реакції між забруднюючими речовинами $C_1(x, t)$ та $C_2(x, t)$ в моменти часу $t = 0.4$ доби, $t = 0.6$ доби, $t = 0.8$ доби, $t = 1$ доба (криві 1-4 відповідно).

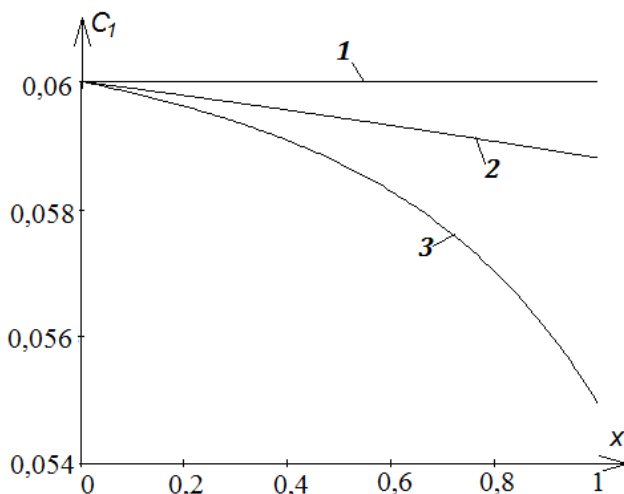


Рис.5.5. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі

На рис. 5.5 показано ефект від хімічної реакції та адсорбції мікрочастинками, а саме наведені графіки розподілу концентрації забруднюючої речовини $C_1(x,t)$ за умови відсутності масообміну (крива 1), за умови протікання хімічної реакції (крива 2) та за умови і протікання реакції і адсорбції мікрочастинками (крива 3).

На рис. 5.6 проілюстровано зростання температури в міжчастинковому середовищі внаслідок хімічної реакції в моменти часу $t=0.2$, $t=0.5$, $t=1$ (криві 1 – 3 відповідно).

Для процесу первинної очистки забрудненого потоку з використання мікрочастинок (п. 5.3) в середовищі довжиною $L=1\text{ м}$, яке в початковий момент часу $t=0\text{ год}$ заповнене адсорбуючими частинками радіусом $R=10^{-5}\text{ м}$ з концентрацією $Q_0^0(x)=0.5\text{ кг/м}^3$ при сталій швидкості конвективного перенесення $v(x)=1\text{ м/год}$. Початковий розподіл забруднення в міжчастинковому середовищі та в

порах частинок відповідно дорівнюють $C_0^0(x) = 0.1$ та

$$U_0^0(x, r) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(1 + 100 \frac{r-R}{R}\right) k C_0^0(x) \quad \text{кг} / \text{м}^3. \text{ На вході в область}$$

$$\text{маємо} \quad U_*(r, t) = U_0^0(x, r) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(1 + 100 \frac{r-R}{R}\right) k C_*(t) \quad \text{кг} / \text{м}^3,$$

$$C_*(t) = 0.1 \quad \text{кг} / \text{м}^3, \quad Q_*(t) = 0.5 \quad \text{кг} / \text{м}^3.$$

Комп'ютерний експеримент

проводився при таких значеннях коефіцієнтів системи (1)-(6):

$$\sigma_1 = 0.8, \quad \sigma_2 = 0.7, \quad D_c = 0.9 \text{ м}^2 / \text{год}, \quad \tilde{D}_q = 0.01 \text{ м}^2 / \text{год}, \quad k = 1, \\ \alpha = 1.$$

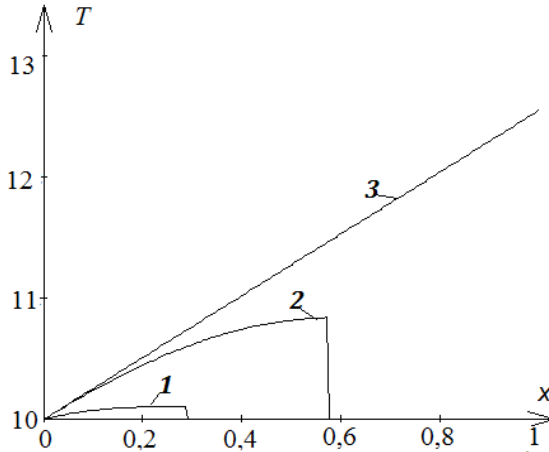


Рис.5.6. Розподіл температури в міжчастинковому просторі

На рис. 5.7. наведено графіки розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в моменти часу

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0.048, \quad t_3 = 0.128, \quad t_4 = 0.256, \quad t_5 = 0.32, \quad t_6 = 0.48, \quad t_7 = 0.8$$

(криві 1–7 відповідно).

