

**Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівненський державний гуманітарний університет**

А.Я. Бомба, А.П. Сафоник

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНО-ЗБУРЕНИХ
ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН ВІД
БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЕНЬ**

Монографія

Рівне - 2016

УДК 519.63:532.5

ББК 22.161.68

Б 80

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування (протокол № XX від XX XX.201Xр.) та Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № XX від XX XX.201Xр.)

Рецензенти:

д.т.н., ст.н.сп. **Журавчак Л. М.**, Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

д.т.н., проф. **Бейко І. В.**, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

д.т.н., проф. **Міщенко В. О.**, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Харків

Бомба А.Я., Сафоник А.П.

Б 80 Моделювання нелінійно-збурених процесів очищення рідин від багатоконпонентних забруднень. Монографія. – Рівне: НУВГП, 201X. – 296 с.

ISBN 978-966-327-193-4

Монографію присвячено розробці теорії математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатоконпонентних забруднень за умов ідентифікації параметрів при домінуванні одних складових процесу над іншими, а також методологію розв'язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води.

Для спеціалістів з математичного моделювання та обчислювальних методів, інженерів, аспірантів, магістрантів, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

УДК 519.63:532.5

ББК 22.161.68

ISBN 978-966-327-193-4

© Бомба А.Я., Сафоник А.П., 201X

© Національний університет водного

господарства та природокористування, 201X

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН ШЛЯХОМ ФІЛЬТРУВАННЯ ТА АНАЛІЗ ПОВ'ЯЗАНИХ З НИМИ ПРОБЛЕМ.....	8
1.1. Математичні моделі процесів фільтрування через пористі середовища.....	8
1.2. Розвиток теорії моделювання процесів типу “конвекція-дифузія-тепло-масообмін” для задач з багатокomпонентними складовими.....	27
1.3. Математичне моделювання процесів очищення рідин шляхом фільтрування за умов взаємовпливів та домінування одних складових над іншими.....	44
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЕНЬ З УРАХУВАННЯМ РІЗНОГО РОДУ ЗБУРЕНЬ ТА ЗВОРОТНИХ ВПЛИВІВ.....	51
2.1. Математичне моделювання процесу фільтрування стічних вод від двокомпонентного забруднення з урахуванням зворотного впливу.....	51
2.2. Математичне моделювання процесу фільтрування рідини від багатокomпонентного забруднення з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.....	62
2.3. Просторове узагальнення моделі очищення рідин від багатокomпонентних забруднень.....	69
2.4. Числово-асимптотичне наближення розв’язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень сорбційними фільтрами.....	78

- 2.5. Математичне моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення у n-шарових фільтра..84
- 2.6. Комп'ютерне моделювання процесу очищення води фільтром-освітлювачем із шаром завислого осаду..... 94
- 2.7. Висновки до другого розділу.....106

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТО-ФАЗНИХ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН У БІОЛОГІЧНИХ ФІЛЬТРАХ..... 109

- 3.1. Математичне моделювання процесу прояснення стічної води у прояснювачі.....109
- 3.2. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі.....115
- 3.3. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення стічної води..... 125
- 3.4. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму.....137
- 3.5. Комп'ютерне моделювання процесу біологічного очищення води у регенераторі аеротенка..... 148
- 3.6. Комп'ютерне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод..... 156
- 3.7. Висновки до третього розділу..... 164

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОСАДЖЕННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ДОМШОК МАГНІТНИМИ ФІЛЬТРАМИ..... 166

- 4.1. Математичне моделювання процесу магнітного очищення води від багатокомпонентних феромагнітних забруднень....166

4.2. Моделювання процесу магнітного очищення рідких середовищ від феродомішок у випадку змінної швидкості.....	175
4.3. Математичне моделювання процесів магнітного фільтрування і регенерації та оцінка їх ефективності.....	185
4.4. Просторове узагальнення математичної моделі процесу магнітного очищення рідин від багатокomпонентного забруднення.....	193
4.5. Моделювання процесів фільтрування рідин від багатокomпонентного забруднення в n-шарових магнітних фільтрах	201
4.6. Висновки до четвертого розділу.....	208
РОЗДІЛ 5. ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ РІДИНИ ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ЗАБРУДНЕННЯ.....	210
5.1. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін.....	210
5.2. Ідентифікація коефіцієнта врахування масообмінного збурення при моделюванні процесу магнітного фільтрування..	218
5.3. Моделювання процесу магнітного осадження домішок у рівноциклічній насадці з визначенням масообмінного коефіцієнта.....	222
5.4. Моделювання процесу фільтрування рідин від багатокomпонентного забруднення в n-шаровому магнітному фільтрі в умовах ідентифікації масообмінного коефіцієнта	230
5.5. Просторова задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокomпонентного забруднення.....	237
5.6. Висновки до п'ятого розділу.....	248
ВИСНОВКИ.....	250
ЛІТЕРАТУРА.....	254

ПЕРЕДМОВА

Процеси очищення рідин шляхом фільтрування від багатокомпонентних сумішей широко поширені в багатьох галузях промисловості, причому очищення через пористі середовища є одним з найбільш складних технологічних процесів. Складність опису таких процесів полягає у тому, що домішки відрізняються як за геометрією, так і за своїми фізико-хімічними властивостями, причому можуть взаємодіяти між собою і перетворюватися з одного виду в інший. Процес захоплення домішкових частинок фільтром і відриву частинок осаду також залежить від багатьох факторів, таких як: швидкість течії, реагентів, які прискорюють або сповільнюють агрегацію домішкових частинок та інше.

Незважаючи на те, що в теорії рідкого стану на сьогоднішній день досягнуті значні успіхи, теоретичні результати в області масопереносу для багатокомпонентних рідких сумішей далекі від закінченості, що пов'язане з математичними складностями точного розв'язку багаточастинної задачі. Перевірка ж основних принципів, що закладаються в теорію, за допомогою фізичних експериментів, зазвичай, є утруднена, оскільки вони є досить вартісними і в них переважно є вплив сторонніх ефектів, що лише посилює роль математичного моделювання.

Математичний опис цих складних масообмінних процесів має емпіричний характер і не містить моделі для розрахунків фізичних властивостей і умов фазової рівноваги багатокомпонентних твердо-рідинних систем, моделі багатокомпонентної масопередачі в рідкій фазі, а також моделі опису гідродинаміки руху фаз. Існуючі математичні моделі процесів розподілу багатокомпонентних сумішей не дають можливості досліджувати вплив багатокомпонентного масопереносу та враховувати його при проектуванні та реконструкції очисних споруд.

Виходячи з проблем моделювання, дослідження та оптимізації параметрів процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень монографію присвячено розвиненню теорії математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень з урахуванням ідентифікації параметрів при домінуванні одних складових процесу над іншими, а також розробці методології розв'язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води. Зокрема, побудові та дослідженню нових моделей процесів очищення рідин від багатокomпонентного забруднення у одно-, дво- та багаточарових сорбційних фільтрах, фільтрах-прояснювачах із шаром завислого осаду, магнітних та біологічних фільтрах тощо.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН ШЛЯХОМ ФІЛЬТРУВАННЯ ТА АНАЛІЗ ПОВ'ЯЗАНИХ З НИМИ ПРОБЛЕМ

В цьому розділі здійснено огляд та аналіз математичних моделей, що описують процеси очищення рідин від багатокомпонентних забруднень. Наведено найбільш відомі математичні моделі теорії очищення рідин шляхом фільтрування. Проаналізовано відомі підходи та методи до моделювання процесів очищення рідини від багатокомпонентного забруднення шляхом фільтрування, розглянуто основні феноменологічні моделі процесів фільтрування у пористому середовищі. Здійснено огляд наукової літератури, присвяченої процесам фільтрування рідин, моделюванню процесів очищення рідин шляхом фільтрування, наведено загальну методологію розв'язання задач теорії фільтрування, зокрема, методику розв'язання сингулярно збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін”. Обґрунтовано доцільність розроблення математичних моделей, визначення невідомих параметрів процесу очищення, а на їх основі автоматизованих систем керування очисними спорудами. Розділ завершується постановкою задачі дисертаційної роботи.

1.1. Математичні моделі процесів фільтрування через пористі середовища

Фільтрування води при водопідготовці є складним гідродинамічним процесом, що представляє собою рух двофазної системи (суспензії) через порувану фільтруючу перегородку (фільтруючу засипку), яка повинна затримати тверду фазу. У залежності від характеристики засипки в ній утворюються порові канали (рис. 1.1), стінками яких є зерна

засипки. При фільтруванні через щільні засипки, канали вважають досить стаціонарними і практично з постійним початковим перетином [206, 210], однак на практиці пористість змінюється в процесі фільтрування. Часточки суспензії, що підходять до засипки разом з водою, можуть мати розмір менше і більше перетину каналу. Великі часточки не можуть пройти в поровий канал, заклинюються на вході в канал. Затримка відбувається, по суті, чисто механічна.

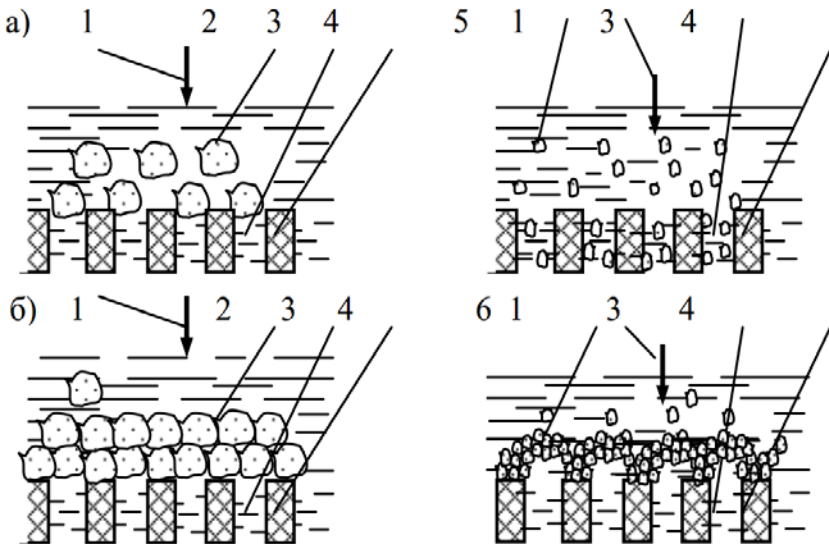


Рис. 1.1. Схема підходу забруднень до зернистої засипки 1 – направлення гідравлічного потоку; 2 – великі часточки; 3 – поровий канал; 4 – стінки порового каналу; 5 – дрібні часточки; 6 – місток; а) – у початковий момент; б) – у кінцевий момент

Нові порції часточок заклинюються на раніше затриманих окремими шарами. Фільтрування називається поверхневим або плівковим. Більш дрібні часточки можуть пройти усередину каналу. Однак, при розмірі часточок у 4...6 разів менше ніж діаметр каналу, вони можуть утворювати

місток над входом у канал і, надалі, цей місток буде затримувати нові порції часточок. Процес поліпшується при наявності полідисперсних часточок - великих і дрібних. У цьому випадку також по суті відбувається проста механічна затримка часточок і усе залежить тільки від розміру часточок. Порушення гідравлічного режиму, у першу чергу збільшення швидкості, може зруйнувати місток і часточки будуть проскакувати усередину каналу та проходити через засипку. При стабілізації потоку місток знову утвориться, але занадто велика швидкість потоку не дасть можливості утворитися містку.

Описані процеси характерні для безреагентного способу очищення води або при знезалізненні в умовах використання дуже дрібної засипки і потраплянні сформованих пластівців гідроксиду заліза, коли розміри часточок порівняні з розмірами пор [206, 210]. При цьому дуже дрібні часточки можуть проскакувати через пори. Набагато більш складний процес буде при наявності дуже дрібних часточок – розмір їх значно менше розмірів порового каналу. У загальному випадку порові канали розташовані довільно, мають неправильну форму і змінний перетин (рис. 1.2), мають велику кількість поворотів, можуть з'єднуватися і розділятися.

Внаслідок неоднорідності і особливостей засипки, гідравлічного сортування зерен у процесі промивки поровий канал за ходом фільтраційного потоку може розширюватися чи звужуватися. Більш однорідна засипка має поровий канал з меншим ступенем розширення чи звуження. При коефіцієнті неоднорідності засипки до 1,2 канал можна вважати постійного перетину, а розмір буде залежати від розміру зерен засипки. У важких засипках дрібні зерна накопичуються зверху і чим глибше входять в засипку, тим крупніші будуть зерна засипки. У плаваючих засипках усе навпаки: більш дрібні зерна (гранули) знизу, а великі зверху. Поровий канал звужується донизу.

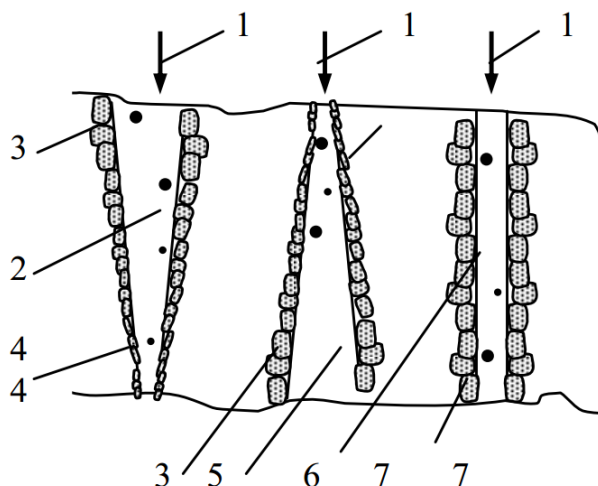


Рис. 1.2. Схема порових каналів зернистої засипки 1 – напрямком потоку води; 2 – звужений канал; 3 – крупні зерна засипки; 4 – дрібні зерна засипки; 5 – розширений канал; 6 – канал достатньо постійного перетину; 7 – відносно однорідні зерна; •, · – крупні і дрібні частинки зависі

У процесі фільтрування затримувані найбільш великі часточки можуть також затримуватися на поверхні зернистої засипки, утворюючи при цьому зводи над кожною порою, і ці зводи, надалі, також забезпечують затримку нових порцій часточок і необхідний ступінь очищення. Однак, цей процес не слід вважати характерним для затримки дуже дрібних часток і навіть можна вважати небажаним. Часточки повинні надходити в пори, затримуватися на їхній поверхні (зернах засипки) і поступово забивати пори (рис. 1.3). Тобто фільтрування є об'ємним. При цьому поровий канал поступово забивається забрудненнями і стає меншого перетину.

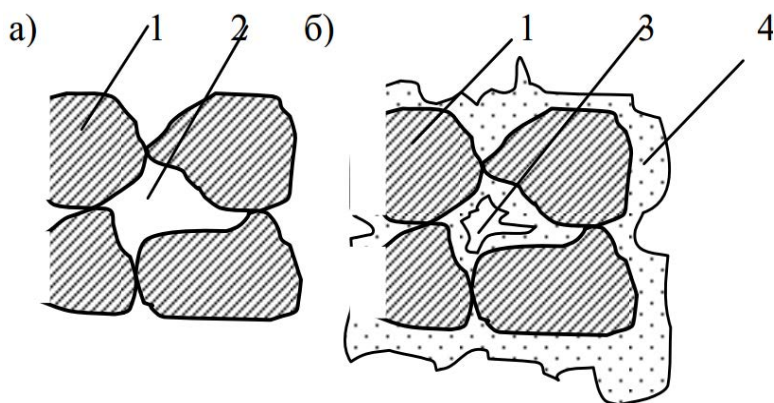


Рис.1.3. Схема об'ємного затримання забруднень в зернистій засипці 1 – зерна; 2 – чистий канал; 3 – забруднений канал; 4 – забруднення

Полідисперсність часточок може приводити до переходу від одного випадку затримки до іншого або до участі двох випадків. Крім того, важливим елементом є форма порового каналу. При звуженому поровому каналі більш великі часточки можуть затримуватись в більшому перетині каналу, а більш дрібні – у меншому перетині. Таке співвідношення можливо виконується тільки на початку фільтроциклу, а по мірі накопичення забруднень це положення може зміщуватись в той чи інший бік. Це сприяє більш повному наповненню засипки забрудненнями і, в окремих випадках, до більш високого ступеня очищення води. Тому фільтрування в напрямку звуження каналу варто вважати більш ефективним за технологічними показниками. При використанні важких засипок краще фільтрувати за цією ознакою знизу догори, а що плавають – зверху донизу. Фільтрування в напрямку розширення каналу приводить до того, що забруднення накопичуються тільки на початку каналу і не вся товщина засипки бере участь в очищенні води.

Фільтрування через пористі середовища є одним з найбільш ефективних способів розв'язання різноманітних проблем, пов'язаних із вилученням з рідин завислих та колоїдних частинок, а також домішок молекулярного та іонного ступеня дисперсності. Проте досягти помітного прогресу в даному напрямку суто емпіричним шляхом чи в межах існуючих гранично ідеалізованих математичних моделей із залученням тільки елементарних теоретичних методів неможливо. Тому, всупереч усталеній практиці класифікація фільтрів повинна здійснюватися не тільки за вторинними ознаками (швидкість фільтрування, використаний фільтруючий матеріал тощо), а насамперед за законами їх функціонування. Це дозволить перейти на загальнозрозумілу мову для усіх суміжних дисциплін і застосовувати фундаментальні методи аналізу. Крім того, виключить досить поширені ситуації, коли окремі дослідники мають свої математичні моделі і свій відповідний експеримент або ситуації, коли для опису одних і тих самих процесів фільтрування застосовуються різні математичні моделі.

Перші математичні моделі процесів фільтрування через пористі середовища виникли при дослідженні фільтраційних властивостей ґрунтів. Найбільш відомі з них – моделі Ізбаша [121] і Патрашева [217, 218]. С.В. Ізбаш [121] отримав наступне рівняння, що пов'язує коефіцієнт фільтрації k з пористістю σ

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{k}{\sigma} \left[\left(1 - A\psi \frac{\sigma}{k} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + A\psi \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right], \quad (1.1)$$

де $A = const$, $\psi = \frac{\Delta}{8\pi\mu}$, μ – динамічна в'язкість, Δ – вага одиниці об'єму рідини, h – втрати напору.

Для розв'язання рівняння (1.1) повинна бути відома залежність $\sigma = f(k)$, яка згідно досліджень наведених у

роботі [121] вважалась степеневою, а саме: $\sigma = bk^n$, де b і n – сталі, значення яких залежать від властивостей ґрунтів. Також припускалось, що швидкість фільтрації $v = -k \frac{\partial h}{\partial x}$ не залежить від x . Згідно цих припущень, розв’язок даного рівняння дозволив отримати дуже ідеалізовану картину замулювання ґрунтів. Крім того, модель Ізбаша не дає змогу безпосередньо розрахувати процес освітлення суспензій, в цьому полягає її основний недолік, завдяки якому вона не дістала подальшого розвитку. У даному дисертаційному дослідженні розроблено підхід знаходження пористості σ , яка залежить від концентрації забруднення, що підтверджується численними експериментальними дослідженнями.

А.Н. Патрашев у роботі [217] описував процес замулювання ґрунтових кістяків замкнутою системою диференціальних рівнянь, яка приводилась до Якобієвої системи. Виходячи з неї, встановлювалася попарна залежність між всіма функціями, що характеризують даний процес як функціями однієї змінної – часу і шляху просування потоку відповідно. На підставі знайдених залежностей були отримані рівняння, які дозволили встановити вигляд кожної з цих функцій. Крім того, в [218] було визначено час, на протязі якого відбувається замулення ґрунтових кістяків (аналог часу захисної дії фільтрів). Тим не менш, не зважаючи на цілком задовільне експериментальне підтвердження, на даний час модель Патрашева в теорії фільтрування не використовується. Це пояснюється наявністю більш простих і адекватних математичних моделей.