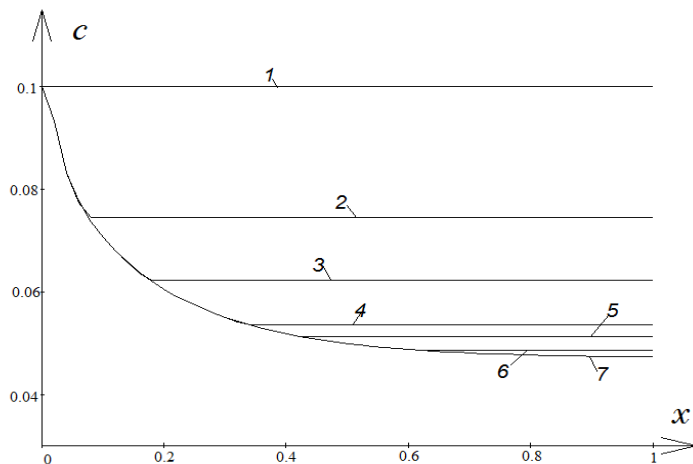


Рис.5.7. Розподіл концентрації забруднюючої речовини $C(x,t)$ у різні моменти часу t .

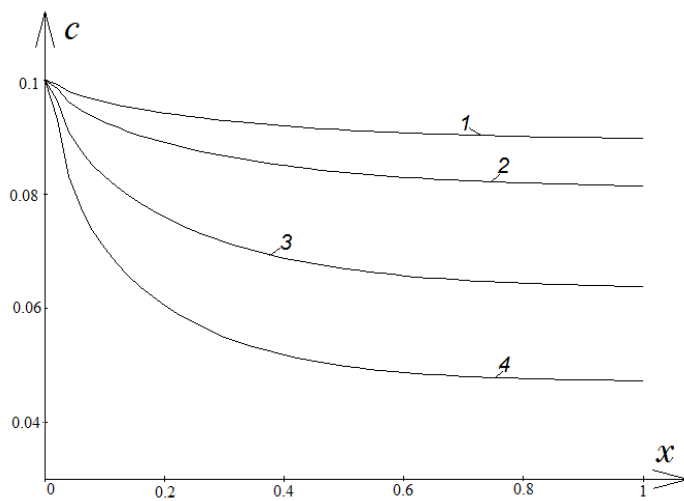


Рис.5.8. Вплив концентрації адсорбуючих мікрочастинок на розподіл забруднюючої речовини $C(x,t)$ при $t=0.8$ год

Як показав експеримент при $t > 0.8$ год процес стабілізується,

тому для подальшого зменшення концентрації забруднюючої речовини в середовищі доцільним є збільшення концентрації адсорбуючих мікрочастинок, що подаються на вході. Залежність розподілу концентрації шкідливих домішок від кількості мікропористих частинок, що адсорбують забруднення зображено на рис. 5.8. Так, крива 1 відображає розподіл $C(x,t)$ при $D(Q)=10^4$, крива 2 – при $D(Q)=2 \cdot 10^4$, крива 3 – при $D(Q)=5 \cdot 10^4$, крива 4 – при $D(Q)=10^5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авер'янов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / С. Ф. Авер'янов. – М.: Колос, 1982. – 237 с.
2. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
4. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.; – Т. 2. – 392 с.
5. Антонцев С. Н. Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах / С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов // Докл. АН СССР. – 1978. – 243. – №3. – С.553–556.
6. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
7. Арсенин В. Я. Математическая физика / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
8. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 303 с.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 451с.
10. Бекман И.Н. Теория диффузии в дисперсионных средах / И. Н. Бекман. – Москва-Нальчик, 2008. – 42с.
11. Берман В.С. Об асимптотическом решении одной

- нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции / В. С. Берман // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.242. – №2. – С.265–267.
12. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
 13. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения задач массопереноса растворимых веществ при плановой фильтрации подземных вод: Дис... канд. физ.– мат. наук: 01.02.05. – К., 1984. – 135 с.
 14. Бомба А. Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28–34.
 15. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 22. – 2013. – С. 36–44.
 16. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С.34.
 17. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів очищення стічних вод від

- двокомпонентного забруднення в різнопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали III Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів АСІТ'2013. – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – С.16–17.
18. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія. / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне: «Асоль», 2014. – 273 с.
19. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці міжнар. наук. конф. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)", присв. 90-річчю від дня народж. акад. В.М. Глушкова. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ (Кацивелі, 2013). – С. 41.
20. Бомба А.Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів багатокомпонентної конвективної дифузії в нанопористих середовищах / А.Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // II науково-технічна конференція "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації" присвячена пам'яті професора Б.О. Попова – Львів ФМІ НАНУ, 2014. – С.13–15.
21. Бомба А. Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів пом'якшення води на натрій катіонітових фільтрах / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (MNM 2015). – Львів, 2015. – С. 43–44.
22. Бомба А. Я. Моделирование нелинейных сингулярно

- возмущенных процессов двухкомпонентного конвективно-диффузионного массопереноса в нанопористой среде / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // *Электронное моделирование*. – 2015. – Т. 37. – №4. – С. 37–52.
23. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів масоперенесення двокомпонентного забруднення в нанопористому багаточаровому середовищі / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // *Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали V Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів АСІТ'2015*. – Тернопіль: ТНЕУ, 2015. – С. 15–16.
24. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів тепломасоперенесення в нанопористих середовищах / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (АРАМС-2015)*. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. – С. 81–82.
25. Бомба А. Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів відбору ґрунтового тепла / А. Я. Бомба, Б. П. Сидорчук, О. В. Присяжнюк // *Вісник ТНТУ. Серія «Математичне моделювання. Математика. Фізика»*. – Тернопіль: ТНТУ, 2014. – Том 74. – № 2. – С. 223–231.
26. Бомба А. Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // *Праці міжнародної наукової конференції «Комп'ютерне моделювання в наукоємких технологіях» (КМНТ-2014)*. – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – С. 41–44.
27. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція – дифузія": монографія / А. Я. Бомба, С. В.

- Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 254 с.
28. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки: монографія / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
29. Бомба А.Я. Обернені сингулярно збудені задачі процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В.Присяжнюк, О. А. Фурсачик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип.7. – С. 3–11.
30. Бомба А. Я. Обернені сингулярно збудені задачі процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь». – Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 13-14 грудня 2012 року. – С.3–4.
31. Бомба А. Я. Обернені сингулярно збудені модельні задачі типу нанофільтрування / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 44–45 .
32. Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збудені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю.Є. Климюк, В. В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. –

2007. – № 2. – С. 105–113.
33. Бомба А. Я. Просторові сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін» при плоскій фільтрації з врахуванням терморезиму / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці XVI Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2013). – Харків-Херсон, 2013. – С. 93–96.
34. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористих багатшарових середовищах з врахуванням терморезиму / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С.34.
35. Бомба А. Я. Сингулярно збурені процеси двокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – К.: КНУ імені Тараса Шевченка, 2014. – С.28–29.
36. Бомба А.Я. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ речовин / А.Я. Бомба, О.В. Присяжнюк, К.О. Гомон // Матеріали доповідей XV Всеукраїнської (X Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2012. – С.123–124.
37. Бондарев Э. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с

- учетом явлений адсорбции / Э. Н. Бондарев, В. Н. Николаевский // Журн. прикл. мат. и техн. физики. – 1962. – №5. – С. 127–134.
38. Будаков Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будаков, А. А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
39. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2005. – 282 с.
40. Булавацкий В.М. Специальные краевые задачи подземной гидродинамики / В. М. Булавацкий. – К. : Наук, думка, 1993. – 132 с.
41. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики распределенного пространственно-временного процесса конвективной диффузии бинарной смеси в условиях массообмена / В. М. Булавацкий // Пробл. упр. и информатики. – 2009. – № 6. – С. 60–70.
42. Булычева О. Н. Асимптотические разложения по малым параметрам решений некоторых задач для параболических уравнений / О. Н. Булычева, А. Б. Васильева, В. Г. Сушко // Журнал вычислит. математ. и матем. физики. –1991. –Т. 31, № – 9. – С. 1328–1337.
43. Булычева О.Н. Асимптотичесие разложения решения сингулярно возмущенного параболического уравнения с кусочно-гладкими коэффициентами. / О. Н. Булычева // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. – Вычисл. матем. и киберн. – 1989. – № 2. – С. 8–14.
44. Булычева О. Н. Построение приближенного решения для одной сингулярно возмущенной параболической задачи с негладким

- вырождением / О. Н. Булычева, В. Г. Сушко // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 1995. – Т. 1, № 4. – С. 881–905.
45. Бурак Я. Й. Про вертикальну міграцію радіонуклідів у ґрунті / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха // *Доп. НАН України*. – 1995. – №11. – С. 34–37.
46. Бутузов В.Ф. Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии / В.Ф. Бутузов // *Докл. АН СССР*. –1978. – №2. – С.268–271.
47. Бутузов В. Ф. Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “Реакция-диффузия-перенос” / В. Ф. Бутузов // В кн.: *Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах*. – Рига: Intelstrv, 1990. – С. 18–26.
48. Бутузов В. Ф. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, К. Р. Шнайдер // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. – 2005. – № 1. – С. 9–13.
49. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
50. Вабищевич П.Н. Численное моделирование / П.Н. Вабищевич. – М. : Изд. МГУ, 1993. – 152 с.
51. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М. : Мир, 1968. – 464 с.
52. Ван-даик М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-даик. – М.: Мир, 1967. – 310 с.
53. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.