Критеріальний підхід для опису процесів фільтрування використовувався братами Мацкрле [143, 144, 254, 255]. Вони виходили з наступного рівняння

$$f(Ma, Ho, Fr, Eu, Re) = 0, \quad (1.2)$$

де Ma, Ho, Fr, Eu, Re – критерії подібності Мацкрле, гомохронності, Фруда, Ейлера і Рейнольдса відповідно. Критерій подібності Ma характеризує адгезію домішкових частинок до поверхні завантаження. В роботі [179, 180] його аналітичний вираз був отриманий з рівності сили притягання Ван-дер-Ваальса і сили опору, обумовленої в'язкістю середовища, в припущенні, що густина домішкових частинок близька до густини води

$$Ma = \frac{A}{\mu v_n H^2}.$$

Тут $A = const, \mu$ – динамічна в'язкість рідини, H – відстань між домішковою частинкою і поверхнею завантаження, v_n – швидкість рідини в напрямку нормалі до поверхні.

При стаціонарному фільтруванні в ізотермічних умовах

$$Ho = 0, Fr = 0, Eu = f(Re)$$

і рівняння (1.2) спрощується

$$Ma = f(Re). \quad (1.3)$$

Вид (1.3) залежить від конкретних умов фільтрування [328]. Так у роботах [329] було відповідно отримано

$$Ma = 43.1 Re^{1.35}, \quad Ma = Re^{2.16}.$$

З критеріального рівняння (1.3) авторами запропоновано спосіб знаходження концентрація суспензії на виході фільтруючого шару певної довжини.

Принциповий недолік теорії Мацкрле полягає в тому, що в ній не враховується дія гравітаційних та інерційних сил, тиску, гідродинамічних сил та інших факторів, які визначають ефективність процесу фільтрування.

Експериментально встановлено, що в процесі фільтрування води можуть утворюватися нестійкі накопичення бруду, які руйнуються під дією гідродинамічних сил потоку. Рівняння балансу, використане В.В. Кленовим [137] для опису цього явища має вигляд

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \ln \sigma}{\partial^2 x} (k_1 C_0 v), \quad (1.4)$$

де $\sigma(x, t)$ – насиченість завантаження осадком (об’єм осаду на одиницю об’єму завантаження), C_0 – концентрація бруду у вихідній воді, k_1 – масообмінний коефіцієнт.

Його розв’язок, знайдений за допомогою методу відокремлення змінних, дозволив встановити залежність коефіцієнту брудомісткості від крупності зерен піску і величини фільтраційної витрати. Також було показано, що вплив швидкості фільтрування на характер розподілу бруду у завантаженні знижується при її зростанні. Для розподілу концентрації бруду у фільтрі був отриманий закон обернено пропорційної залежності від x .

Проте рівняння балансу (1.4) і дифузійне рівняння [137]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D(\rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 x}, \quad (1.5)$$

в якому кінетика масопереносу враховується коефіцієнтом дифузії D , в літературі не використовується. Це пов’язано з їх недостатньою обґрунтованістю. Таке виведення рівняння (1.5) спирається на формальний опис концентраційних кривих на виході фільтру.

Аналогічний підхід використано в роботі [173]. Тут концентрація на виході фільтру задавалась емпірично, як функція концентрації на його вході і швидкості фільтрування. На жаль область застосовності цієї залежності не була достатньо визначена, що не дозволяє її використовувати.

На підставі проведених експериментальних досліджень, а також застосування теорії розмірностей і рівняння руху рідини А. Деб запропонував наступну систему рівнянь [217, 218], яка моделює процес освітлення води за допомогою піщаного фільтру

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda_m c, \\ v \frac{\partial c}{\partial x} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\varepsilon_0 - \sigma) \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

де λ_m – модифікований коефіцієнт фільтрування, $\sigma(x, t)$ – насиченість завантаження осадам, $\varepsilon_0, \varepsilon$ – вихідна і поточна пористість завантаження, $a = const$.

Дана модель також не дістала широкого розповсюдження в літературі, зокрема тому, що для визначення залежності λ_m у відповідності з виразом

$$\lambda_m = B \left(\frac{x}{\varepsilon - \sigma} \right)^A$$

необхідно проведення спеціальних експериментів з метою знаходження сталих A і B .

Теорія процесів фільтрування, згідно з якою їх еволюція визначається зміною геометрії завантаження і розподілу швидкостей у порах, запропонована Айвсом [319-324]. Для фільтрів з однорідним зернистим завантаженням ним було отримано наступне співвідношення

$$\frac{k}{k_0} = \left(1 + \frac{a\sigma}{\varepsilon_0} \right)^l \left(1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^n \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right)^m, \quad (1.7)$$

де k_0, k – початкове і поточне значення коефіцієнту фільтрації; σ – насиченість завантаження осадам; ε_0 – початкова пористість фільтру; a, l, n, m – емпіричні сталі.

Співвідношення (1.7) є достатньо загальним, так як при відповідному виборі l, n і m воно виконується у всіх попередніх теоріях, за виключенням теорії Д.М. Мінца. Проведені Айвсом разом з Шольї і Айсоном дослідження дозволили з'ясувати з точністю до сталих, характери властивостей вихідних домішкових частинок, структуру

функцій, які фігурують в (1.7), і сталих як функцій від v і діаметра зерен завантаження d [318]. Тим не менш на даний час теорія Айвса витіснена більш адекватною реальним процесам теорією Д.М. Мінца. А саме, досвід теорії фільтрування переконливо показав перевагу математичних моделей, в яких закон збереження маси записаний у вигляді окремого рівняння. Вказані моделі узагальнено можна подати у вигляді наступної системи рівнянь [183, 184]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(\rho)c - \varphi(\rho), \quad (1.9)$$

за умов

$$c|_{x=0} = c_0 = const, \quad \rho|_{t=0} = 0. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.8) є рівнянням матеріального балансу, тобто виражає закон збереження маси, а (1.9) – це рівняння кінетики, яке відображає той факт, що швидкість росту щільності

насичення завантаження осадом $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ дорівнює різниці мас

захоплених за одиницю часу домішкових частинок $\beta(\rho)c$ і відірваних за той же час частинок осаду $\varphi(\rho)$. Пропорційність маси захоплених домішкових частинок їх концентрації c вперше вказано в [325]. Пізніше це було багаторазово підтверджено експериментально.

Вивченням процесів фільтрування через пористі середовища, а також факторів, які впливають на хід процесу фільтрування, також займалися такі вітчизняні та зарубіжні вчені: О.Я. Олійник, А.М. Тугай, В.Л. Поляков, П.О. Грабовський, В.О. Орлов, В.М. Сівак, І.І. Демчик, L. Song, J.E. Saiers, J. Skopp, T. Baumann, R.E. Martin, R. Rajagopalan та ін. [7, 91-101, 142-143, 194-205, 221-233, 312-313, 331, 335, 343, 346, 347].

Зауважимо, що до таких задач є близькими задачі типу “фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін” в пористих середовищах. Перші спроби теоретичного дослідження таких (головним чином одновимірних) процесів були зроблені, зокрема, у роботах І.Г. Богуського, А.Н. Патрашева, С.Н. Нумерова, Н.Н. Веригіна, Д.Ф. Шульгіна, В.Н. Ніколаєвського, Б.С. Шержукова та інших [1, 5, 60, 61, 87-88, 190, 217-218]. Використання ідеї переходу у рівнянні конвективної дифузії до координат області комплексного потенціалу разом з аналітичними або числово-аналітичними методами дозволило В.І. Лаврику та його учням [149-163] отримати точні або наближені аналітичні розв’язки типових двохвимірних задач масопереносу при плоско-вертикальній, плановій, усталеній або квазіусталеній фільтрації, що виникають при дослідженні процесів забруднення або засолення ґрунтових вод. Розробці різних методів числового та числово-аналітичного розв’язання такого типу одновимірних і двохвимірних задач волого- і солепереносу, розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі та суміжних їм процесам присвячені роботи І.І. Ляшка, І.В. Сергієнка, В.В. Скопечького, В.С. Дейнеки, В.М. Булавацького, Я.Й. Бурака, Є.Я. Чаплі, О.Ю. Чернухи, Я.Г. Савули, Г.А. Шинкаренка та ін. [26, 63-66, 92, 104-107, 115, 119, 170-173, 234-235, 270, 287]. Нелінійні залежності градієнтів напору та швидкості фільтрації розглядалися А.П. Власюком, П.М. Мартинюком (див., напр., [89, 90]) при моделюванні процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням зворотного впливу концентрації сольового розчину.

Виявляється, що при моделюванні процесів фільтрування їх компоненти (конвекція, дифузія, масообмін; різні співвідношення між параметрами) входять не рівнозначно одні із них переважають над іншими. Диференціальні рівняння, що описують такі процеси як

правило містять малі параметри, а відповідні задачі доцільно розв'язувати з допомогою методів теорії збурень (асимптотичних методів, методів малого параметру тощо).

А.Я. Бомбою розроблені методології збурень, моделювання, дослідження та оптимізації параметрів систем типу “конвекція-масообмін-дифузія” в схильних до деформації середовищах за умов взаємовпливу визначальних факторів процесу на характеристики середовища та врахування впливу зміни вільної границі “провідного” середовища на потік, додаткових джерел та явищ на основний процес [11-13, 15, 26-30, 33].

Одним з перспективних методів опису процесів фільтрування є статистичне моделювання. Це пов'язане з тим, що поведінка ансамблю домішкових частинок у завантаженні фільтру підкоряється стохастичним законам. Разом з тим, відомі на даний час статистичні моделі не чисельні і, фактично не пов'язані між собою, а також з основними феноменологічними моделями. Тому доцільно розглянути найбільш значні з них з позицій можливого узагальнення використаного методу опису.

Ймовірнісна модель процесу фільтрування низькоконцентрованих суспензій з високодисперсною твердою фазою запропонована в [96]. Задача моделювання зводилась до наступного. Є n горизонтальних моношарів нестисливої допоміжної речовини, що знаходяться на деякій відстані один від одного. Визначити ймовірність захвату механічних домішок суспензії кожним з елементарних шарів. Вважалось, що частинки при своєму русі не впливають одна на одну, а ймовірність проходження частинки через елементарний фільтруючий шар дорівнює відношенню сумарної площі пор до поверхні фільтрування. Ці припущення дозволили використати у даному випадку схему Бернуллі [88]. Під подіями A_i ($i = 1, \dots, n$) розумілося проходження домішковою частинкою i шарів. Ці події вважалися

незалежними. Останнє справедливо при малій концентрації домішкових частинок у суспензії і на початковому етапі. Тому, ймовірність того, що при фільтруванні низькоконцентрованих суспензій, що містить M_1 частинок твердої фази, k частинок попаде в фільтрат визначалось за відомою формулою [88]

$$P_{k,M_1} = C_{M_1}^k (1 - p_1^n)^{M_1 - k} p_1^{nk} \quad (k = 0, 1, \dots, M_1), \quad (1.11)$$

де $C_{M_1}^k$ – число комбінацій з M_1 по k .

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини μ_n , рівної числу частинок, які пройшли через n елементарних шарів і розподілених за законом (1.11) також відомі $M\mu_n = M_1 p_1^n$, $D\mu_n = M_1 p_1^n (1 - p_1^n)$.

Так як звичайно величина M_1 достатньо велика, то згідно теореми Муавра-Лапласа, ймовірність того, що число частинок, які пройшли через n шарів лежить в інтервалі (a, b)

$$\text{дорівнює } P(a < \mu_n < b) \approx \frac{1}{2\pi} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Авторами [164-167] було отримано експериментальне підтвердження вказаних теоретичних висновків.

Дослідження процесу фільтрування з застосуванням допоміжних речовин (ДР) як марківського процесу типу народження-загибелі проведено в [164]. І.С. Лейчик пояснює можливість такого підходу тим, що ефективність захвату частинок твердої фази суспензії шаром у будь-який момент часу t залежить тільки від кількості частинок, захоплених шаром на цей момент, і не залежить від того, яким чином відбувався процес захвату. Осад моделювався як система з n елементарних шарів, що закупорюються частинками твердої фази суспензії. На підставі теореми про умовні ймовірності була записана рівність [165-166]:

$$P_{t+\Delta t}(E_n) = P_t(E_{n-1})P(E_{n-1,n}) + P_t(E_{n+1})P(E_{n+1,n}) + P_t(E_n)P(E_{n,n}), \quad (1.12)$$

де $P_t(E_i)$ – ймовірність перебування системи в момент t у стані E_i ($i = n-1, n, n+1$), $P_t(E_{i,j})$ – ймовірність переходу системи із стану i в стан j за час Δt , тобто ймовірності захвату, утримання і зриву частинок за час Δt відповідно. Ймовірність зриву раніше затриманих елементарним шаром частинок твердої фази суспензії приймалася пропорційною кількості затриманих частинок n . Спрямовуючи Δt до нуля і використовуючи вирази для $P(E_{n-1,n}), P(E_{n+1,n}), P(E_{n,n})$, І.М. Лейчкіс отримав наступне диференціальне рівняння для опису процесу фільтрування з використанням допоміжних речовин

$$\begin{aligned} \frac{dP(E_n)}{dt} = & P_t(E_{n-1}) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2h}{d_k - B(n-1)} \right)^2 \right\} (\varepsilon_0 - A(n-1) + \\ & + P_t(E_{n+1})C(n+1) - P_t(E_n) \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{2h}{d_k - Bn} \right)^2 (\varepsilon_0 - An) \right] + Cn \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тут $A = f_v / l, B = \frac{2d_v}{Nl\pi d_k}, C = const, f_v$ – площа перерізу

домішкової частинки суспензії, l – кількість вертикальних рядів домішкових частинок, затриманих одним елементарним шаром, N – кількість пор, що приходяться на одиницю поверхні шару, d_v – діаметр домішкових частинок, d_k – діаметр каналів пористого середовища, ε_0 – пористість незакупореного шару.

Фільтрування малоцентрованих суспензій як стохастичний процес розглядався також у роботі [271]. З метою врахування часової еволюції ефективності роботи

фільтру записувалося рівняння для швидкості зміни маси μ домішок, захоплених коміркою

$$\frac{d\mu}{dt} = \phi(\mu, t). \quad (1.14)$$

Потім функцію $\phi(\mu, t)$ розкладали в ряд за степенями μ і обмежувались лінійним членом. В результаті отримали рівняння, аналогічне використаному в моделі Ю.М. Шехтмана [290], а саме

$$\frac{d\mu}{dt} = (\langle f \rangle - \beta\mu)U(t), \quad (1.15)$$

де $\langle f \rangle$ – середнє значення ймовірності захоплення, $U(t)$ – маса домішок, що надійшли за одиницю часу в комірку з потоком рідини, β – коефіцієнт пропорційності.

Розроблена в [96] статистична модель може застосовуватися до фільтрів з різним завантаженням і дозволяє пояснити фізичний зміст параметрів l_0 , τ_0 , а також встановити взаємозв'язок між ними.

Статистична модель фільтрування полідисперсних суспензій з закупоркою пор фільтру запропонована А.М. Кутеповим і І.Н.В. Соколовим [147]. Вважалося, що радіус пори і радіус частинки є неперервно розподіленими випадковими величинами, а дисперсна система – агрегативно стійка. Крім того, для спрощення моделі була прийнята наступна схема закупорки пор однією частинкою:

1) кожна пора радіусом R на поверхні фільтрувальної перегородки розширюється до радіуса βR ;

2) при попаданні центру сферичної частинки в таку воронку вона проходить через пору у тому випадку, якщо її радіус менший R , а при $r > R$ відбувається закупорка;

3) при попаданні частинки на горизонтальну перегородку вона буде утримуватися там силами адгезії.

Стосовно до режиму постійної об'ємної швидкості вводу суспензії у фільтр були отримані вирази для маси дисперсної фази $m(t)$, що попала у фільтрат, і для різниці тисків, яка забезпечує підтримку даного режиму. Авторами також був розглянутий режим фільтрування суспензій при постійній різниці тисків і встановлені відповідні залежності об'ємної швидкості вводу суспензії у фільтр у випадку ньютонівської і неньютонівської дисперсних фаз, а також отриманий вираз для $m(t)$.

В роботі [271] досліджувався процес фільтрування малоконцентрованих монодисперсних суспензій, в якому ймовірність початкового захвату частинок твердої фази суспензії близька до одиниці. Вважалось, що фільтрування проводиться через горизонтальний попередньо нанесений шар допоміжної речовини, який розглядався як сукупність n елементарних шарів Φ_i . При цьому приймалась наступна ймовірнісна модель роботи системи. Випадковий потік частинок поступає на шар Φ_1 . Причому за малий проміжок часу Δt на шар Φ_1 поступає k частинок з ймовірністю

$$\pi_k \Delta t + o(\Delta t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

і нема надходження частинок з ймовірністю

$$1 + \pi_k \Delta t + o(\Delta t), \pi_0 < 0, \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 0. \quad (1.17)$$

Кожна з частинок, що знаходиться на момент часу t у будь-якому із шарів Φ_i за малий проміжок часу Δt незалежно від інших частинок і своєї передісторії зривається в шарі Φ_i і попадає в наступний шар Φ_{i+1} (а з шару Φ_n у фільтрат) з ймовірністю $a\Delta t + o(\Delta t)$, $a > 0$, або продовжує залишатися у шарі Φ_i з ймовірністю $1 - a\Delta t + o(\Delta t)$. Таким чином, стан системи елементарних шарів на момент часу t описується n -

вимірним однорідним у часі марківським розгалуженим процесом $\xi(t)$, див. [271]. Простором станів процесу є n -вимірні вектори $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, де x_i – число частинок у шарі. Зроблені припущення дозволили використати систему диференціальних рівнянь Колмогорова для перехідних ймовірностей процесу $\xi(t)$ і отримати наступні важливі характеристики:

1. Математичне сподівання числа частинок у шарі Φ_i на момент часу t

$$M_{\xi_i}^{\xi}(t) = \frac{h'(1)}{a} \left(1 - l^{-at} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(at)^k}{k!} \right), \quad (1.18)$$

де $h'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k$ ($h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$ – функція інтенсивностей надходження частинок в систему елементарних шарів).

2. Математичне сподівання усіх частинок, які знаходяться на момент часу t в системі з n елементарних шарів за умови, що в початковий момент часу в системі не було жодної частинки

$$M_{\xi}^{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n M_{\xi_i}^{\xi}(t) = \frac{nh'(1)}{a} - \frac{h'(1)}{a} l^{-at} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(at)^k}{k!}. \quad (1.19)$$

3. Математичне сподівання миттєвої концентрації твердої фази у фільтраті

$$g_n'(t) = al^{-at} \sum_{i=1}^n x_i \frac{(at)^{n-1}}{(n-i)!}. \quad (1.20)$$

Цікаво відмітити, що вирази (1.16), (1.18) подібні розв'язкам системи модельних рівнянь Мінца [184]. Це результат подібності припущень відносно стохастичних законів масопереносу у фільтрах, покладених в основу моделей [183].

І.М. Лейчкіс і Р.В. Бойко запропонована також стохастична модель роботи фільтру при змінній швидкості фільтрування [164]. Вважалося, що на систему елементарних шарів Φ_i поступає випадковий потік частинок, який описується неоднорідним пуассоновим процесом $V(t)$. Це означає, що ймовірність появи частинки на малому інтервалі часу $(t, t + \Delta t)$ в системі елементарних шарів має вигляд $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$. Виходячи з цього для мат сподівань $M_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) числа частинок в елементарному шарі $\Phi_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) на момент часу t була виведена наступна система рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dM_k(t)}{dt} = & l \left[\sum_{m=1}^n M_m(t) \right] \sum_{m=1}^{k-1} \prod_{\Gamma=m+1}^{k-1} \frac{c}{d + M_\Gamma(t)} \left[1 - \frac{c}{d + M_k(t)} \right] M_k(t) - \\ & - l \left[\sum_{m=1}^n M_m(t) \right] M_k(t) + h \left[\sum_{m=1}^n M_m(t) \right] \prod_{m=1}^{k-1} \frac{c}{d + M_m(t)} \left[1 - \frac{c}{d + M_k(t)} \right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

де $h(x)$, $l(x)$ – деякі задані функції; c , d – сталі.

Авторами [165] також було отримано добре якісне узгодження теоретичних та експериментальних даних для моделі процесу фільтрування з одним фільтруючим шаром і заданою ймовірністю захвату частинок.

Таким чином, з розглянутих робіт тільки авторами [290], отримане рівняння (1.11), аналогічне рівнянню кінетики, прийнятому в моделі Ю.М. Шехтмана. Методи статистичного опису, застосовані в інших роботах не дозволяють отримувати відповідні детерміновані моделі. Більш того, не очевидним є взаємозв'язок усіх розглянутих методів опису, а також можливі шляхи їх узагальнення з метою розробки єдиного методу моделювання процесу очищення рідин шляхом фільтрування.

1.2. Розвиток теорії моделювання процесів типу “конвекція-дифузія-тепло-масообмін” для задач з багатокomпонентними складовими

Для дослідження масопереносу використовують математичні моделі масообмінних багатокomпонентних процесів, які розробляються на основі рівняння нерозривності, імпульса, закону Дарсі [87, 135], руху потоку рідини через пористе середовище [218], рівняння перенесення домішок, тепла і теплообміну [63, 215, 227, 234], перенесення рідини в багатofазній системі [288], Нав’є-Стокса [26], а також моделі Абрамовича-Секундова [79], Бера-Нунціато [305]. Найбільш використовуваними є рівняння нерозривності і рівняння імпульсу, які мають вигляд (1.22) та (1.23) відповідно.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}) = 0, \quad (1.22)$$

де ρ – густина рідини, \bar{u} – вектор швидкості і рівняння імпульсу

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{u} \otimes \bar{u}) = -\nabla \rho + \nabla \tau + S_M, \quad (1.23)$$

де $\nabla \rho, \nabla \tau$ – тензор нормальних і дотичних напружень, S_M – джерела сторонніх напружень в потоці.

Масообмінні процеси є дуже поширеними і тому діапазон задач, які вирішують дуже широкий. Зокрема в [126, 127] досліджують витікання багатокomпонентної суміші в вакуум і в результаті чисельного методу розв’язку отримали систему (1.34) зручну для інтегрування загальних рівнянь руху багатокomпонентної суміші, а також показали розрахунки для витікання в вакуум повітряно-водяних сумішей різних складів, проте недоліком їх моделі є те, що вважають нестисливими деякі компоненти суміші.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial p}{\partial \xi} = \Phi, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{(u - \xi)\Phi}{\rho c^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\Phi}{c^2}, \\
 \frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{(u_i - \xi) \left[\rho_i^0 S_i (\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i) - (\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i + p E_i) \Phi \right]}{\rho_i^0 \left[(\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i) (u_i - \xi)^2 - p F_i \right]}, \\
 \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} = \frac{\alpha_i \left\{ \left[F_i + E_i (u_i - \xi)^2 \right] \Phi - \rho_i^0 F_i S_i \right\}}{(\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i) (u_i - \xi)^2 - p F_i}, \\
 \frac{\partial p_i^0}{\partial \xi} = \frac{\left[\alpha_i G_i + p E_i - \rho_i^0 E_i (u_i - \xi)^2 \right] \Phi - \alpha_i \rho_i^0 G_i S_i}{(\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i) (u_i - \xi)^2 - p F_i}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\
 \frac{\partial u_j}{\partial \xi} = \frac{(u_j - \xi) (\rho_j^0 S_j - \Phi)}{p - \rho_j^0 (u_j - \xi)^2}, \\
 \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi} = \frac{\alpha_j (\rho_j^0 S_j - \Phi)}{p - \rho_j^0 (u_j - \xi)^2}, \quad j = m+1, \dots, n,
 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

де u , ρ і c – середня швидкість, густина і швидкість в суміші в цілому, p – тиск, α_i – об’ємна частка i -ї складової суміші, ρ_i^0 – дійсна густина i -ї фракції. В [276] розробили дві нові моделі – в одно- і багатошвидкісному наближенні, які є актуальними оскільки розробка математично коректних і фізично несуперечливих моделей багатофазних середовищ є важливою задачею і не всі існуючі моделі гетерогенних середовищ відповідають вказаним вище вимогам. Розроблені моделі основані на законах збереження та враховують в’язкі і теплопровідні властивості суміші. Так при розробці гіперболічної моделі одношвидкісного в’язкого теплопровідного середовища розглядається n -компонентна суміш з першими m стискаючими фракціями, в рівняння якої включено ефекти в’язкості та теплопровідності:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] + \nabla(p - \sigma) = F, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |u|^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |u|^2 + \frac{p - \sigma}{\rho} \right) u + W \right] = F \cdot u, \\
 & \tau_w \left(\frac{\partial W}{\partial t} + (u \cdot \nabla) W \right) + \chi \nabla T + W = 0, \quad \tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \sigma \right) - \\
 & - \mu \operatorname{div}(u) + \sigma = 0, \\
 & \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i^0 u) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_{ik}, \\
 & \rho_i \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \varepsilon_i \right) + \frac{\alpha_i p}{\rho_i} \left[\sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_{ik} - (u \cdot \nabla) \rho_i \right] = \\
 & = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} Q_{ik} - \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |u|^2 \right) \sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_{ik}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\
 & \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_j u) = \frac{1}{\rho_j^0} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_{jk}, \quad j = m+1, \dots, n.
 \end{aligned} \right. \quad (1.35)$$

При розробці моделі багатшвидкісного в'язкого теплопровідного середовища використали систему для бінарної суміші з об'ємною часткою ідеального газу α і нестискуючою другою складовою рівняння багатшвидкісної моделі, в якій додатково враховано в'язкі та теплопровідні властивості суміші, яка прийняла вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \sigma)}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial W}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial x} + k_p \frac{\partial p}{\partial x} + k_p \frac{\partial \rho}{\partial x} + k_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{W}{\tau_w} = 0, \\
 & \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_s \frac{\partial \alpha}{\partial x} - (1 - \alpha) \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x} - G \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S,
 \end{aligned} \right. \quad (1.36)$$

де

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p - \sigma)}{\alpha\rho}}, \quad H = \frac{\gamma - 1}{\alpha}, \quad G = \frac{p}{(1 - \alpha)\rho_s}, \quad (1.37)$$

$$k_\rho = \frac{\chi}{\tau_w} \frac{\partial T}{\partial \rho}, \quad k_p = \frac{\chi}{\tau_w} \frac{\partial T}{\partial p}, \quad k_\alpha = \frac{\chi}{\tau_w} \frac{\partial T}{\partial \alpha}.$$

Низка робіт присвячений розробці нових фільтрів та визначенню гідравлічних характеристик фільтра, як з поверхневим так і з об'ємним принципом фільтрування. Такими задачами займалися Орлов В. О., Олійник О. Я., Поляков В. Л., Целищев Д. В., Тук Д. Є., Константинов С. Ю., Гарипов А. А., Валіулін С. С. [79, 194-213, 221-225]. В роботі [79] використовуючи рівняння (1.32) та (1.33) отримали результати, які свідчать про те, що основні втрати напору мають місце на фільтрованій сітці в каналах між основою і кутком, а також, що похибка моделювання становить 29% при номінальній витраті, яка є значною, при цьому не враховуючи перехідні режими. Валіулін С. С. в [79] представив результати розробки нового гідродинамічного комбінованого фільтра-сепаратор на основі закону Дарсі для руху рідини через пористе середовище (1.36), який в теорії має можливість затримувати частинки на порядок менших розмірів в порівнянні з осередком фільтроелемента в умовах вихрового потоку. При цьому вигляд закону Дарсі для руху рідини через пористе середовище:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{K_{IP}} u_x + K_{BT} \frac{\rho}{2} |\vec{u}| \cdot u_x = 0,$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\mu}{K_{IP}} u_y + K_{BT} \frac{\rho}{2} |\vec{u}| \cdot u_y = 0, \quad (1.38)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\mu}{K_{IP}} u_z + K_{BT} \frac{\rho}{2} |\vec{u}| \cdot u_z = 0,$$

де K_{BT} – коефіцієнт гідравлічних втрат; u_x, u_y, u_z – компоненти вектора \vec{u} ; K_{IP} – коефіцієнт об'ємної пористості.

Розробкою теоретичної моделі для нанокompозитів, яка призначена для сучасних комп'ютерних досліджень кінетики багатокомпонентного переносу і біфункціональних нанокompозитних матеріалах займався Каліничев А. І., зокрема в [125] розроблена модель, яка відображає два одночасно відбуваючі процеси: сорбцію-десорбцію компонентів на активних наносайтах матриці нанокompозитів і дифузію компонентів суміші в порах біфункціональної матриці нанокompозитів, однак не врахованими є зворотні впливи, які відбуваються у процесі фільтрування.

Під час математичного моделювання руху багатокомпонентного повітряного середовища і переносом забруднюючих речовин у [277] Сухинов А. І., Чистяков А. Е., Хачунц Д. С. розробили модель переносу забруднюючих речовин в атмосфері, яка враховує такі фактори, як перехід води з рідини в газоподібний стан, турбулентний обмін, осадження речовини, теплообмін між рідким і газоподібними станами, а також змінну густину і температуру. Для отримання даної моделі автори використовували рівняння нерозривності (1.32), рівняння переносу домішок (1.39), переносу тепла і теплообмін (1.40), а також модель Абрамовича-Секундова (1.32), які приведені нижче. Тут рівняння переносу домішок має наступний вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + (w - w_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right) + I, \quad (1.39)$$

де I – функція, яка описує розподіл і потужність джерел домішок, w_0 – швидкість осадження.

Рівняння притоку тепла, яке описує процеси переносу тепла і теплообмін авторами представлено в наступному вигляді

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - w_0 \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) \right) + \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right) + I, \quad (1.40)$$

де Q – теплова енергія, λ – коефіцієнт теплопровідності, I – функція, яка описує розподіл і потужність джерел тепла, w_0 – швидкість осадження зважених частинок.

Модель Абрамовича-Секундова, яка враховує такі важливі фактори, як попередній стан потоку, конвективне і дифузійне перенесення турбулентних пульсацій:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_{турб}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_{турб}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v_{мол} + kv_{турб}) \frac{\partial v_{турб}}{\partial x_i} \right) + \\ & + v_{турб} f \left(\frac{v_{турб}}{8v_{мол}} \right) D - \gamma S, \\ & S = \frac{v_{турб} (v_{мол} + \beta v_{турб})}{L_{\min}^2}, \\ & D = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}, \end{aligned} \right. \quad (1.41)$$

де k, γ, β – коефіцієнти, L_{\min} – найменша відстань до твердої стінки, $v_{мол}$ – молекулярна в'язкість, $v_{турб}$ – турбулентна в'язкість.

Моделювання процесів динаміки багатокомпонентних сумішей вимагають потужних програмних та апаратних засобів для обрахунку, так в [288] Шабас І. Н. при моделюванні на високопродуктивних обчислюваних системах відповідних задач розглядає процеси переносу багатокомпонентних речовин у водоймі, що складаються з таких компонентів, як радіонуклідні і нафтові забруднення і використовують систему рівнянь переносу частинок в

багатофазному середовищі вигляду (1.36) при початкових (1.37) і граничних (1.37) умовах. Проте навіть на таких потужних системах використовують пакети для розпаралелювання ітераційних методів, такі як бібліотеку паралельних методів Aztec, яка включає в себе процедури, що реалізують ряд ітераційних методів Крилова – метод спряжених градієнтів (CG), узагальнений метод мінімальних нев'язок (GMRES), квадратичний метод спряжених градієнтів (CGS), метод квазімінімальних нев'язок (TFQMR), метод біспряжених градієнтів (BiCGSTAB) зі стабілізацією. Система тривимірних рівнянь, що описує перенесення в багатофазному середовищі:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(M_i \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_i} \right) + \gamma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i \bar{S}) + (1-\gamma) \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_i} + B(\bar{S})\bar{S} = \bar{f}, \\ \operatorname{div} \bar{v}_i = 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

де $\bar{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – вектор концентрацій i -х речовин, M_1, M_2, M_3 – діагональні матриці розміру $k \times k$ з елементами $\{\mu_i^\alpha\}_{i=1}^k$ – коефіцієнтами турбулентної дифузії i -ї речовини, $\alpha = 1, 2, 3$, V_1, V_2, V_3 – діагональні матриці розміру $k \times k$, елементами яких є швидкості руху кожного компоненту домішок у напрямках x, y і z відповідно, $\bar{v}_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ – вектор швидкості руху i -ї речовини, $B(\bar{S})$ – нелінійний оператор, який описує взаємодію речовин в середовищі. Система завершується початковими

$$\bar{S} \Big|_{t=0} = \bar{S}^0 \quad (1.43)$$

і змішаними граничними умовами на границі $\Gamma = \bigcup_{i=0}^4 \Gamma_i$ області Ω :

$$G \frac{\partial \bar{S}(x)}{\partial n} + P \bar{S}(x) = R(x), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (1.44)$$

де Γ_0 – бічна непроникна границя, Γ_1 – ділянки впадання річок, Γ_2 – відкриті ділянки границь, на яких проходить водообмін, Γ_3 – поверхня водойми, Γ_4 – дно водойми, G, P, R – діагональні матриці розміру $k \times k$, $\frac{\partial \bar{S}}{\partial n}$ – похідна по нормалі \bar{n} до границі Γ .

Велика кількість хімічних процесів супроводжуються масообміном таких, як: абсорбція, адсорбція, хемосорбція, кристалізація, ректифікація та ін. Тому проводять дослідження ефективності масопередачі при відповідному процесі, так в [174] Максименко Ю. А. на основі матричних рівнянь (1.18), що визначають склад потоків, які покидають контактний пристрій виконав розрахунок рівноважних концентрацій, із застосуванням сучасних термодинамічних методів опису фазового рівноваги і визначив ефективності масопередачі. А ще в роботі визначено діапазон значень ефективності, проведено розрахункове дослідження впливу похибок визначення концентрацій на ефективність масопередачі в багатокомпонентних сумішах і відзначено, що навіть невеликі розбіжності в розрахунках рівноважних концентрація призводять до значних відхилень ефективності. І в результаті теоретичного дослідження показано, що спосіб визначення складів потоків, які покидають контактний пристрій, при постійному значенні ефективності забезпечує допустиме розбіжність розрахункових значень з експериментальними даними. При цьому при обробці результатів були використані методи математичної статистики і встановлено, що істотні похибки можуть виникнути при розрахунку сумішей, що складаються з великого числа компонентів, і для сумішей з сильно різними

летючостями компонентів. А Неумоина Н. Г. і Белов А. В. в [192] обґрунтували кінетичний метод розрахунку багатокомпонентної ізотерміної абсорбції, де основою для розробки методу використана нелокальна версія термодинаміки, запропонована Майковим В.П.

У рамках розроблюваного підходу встановлено принцип дискретизації термодинамічних параметрів, який дозволяє ввести в термодинаміку час як суттєвий параметр і визначити мінімальний макроскопічний масштаб для опису процесів перенесення маси, тепла, імпульсу. Для системи “газ-рідина” отримано рівняння питомої мольного потоку компонента через межу розділу фаз (рівняння масопередачі). При виведенні цього рівняння застосовано наближення теорії прикордонного шару. В межах прикордонного шару перепад концентрацій відбувається за лінійним законом. В коефіцієнтах масопередачі, що відповідають за транспорт компонента в газовій і рідкій фазі, виділено гідродинамічну і фізичну складові. Гідродинамічна складова залежить від конкретної гідродинамічної обстановки в зоні розділу фаз і фактично визначає товщину прикордонного шару. Фізична складова показує, від яких теплофізичних властивостей контактуючих фаз газу і рідини залежать коефіцієнт масовіддачі.

Матричні рівняння, що визначають склад потоків, які покидають контактний пристрій при масопередачі в багатокомпонентних сумішах, які ідентичні рівнянням для ефективності по Мерфрі в бінарних сумішах:

$$\begin{cases} (y_n) - (y_{n-1}) = [E_{MV}] \times ((y_n^*) - (y_{n-1})), \\ (x_{n+1}) - (x_n) = [E_{ML}] \times ((x_{n+1}) - (x_n^*)), \end{cases} \quad (1.45)$$

де n – номер тарілки, а $[E_{MV}]$ і $[E_{ML}]$ – матриці ефективності, які враховують взаємний (бінарний) вплив компонентів один на одного.

Для отримання розв'язку задачі руху частинок в багатокомпонентних сумішах речовин розроблено ряд методик на основі яких розробляються нові моделі. Використовуючи систему рівнянь (1.45), що описує одномірні неперервні плоскі, циліндрично- і сферично-симетричні рухи n -компонентної суміші в [147] Куропатенко В. Ф., Мустафин В. К. розробили методику розрахунку руху сумішей, яка створена для розрахунку одномірних плоских, циліндрично- і сферично-симетричних нествановлених рухів багатокомпонентних сумішей в лагранжевій системі координат в адиабатичному гідродинамічному наближенні. В якій рух багатокомпонентної суміші описується в рамках рівнянь механіки гетерогенних середовищ з врахуванням швидкісних і температурних нерівноважностей компонентів, нестационарності внутрішньої структури гетерогенного середовища, пористості, густини рівноважних фазових переходів; термодинамічні властивості компонентів в сумішах речовин описуються власними рівняннями стану; фазові переходи в компонентах суміші розраховуються і враховуються на рівні рівнянь стану.

Одномірні неперервні плоскі, циліндрично- і сферично-симетричні рухи n -компонентної суміші описуються наступною системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial r} + \frac{(v-1)\alpha_i \rho_i u_i}{r} = 0, \\ \alpha_i \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i P_i)}{\partial r} = R_i, \\ \alpha_i \rho_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i u_i P_i)}{\partial r} + \frac{(v-1)\alpha_i P_i u_i}{r} = \Phi_i, \\ P_i = P_i(\rho_i, E_i), \quad T_i = T_i(\rho_i, E_i), \quad (i = 1, \dots, n), \end{array} \right. \quad (1.46)$$

де

$$\sum_{i=1}^n R_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \Phi_i = 0,$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0.5u_i^2, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad (1.47)$$

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial r},$$

v – показник симетричності задачі, r – ейлерова координата, t – час, ρ_i – фізична (істинна) густина, α_i – об’ємна концентрація, u_i – швидкість, P_i – тиск, E_i – питома внутрішня енергія, індекс i означає номер компонента. Величини R_i і Φ_i , представляють собою інтенсивності обміну імпульсом і енергією між компонентами та мають наступний вигляд.

$$R_i = \sum_j \varphi_{ij} \frac{u_j - u_i}{\tau_{ij}^u}, \quad (1.48)$$

$$\Phi_i = R_i u_i + \sum_j \left(b_i R_i (u_j - u_i) + \frac{P_j - P_i}{\tau_{ij}^P} + \psi_i \frac{T_j - T_i}{\tau_{ij}^T} \right), \quad (1.49)$$

де $\tau_{ij}^u, \tau_{ij}^T, \tau_{ij}^P$ – часи релаксації відповідно швидкостей, температур і тисків, φ_i, ψ_i – функції параметрів компонентів.

Використовуючи метод характеристик для розрахунку течій одношвидкісного багатокомпонентного теплопровідного середовища Суров В. С., Степаненко Е. Н. в [276] представили варіант методу характеристик, призначений для інтегрування рівняння одношвидкісної багатокомпонентної теплопровідної суміші та описали його на фіксованій просторовій сітці з “наскрізним” розрахунком ударних стрибків, причому розглянутий підхід може бути безпосередньо розширений на задачу з кількома просторовими змінними.

Сахаров О. С., Сівецький В. І., Сокольський О. Л. в [272] провели числове дослідження процесу змішування в'язких рідин в коаксіальному зазорі розробивши математичну модель масообміну при течії в'язких рідин на основі якої провели чисельне моделювання з використанням методу скінченних елементів задачі змішування в'язких рідин в зазорі між двома циліндрами, один з яких обертається. А також навели деякі закони розподілу швидкостей і концентрацій. Рух суміші та її складових розглядався в даній роботі в рамках механіки суцільних середовищ з наступними припущеннями:

1. Суміш складається з окремих взаємно проникливих компонент, що заповнюють один і той же об'єм. Кожна компонента є неперервним однорідним середовищем (континуумом), стан якого безпосередньо визначається власними параметрами стану.