54. Васильева А. Б. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 1998. – № 3. – С. 799–851.
55. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967)*. – М.: Наука, 1967. – С. 237–313.
56. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // *Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонижител. и дренаж. систем*. – М.: 1980. – С. 19–24.
57. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // *Успехи матем. наук*. – 1957. – Т. 12 –С. 3–122.
58. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики / Н. О. Вірченко – К. : Вища школа, 1987. – 370 с.
59. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – К.: Препринт АН Украины. Ин-т математики, 1991. – 56 с.
60. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. – 210 с.
61. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.

62. Власюк А. П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі у нелінійному випадку / А. П. Власюк, В. В. Жуковський // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець- Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип.12. – С. 161–172.
63. Воеводин А. Ф. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции / А. Ф. Воеводин, О. Н. Гончарова // Матем. Модели-рование. – 2001. –13. – №5. – С. 90–96.
64. Гера Б. В. Відновлення полів температури та вологості в пористому тілі при неповних даних // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1996. – Вип. 39. – № 1. – С. 66–73.
65. Годунов С. К. Разностные схемы, введение в теорию / С. К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
66. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними / В. М. Гончаренко. – Київ : Вища школа, 1995. – 350 с.
67. Гончаренко В. М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными / В. М. Гончаренко. – Чернівці : Рута, 2000. – 200 с.
68. Готлиф А. А. Прогноз миграции и рассеяния загрязняющих веществ после их сброса в водоносные пласты / А. А. Готлиф, В. Д. Озерова // Изв. ВНИИ гидро-техн., 2001. – 239. – С. 237–245.
69. Дейнека В. С. Ідентифікація кінетичних параметрів адсорбції в неоднорід-них багатоскладових нанопористих середовищах із використанням інтегра-льного підходу оцінювання впливу

- мікропереносу / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТНТУ. – 2011. – Том 16. – № 4. – С.156–167.
70. Дейнека В.С. Математические модели и методы расчета задач с разрыв-ными решениями / В.С.Дейнека, К.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – Киев : Наук. думка, 1995. – 262 с.
71. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С.Дейнека, К.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998 – 614 с.
72. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2001. – 605 с.
73. Доочистка сточных вод на зернистых фильтрах / Н. Н. Гироль, М.Г. Журба, Г. М. Семчук, Б. Н. Якимчук; под общ. ред. Н. Н. Гироля. – К., 1998. – 92 с.
74. Згуровский М.З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В.Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев. – Киев: Наук, думка, 1997. – 367 с.
75. Золотарёв П.П. Динамика адсорбции в неподвижном слое зёрен адсорбента с бидисперсной пористой структурой в случае линейных изотерм адсорбции / П.П. Золотарёв, В.И. Улин // Изв. АН СССР, серия химическая, 1974. –№12. – С. 2858-2861.
76. Золотарёв П.П. Об учёте диффузионного сопротивления входа в микропористые образования в уравнениях кинетики адсорбции для адсорбентов с бидисперсной структурой / П.П. Золотарёв // Изв. АН СССР, серия химическая, 1975. – №1. – С. 193-194.
77. Золотарёв П.П. О вычислении коэффициентов внутренней диффузии и диффузионного сопротивления входа в микропористые образования для гранул адсорбента с

- бипористой структурой / П.П. Золотарёв, В.И. Улин // Изв. АН СССР, серия химическая, 1975. – С. 2367.
78. Иванчов М.І. Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння / М.І. Иванчов, І.Я. Лучко // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 7–10.
79. Иванчов Н.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / Н.И. Иванчов // Сиб. мат. журнал. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 539–550.
80. Ильин А. М. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени / А. М. Ильин, М. А. Меленцов // Труды института математики и механики. – 2005. – Т. 11. – № 1. – С. 97–111.
81. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / А. М. Ильин // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 237–248.
82. Исакова Е. К. Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром / Е. К. Исакова // Матем. сборник. – 1966. – 69 (111). – С. 300–320.
83. Калугин Ю. И. Моделирование удаления железа из воды фильтрованием с учетом изменения фильтрационных свойств среды / Ю. И. Калугин, С. К. Киселев, А. Я. Олейник // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 83–187.
84. Капустина Т. О. Асимптотические решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами / Т. О. Капустина // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, Л/515. – С.662–666.
85. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер

- М.: Наука, 1964. – 487 с.
86. Кідрук М. І. Моделювання та оптимізація систем теплопостачання будівель з використанням відновних джерел енергії. Частина 1: Моделювання теплового режиму будинку / М.І. Кідрук. – Журнал «Нова тема», №4/2007. – С. 13–16.
87. Кізеєв М.Д. Моделювання сингулярно збурених процесів типу «конвекція-дифузія-масообмін» в пористих багатошарових середовищах із врахуванням температурного режиму / Кізеєв М.Д., Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В., Сафоник А.П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 4 (72). – Рівне: НУВГП. – 2015. – С. 49–59.
88. Когановский А.М. Адсорбция органических веществ из воды / А.М. Когановский. – Л.: Химия, 1990. – 256 с.
89. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М.: Мир, 1964. – 350с.
90. Копсон Э.Т. Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон. – М.: Мир, 1966. – 159 с.
91. Костиков А.О. Влияние теплового состояния грунта на эффективность теплонасосной установки с грунтовым теплообменником / А.О. Костиков, Д.Х. Харлампиди // Энергетика: економія, технології, екологія – №1. – 2009. – С.32–40.
92. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
93. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант – М.: Мир, 1964. – 830 с.
94. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д.

- Гильберт – М.: Физматгиз, 1951.– Т.1. – 476 с.
95. Кухарський В. М. Чисельне дослідження задач конвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами / В. М. Кухарський, Я. Г. Савула, М. Ф. Копитко // Волинський математичний вісник. – Вип. 8. – Рівне : РВВ РДГУ, 2001. – С. 86–92.
96. Лаврик В.И. Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена / В.И. Лаврик, Н.А. Никифорович // Препр. АН УССР. Ин-т математики; 82.20. – К.: 1982. – 46 с.
97. Лаврик В. И. Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба // ДАН УССР. – 1980. – №5. – С. 47–51.
98. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1977. – 407 с.
99. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах / М. П. Ленюк, М.Р. Петрик. – Київ: Наукова думка, 2000. – 372 с.
100. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
101. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В.М. Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 209 с.
102. Люстерник Л. А. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр / Л. А. Люстерник, О. А. Олейник // Тр. 3 матем. съезда. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – Т. 2. – С. 158–169.

103. Ляшенко М.Я. Чисельні методи / М.Я. Ляшенко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
104. Ляшко И.И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, И.В.Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – Киев : Наукова думка, 1977. – 288 с.
105. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
106. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
107. Лыков А.В. Теория масопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов.– М.: Гос–энергоиздат, 1963. – 535 с.
108. Лыков А. В. Тепломасообмен: (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
109. Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів з урахуванням техногенного впливу та комплексу фізико-хімічних процесів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.05.02 / Мартинюк Петро Миколайович; Терноп. нац. техн. ун-т ім. Івана Пулюя. – Тернопіль, 2015. – 42 с.
110. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Марчук Г. И. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
111. Маслов В. П. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
112. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы / В. П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.
113. Математичне моделювання процесів первинної очистки

- стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, В. М. Сівак // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2014. – Вип. 1(64). – С. 106–114.
114. Математичне моделювання тепло-вологопереносу в ґрунті та задачі інтерпретації даних дистанційного зондування земної поверхні / Я. С. Підстригач, Б. В. Гера, Є. Я. Чапля та ін. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 8–20.
115. Михалик Д. М. Математичне моделювання дифузійного масопереносу в каталітичних середовищах частинок мікропористої структури : автореф. дис ... канд. техн. наук : 01.05.02 / Дмитро Михайлович Михалик. – Тернопіль, 2011 . – 20 с.
116. Моделювання і прогнозування стану довкілля: підручник, гриф МОН / В. І. Лаврик, В. М. Боголюбов, Л. М. Полетаєва та ін.; за ред. В. І. Лаврика. – К.: Академія, 2010. – 400 с.
117. Моделювання нелінійних сингулярно збурених трикомпонентних процесів типу «дифузія-конвекція-масообмін» в наносередовищі / А. Я. Бомба, М. Р. Петрик, С. Леклерк, О. В. Присяжнюк, Ж. Фресар // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Прикладна математика" – 2015. – №3(120). – С. 107–115.
118. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений / В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1977. – 422с.
119. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
120. Нестеров А.В. Об асимптотике решения системы уравнений

- диффузия-сорбция при малых коэффициентах диффузии. / А.В. Нестеров // Журнал вычислит, математ. и матем. физики. – 1989. – Т. 29. – С. 1318–1330.
121. Нумеров С. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев // Труды ЛПИ. – 1947. – №4. – С. 165–169.
122. Обертас И. А. Моделирование процессов умягчения воды на катионитовых фильтрах / И. А. Обертас, А. Я. Олейник // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 10. – С. 134–138.
123. Олійник О. Я. Деякі результати теоретичних досліджень процесів масо-обміну в пористих середовищах / О. Я. Олійник, Ю. І. Калугін // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки. – 2005. – Вип. 5 – С. 100–112.
124. Олейник А. Я. Математическая модель трансформации и миграции азотных соединений в почве при внесении минеральных азотных удобрений / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Доповіді НАН України. – 1992. – № 4. – С. 142–145.
125. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудо. – М.: Наука, 1984. – 285 с.
126. Пачепский Я. А. Математическое моделирование физико-химических процессов в почвах / Я. А. Пачепский. – М.: Наука, 1990. – 188 с.
127. Петрик М. Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73–83.