2. Для кожної компоненти середовища задовольняються закони збереження маси, імпульсу та енергії. Маса, імпульс та енергія суміші дорівнює сумі мас, імпульсів та енергій її компонент. Взаємодія між компонентами суміші не змінює загальну величину маси, імпульсу та енергії суміші.

Для розв'язання задач змішування спочатку розв'язується термомеханічна задача розподілу швидкостей та стану рідини, а потім на її основі – задача масообміну шляхами дифузії та конвекції.

Основні співвідношення механіки суцільних середовищ у вигляді системи диференціальних рівнянь в ейлеревих координатах для стаціонарних процесів:

- рівняння руху:

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}, \quad (1.50)$$

- рівняння збереження енергії:

$$c_T \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_T \vec{\nabla} T) + \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} + Q_{(v)}, \quad (1.51)$$

- рівняння дифузії:

$$\varphi \nabla^2 C = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C, \quad (1.52)$$

- рівняння збереження маси:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.53)$$

де ρ – маса одиниці об’єму (густина) матеріалу; \vec{v} – вектор швидкості точки тіла; \vec{f} – вектор зовнішньої сили, що діє на одиницю об’єму тіла; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{\nabla} \vec{v}$ – градієнт вектора швидкості; $Q_{(v)}$ – віднесена до одиниці маси швидкість зовнішнього об’ємного притоку тепла разом з іншою немеханічною енергією; E – питома внутрішня енергія (внутрішня енергія одиниці маси тіла), C – концентрація обраного компонента; φ – коефіцієнт дифузії.

До даної системи рівнянь також було добавлено геометричні рівняння Коші:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right), \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right), \quad (1.54)$$

які зв’язують тензор деформацій $\hat{\varepsilon}$ з вектором переміщень \vec{u} та тензор швидкостей деформацій $\hat{\zeta}$ з вектором швидкостей \vec{v} .

Для замикання системи рівнянь до неї приєднано рівняння стану:

$$\hat{\varphi}(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, T) = 0, \quad (1.55)$$

які дозволяють описати основні властивості матеріалів реальних тіл.

Розв’язанням задач математичного моделювання дифузійного масоперенесення в каталітичних середовищах частинок мікропористої структури займаються такі вчені, як: В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик, які виконали ряд робіт [105-107, 219-220], в яких здійснили аналіз та адаптацію існуючих математичних моделей переносу в пористих середовищах для моделювання і дослідження кінетики процесів масоперенесення в однорідних та багат шарових мікропористих цеолітних каталізаторах та дисперсних

середовищах; розробили ефективні алгоритми побудови розв'язків моделей дифузійного масоперенесення в середовищах частинок мікропористої структури з використанням математичного апарату класичних інтегральних перетворень та чисельних методів; здійснили комп'ютерне моделювання та аналіз профілів розподілу кінетичних параметрів (концентрацій і тисків) в мікро та макропорах середовища для процесів адсорбції та фільтраційного відтиску; здійснили оцінку адекватності та порівняння математичних моделей до реальних фізичних процесів; дослідили функціональні залежності зміни кінетичних параметрів в частинках та між частиковому просторі від конструктивних параметрів робочих каналів, товщини шарів, розмірів частинок, режимних характеристик та фізичних властивостей середовища. При цьому використовували модель однокомпонентного адсорбційного масоперенесення в каталітичному середовищі частинок мікропористої структури, яка представляється у вигляді системи диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{inter}} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \theta_{\text{intra}} \left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)_{r=R}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_{\text{intra}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (1.57)$$

з початковими та крайовими умовами

$$c(t, z)|_{t=0} = 0, \quad q(t, r, z)|_{t=0} = 0, \quad (1.58)$$

$$c(t, z)|_{z=l} = c_{\infty}, \quad q(t, r, z)|_{r=R} = k \times c(t, z), \quad (1.59)$$

$$\left. \frac{\partial c(t, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial q(t, r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (1.60)$$

Рівняння (1.56) цієї системи описує масопереніс у міжчастинковому просторі і містить у правій частині функцію впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в

міжчастинковому просторі. Рівняння (1.56) описує внутрішньочастинковий масопереніс з поточною концентрацією $q(t, r, z)$, що пов'язана з концентрацією в міжчастинковому просторі $c(t, z)$ крайовою умовою (1.39) – умовою рівноваги на поверхні частинок. Коефіцієнти D_{inter} та D_{intra} відповідно характеризують швидкість протікання процесів масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт θ_{intra} характеризує вплив внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинковий.

Математична модель, що описує двокомпонентне масоперенесення має вигляд:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_{inter\ 11} \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} + D_{inter\ 12} \frac{\partial^2 c_2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\theta_{intra\ 11} q_1 + \theta_{intra\ 12} q_2)_{r=R}, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_{inter\ 21} \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} + D_{inter\ 22} \frac{\partial^2 c_2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\theta_{intra\ 21} q_1 + \theta_{intra\ 22} q_2)_{r=R}, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = D_{intra\ 11} \frac{\partial^2 q_1}{\partial r^2} + D_{intra\ 12} \frac{\partial^2 q_2}{\partial r^2}, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = D_{intra\ 21} \frac{\partial^2 q_1}{\partial r^2} + D_{intra\ 22} \frac{\partial^2 q_2}{\partial r^2}, \quad (1.64)$$

з граничними та початковими умовами аналогічними моделям однокомпонентного масоперенесення.

Кінетика такого процесу характеризується чотирма коефіцієнтами: коефіцієнти $D_{inter\ 11}$ та $D_{inter\ 22}$ визначають швидкість монодифузії (дифузії компоненту в присутності самого себе), а коефіцієнти $D_{inter\ 12}$ та $D_{inter\ 21}$ визначають швидкість взаємодифузії (швидкість дифузії одного компоненту в присутності іншого).

Математична модель фільтраційного тиску дисперсного середовища з дворівневою структурою пор представляється

крайовою задачею вигляду: 1) обмежений розв'язок рівняння консолідації для пласту дисперсного середовища:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \beta_2 \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial z}, \quad (t > 0, 0 < z < h), \quad (1.65)$$

з початковими та граничними умовами

$$P_1(t, z)|_{t=0} = P_E, \quad P_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P_1(t, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0; \quad (1.66)$$

2) обмежений розв'язок рівняння консолідації для частинки

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = b_2 \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} \right), \quad (t > 0, 0 < z < h, 0 < r < R), \quad (1.67)$$

з початковими та граничними умовами

$$P_2(t, r, z)|_{t=0} = P_E, \quad P_2(t, r, z)|_{r=R} = P_1(t, z), \quad \left. \frac{\partial P_2(t, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (1.68)$$

Рівняння (1.65) описує зміну тиску $P_1(t, z)$ в міжчастинковому просторі і в правій частині містить компоненту впливу зміни усередненого тиску в частинці на тиск у міжчастинковому просторі. Рівняння (1.67) описує зміну тиску $P_2(t, r, z)$ в мікропорах та пов'язане з тиском $P_1(t, z)$ граничною умовою рівноваги між тисками з зовнішньої та внутрішньої сторін поверхні частинки.

Математична модель вилучення залишкового алюмінію фільтруванням запропонована в [138] складається з трьох наступних рівнянь: нестационарного рівняння матеріального балансу для іону Al^{3+} у розчині, що фільтрується

$$\varepsilon_0 \frac{\partial C_1}{\partial t} = -v \frac{\partial C_1}{\partial x} - K_0 C_1, \quad (1.69)$$

нестационарного рівняння матеріального балансу для гідроксиду $Al(OH)_3$, у розчині, що фільтрується

$$\varepsilon_0 \frac{\partial C_2}{\partial t} = -v \frac{\partial C_2}{\partial x} - K_0 C_1 - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}, \quad \text{нестационарного рівняння}$$

матеріального балансу для гідроксиду $Al(OH)_3$, у розчині, що утворюється на зернах завантаження і в осадку

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \phi_1(\sigma_2) C_2 + \phi_2(\sigma_2) C_2 - a \sigma_2. \quad (1.70)$$

Тут C_1 і C_2 – відповідно масові концентрації Al^{3+} і $Al(OH)_3$ у розчині, $мг/дм^3$; σ_2 – масова концентрація $Al(OH)_3$ у нерухомій фазі в одиниці об'єму фільтра, $мг/дм^3$; а K_0 – сталі.

В рівнянні (1.69) перший член враховує накопичення у фільтрі, другий – конвективне перенесення, третій – реакцію гідролізу (перехід Al^{3+} в $Al(OH)_3$). В рівнянні (1.70) перший член – це швидкість накопичення гідроксиду в твердій фазі, другий – швидкість адсорбції гідроксиду на зернах завантаження, третій – швидкість осадження з розчину укрупнених з'єднань $Al(OH)_3$ та утворення в порах завантаження нерухомого осадка, четвертий – швидкість відриву частинок $Al(OH)_3$ у фазі осадка.

Усі розглянуті математичні моделі в тій чи іншій мірі можна використовувати для задач, що описують процеси очищення рідин від багатокомпонентного забруднення, проте вони не є системними і не враховують ряд суттєвих факторів, таких як: вплив характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо), які, як показує практика, відіграють суттєву роль.

1.3. Математичне моделювання процесів очищення рідин шляхом фільтрування за умов взаємовпливів та домінування одних складових над іншими

Проведений в [11-13, 15, 26-30] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувались у “традиційних” (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, що вносяться до “вихідної” (базової) моделі з метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і малоефективних (з точки зору чисельної реалізації і практичного використання) математичних моделей. Проте у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів. Ефективність такого підходу була “відпрацьована” у працях [26, 27], зокрема, на такому прикладі врахування взаємовпливу градієнтів напору і коефіцієнта провідності (фільтрації) для осесиметричних, схильних до фільтраційної деформації, середовищ:

$$k(\text{grad}h) = \begin{cases} k_*(\text{grad}h), & \text{при } dh / dr > I_{kp}, \\ k_o, & \text{при } dh / dr \leq I_{kp}, \end{cases}$$

де $k_*(\tau)$ – деяка монотонна функція, I_{kp} – критичний градієнт напору, k_o – коефіцієнт фільтрації недеформованого середовища, r – радіус-вектор точки, $h = h(r)$ – напір. Зокрема, розглядалися такі базові моделі зміни коефіцієнта

фільтрації на ділянках збурення: $k = k_*$, $k = k_o \frac{r_c}{r}$,
 $k = k_o \left(a \frac{r_c}{r} + a - 1 \right)$, $k = k_o \left(1 + \varepsilon \left(1 - \frac{r}{r_c} \right) \right)$, $k = k_o \left(1 + \varepsilon \left(\frac{dh}{dr} - I_{kp} \right) \right)$.

З метою врахування розвитку суфозійних процесів, а, отже, зміни коефіцієнта фільтрації в часі, у роботі [26] розглядався елементарний об'єм пористого середовища, який містить як рідину, так і суфозійні (тобто рухомі) частинки, звідси авторами запропоновано рівняння балансу маси для осесиметричної фільтрації

$$\rho \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n \bar{U}) \right) + \rho_s \left(\frac{\partial m_c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m_c V_c) \right) = 0,$$

де ρ , ρ_s – відповідно щільність води та частинок ґрунту, n – пористість ґрунту, m_c – кількість (по об'єму) суфозійних частинок в одиниці об'єму ґрунту, \bar{U} – дійсна (фактична) середня швидкість води в порах, V_c – швидкість руху суфозійних частинок. На відміну від процесів, наприклад, масообміну [27], в суфозійних процесах (діаметр суфозійних частинок d_c більший за 0.03 мм) перетворення маси однієї компоненти в масу іншої не відбувається, тому загальне рівняння балансу розкладається на два незалежні

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n \bar{U}) = 0, \quad \frac{\partial m_c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m_c V_c) = 0.$$

Тому було введено, крім рівняння руху рідини (закону Дарсі), ще і рівняння для швидкості руху суфозійних частинок. Проведений аналіз дослідних даних та відповідних теоретичних розробок показав, що швидкість суфозійних частинок можна визначити за формулою

$$V_c = \bar{U} - \bar{U}_{kp},$$

де \bar{U}_{kp} – дійсна середня швидкість води в порах, при якій починається рух частинки. Приймаючи рівняння стану: $\kappa = a_k n$; $n + m_c + m_{ck} = 1$ ($n + m_c = 1 - m_{ck}$, $a_n = 1 - m_{ck} = const$) і перейшовши від дійсних середніх швидкостей до фіктивних за формулою $\bar{U} = nV$, отримано систему двох рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{a_k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0, & r_o \leq r \leq R_o, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{a_k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r [a_k a_n - \kappa] \left[\frac{\partial h}{\partial r} - I_{kp} \right] \right) = 0, \end{cases}$$

з двома невідомими функціями $h(r, t)$, $\kappa = \kappa(r, t)$, де $[a] = a$, якщо $a > 0$, $[a] = 0$, якщо $a \leq 0$ (тобто друге рівняння вироджується до $\partial \kappa / \partial t = 0$ при $\kappa(r, t) \geq a_k a_n$ або при $\partial h / \partial r \leq I_{kp}$). При цьому: $\kappa(r, t) = \kappa_o$, якщо $r_c(t) \leq r \leq R_o$; $\kappa(r, t) = \kappa_g = a_k a_n$, якщо $r_o \leq r \leq r_g(t)$, де $r_g(t)$, $r_c(t)$ – відповідно розв’язки рівнянь $\kappa(r, t) = a_k a_n$ (κ_g – граничне значення коефіцієнта фільтрації, коли настає повний вимив суфозійних частинок) і $I(r, t) = I_{kp} \left(I = \frac{\partial h}{\partial r} \right)$.

У роботах [26, 27] дослідження процесу фільтрації з урахуванням суфозійних явищ (зокрема, опис процесу формування зон збурення: накопичення, відриву та затримки частинок) проведено на основі розв’язання (методами квазіконформних відображень та почергового “замороження” характеристик процесу та середовища) нелінійних крайових задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \kappa(\text{grad} \varphi) \varphi_x = \psi_y, \\ \kappa(\text{grad} \varphi) \varphi_y = -\psi_x, \end{cases}$$

$$\text{при } \kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_3, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_3)(I - I_6), & I_3 < I < I_n, \\ \kappa^*, & I \geq I_n, \end{cases}$$

де $I = |\text{grad}\varphi| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – величина градієнту потенціалу, I_n – значення градієнту потенціалу, при якому має місце максимальне накопичення суфозійних частинок в ґрунті, I_6 – критичне значення градієнту потенціалу, при якому має місце вимив суфозійних частинок з ґрунту, I_3 – значення градієнту потенціалу, при якому має місце максимальна затримка (максимальне осідання) суфозійних частинок у ґрунті, коефіцієнт μ є розв’язком рівняння $\kappa(I_n, \mu) = \kappa^*$, κ^* – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному накопиченню суфозійних частинок. Очевидно, що даною формулою також визначається і мінімальне значення коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_*$ (в зоні осідання частинок), що відповідає максимально можливому заповненню пор суфозійними частинками. Дослідження відповідного процесу фільтрації з врахуванням зворотного впливу не тільки величини, але і напрямку градієнта потенціалу на характеристики середовища (коефіцієнт фільтрації) авторами проведені на основі модельного співвідношення:

$$\kappa = \begin{cases} \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_3, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_3)(I - I_6), & I_3 < I < I_n, \text{ якщо } I_\varphi' < 0; \\ \kappa^*, & I \geq I_n, \end{cases} \\ \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_1, \\ \kappa_0 + \mu_0(I - I_1), & I_1 < I < I_2, \text{ якщо } I_\varphi' \geq 0, \\ \kappa^0, & I \geq I_2, \end{cases} \end{cases}$$

де I_1, I_2 – критичні значення градієнту потенціалу, при яких

має місце вимив суфозійних частинок з ґрунту, коефіцієнт μ_0 є розв'язком рівняння $\kappa(I_2, \mu_0) = \kappa^0$, κ^0 – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному накопиченню суфозійних частинок.

При побудові узагальнюючого підходу до моделювання процесів та систем і методів розв'язання відповідних нелінійних задач доцільним є використання ідей теорії збурень (коли врахування нових факторів, явищ здійснюється шляхом збурення вихідних, добре вивчених класичною теорією, фонів, а не в результаті розв'язання відповідних нових громіздких модельних задач). Ефективність такого підходу у роботах [11-13, 15, 26-30] була “відпрацьована”, зокрема, при врахуванні “дифузійних внесків” на сильних конвективно-фільтраційних фонах. В цих роботах процеси типу “фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін” розглядалися у середовищах (однорозв'язних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії), які можуть піддаватися деформаціям залежно від певних характеристик процесу, що, в свою чергу, зумовлює характер перебігу процесу (тобто має місце взаємовплив характеристик середовища та процесу), а фільтраційна течія розглядалась авторами ще і як певний фон для конвективного перенесення розчинних речовин (забруднення) з урахуванням малих дифузійних явищ. Такий характер задання модельних задач передбачає використання саме асимптотичних методів.

Стрімкий розвиток асимптотичних методів розпочався у математичному аналізі в XVIII ст. Його широко починають застосовувати у своїх працях Лагранж, Лаплас, Леверр'є, які заклали міцний фундамент теорії збурення. Астрономічні задачі привели до нових методів Ньюкома, Ліндштедта, Гільдена, Боліна та ін.

Асимптотичними розвиненнями за незалежною змінною розв'язків для звичайних диференціальних рівнянь займалися

А. Пуанкаре, Пуассон, О. М. Ляпунов, Е. Айнс, Е. Коддінгтон, Н. Левінсон, Е. Камке, Ф. Трикомі, А. Ердейї, Ж. Хорн, О. Перрон, І. З. Штокало, І. М. Рапопорт та ін. Зокрема, в останній третині дев'ятнадцятого століття А. Пуанкаре й А.М. Ляпунов одержали строгі результати щодо збіжності асимптотичного розкладу, розвиваючи одну з модифікацій теорії збурень – метод малого параметра, що не припускає поділу змінних на швидкі і повільні, але застосовний лише до відшукування періодичних режимів (питання про те, які значення малого параметра забезпечують збіжність розкладу, при цьому залишалось відкритим). У той же час Пуанкаре зробив дуже важливий крок. Він уперше зрозумів, що розкладання за малими параметрами, що використовувались в астрономії, не обов'язково повинні збігатися. Вони можуть являти собою об'єкти особливої природи – асимптотичні ряди. Незважаючи на розбіжність, такі ряди в деякому сенсі добре наближають шукані функції. Тим самим, вперше в математиці виникла ситуація, коли абсолютна точність недосяжна навіть у принципі: у кожній конкретній системі малий параметр має цілком визначене значення.

Вчені К. Штурм, І. Ж. Ліувілль, А. Пуанкаре, О. М. Ляпунов, Г. Біркгофф, Л. Шлезінгер, В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркін, П. Нуайон, Х. Территін, В. Пугачов, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, І. З. Штокало, Ю. О. Митропольський, А. М. Тихонов [279-281], І. С. Градштейн, А. Б. Васильєва [80], С. Ф. Фещенко, С. Г. Крейн, Л. А. Люстернік [169], М. Й. Вішик, С. О. Ломов [168], М. І. Шкіль [291], І. Г. Малкін, В. М. Волосов, М. М. Красовський та ін. присвятили свої праці знаходженню асимптотики розв'язків за параметром для звичайних диференціальних рівнянь. Розвитком асимптотичних методів розв'язування диференціальних рівнянь займались також відомі іноземні автори.

Асимптотичні розвинення розв'язків для звичайних

диференціальних рівнянь одночасно за незалежною змінною і параметром розглянуто у працях М.В. Федорюка, Б. Ван-дер-Поля, І.З. Штокала та ін. Вивченню стійкості, обмеженості, порядку росту розв'язків звичайних диференціальних рівнянь на скінченному й нескінченному інтервалі присвячено чимало літератури, яка бере свій початок від праць О. М. Ляпунова і А. Пуанкаре.

Асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджували В. Штернберг, В. Тржицинський, В. Вазов [78], Л. Г. Магнарадзе, Н. Левінсон, М. В. Келдиш, О. А. Олійник, С. Каменомостська [131], Є. Жидков, Д. Аронсон, Є. Ісакова [122, 123], Т. Цуцунава, М. Вішик, Л. Люстернік, О. Ладигенська, Б. Панайоті, Л. Бобісуд, Су Юй-чен, В. О. Митропольський, С. Ф. Фещенко, Н. А. Павлюк, Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Н. С. Бахвалов [8], М. І. Фрейдлін, Р. С. Ефендієв, Л. Чезарі, ін.

Особливе місце серед асимптотичних методів зайняла теорія сингулярних збурень, предметом вивчення якої є рівняння, що містять малий параметр в коефіцієнтах при старших похідних. Розвиток теорії сингулярних збурень започатковано роботами А.Н.Тихонова. В них була розглянута початкова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром $\varepsilon > 0$ при певних похідних [280]. Вчений отримав умови, при яких розв'язок поставленої задачі прямує при $\varepsilon \rightarrow 0$ до одного з розв'язків так званої виродженої системи, яка отримувалась з початкової, якщо в ній формально покласти $\varepsilon=0$. Метод регуляризації розроблено в роботах С.А. Ломова [168]. Базуючись на роботах А.М. Ільїна, розвивається метод зрощування.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЕНЬ З УРАХУВАННЯМ РІЗНОГО РОДУ ЗБУРЕНЬ ТА ЗВОРОТНИХ ВПЛИВІВ

Даний розділ присвячено побудові математичних моделей процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення у пористих середовищах з урахуванням зворотних впливів (концентрації забруднення та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо), а також узагальнення відповідних моделей на дво- та багатошарові фільтри.

2.1. Математичне моделювання процесу фільтрування стічних вод від двокомпонентного забруднення з урахуванням зворотного впливу

Утворені на підприємствах стічні води після очищення використовують у водооборотних циклах або у більшості випадків їх скидають в міську каналізаційну мережу і далі у водоймища. Вплив стічних вод промислових підприємств на погіршення екологічного становища в Україні посилюється. Одним із найгостріших завдань, що вимагає постійної уваги, є видалення із стічних вод промислових підприємств іонів важких металів (ІВМ), які вкрай небезпечно впливають на навколишнє середовище і зокрема на водні басейни. Існуюча ситуація з очищенням таких стічних вод ускладнюється у зв'язку зі значним підвищенням за останні роки їх багатокомпонентності, що обумовлюється зростанням у стічних водах спектру важких металів, супутніх хімічних забруднень (емульгованих нафтопродуктів, комплексотворювачів, мінеральних солей, органічних домішок). Наявність багатокомпонентності домішок у стічних водах, що

містять важкі метали, негативно впливає на процеси їх очищення. Це призводить до значного погіршення якості очищених стоків, які скидають у водоймища, за іонами важких металів, мінералізації та іншими показниками, знижує можливість ефективної детоксикації металів природним середовищем, погіршує санітарний стан водойм, звідки в більшості випадків забирають воду на питні потреби [263].

Виходячи з вище сказаного, метою даного підрозділу є розробити нову математичну модель процесу фільтрування на прикладі двокомпонентних стічних вод, яка враховує зворотний вплив на фільтраційні компоненти, зокрема, на пористість, коефіцієнт відірваних частинок осаду і аналогічно [51] побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін”.

Будемо відштовхуватись від класичних законів, а саме: як відомо, у масообмінних процесах переніс речовини може здійснюватися як за рахунок дифузії, так і за рахунок конвекції та масообміну [63].

Згідно першого закону Фіка маємо:

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x} + vC,$$

де q – потік (масова швидкість перенесення речовини через елементарний шар), D – коефіцієнт дифузії, C – концентрація (концентрація забруднення), v – швидкість.

Для просторового випадку:

$$q_x = -D \frac{\partial C}{\partial x} + v_x C, \quad q_y = -D \frac{\partial C}{\partial y} + v_y C, \quad q_z = -D \frac{\partial C}{\partial z} + v_z C,$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial v_x C}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_y}{\partial y} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial v_y C}{\partial y},$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial v_z C}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + C \frac{\partial v_x}{\partial x} + C \frac{\partial v_y}{\partial y} + C \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm f(x, y, z, t),$$

де $D = \text{const}$.

Враховуючи, що $\text{div } \vec{v} = 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm f(x, y, z, t).$$

Згідно рівняння стану $\frac{\partial C}{\partial \tau} + \text{div } \vec{q} = 0$ маємо:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial v_x C}{\partial x} - \frac{\partial v_y C}{\partial y} - \frac{\partial v_z C}{\partial z} \pm f(x, y, z, t).$$

Для процесу очищення рідини функція джерел (стоків-витоків) $f(x, y, z, t)$ має такий зміст: вона характеризує швидкість накопичення осаду в фільтрі, з іншої сторони кількість осаду, захопленого фільтром дорівнює $\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(x, y, z, t)$ (ρ – концентрація осаду). Враховуючи пористість середовища σ , для одновимірного випадку можна записати:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Це диференціальне рівняння є рівнянням балансу. Воно показує, що кількість речовини, захопленої з рідини через елементарний шар за одиницю часу, дорівнює кількості накопиченої речовини в цьому шарі за ту ж одиницю часу.

Розглядаючи ефект освітлення як сумарний результат двох протилежних процесів: захоплення частинок з рідини і прилипання їх до засипки, а також відрив раніше прилиплих частинок під дією гідродинамічного впливу потоку, зменшення концентрації в елементарному шарі запишемо наступною рівністю:

$$\Delta C = \Delta C_1 - \Delta C_2,$$

де ΔC_1 – зменшення концентрації за рахунок прилипання;

ΔC_2 – збільшення концентрації за рахунок відриву.

Зменшення концентрації частинок за рахунок прилипання прийемо пропорційно середній концентрації в об'ємі елементарного шару:

$$\Delta C_1 = \beta C.$$

Збільшення концентрації за рахунок відриву раніше прилиплих частинок прийемо пропорційно кількості накопиченого осаду в елементарному об'ємі за одиницю часу:

$$\Delta C_2 = \alpha \rho.$$

Тут β, α – параметри фільтрування, масообмінні коефіцієнти, які характеризують захоплення частинок з рідини, що очищається та відриву з осаду відповідно.

Отже, швидкість накопичення осаду в фільтрі виразимо як:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta C - \alpha \rho.$$

Враховуючі $D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ та $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta C - \alpha \rho$

отримаємо вихідну систему рівнянь, яка описує процес очищення рідини від домішок:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta C - \alpha \rho. \end{cases}$$

Проведемо обезрозмірення величин моделі, для цього домножимо перше і друге рівняння на $l / \beta v$ і проведемо деякі перетворення:

$$\begin{cases} \sigma \frac{l}{\beta v} \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{l}{\beta v} \frac{\partial C}{\partial x} + kc - D \frac{l}{\beta v} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = - \frac{l}{\beta v} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \frac{l}{\beta v} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{l}{\beta v} C - \alpha \frac{l}{\beta v} \rho, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma \frac{l}{\beta v} \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{l}{v} \frac{l}{\beta v} \frac{\partial C}{\partial x} + k \frac{l}{\beta v} C - D \frac{l}{\beta v} \frac{l^2}{l^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = - \frac{l}{\beta v} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \frac{l}{\beta v} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{l}{\beta v} C - \alpha \frac{l}{\beta v} \rho, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{\beta} \frac{\partial C}{\partial \frac{v}{l} t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial C}{\partial \frac{x}{l}} + k \frac{l}{\beta v} C - \frac{D}{\beta v l} \frac{\partial^2 C}{\partial \frac{x^2}{l^2}} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \frac{v}{l} t}, \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \frac{v}{l} t} = \frac{l}{v} C - \frac{\alpha l}{\beta v} \rho, \end{cases}$$

Введемо заміну $\tilde{t} = (v/l)t$, $\tilde{x} = x/l$, тоді:

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{\beta} \frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} + k \frac{l}{\beta v} C - \frac{D}{\beta v l} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = \frac{l}{v} C - \frac{\alpha l}{\beta v} \rho, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^{-1}} \frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{c^{-1}} \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} + c^{-1} \frac{m}{c^{-1} \frac{m}{c}} C - \frac{\frac{m^2}{c}}{c^{-1} \frac{m}{c} m} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} = -\frac{1}{c^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{1}{c^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = \frac{m}{\frac{m}{c}} C - \frac{c^{-1} m}{c^{-1} \frac{m}{c}} \rho, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} + C - \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} = -\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = C - \rho. \end{array} \right.$$

Ми прийшли до безрозмірених величин, причому можемо оцінити співвідношення між конвективною, дифузійною та масообмінною складовими: $\frac{D}{\beta vl}$, що дорівнює

$\frac{1}{\beta Pe}$, де Pe – число або критерій Пекле, критерій співвідношення між конвективною і дифузійною складовою. Враховуючі значення відповідних коефіцієнтів не важко показати, що коефіцієнт дифузії можна представити у вигляді $D = b\varepsilon$, а масообмінний коефіцієнт $\alpha = a\mu$, причому

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{D/\beta vl}{l\alpha/v\beta} = \frac{D}{l^2\alpha}, \text{ а отже можемо записати, що } \mu = \varepsilon_*\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{D}{\beta vl}.$$

Розглянемо задачу, що описує процес фільтрування (очищення рідини від забруднення, яке характеризується двома концентраціями домішкових частинок), і функціонує за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [263] з урахуванням зворотного впливу на пористість та

коефіцієнти, що характеризують захоплення частинок бруду і відривання частинок осаду. Математична модель даної задачі фільтрування, із урахуванням попередніх викладок, запишеться у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} + k_i(c_i - \varepsilon\rho) = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^2 k_i c_i \right) - \alpha(\rho)\rho, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} c_1|_{x=0} = c^*(t), \quad c_2|_{x=0} = c_*(t), \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}|_{x=L} = 0, \\ c_1|_{t=0} = 0, \quad c_2|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho^*(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $c_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) – концентрації домішок в рідкому середовищі, що фільтрується; $\rho(x, t)$ – концентрація домішок, осаджених у фільтруючій засипці; $\beta(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу, $\beta(\rho) = \beta_0 - \varepsilon\beta_*\rho(x, t)$; $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул засипки домішкових частинок, $\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho(x, t)$; v – швидкість фільтрування, $c_*(t)$, $c^*(t)$ – концентрації домішкових частинок на вході фільтра, $\sigma(\rho)$ – пористість фільтруючої насадки $\sigma(x, t) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x, t)$ (σ_0 – вихідна пористість насадки); $D_1 = b_1\varepsilon$, $D_2 = b_2\varepsilon$, $\beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, b_1, b_2, k_1, k_2, \varepsilon$ – жорсткі параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho)$ – м'які параметри і знаходяться дослідним способом), ε – малий параметр.

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових частинок в насадці, змінюються відповідні параметри фільтрування [51].

Розв'язки системи (2.1) за умов (2.2) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [51, 263]:

$$\begin{aligned}
 c_i(x, t) &= c_{i,0}(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j}(x, t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \underline{U}_{i,j}(\underline{\xi}, t) + \\
 &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t) + R_{ci}(x, t, \varepsilon), \\
 \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j(x, t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} P_j(\underline{\mu}, t) + \\
 &+ \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

де R_{c_j}, R_ρ – залишкові члени, $c_{i,j}(x, t)$, $\rho_j(x, t)$ ($i=1, 2; j=\overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптоти, $\underline{U}_{i,j}(\underline{\xi}, t)$, $\tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t)$ ($i=1, 2; j=\overline{0, n+1}$), $P_j(\underline{\mu}, t)$, $\tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t)$ ($j=\overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару (відповідно поправки на вході та на виході фільтраційного потоку), $\underline{\xi} = x \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = x \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\tilde{\xi} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [51], після підстановки (2.3) в (2.1) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій $c_{i,j}$ і ρ_j ($j=\overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + k_i c_i = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,0} \right) - \alpha_0 \rho_0, \\ c_{1,0} \Big|_{x=0} = c^*(t), \quad c_{2,0} \Big|_{x=0} = c_*(t), \quad \rho_0 \Big|_{x=0} = 0, \quad c_{1,0} \Big|_{t=0} = 0, \\ c_{2,0} \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_0 \Big|_{t=0} = 0, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} - k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t} c_{i,j} = g_{i,j}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\beta_* \rho_{j-1} \left(\sum_{i=1}^2 k_i c_{i,j} \right) - \alpha_* \rho_{j-1} \rho_j, \\ c_{1,i} \Big|_{x=0} = 0, \quad c_{2,i} \Big|_{x=0} = 0, \quad \rho_i \Big|_{x=0} = 0, \quad c_{1,i} \Big|_{t=0} = 0, \quad c_{2,i} \Big|_{t=0} = 0, \\ \rho_i \Big|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{1,0}(x, t) = \begin{cases} c^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{k_1 x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$c_{2,0}(x, t) = \begin{cases} c_* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{k_2 x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_0(x, t) = \beta_0 \int_0^t \left(\sum_{i=1}^2 k_i c_{i,0}(x, \tilde{t}) \right) e^{-\alpha \tilde{t}} d\tilde{t},$$

$$c_{i,j}(x,t) = \begin{cases} \frac{-\int_0^x \lambda_j(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}{\sigma_* e^v} \times \\ \times \int_0^x \frac{g_{i,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int_0^{\tilde{x}} \lambda_j(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, \\ t \geq f(x), \\ 0, t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_j(x,t) = -\int_0^t \beta_* \rho_{j-1}(x, \tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,j}(x, \tilde{t}) \right) e^{-\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_{j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

де $g_{i,j}(x,t) = b_i \frac{\partial^2 c_{i,j-1}}{\partial x^2} + k_1 \rho_{j-1}, \quad \lambda_j(x,t) = -k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t},$

$$f(x) = -\frac{\sigma_*}{v} \int_0^x \rho_{i-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}.$$

Функції $U_i = \sum_{j=0}^{n+1} U_{i,j} \varepsilon^j, \quad \tilde{U}_i = \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{U}_{i,j} \varepsilon^j, \quad (i=1,2;$

$$j = \overline{0, n+1}), \quad P = \sum_{j=0}^{2n+1} P_j \varepsilon^{j/2}, \quad \tilde{P} = \sum_{j=0}^{2n+1} \tilde{P}_j \varepsilon^{j/2} \quad (j = \overline{0, 2n+1})$$

призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c_i(x,t) = \sum_{j=0}^n c_{i,j} \varepsilon^j,$

$\rho(x,t) = \sum_{j=0}^n \rho_j \varepsilon^j$ в околах точок $x=0, x=L$ (входу та виходу

фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умов:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c + U_i) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(c + \tilde{U}_i) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad (i=1,2),$$

$\frac{\partial}{\partial x}(\rho + P) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \tilde{P}) = O(\varepsilon^{n+1})$. Дані функції знаходяться аналогічно до [263]. Для оцінки залишкових членів маємо відповідну задачу аналогічну до [51].

Наведемо результати розрахунків за формулами (2.3) при $c^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $c_*(t) = 7 \text{ мг/дм}^3$, $\rho_*(x) = 0.02 \text{ мг/дм}^3$, $L = 1 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.35 \text{ с}^{-1}$, $v = 1/360 \text{ м/с}$, $\sigma_0 = 0.5$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$, $b_1 = 0.4$, $b_2 = 0.6$, $\alpha_* = 1$, $\beta_* = 1$, $\sigma_* = 1$.

Так як на вхід фільтра подається рідина, яка містить двокомпонентне забруднення, відповідно і критерії за якими визначається захисна дія фільтра приймаються у відповідності до характеру забруднюючих речовин. Наведені нижче результати комп'ютерного експерименту ілюструють розподіл концентрацій забруднення на виході фільтра та розподіл завантаження осаду у фільтрі.

На рис. 2.1 показано, що із спаданням швидкості фільтрування час захисної дії фільтра зростає, що підтверджує відомий факт. На рис. 2.2 проілюстровано динаміку накопичення осаду вздовж фільтра в різні моменти часу.

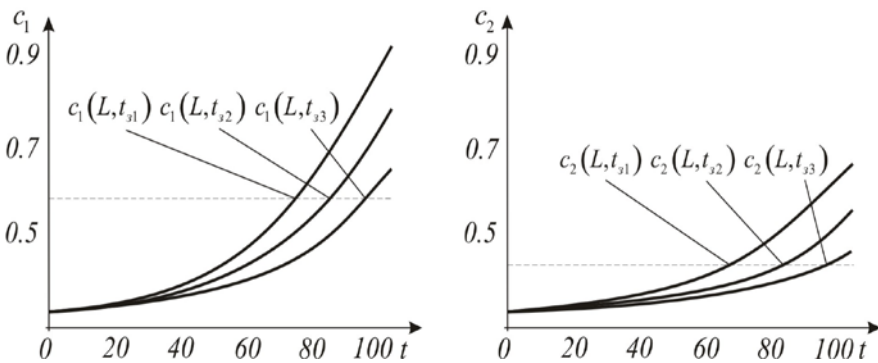


Рис. 2.1. Розподіл концентрацій домішок у рідині на виході фільтра при різних швидкостях ($v_1 = 1/240 \text{ м/с}$, $v_2 = 1/360 \text{ м/с}$, $v_3 = 1/720 \text{ м/с}$)

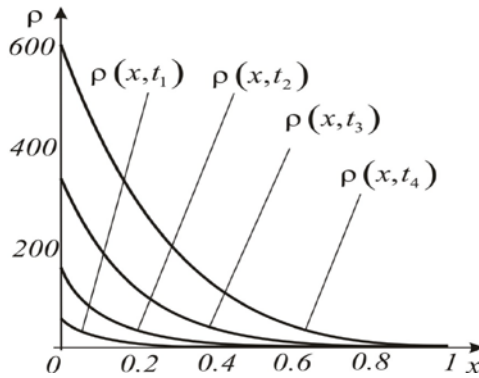


Рис. 2.2. Розподіл концентрації осаду вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 20$ год, $t_2 = 40$ год, $t_3 = 60$ год, $t_4 = 80$ год

2.2. Математичне моделювання процесу фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища

Даний підрозділ є узагальненням попереднього на випадок багатокомпонентності забруднення, що має місце у більшості реальних об'єктів водоочисних систем, зокрема: розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) на прикладі очищення рідини у магнітних і сорбційних фільтрах. Відповідні співвідношення (формули) є ефективними для проведення націлених на “продуктивність” (зокрема оптимізацію) параметрів процесу фільтрування (а саме: часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо) теоретичних досліджень у випадках переважання конвективних та сорбційних складових відповідного процесу над дифузійними і десорбційними, що має місце в переважній більшості фільтрувальних установок. На цій основі проведено

відповідний комп'ютерний експеримент результати якого показують переваги запропонованої моделі у порівнянні із класичними.

Проведений в [47] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувались у “традиційних” (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, що вносяться до “вихідної” (базової) моделі з метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і малоефективних (з точки зору чисельної реалізації і практичного використання) математичних моделей. Проте у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів.

Розглянемо шар товщиною L (фільтр), який розміщений в декартовій системі координат так, що вісь Ox перпендикулярна до його поверхні, і початок координат знаходиться на його верхній границі. Частинки забруднення домішкової речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відривання, сорбції-десорбції) при цьому концентрації забруднення впливають на розглянутий шар. Концентрація забруднення є багатокомпонентною. Відповідний процес фільтрування з врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) описується наступною системою взаємопов'язаних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m k_i c_i \right) - \alpha(\rho)\rho + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \left. \frac{\partial c_i}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \\ c_i|_{t=0} = c_{*i}^*(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_*^*(x), \quad (2.7)$$

$$v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } P, \quad (2.8)$$

де v – швидкість фільтрування, $i = \overline{1, m}$, P – тиск.

Розв’язки системи (2.6) за умов (2.7) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [47, 51]:

$$c_i(x, t) = c_{i,0}(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j}(x, t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t) + \\ + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t) + R_{c_i}(x, t, \varepsilon), \\ \rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j(x, t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} P_j(\tilde{\mu}, t) + \\ + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \quad (2.9)$$

де R_{c_i}, R_ρ – залишкові члени, $c_{i,j}(x, t)$, $\rho_j(x, t)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптоти, $\tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t)$, $\tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n+1}$), $P_j(\tilde{\mu}, t)$, $\tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t)$ ($j = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару (відповідно поправки на вході та на виході фільтраційного потоку), $\tilde{\xi} = x \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = x \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\tilde{\xi} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [51], після підстановки (2.9) в (2.6) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій $c_{i,j}$ і ρ_j ($j = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + k_i c_i = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0} \right) - \alpha_0 \rho_0, \\ c_{i,0} \Big|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho_0 \Big|_{x=0} = \rho^*(t), \quad c_{i,0} \Big|_{t=0} = c_{*i}^*(x), \quad \rho_0 \Big|_{t=0} = \rho^*(x), \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} - k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t} c_{i,j} = g_{i,j}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\beta_* \rho_{j-1} \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,j} \right) - \alpha_* \rho_{j-1} \rho_j, \\ c_{1,i} \Big|_{x=0} = 0, \quad c_{2,i} \Big|_{x=0} = 0, \quad \rho_i \Big|_{x=0} = 0, \quad c_{1,i} \Big|_{t=0} = 0, \quad c_{2,i} \Big|_{t=0} = 0, \\ \rho_i \Big|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.11)$$

В результаті їх розв’язання маємо:

$$c_{i,0}(x, t) = \begin{cases} c_i^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{k_i x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ c_{*i}^* \left(x - \frac{vt}{\sigma_0} \right) \cdot e^{k_i t}, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_0(x, t) = \beta_0 e^{-\alpha t} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0}(x, \tilde{t}) \right) e^{\alpha \tilde{t}} d\tilde{t} + \rho^*(x),$$

$$\rho_j(x, t) = -\beta_* e^{-\alpha_* \int_0^t \rho_{j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t \rho_{j-1}(x, \tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,j}(x, \tilde{t}) \right) e^{\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_{j-1}(x, \tilde{\tilde{t}}) d\tilde{\tilde{t}}} d\tilde{t},$$

$$c_{i,j}(x,t) = \begin{cases} \frac{\sigma_* e^{-\int_0^x \lambda_j(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{v} \times \\ \times \int_0^x \frac{g_{i,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int_{\tilde{x}}^x \lambda_j(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ e^{-\int_0^t \lambda_j(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}} \times \\ \times \int_0^t \frac{-\int_0^{\tilde{t}} \lambda_j(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}}{g_{i,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t})} d\tilde{t}, & t < f(x), \end{cases}$$

де $g_{i,j}(x,t) = b_i \frac{\partial^2 c_{i,j-1}}{\partial x^2} + k_1 \rho_{j-1}$, $\lambda_j(x,t) = -k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t}$.

Наближені значення функцій $f_j(x)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву (x_i, t_i) , $i = \overline{1, n}$, де $x_i = \Delta x \cdot i$,

$$t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{j-1}(x_i, t_i).$$

Функції $U_i = \sum_{j=0}^{n+1} U_{i,j} \varepsilon^j$, $\tilde{U}_i = \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{U}_{i,j} \varepsilon^j$, ($i = \overline{1, 2}$;

$$j = \overline{0, n+1}$$
, $P = \sum_{j=0}^{2n+1} P_j \varepsilon^{j/2}$, $\tilde{P} = \sum_{j=0}^{2n+1} \tilde{P}_j \varepsilon^{j/2}$ ($j = \overline{0, 2n+1}$)

призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c_i(x,t) = \sum_{j=0}^n c_{i,j} \varepsilon^j$,

$\rho(x,t) = \sum_{j=0}^n \rho_j \varepsilon^j$ в околах точок $x=0$, $x=L$ (входу та виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умов:

$\frac{\partial}{\partial x}(c + \underline{U}_i) = O(\varepsilon^{n+1})$, $\frac{\partial}{\partial x}(c + \tilde{U}_i) = O(\varepsilon^{n+1})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\rho + \underline{P}) = O(\varepsilon^{n+1})$,
 $\frac{\partial}{\partial x}(\rho + \tilde{P}) = O(\varepsilon^{n+1})$. Дані функції знаходяться аналогічно до [47]. Для оцінки залишкових членів маємо відповідну задачу аналогічну до [51].

Процес фільтрування на сорбційних фільтрах не потребує замкненої системи, а отже швидкість фільтрування не є сталою величиною і, як правило, швидкість змінюється вздовж фільтру протягом часу. Для спрощення викладок будемо вважати, що концентрація забруднення є однокомпонентною. Також потрібно врахувати зворотній вплив на пористість та коефіцієнти, що характеризує осадження частинок бруду та відривання частинок осаду [47] і повздовжню дифузію. Виходячи з вище сказаного система (2.6)-(2.7) перепишеться так:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(x,t)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c(x,t))}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho)c(x,t) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$c|_{x=0} = c_*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.13)$$

Розв'язки системи (2.12) за умов (2.13) шукаємо аналогічно до загальної задачі у вигляді асимптотичних рядів (див. [47, 51]).

Наведемо результати розрахунків за формулами (2.9) при $c_*(t) = 170 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.0056 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_0 = 0.5$, $\alpha_* = 1$, $\beta_* = 1$, $\sigma_* = 1$, $b = b_* = 1$, $\varepsilon = 0.001$.

На рис. 2.3 та рис. 2.4 проілюстрована порівняльна характеристика даних отриманих дослідним чином та розрахованих за класичною моделлю Мінца [184] і

розрахованих за формулами (2.9), отже, результати розрахунків за формулами (2.9) дають точність більшу у порівнянні з розрахунками формулами класичної моделі Мінца. Також отримані розрахункові формули дають можливість розраховувати динаміку просування концентрації забруднення та осаду вздовж фільтру (рис. 2.5 – рис. 2.6).

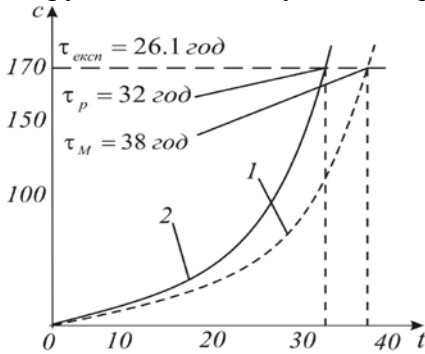


Рис. 2.3. Розподіл концентрації домішок на виході фільтру протягом часу захисної дії: 1 – згідно моделі Мінца; 2 – згідно формул (2.9), при $d = 0.78 \text{ мм}$, $v = 10 \text{ м/год}$

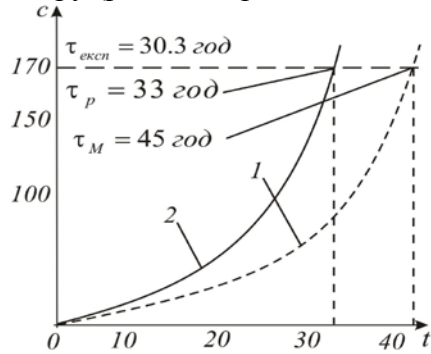


Рис. 2.4. Розподіл концентрації домішок на виході фільтру протягом часу захисної дії: 1 – згідно моделі Мінца; 2 – згідно формул (2.9), при $d = 0.78 \text{ мм}$, $v = 9 \text{ м/год}$

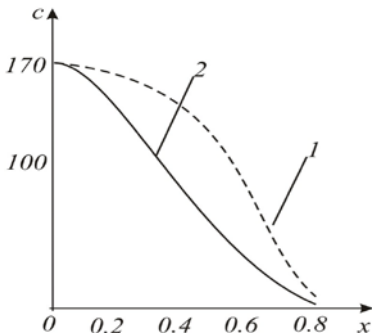


Рис. 2.5. Розподіл концентрації домішок вздовж фільтру в момент часу $t = 26 \text{ год}$: 1 – згідно моделі Мінца; 2 – розраховані за формулами (2.9), при $d = 0.78 \text{ мм}$, $v = 10 \text{ м/год}$

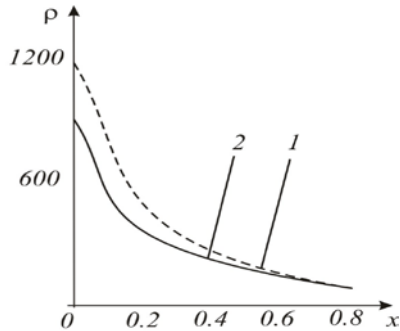


Рис. 2.6. Розподіл концентрації осаду вздовж фільтру в момент часу $t = 26 \text{ год}$: 1 – згідно моделі Мінца; 2 – розраховані за формулами (2.9), при $d = 0.78 \text{ мм}$, $v = 10 \text{ м/год}$

2.3. Просторове узагальнення моделі очищення рідин від багатокомпонентних забруднень

Для практичних цілей важливим є просторовий випадок процесу фільтрування, тому, розглянемо однозв'язний криволінійний паралелепіпед (фільтр-шар) $ABCD A_* B_* C_* D_*$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_* A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_* C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$, а також поверхнями течії $ADD_* A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_* B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_* B_* C_* D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 2.7).

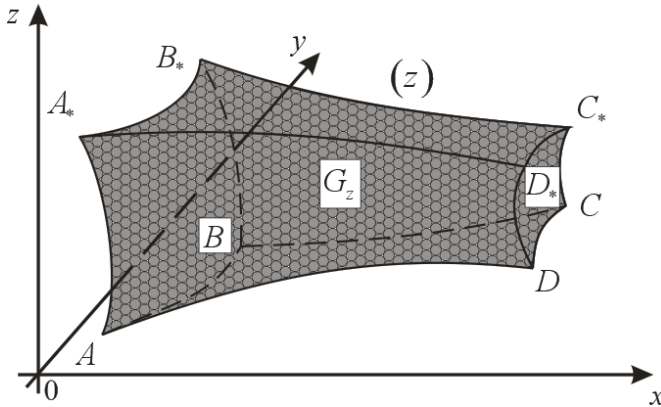


Рис. 2.7. Просторова фізична область G_z (фільтр)

Припускаємо [53], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на розглянутий шар. Концентрація забруднення є багатокомпонентною $C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$, де

C_i концентрація i -ої компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осідання) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну й т.ін. за аналогією з роботами [51, 53]) для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ опишемо такою модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i = D_i \Delta C_i + \varepsilon \alpha(P)P, i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \beta(P) \left(\sum_{i=1}^m k_i C_i \right) - \varepsilon \alpha(P)P, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$C_i \Big|_{ABB_*A_*} = C_{i,*}(M, t), \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0,$$

$$C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (2.15)$$

$$\vec{v} = \kappa(P) \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad (2.16)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (2.17)$$

де $P(x, y, z, t)$ – концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; $\beta(P)$ – коефіцієнт, що характеризує масові об'єми осадження домішок за одиницю часу ($\beta(P) = \beta_0 - \varepsilon \beta_* P$); $\alpha(P)$ – коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних за той же ж час від гранул завантаження частинок ($\alpha(P) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_* P$); $\sigma(x, y, z)$ – пористість середовища; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ – оператор Лапласа; $D_i = d_{0i} \varepsilon$ – коефіцієнт дифузії домішки у рідині; $\beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, d_{0i}, \varepsilon$ – тверді параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho)$ –

м'які параметри, знаходяться експериментальним способом), ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншим, а саме, що дифузійний і десорбційний складники цього процесу є малі порівняно з іншими його складниками); $C_{i,*}(M, t), C_{i,0}^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M – довільна точка відповідної поверхні; φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); κ – коефіцієнт фільтрації середовища; \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Прийемо, що розв'язок задачі (2.16), (2.17) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу) відомий [51, 53], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату Q . Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (2.14) та умовах (2.15), приходимо до відповідної задачі для області G_w :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial\varphi} = \\ & = \varepsilon d_{oi} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial\psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial\eta} \right) + \varepsilon\alpha(\rho)\rho, \quad (2.18) \\ & \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m k_i c_i \right) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho, \end{aligned} \right.$$

$$c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \quad c_{i,\varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{де } c_i &= c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ \rho &= \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ b_1 &= b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla} \psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\bar{\nabla} \eta)^2, \\ d_1 &= d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi, \quad d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (2.18), (2.19) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [51, 53]

$$\begin{aligned} c_i &= c_{i,0} + \varepsilon c_{i,1} + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Pi_j + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \tilde{\Pi}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_j + \\ &+ \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\Pi}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\hat{\Pi}}_j + R_{c,i}, \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \tilde{P}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \\ &+ \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{P}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\hat{P}}_j + R_\rho, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ – члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}$); $\Pi_j(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ – функції типу прилежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t), \tilde{P}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ – в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\tilde{\Pi}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{\Pi}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\hat{\Pi}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\hat{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = \overline{0, 3}$) – в околах $\psi = 0, \psi = Q^*, \eta = 0, \eta = Q^*$ (поправки на бічних

стінках фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$, $\check{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$,
 $\tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = (Q_* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\eta} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ –
 “розтяги” відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (2.20), у (2.18), (2.19) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = 0, 1$):

$$\sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0} \right),$$

$$c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, \quad c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t),$$

$$\rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \quad (2.21)$$

$$-\sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} - k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t} c_{i,j} = g_{i,j},$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\beta_* \rho_{j-1} \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,j} \right) - \alpha_* \rho_{j-1} \rho_j,$$

$$c_{i,1}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_{i,1}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$\rho_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0. \quad (2.22)$$

Внаслідок послідовного розв’язування задач (2.21), (2.22) матимемо

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t-f) \exp \left[-\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\alpha(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f-t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[-\int_0^t \frac{\alpha(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \beta_0 \exp(-\alpha_0 t) \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \right) \exp(\alpha_0 \tilde{t}) d\tilde{t} + \rho_0^0,$$

$$c_{i,1} = \begin{cases} \exp(-\lambda_1) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{g_1(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} \exp(\lambda_1(s, \psi, \eta, t)) ds, & t \geq f, \\ \exp(-\lambda_2) \int_0^t \frac{g_2(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\sigma(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} \exp(\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)) ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_1 = -\beta_* \exp\left(-\alpha_* \int_0^t \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}\right) \times \\ \times \int_0^t \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,1}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t})\right) \exp\left(\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}\right) d\tilde{t},$$

де

$$g_{i,1}(x, t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \alpha_0 \rho_0,$$

$$g_2(\varphi, \psi, \eta, t) = g_1 - \alpha_0,$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_* k_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_0(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_1(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= -\beta_* k_1 \int_0^t \frac{\rho_0(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_1(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sigma(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} ds \quad \text{— час проходження відповідною}$$

частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь

$\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^{-2}(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_i(\xi, \psi, \eta, t)$, ($i = 0, 1$)
 $\check{\Pi}_i(\check{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\check{P}_i(\check{\xi}, \psi, \eta, t)$, ($i = \overline{0, 2}$) $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$,
 $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та
 $\tilde{\tilde{P}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{P}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0, 3}$) знаходяться аналогічно, як у роботі [10].

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями: $f_1(x, y, z) = x - 1, 25$; $f_2(x, y, z) = (x - 2, 5466434)^2 + y^2 + z^2 - 0, 1187841$;
 $f_3(x, y, z) = (x - 1, 25)^2 + (y - 3, 8471044)^2 + z^2 - 16, 3627124$;
 $f_4(x, y, z) = (x - 1, 25)^2 + z^2 + (y + 3, 8471044)^2 + z^2 - 16, 3627124$;
 $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [x(x - 2, 5) + y^2 + z^2]^2 + 6, 25y^2 - 36, 4276695z^2$. Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, “монотонність звуження” в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми “підказує” практика), та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі праці [51] побудовано розрахункову динамічну сітку в G_z :

$$\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i = \varphi_* + \left[(\varphi^* - \varphi_*) i \right] / n, i = \overline{0, n}, \psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j = (Q_* j) / m, j = \overline{0, m}, \eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k = (Q^* k) / l, k = \overline{0, l}$$

для $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 8000$, $\kappa = 1$, $n = 30$, $m = 16$, $l = 16$ (параметри n , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до

кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,651$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $b_i(\varphi, \psi, \eta)$, $d_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$). При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001 [53].

На рис. 2.8 показано розподіл концентрації $c(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ та $\rho(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ вздовж ліній течії для випадку однокомпонентного забруднення для $c_*^*(t) = 80 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0,15 \text{ м}$, $v = 10 \text{ м/год}$, $\beta_0 = 18 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha_0 = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_* = 0,34$, $\sigma_0 = 0,5$; $\sigma_* = 1$; $b = b_* = 1$; $\varepsilon = 0,001$ [51]. За заданих на виході фільтра ($x = 0,15$) допустимих значень концентрації $c = c_{кр} = 10 \text{ мг/дм}^3$, знайдемо час його захисної дії: $t = \tau_s = 35 \text{ год}$. При цьому фільтр накопичить 1020 г осаду.

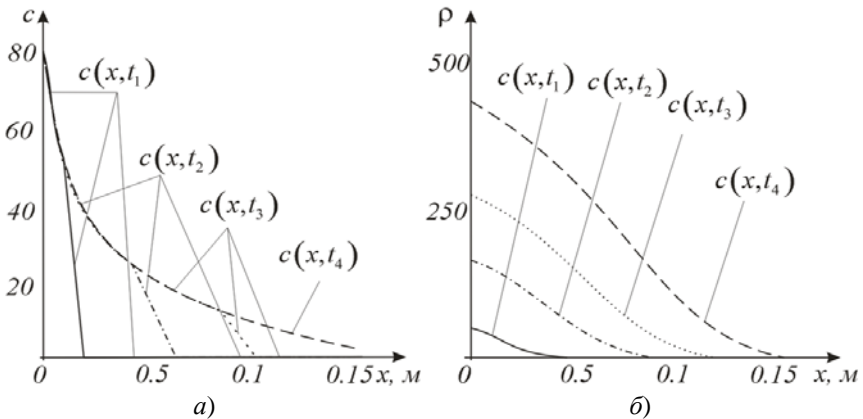


Рис. 2.8. Розподіл концентрації домішок у рідині (а) та концентрації осаду (б) вздовж фільтра при очищенні стічних вод металургійного виробництва в моменти часу $t_1 = 10 \text{ год}$, $t_2 = 20 \text{ год}$, $t_3 = 30 \text{ год}$, $t_4 = 40 \text{ год}$

На рис. 2.9 $(c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 170 \exp(-\varphi^2) \text{ мг/дм}^3$;
 $c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 35 \exp(-\varphi^2) \text{ мг/дм}^3$; $c_1^*(\psi, \eta, t) = 170 \text{ мг/дм}^3$;
 $c_2^*(\psi, \eta, t) = 35 \text{ мг/дм}^3$; $\rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0 \text{ мг/дм}^3$; подані дані,

отримані в результаті натурних експериментів (відповідає індексу “exp”) відповідно до класичної моделі Мінца (відповідає індексу “M”) [186] і розраховані за формулами (2.20) (відповідає індексу “p”). Розрахунки за формулами (2.20) більш точні порівняно із класичною моделлю Мінца. Отримані результати дають можливість розраховувати динаміку просування концентрації забруднення й осідання уздовж фільтра (рис. 2.10).