128. Петрик М.Р. Математическое моделирование и визуализация системы многоуровневого массопереноса в неоднородных каталитических средах нанопористых частиц / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 54–73.
129. Петрик М.Р. Математическое моделирование нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 47–64.
130. Петрик М. Р. Математическое моделирование массопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой n -интерфейсных взаимодействий / М. Р. Петрик // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 114–134.
131. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень. – Орёл : Издательство ГОУ ВПО “Орловский государственный университет”, Полиграфическая фирма “Картуш”, 2006. – 508 с.
132. Положий Г. М. Численные решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. М. Положий. – К.: Изд-во КГУ, 1982. – 161 с.
133. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 144 с.
134. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
135. Прилепко А. И. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении / А.И. Прилепко, А.И. Костин // Сиб. мат. журнал. –1993. – Т. 34. – № 5. – С.

147–162.

136. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання одного класу процесів конвективного масопереносу в багатозв'язних областях з керуванням / Присяжнюк, Л. М. Крока // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. –2013. – Вип. 9(18). – С. 140–152.
137. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в двопористих багат шарових середовищах / І.М. Присяжнюк, Ю. Є. Климюк, О. В. Присяжнюк // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2014. – №39 (1082) – С. 159–177.
138. Присяжнюк І.М. Математичне моделювання сингулярно-збурених процесів конвективної дифузії за умов неповних даних при наявності невідомих джерел забруднення / І.М. Присяжнюк, О.Я. Трохимчук, О.А. Фурсачик // Волинський математичний вісник. – 2008. – Вип. 5 (14). – С. 210 – 229.
139. Присяжнюк О.В. Асимптотичний метод розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморежим» / О. В.Присяжнюк, І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. –2011. – Вип. 8(17). – С. 140–152.
140. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені задачі типу «фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін» із урахуванням терморежиму / О.В.Присяжнюк // Вісник ТНТУ. Серія «Математичне моделювання. Математика. Фізика». – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Том 73. – № 1. – С. 259–268.
141. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені процеси

- багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористих середовищах з врахуванням терморезиму / О. В. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2014. – Вип. 11(20). – С. 87–98.
142. Присяжнюк О.В. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях / О.В.Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2012. – Вип. 9(18). – С. 162–176.
143. Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах: мо-нографія / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, В. Є. Гончарук, А. Р. Торський. – Львів : Євросвіт, 2010. – 261 с.
144. Рауз Х. Механіка жидкості / Х. Рауз. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
145. Радыгин В. М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. Вузов / В. М. Радыгин, О.В. Голубева. – М.: Высш. школа, 1983. – 160 с.
146. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616с.
147. Савула Я. Г. Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатопарових середовищах з тонкими включеннями / Я.Г. Савула, Л.М. Дяконюк // Вісник ЛНУ ім. Івана Франка. Сер. Прикл. матем. та інформат. – 2000. – Вип. 3. – С.125–131.
148. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
149. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415с.

150. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
151. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, М. И. Гонто. – К.: Наукова думка, 1992.– 279 с.
152. Сергиенко И. В. Высокопродуктивные методы идентификации параметров компетитивной диффузии в неоднородных средах нанопористых частиц / И.В. Сергиенко, М.Р. Петрик, Ж. Фрессар, С. Леклерк // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 4. – С. 44–61.
153. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процес-сов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
154. Сергиенко И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 2009. – 638с.
155. Сівак В. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. О. Шепетько, Ю. Є. Климюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 37–55.
156. Сівак В. М. Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із тришаровою засипкою / В. М. Сівак, Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту

- водн. госп. та природоко-рист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 70–82.
157. Сушко В. Г. О некоторых сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с вырождением / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1989. – 304, №4. – С. 777–780.
158. Сушко В. Г. Об асимптотике по малому параметру для одного квазилинейного параболического уравнения / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1972. – 205, №4. – С. 794–797.
159. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных / А.Н. Тихонов // УМН. – 1952. – Т.7. – Вып. 1 (47). – С. 140–142.
160. Треногин В. А. Об асимптотике решений почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем / В. А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, вып. 1 (9). – С. 163–170.
161. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вішика / В.А. Треногин // УМН. – 1970. – Т.25. – Вып. 4. – С.123–156.
162. Федоткин И. М. Асимптотические методы в задачах тепломасопереноса / И. М. Федоткин, А. М. Айзен. – К.: Вища школа, 1975. – 197 с.
163. Фешенко С. Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фешенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наукова думка, 1966. – 251 с.
164. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. – М.: Недра, 1981. – 304 с.
165. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М.: Химия, 1982. – 320 с.