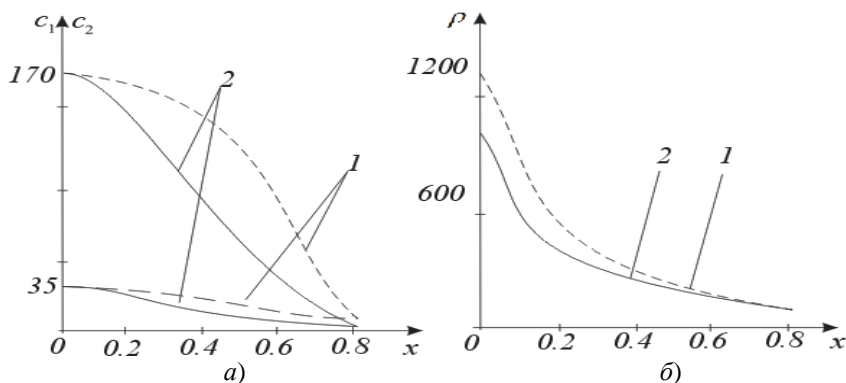


Рис. 2.9. Розподіл концентрації домішок (а) й осаду (б) уздовж фільтра в момент часу $t = 26$ год: 1 – за Мінцом (пунктир); 2 – за формулами (2.20) для $d = 0,78$ мм, $v = 10$ м/год

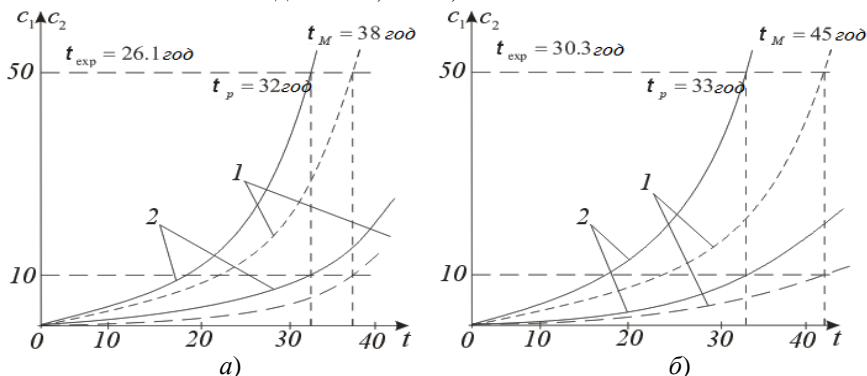


Рис. 2.10. Залежність концентрації домішок на виході фільтра упродовж часу захисної дії: 1 – за Мінцом; 2 – за формулами (2.20) для $d = 0,78$ мм, $v = 10$ м/год (а) і $d = 0,78$ мм, $v = 9$ м/год (б)

2.4. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень сорбційними фільтрами

Впродовж останнього десятиліття склад стічних вод (СВ) промислових підприємств зазнав значних змін. Це пов'язано зі зниженням об'єму СВ внаслідок застосування ресурсозберігаючих виробничих процесів, відмовою від будівництва локальних очисних споруд та ін. Вивчення складу домішок в металовмісних СВ різних промислових підприємств країн Східної Європи, України і Росії свідчить: у СВ спостерігається досить великим (у 10-30 разів) збільшення змісту іонів важких металів (ІВМ); концентрації супутніх компонентів (амонія, нафтопродуктів, органічних сполук і інших домішок) можуть перевищувати концентрації ІВМ в десятки разів; значно підвищилася (в середньому в 3.5 разів і навіть більше) концентрація мінеральних солей, комплексних іонів; концентрація забруднюючих речовин, рН і буферна СВ варіюються в широких межах [54].

В результаті на централізовані очисні споруди поступають різні за характеристиками СВ, а в приймальних місткостях водоочисних станцій утворюється суміш металовмісних багатокомпонентних СВ. У зв'язку з цим слід враховувати вплив багатокомпонентних вказаних вод на процеси, параметри і технології очищення, оскільки очисні споруди, існуючі на багатьох підприємствах, не можуть забезпечити отримання очищеної води нормативної якості. Крім того, для країн СНД (у тому числі України), в порівнянні з країнами Заходу, характерні жорсткіші вимоги відносно концентрацій ІВМ, аніонів, і інших домішок [54].

Проведений в [51-54] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувались

у “традиційних” (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, що вносяться до “вихідної” (базової) моделі з метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і малоефективних (з точки зору чисельної реалізації і практичного використання) математичних моделей. Проте у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів.

Відповідно до розглянутих вище проблем, у роботі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії) при моделюванні процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень сорбційними фільтрами.

Аналогічно до попереднього підрозділу, розглянемо відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осідання) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну й т. ін. по аналогії з [51]), а також взаємодіє компонент забруднення між собою. Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ отримаємо наступну модельну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} C_l C_g = \\ = D_i \Delta C_i + \varepsilon \alpha_i P, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u C_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q P, \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$C_i \Big|_{ABB_*A_*} = C_{i,*}(M, t), \quad \frac{\partial C_i}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0,$$

$$C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (2.24)$$

$$\vec{v} = \kappa(P) \nabla \bar{\varphi}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.25)$$

$$\bar{\varphi} \Big|_{ABB_*A_*} = \bar{\varphi}_*, \quad \bar{\varphi} \Big|_{CDD_*C_*} = \bar{\varphi}^*, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (2.26)$$

Аналогічно до попереднього підрозділу, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (2.23) та умовах (2.24), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \varphi} + \beta_i c_i + \varepsilon \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_l c_g = \\ = \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \varepsilon \alpha_i \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho, \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$c_i(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_i^*(\psi, \eta, t), \quad c_{i,\varphi}(\bar{\varphi}^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q^*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (2.28)$$

де $c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \eta)^2,$$

$$d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi, \quad d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta,$$

$$v^2(\varphi, \psi, \eta) = v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) +$$

$$+ v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) +$$

$v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta))$, (див., напр., [51, 56]).

Розв'язок задачі (2.27), (2.28) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [51, 56]:

$$\begin{aligned}
 c_i &= c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{\hat{\Pi}}_{i,j} + R_{c,i}, \\
 \rho &= \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{\rho}_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\rho}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\rho}}_j + \\
 &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\rho}}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{\rho}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{\hat{\rho}}_j + R_\rho, \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Шляхом підстановки співвідношень (2.29) у (2.27), (2.28) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{ij}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{0, n}$)

$$\begin{cases}
 \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0}, \\
 c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, & c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \\
 \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; &
 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases}
 -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,j} + \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1} = U_{i,j}, \\
 \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1}, \\
 c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, & c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\
 \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; &
 \end{cases} \quad (2.31)$$

Внаслідок послідовного розв'язування задач (2.30)-(2.31) матимемо [51]:

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t - f) \exp \left[-\beta_i \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0} \right) d\tilde{t} + \rho_0^0,$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{U_{i,j}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -\frac{e^{-\lambda_1}}{\sigma_*} \int_0^t \frac{U_{i,j}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1} \right) d\tilde{t},$$

де $U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \eta} \right) +$

$$+ \alpha_i \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= -\beta_i \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \quad \text{— час проходження відповідною}$$

частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$, f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_{ij}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$), $\tilde{\Pi}_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{P}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ знаходяться аналогічно [56].

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [51].

На рис. 2.11 показано розподіл концентрації $c_1(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$, $c_2(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ і $\rho(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ вздовж ліній течії для $c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 170 \exp(-\varphi^2)$ мг/дм³, $c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 35 \exp(-\varphi^2)$ мг/дм³, $c_1^*(\psi, \eta, t) = 170$ мг/дм³, $c_2^*(\psi, \eta, t) = 35$ мг/дм³, $\rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$ мг/дм³, $\beta_1 = 0.07$ с⁻¹, $\alpha_1 = 0.035$ с⁻¹, $\beta_2 = 0.02$ с⁻¹, $\alpha_2 = 0.001$ с⁻¹, $\sigma_0 = 0.5$, $\sigma_* = 1$, $\varepsilon = 0.001$.

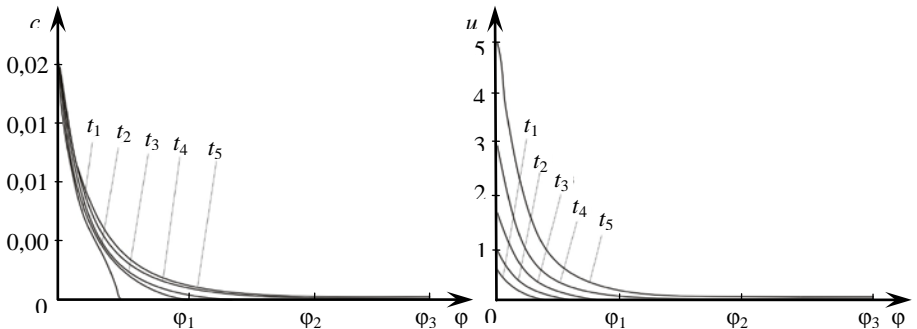


Рис. 1.11. Розподіл концентрації розчинної речовини й осаду вздовж ліній течії $\{(\varphi, \psi_5, \eta_5) : \bar{\varphi}_n \leq \varphi \leq \bar{\varphi}^n\}$ у моменти часу

$$t_i \in \{0,21; 0,38; 0,52; 0,65; 0,87\} \quad (i = \overline{1,5})$$

2.5. Математичне моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення у n -шарових фільтрах

Аналіз результатів досліджень [183-184] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, що визначають процеси фільтрації й фільтрування через пористі середовища, які не враховувалися в традиційні (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування різних взаємовпливів і додаткових факторів, внесених у базову модель для більш глибокого вивчення процесу, приводить до необхідності побудови громіздких і малоефективних (щодо чисельної реалізації й практичного використання) математичних моделей. Проте, у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна застосовувати моделювання різних збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів. В той же час фільтрування в напрямку зменшення еквівалентного діаметру гранул завантаження – один з загально визнаних методів підвищення ефективності роботи фільтрів [16-18].

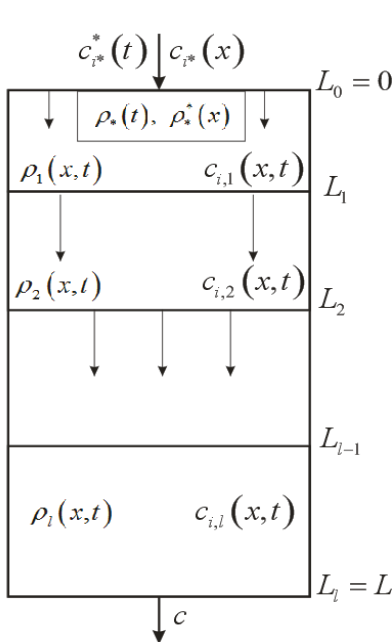


Рис. 2.12. Схематичне зображення n -шарового фільтра в перерізі

використання n -шарових фільтрів. При цьому точність апроксимації результатів, очевидно, тим більша, чим більше число n фільтруючих шарів. Відповідно складність експлуатації n -шарових фільтрів, зокрема, через ускладнення регенерації завантаження, із зростанням n зростає. Через невизначеність максимального економічного ефекту, який може бути отриманий при експлуатації фільтрів з оптимальним гранулометричним складом, на даний час протиріччя між точністю його апроксимації і складністю експлуатації фільтрів вирішується на користь зменшення останньої. Іншими словами, в практиці фільтрування найбільш поширені дво- та n -шарові фільтри.

У складних технологічних умовах, що змінюються, оптимальний гранулометричний склад завантаження повинен був би залежати від часу. Проте через складнощі реалізації і експлуатації на практиці фільтрування не отримали широкого розповсюдження навіть фільтри з “неперервно” неоднорідним завантаженням. З цих же причин фактично обмежуються різними апроксимаціями оптимального гранулометричного складу завантаження, еквівалентний діаметр гранул якого “неперервно” спадає в напрямку фільтрування за певним законом, за рахунок

Відповідно до розглянутих вище досліджень, у підрозділі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) під час моделювання процесів очищення рідини від багатокомпонентних домішок у n -шаровому сорбційному фільтрі.

Розглянемо просторово-одновимірний процес очищення рідини фільтруванням у n -шаровому фільтрі-шарі товщиною L (рис. 2.12), що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі Ox . Припускаємо [39], що частинки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву, сорбції, десорбції), при цьому концентрація забруднення впливає на розглянутий шар.

Концентрація забруднення є багатокомпонентною, $c = c(x, t) = (c_1, \dots, c_m) = (c_1(x, t), \dots, c_m(x, t))$, де $c_i(x, t)$ – концентрація i -ї компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо [39, 51]) представимо у вигляді наступної модельної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_k = \{x: L_{k-1} < x < L_k, 0 < t < \infty\}, k = \overline{1, l-1}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m q_i c_i \right) - \alpha(\rho)\rho + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \left. \frac{\partial c_i}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$c_i|_{t=0} = c_{*i}^*(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_{*}^*(x), \quad (2.33)$$

$$[c_i]_{x=L_k} = 0, \quad [\rho]_{x=L_k} = 0, \quad \left[D_{i,k} \frac{\partial c_i}{\partial x} + v c_i \right]_{x=L_k} = 0, \quad \left[D_{*k} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L_k} = 0, \quad (2.34)$$

$$v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } P, \quad (2.35)$$

де $\rho(x, t)$ – концентрація домішок, захоплених фільтруючою засипкою; $\beta(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує об'єми осадів домішок за одиницю часу, ($\beta(\rho) = \beta_0 - \varepsilon \beta_* \rho(x, t)$); $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує об'єм часток, відірваних за той же час від гранул засипання, ($\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_* \rho(x, t)$); $c_i^*(t)$ – концентрація домішок на вході фільтра; $\sigma(\rho)$ – пористість фільтруючої насадки, $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x, t)$, де σ_0 – вихідна пористість насадки, $\kappa(\rho)$ – коефіцієнт фільтрації,

$$\kappa(\rho) = \kappa_0 - \varepsilon \gamma \rho(x, t) \quad (x \in [L_{k-1}, L_k]); \quad D_i = \begin{cases} D_{i,1} = b_1 \varepsilon, \\ \dots \\ D_{i,l} = b_l \varepsilon, \end{cases}$$

$$D_* = \begin{cases} D_{*1} = b_{*1} \varepsilon, \\ \dots \\ D_{*l} = b_{*l} \varepsilon, \end{cases}, \quad \beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, b_k, b_{*k}, q_i, \kappa_0, \varepsilon \quad - \text{ тверді}$$

параметри, що характеризують відповідні коефіцієнти; $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho), \kappa(\rho)$ – м'які параметри, знайдені експериментальним способом; ε – малий параметр; v – швидкість фільтрування, $[L_{k-1}, L_k]$ – k -й шар фільтру

($k = 1, 2, \dots, l$); P – тиск, у рівняннях (2.34) [] – приріст відповідної функції у точці $x = L_k$.

При цьому тиск $P = P(x, t)$ визначається в результаті розв’язання рівняння $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\rho) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma(\rho) P}{\partial t}$, яке отримано

на підставі закону руху і рівняння стану $\operatorname{div} v = \frac{\partial \sigma(\rho) P}{\partial t}$, при крайових, $P(0, t) = P_*(t)$, $P(L, t) = P^*(t)$ $0 < t < \infty$ і початкових $P(x, 0) = P_*(x)$, $0 < x < L$, умовах, де $P_*(t)$, $P^*(t)$, $P_*(x)$ – задані достатньо гладкі й погоджені й у кутових точках області G_k функції.

Для спрощення викладу розглянемо важливий для практики випадок, поле швидкостей $v = v(x, t)$ є заданим.

Асимптотичне наближення розв’язку модельної задачі

$$c_i(x, t) = \begin{cases} c_{i,1}(x, t), & L_0 = 0 \leq x < L_1, \\ c_{i,2}(x, t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ c_{i,l}(x, t), & L_{l-1} \leq x < L_l = L, \end{cases} \quad \rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1(x, t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \rho_2(x, t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \rho_l(x, t), & L_{l-1} \leq x < L_l = L, \end{cases}$$

знаходимо у вигляді асимптотичних рядів [39, 51]:

$$\begin{aligned} c_{i,k}(x, t) &= c_{i,k,0}(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,k,j}(x, t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{M}_{i,k,j}(\tilde{\xi}, t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{M}_{i,k,j}(\tilde{\xi}, t) + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j A_{i,l,j}(\xi, t) + R_{c_{i,k}}(x, t, \varepsilon), \\ \rho_k(x, t) &= \rho_{k,0}(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_{k,j}(x, t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_{k,j}(\tilde{\mu}, t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_{k,j}(\tilde{\mu}, t) + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^{j/2} B_{l,j}(\mu, t) + R_{\rho,k}(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.36)$$

де $R_{cj,k}, R_{\rho,k}$ – залишкові члени, $c_{i,k,j}(x,t), \rho_{k,j}(x,t)$, $(i = \overline{1,m}; j = \overline{0,n}; k = \overline{0,l})$ – члени регулярних частин асимптотики; $\underline{M}_{i,k,j}(\underline{\xi}, t), \tilde{M}_{i,k,j}(\tilde{\xi}, t)$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{0,n+1})$, $\underline{P}_{k,j}(\underline{\mu}, t), \tilde{P}_{k,j}(\tilde{\mu}, t)$, $(j = \overline{0,2n+1}, k = \overline{0,l-1})$ – функції типу прилежового шару в околі точки $x = L_k$ (поправки на переходи фільтраційного потоку із одного даного k -го шару фільтра в наступний), $A_{i,l,j}(\xi, t), B_{l,j}(\mu, t)$ $(j = \overline{0,m+1})$ – функції типу прилежового шару в околі точки $x = L$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\tilde{\xi} = x \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = x \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\tilde{\xi} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення. Після підстановки (2.36) в (2.32), (2.33) і застосування стандартної процедури прирівнювання для визначення функцій $c_{i,k,j}, \rho_{k,j}$, $j = \overline{0,n}$ [39], отримаємо

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,k,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,k,0}}{\partial x} + q_i c_{i,k,0} = 0, \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,k,0} \right) - \alpha_0 \rho_{k,0}, \\ c_{i,k,0} \Big|_{x=0} = \bar{c}_{i,k}(t), \rho_{k,0} \Big|_{x=0} = \bar{\rho}_k(t), c_{i,k,0} \Big|_{t=0} = \bar{c}_{i,k}(x), \rho_{k,0} \Big|_{t=0} = \bar{\rho}_k(x), \end{cases} \quad (2.37)$$

де $\bar{c}_{i,k}(t) = c_i^*(t)$, $\bar{\rho}_k(t) = \rho^*(t)$, якщо $k = 0$,
 $\bar{c}_{i,k}(t) = c_{i,k-1,0}(L_{k-1}, t)$, $\bar{\rho}_k(t) = \rho_{k-1,0}(L_{k-1}, t)$, якщо $k = \overline{1,l}$;