166. Чапля Є.Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масопереносу / Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 128с.
167. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
168. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 367 с.
169. Шейдегер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды / А. Э. Шейдегер. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 249 с.
170. Шержуков Б. С. Диффузия и неравномерный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промыслов / Б. С. Шержуков // Труды ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.
171. Шестаков В. М. Модели переноса в неоднородных пластах / В. М. Шестаков // Теория и расчеты фильтрации. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 179–187.
172. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. Пер. с англ / Д. Ши. – М.: Мир, 1988г. – 544 с.
173. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
174. Яворський Б. М., Детлаф А. А. Курс фізики, Т.3. – Хвильові процеси. Оптика. Атомна і ядерна фізика. – К.: “Вища школа”, 1973. – 500с.
175. Abood H. J. Singularly Perturbed Problems of Partial Differential Equations in the Critical Case / H. J. Abood // American Journal of Scientific Research. – 2011. – Vol. 56. – No. 4. – P. 482–488.
176. Abood H. J. Asymptotic Integration Solution of the System of Two

- Partial Differential Equations / H. J. Abood // American Journal of Scientific Research. – 2011. – Issue 28. – P. 102–113.
177. Acosta J.L. Porous media: heat and mass transfer, transport and mechanics / J. L. Acosta, A. F. Camacho. – New York: Nova Science Publishers, Inc, 2009. – 255 p.
178. Aronson D. G. Linear parabolic equations containing a small parameter / D. G. Aronson // J. Rational Mech. Anal. – 1956. – № 5. – P. 1003–1014.
179. Asymptotic Methods in Fluid Mechanics: Survey and Recent Advances / Edited by H. Steinruck. – Springer Wien New York, 2010. – 420 p.
180. Baehr H. D. Heat and Mass Transfer / H. D. Baehr, K. Stephan. – Springer, 2011. – 761 p.
181. Barrer R. M. Synthesis of a zeolitic mineral with chabazite-like sorptive properties / R.M. Barrer // Journal of the Chemical Society. – 1948. –P. 127–132.
182. Bear J. Dynamics of fluids in porous media / J. Bear. – New York: American Elsevier publ. co., 1967. – 764 p.
183. Bobisud L. E. Parabolic equations with a small parameter and discontinuous data / L. E. Bobisud // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – 26, № 1. – P. 208–220.
184. Bobisud L. E. The second initial-boundary-value problem for a linear parabolic equation with a small parameter / L. E. Bobisud // Mich. Math. J. – 1968. – № 4. – P. 495–504.
185. Bouillard N. Diffusion with dissolution and precipitation in a porous medium: Mathematical analysis and numerical approximation of a simplified model / N. Bouillard, R. Eymard, R. Herbin, P. Montarnal // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. –2007. –Vol. 41. – No. 6. – P. 975–1000.

186. Bomba A. Modeling of the singularly perturbed processes of heat-mass transfer in nanoporous environments / A. Bomba, I. Prysiazhniuk, O. Prysiazhniuk // III International Conference “Mathematics for Life Sciences”. – Rivne, 2015. – P. 5–6.
187. Bomba A. Mathematical Modeling of Wastewater Treatment From Multicomponent Pollution by Using Microporous Particles/ A. Bomba, Yu. Klymiuk, I. Prysiazhniuk, O. Prysiazhniuk, A. Safonyk // AIP Conf. Proc. 20161773, 040003 (2016). P. 1–11.
188. Butuzov V. F. Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities / V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider. // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – 121, № 1. – P. 1973–2079.
189. Chen N.Y. Molecular Transport and Reaction in Zeolites: Design and Application of Shape Selective Catalysis / N.Y. Chen, T.F. Degnan, M.C. Smith. Chen N.Y. Molecular Transport and Reaction in Zeolites. – New York : V.C.H. Weinheim, 1994. – 309 p.
190. Chung T. J. Computational fluid dynamics / T. J. Chung. – Cambridge : Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
191. Currie I. G. Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I. G. Currie. – New York : Marcel Dekker, Inc., 2003. – 525 p.
192. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
193. Deineka V.S. Identifying kinetic parameters of mass transfer in components of multicomponent heterogeneous nanoporous media of a competitive diffusion system / V.S. Deineka, M.R. Petryk, J. Fraissard // Cybernetics and System Analysis. – New York : Springer, 2011. – Vol. 47. – Number 5. – 705–723.
194. Edvard L. Cussler. Diffusion - mass transfer in fluid systems / Edvard L. Cussler. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2008. – 656 p.

195. Eckhaus W. Asymptotic analysis of singular perturbations / W. Eckhaus. – Amsterdam : North-Holland, 1979. – 286 p.
196. Fluid Transport in Nanoporous Materials / C.W Conner and J.Fraissard, Editors // NATO Science, Serie II: Mathematics, Physics and Chemistry. – 2006. – vol. 29. – 685 p.
197. Haber S. Boundary conditions for Darcy' s flow through porous media / S. Haber, R. Mauri // J. Multiphase Flow. – 1983. –№ 5. – P. 561–574.
198. Hinch E. J. Perturbation Methods / E. J. Hinch. – Cambridge University Press, 1991. – 158 p.
199. Karger J. Diffusion in zeolites and other microporous solids / J. Karger, D. Ruthven. – New York : John Wiley & Sons, 1992. – 605 p.
200. Leclerc S. Competitive diffusion of gases in a zeolite using proton NMR and a slice selection procedure/ S. Leclerc, M. Petryk, D. Canet, J. Fraissard // Catalysis Today, Elsevier B.V. Volume 187, Issue 1, 104-107 (2012).
201. Levy T. Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity / T. Levy // Eur. J. Mech. – 1990. – V. 9. – № 4. – P. 309–327.
202. Mohan K. Kadalbajoo. Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey / Mohan K. Kadalbajoo, Kailash C. Patidar // Applied Mathematics and Computation. – 2003. – Vol 134. – Issues 2–3. – P. 371–429.
203. Petryk M. Mathematical modeling of mass transfer in symmetric heterogeneous and nanoporous media with a system of n -interface interactions / M. Petryk // Cybernetics and System Analysis. – New York : Springer. – 2007. – Vol. 43. – Number 1. – P. 94–111.
204. Petryk M. Mathematical modeling and visualization of gas transport

- in a zeolite bed using a slice selection procedure / M. Petryk, S. Leclerc, D. Canet, J. Fraissard // Diffusion Fundamentals. –2007. – Vol. 4. – 200. – 11.1–11.23.
205. Petryk M. Mathematical modeling and research for diffusion processes in multilayer and nanoporous media, Fluid Transport in Nanoporous Materials / M. Petryk, O. Shabliiy, M. Leniuk, P. Vasylyuk // NATO Science Series, Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – 2006. – Vol. 219. – P. 639–655.
206. Petryk M. Modeling of gas transport in a microporous solid using a slice selection procedure: Application to the diffusion of benzene in ZSM5 / M. Petryk, J. Fraissard, S. Leclerc, D. Canet // Catalysis Today, Elsevier. – 2008 – 139(3). – P. 234–240.
207. Piven' V. F. The theory of two-dimensional processes in inhomogeneous layers with power law of their conductivity variation / V. F. Piven' // J. Appl. Maths. Mechs. – 1997. – Vol. 61. – №4. – P. 577–586.
208. Quirke N. Adsorption and Transport at the Nanoscale / N. Quirke. – Taylor & Francis, 2006. – 186 p.
209. Rolando M.A. Roque-Malherbe. Adsorption and Diffusion in Nanoporous Materials / Rolando M.A. Roque-Malherbe. – Boca Raton: CRC Press, 2012. – 288 p.
210. Ruckenstein E. Sorption by solids with bidisperse pore structures / E. Ruckenstein, A.S. Vaidyanathan, G.R. Youngquist // Chem. Eng. Sci. –V.26. – №9 (1971). – P. 1305-1318.
211. Ruthven D.M. Principles of Adsorption and Adsorption Processes / D.M. Ruthven. – John Wiley, New York, 1984. –194 p.
212. Sergienko I.V. The Mathematical Modelling of Mass-transfer in Media of Nano-porous Structure / I. V. Sergienko, M. R. Petryk, O. M. Khimich, D. Canet, D. M. Mykhalyk, S. Leclerc, J. Fraissard.

- Kyiv: National Academy of Sciences of Ukraine. Institute V.M. Glushkov of Cybernetic, 2014. – 210 p.
213. Shishkin G. I. Difference Methods for Singular Perturbation Problems / G. I. Shishkin, L. P. Shishkina. – Chapman and Hall/CRC, 2008. – 408 p.
214. Wang K. Free Boundary Problems and Asymptotic Behavior of Singularly Perturbed Partial Differential Equations / K. Wang // Springer Theses. – Springer, 2013. – 112 p.
215. White R. B. Asymptotic Analysis of Differential Equations / R. B. White. – London : Imperial College Press, 2010. – 405 p.