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{k,j-1} \frac{\partial c_{i,k,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,k,j}}{\partial x} - q_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{k,j-1}}{\partial t} c_{i,j} = g_{i,k,j}, \\ \frac{\partial \rho_{k,j}}{\partial t} = -\beta_* \rho_{k,j-1} \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,k,j} \right) - \alpha_* \rho_{k,j-1} \rho_{k,j}, \\ c_{1,k,j} \Big|_{x=0} = 0, c_{2,k,j} \Big|_{x=0} = 0, \rho_{k,j} \Big|_{x=0} = 0, c_{1,k,j} \Big|_{t=0} = 0, \\ c_{2,k,j} \Big|_{t=0} = 0, \rho_{k,j} \Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,l-1}; \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{i,k-1} \underline{M}''_{i,k,0\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) + \underline{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) = 0, \underline{M}_{i,k,0}(\tilde{\xi}, t) \xrightarrow[\tilde{\xi} \rightarrow \infty]{} 0, \\ b_{i,k} \tilde{M}''_{i,k,0\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) - \tilde{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) = 0, \tilde{M}_{i,k,0}(\tilde{\xi}, t) \xrightarrow[\tilde{\xi} \rightarrow \infty]{} 0, \\ c_{i,k-1,j}(L_{k-}, t) + \underline{M}_{i,k,0}(0_-, t) = c_{i,k,j}(L_{k+}, t) + \tilde{M}_{i,k,0}(0_+, t), \\ \left(c'_{i,k-1,0x}(L_{k-}, t) + \underline{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(0_-, t) \right) = \frac{b_{i,k}}{b_{i,k-1}} \left(c'_{i,k,0x}(L_{k-}, t) + \tilde{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(0_+, t) \right); \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{*k-1} \underline{P}''_{k,0\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) + \underline{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) = 0, \underline{P}_{k,0}(\tilde{\mu}, t) \xrightarrow[\tilde{\mu} \rightarrow \infty]{} 0, \\ b_{*k} \tilde{P}''_{k,0\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) - \tilde{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) = 0, \tilde{P}_{k,0}(\tilde{\mu}, t) \xrightarrow[\tilde{\mu} \rightarrow \infty]{} 0, \\ \rho_{k-1,j}(L_{k-}, t) + \underline{P}_{k,0}(0_-, t) = \rho_{k,j}(L_{k+}, t) + \tilde{P}_{k,0}(0_+, t), \\ \left(\rho'_{k-1,0x}(L_{k-}, t) + \underline{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(0_-, t) \right) = \frac{b_{*k}}{b_{*k-1}} \left(\rho'_{k,0x}(L_{k-}, t) + \tilde{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(0_+, t) \right); \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{i,k-1} \underline{M}''_{i,k,0\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) + \underline{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) = m_{i,k}(\tilde{\xi}, t), \underline{M}_{k,0}(\tilde{\xi}, t) \xrightarrow[\tilde{\xi} \rightarrow \infty]{} 0, \\ b_{i,k} \tilde{M}''_{i,k,0\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) - \tilde{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, t) = \tilde{m}_{i,k}(\tilde{\xi}, t), \tilde{M}_{i,k,0}(\tilde{\xi}, t) \xrightarrow[\tilde{\xi} \rightarrow \infty]{} 0, \\ c_{i,k-1,j}(L_{k-}, t) + \underline{M}_{i,k,0}(0_-, t) = c_{i,k,j}(L_{k+}, t) + \tilde{M}_{i,k,0}(0_+, t), \\ \left(c'_{i,k-1,0x}(L_{k-}, t) + \underline{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(0_-, t) \right) = \frac{b_{i,k}}{b_{i,k-1}} \left(c'_{i,k,0x}(L_{k-}, t) + \tilde{M}'_{i,k,0\tilde{\xi}}(0_+, t) \right), i = \overline{1, n}; \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{*k-1} \underline{P}''_{k,0\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) + \underline{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) = p_k(\tilde{\mu}, t), \underline{P}_{k,0}(\tilde{\mu}, t) \xrightarrow[\tilde{\mu} \rightarrow \infty]{} 0, \\ b_{*k} \tilde{P}''_{k,0\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) - \tilde{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, t) = \tilde{p}_k(\tilde{\mu}, t), \tilde{P}_{k,0}(\tilde{\mu}, t) \xrightarrow[\tilde{\mu} \rightarrow \infty]{} 0, \\ \rho_{k-1,j}(L_{k-}, t) + \underline{P}_{k,0}(0_-, t) = \rho_{k,j}(L_{k+}, t) + \tilde{P}_{k,0}(0_+, t), \\ \left(\rho'_{k-1,0x}(L_{k-}, t) + \underline{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(0_-, t) \right) = \frac{b_{*k}}{b_{*k-1}} \left(\rho'_{k,0x}(L_{k-}, t) + \tilde{P}'_{k,0\tilde{\mu}}(0_+, t) \right), i = \overline{1, n}; \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} b_{i,l} A''_{i,l,j,\xi\xi} + v A'_{i,l,j,\xi} = I(j) B'_{i,l,j-1,t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} B'_{i,l,j,t} + I(j+1) B'_{i,l,j,t} + \sigma_0 A'_{i,l,j-1,t}, \\ A_{i,l,j} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad A'_{i,l,j,\xi}(L_j, t) = K_j(t); \end{cases} \quad (2.43)$$

$$b_{*l}(x) B''_{l,j,\mu\mu} - \alpha_j(x) B_{l,j} - B'_{l,j,t} = 0, \quad B_{l,j} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad B'_{l,j,\mu}(L_j, t) = H_j(t);$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a - \text{ парне,} \\ 1, & \text{якщо } a - \text{ непарне,} \end{cases} \quad K_j(t) = \begin{cases} 0, & j = m+1, \\ -c'_{i,l,j,x}(L_j, t), & j = 0, \dots, m, \end{cases}$$

$$H_j(t) = \begin{cases} 0, & j = m+1, \\ -\rho'_{l,j,x}(L_j, t), & j = 0, \dots, m. \end{cases}$$

У результаті розв'язання задач (2.37), (2.38) знаходимо:

$$c_{i,k,0}(x, t) = \begin{cases} \bar{c}_{i,k}^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{q_i x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ \bar{c}_{*i,k}^* \left(x - \frac{vt}{\sigma_0} \right) \cdot e^{q_i t}, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_{k,0}(x, t) = \beta_0 e^{-\alpha_0 t} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,k,0}(x, \tilde{t}) \right) e^{\alpha_0 \tilde{t}} d\tilde{t} + \bar{\rho}_{k*}^*(x),$$

$$c_{i,k,j}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 e^{-\int_0^x \lambda_{k,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{v} \times \\ \times \int_0^x \frac{g_{i,k,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{-\int_0^{\tilde{x}} \lambda_{k,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{k,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ e^{-\int_0^t \lambda_{k,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}} \times \\ \times \int_0^t \frac{-\int_0^{\tilde{t}} \lambda_{k,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t}) d\tilde{t}}{g_{i,k,j}(f^{-1}(\tilde{t}+f(x)-t), \tilde{t})} d\tilde{t}, & t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_{k,j}(x,t) = -\beta_* e^{-\alpha_* \int_0^t \rho_{k,j-1}(x,\tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t \rho_{k,j-1}(x,\tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,k,j}(x,\tilde{t}) \right) e^{\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_{k,j-1}(x,\tilde{t}) d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

де $g_{i,k,j}(x,t) = b_{i,k} \frac{\partial^2 c_{i,k,j-1}}{\partial x^2} + q_i \rho_{k,j-1}$, $\lambda_{k,j}(x,t) = -q_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{k,j-1}}{\partial t}$,

$$m_{i,k}(\xi,t) = I(j) P'_{k,j-1t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} P'_{k,jt} + I(j+1) P'_{k,jt} + \sigma(x) M'_{i,k,j-1t},$$

$$\tilde{m}_{i,k}(\xi,t) = I(j) \tilde{P}'_{k,j-1t} + I(j) \varepsilon^{\frac{j}{2}} \tilde{P}'_{k,jt} + I(j+1) \tilde{P}'_{k,jt} + \sigma_0 \tilde{M}'_{i,k,j-1t},$$

$$P_k(\mu,t) = -\alpha_0 P_k, \quad \tilde{P}_k(\mu,t) = -\alpha_0 \tilde{P}_k, \quad I(a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a - \text{ парне,} \\ 1, & \text{якщо } a - \text{ непарне.} \end{cases}$$

Наближені значення функцій $f_j(x)$ знаходимо шляхом [39, 51] інтерполяції масиву (x_i, t_i) , $i = \overline{1, n}$, де $x_i = \Delta x \cdot i$,

$t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{j-1}(x_i, t_i)$. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [39].

Функції $M_{i,k,j}(\xi,t)$, $\tilde{M}_{i,k,j}(\xi,t)$, $P_{k,j}(\mu,t)$, $\tilde{P}_{k,j}(\mu,t)$, $A_{i,l,j}(\xi,t)$, $B_{l,j}(\mu,t)$ знаходяться аналогічно до [51].

Для спрощення викладок вважатимемо, що концентрація забруднення є двокомпонентною, тоді система (2.32)-(2.33) перепишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(x,t)c_1(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_1(x,t))}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(\sigma(x,t)c_2(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_2(x,t))}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho)(q_1 c_1(x,t) + q_2 c_2(x,t)) - \varepsilon \alpha(\rho) \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.44)$$

$$c_1|_{x=0} = c_1^*(t), \quad c_1|_{t=0} = 0, \quad c_2|_{x=0} = c_2^*(t), \quad c_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0, \quad (2.45)$$

$$\rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0,$$

$$[c_1]_{x=L_k} = 0, \quad [c_2]_{x=L_k} = 0, \quad [\rho]_{x=L_k} = 0,$$

$$\left[D_{1,k} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \nu c_1 \right]_{x=L_k} = 0, \quad \left[D_{2,k} \frac{\partial c_2}{\partial x} + \nu c_2 \right]_{x=L_k} = 0, \quad \left[D_{*k} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L_k} = 0. \quad (2.46)$$

Розв'язки системи диференціальних рівнянь (2.44) за умов (2.45)-(2.46) шукаємо аналогічно до загальної задачі у вигляді асимптотичних рядів (див. [39, 51]).

Наведемо результати розрахунків за формулами (2.36) при $c_1^*(t) = 170 \text{ мг/дм}^3$, $c_2^*(t) = 35 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$; $\nu = 1/360 \text{ м/с}$; $\beta_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$; $q_1 = q_2 = 1$; $\alpha_0 = 0.0056 \text{ с}^{-1}$; $\sigma_0 = 0.5$; $\alpha_* = 1$; $\beta_* = 1$; $\sigma_* = 1$; $b = b_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

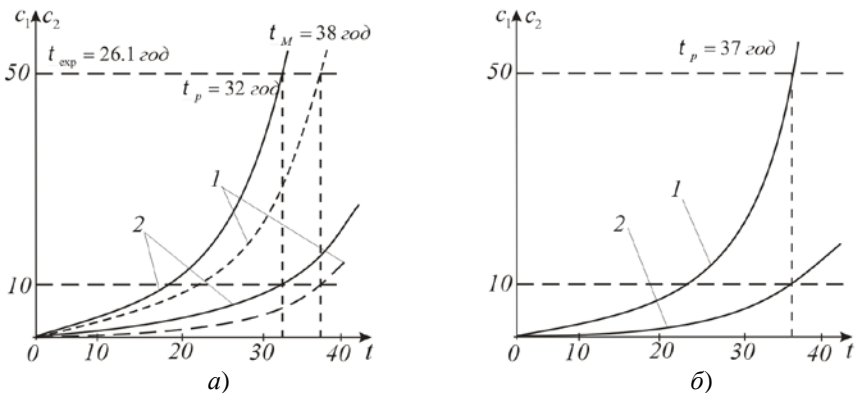


Рис. 2.13. Графіки розподілу концентрації забруднення на виході фільтр в момент часу t : 1 – за Мінцом; 2 – за формулами (2.36) при $k = 1$ – (а) та по формулах (2.36) при $k = 2$ – (б)

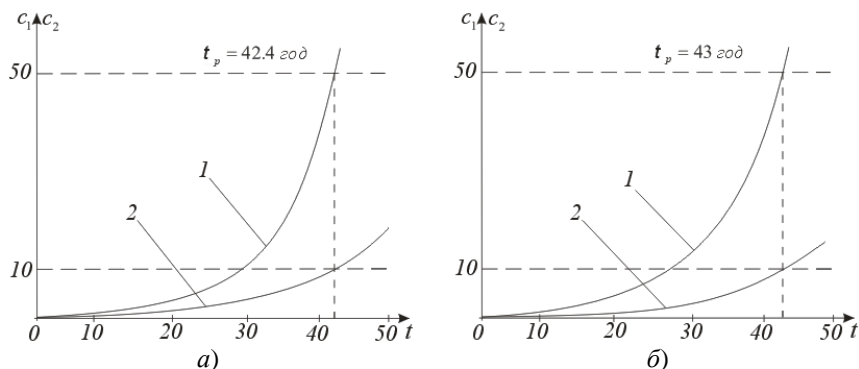


Рис. 2.14. Графіки розподілу концентрації забруднення на виході фільтр в момент часу t за формулами (2.36) при $k = 3$ – (а) та $k = 4$ – (б)

2.6. Комп'ютерне моделювання процесу очищення води фільтром-освітлювачем із шаром завислого осаду

При підготовці питної води з природних джерел централізованого водопостачання використовується система, що складається з освітлювачів і фільтруючих пристроїв. Ці пристрої компактно об'єднані в установці з плаваючим фільтруючим завантаженням, що показала позитивні результати. Максимальна ступінь очищення природної води залежить, як відомо, від дози реагенту.

В роботі [20] для установки, що суміщає процеси освітлення води і фільтрування, виконаної за патентом, отримані моделі очищення природної води, як в освітлювачі, так і в фільтрі. Для фільтра враховано вплив дози реагенту, а для освітлювача такого обліку немає. У [20] відсутній кількісний аналіз впливу дози реагенту (коагулянту) на роботу освітлювача. Автор вважає, що отриманий критерій сепарації справедливий “при нормальних умовах роботи освітлювача: при правильному безперебійному дозуванні коагулянту, при відсутності розбивання пластівців коагульованої суспензії і

частих, різких коливань продуктивності освітлювача і температури води”.

При очищенні води колоїдно-дисперсною системою, процес розділення рідкої і твердої фаз інтенсифікується за рахунок укрупнення домішкових частинок у агрегати за допомогою реагентних і безреагентних методів. До перших відносяться методи введення у воду, що очищується, флокулянтів, окислювачів, регуляторів рН, мінеральних замутнювачів. До других – перемішування води, обробленої коагулянтами; різноманітні способи введення коагулянтів у воду; суміщення коагуляції коагулянтами, що гідролізуються, з фізичними методами коагуляції – обробки води у магнітному і електричному полях, іонізуючим опромінюванням, ультразвуком, тощо. Накопичено колосальний експериментальний матеріал з цих питань. Проте його достовірність часто викликає сумніви. На необхідність дуже обережного підходу до експериментального фонду звертав увагу, зокрема, Е.Д. Бабенков: “Притягуючи у вибіркового порядку експериментальний матеріал, що стосується окремих питань коагуляції можна обґрунтувати чи спростувати фактично будь-що, навіть теоретичні уявлення, які суперечать одне одному”. Вищесказане свідчить про необхідність розвитку теорії процесів очищення води з єдиних позицій на більш високому математичному рівні, ніж це прийнято в колоїдній хімії, так як, очевидно, в загальному випадку складні процеси не можуть бути достатньо адекватно описані елементарними методами [49].

Виходячи з вище сказаного, метою даної роботи є формування та аналіз математичної моделі очищення природної води в фільтрі-освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок.

Розглянемо криволінійний шестигранний фільтр $G_z = ABCDA * B * C * D *$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, екіпотенціальними

поверхнями $ABCD = \{(x, y, z) : f_1(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : z = f_1^*(x, y)\}$,
 $A_*B_*C_*D_* = \{(x, y, z) : f_2(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : z = f_2^*(x, y)\}$ (де
 $f_1(x, y, f_1^*(x, y)) = 0$, $f_2(x, y, f_2^*(x, y)) = 0$) та поверхнями течії
 $ADD_*A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$,
 $ABB_*A_* = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$
(рис. 2.15, б), як геометричну інтерпретацію фільтра-
освітлювача із шаром завислого осаду (рис. 2.15, а) [49].

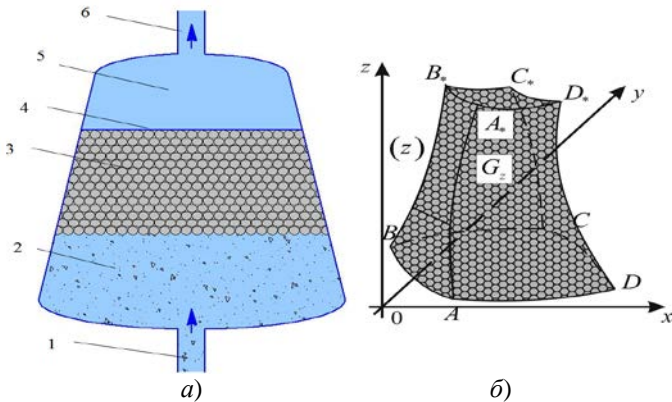


Рис. 2.15. Поперечний переріз фільтра – (а) та відповідна просторова фізична область G_z – (б) (1 – подача вихідної води, 2 – розподільна система, 3 – пінополістирольна засипка, 4 – утримуюча решітка, 5 – надфільтровий простір, 6 – відвід чистої води)

Припускаємо [49, 51], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на характеристики відповідного середовища. Відповідний процес фільтрування, як узагальнення [51], опишемо такою модельною задачею:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial((1-\varepsilon(P+\bar{\alpha}C))C)}{\partial t} &= -\gamma P(M, t-\tau)C(M, t-\tau) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha U(M, t-\tau) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P - g\rho(1-\varepsilon(P+\bar{\alpha}C))(z - f_1^*(x, y)), \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -\beta P(M, t-\tau) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U + D_u \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \end{aligned} \right. (x, y, z, t) \in G = G_z \times (0, \infty). \quad (2.47)$$

$$C|_{ABCD} = C_*(M, t), \quad P|_{ABCD} = P_*(M, t), \quad U|_{ABCD} = U_*(M, t),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABB_*A_* \cup CDC_*D_*} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABB_*A_* \cup CDC_*D_*} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABB_*A_* \cup CDC_*D_*} = 0,$$

$$\begin{aligned} C(x, y, z, \tilde{t}) &= C_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad P(x, y, z, \tilde{t}) = P_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \\ U(x, y, z, \tilde{t}) &= U_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\vec{v} = \kappa(P)\nabla\varphi, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.49)$$

$$\varphi|_{ABCD} = \varphi_*, \quad \varphi|_{A_*B_*C_*D_*} = \varphi^*, \quad (2.50)$$

де $C(M, t)$, $P(M, t)$, $U(M, t)$ – відповідно концентрації домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії [49] у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона, γ – коефіцієнт, що характеризує захоплення забруднених частинок пластівцями, α , β – відповідно коефіцієнти, що характеризують кількість реагенту для утворення пластівців та пластівців утворених реагентом за одиницю часу, g – прискорення вільного падіння, ρ – густина, $\bar{\alpha}$ – коефіцієнт

трансформації (забруднень у пластівці), D_C, D_U – коефіцієнти дифузії, де $D_C = b_C \varepsilon$, $D_U = b_U \varepsilon$, $0 < b_C \leq 1$, $0 < b_U \leq 1$, ε – малі параметри, $\tau > 0$ – запізнення. Відмітимо, що функції $C_*(M, t)$, $P_*(M, t)$, $U_*(M, t)$, $C_0^0(M, t)$, $P_0^0(M, t)$, $U_0^0(M, t)$ є достатньо гладкими і узгодженими в кутових точках області їх задання. Крім цього вважаємо, що функції $C_0^0(M, t)$, $P_0^0(M, t)$, $U_0^0(M, t)$ при $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняють умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $C = C(M, t)$, $P = P(M, t)$, $U = U(M, t)$ цієї задачі при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \dots$); M – біжуча точка відповідної поверхні; φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Прийемо, що задача (2.49), (2.50) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу) при деякому усередненому значенні $\kappa \in$ розв'язана, зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$ [49]. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (2.47) та умовах (2.48), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$ (див., наприклад, [51]):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \left((1 - \varepsilon(p + \bar{\alpha}c))c \right)}{\partial t} &= -\gamma pc - v^2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \varepsilon d_c \left(v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \alpha u - v^2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} - g\rho(1 - \varepsilon(p + \bar{\alpha}c))(\varphi - \varphi_*), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\beta p - v^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \varepsilon d_u \left(v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \right. \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= c_*(\psi, \eta, t), & c_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) &= 0, \\ c_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= c_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = c_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ p(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= p_*(\psi, \eta, t), & p_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) &= 0, \\ p_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= p_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = p_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = p_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ u(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= u_*(\psi, \eta, t), & u_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) &= 0, \\ u_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= u_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = u_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = u_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_0^0(\varphi, \psi, \eta), & \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) &= \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \\ u(\varphi, \psi, \eta, 0) &= u_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,
 $\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,
 $u = u(\varphi, \psi, \eta, t) = U(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$.

Задачу (2.51) – (2.52) (із запізненням τ) зведемо до послідовності задач без запізнення (на часових проміжках $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n = 1, 2, \dots$) [51]:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left(1 - \varepsilon \left(p_t^{[n]} + \bar{a}c_t^{[n]}\right)c_t^{[n]}\right) = -\gamma p_{nr} c_{nr} - v^2 c_\phi^{[n]} + \\
 & + \varepsilon d_c \left(v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \phi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \\
 & p_t^{[n]} = \alpha u_{nr} - v^2 p_\phi^{[n]} - g \rho \left(1 - \varepsilon \left(p^{[n]} + \bar{a}c^{[n]}\right)c^{[n]}\right) (\varphi - \varphi_*), \\
 & u_t^{[n]} = -\beta p_{nr} - v^2 u_\phi^{[n]} + \varepsilon d_u \left(v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \\
 & c^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \quad c_{nr}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = \\
 & = c^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \quad c^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0), \\
 & p^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = p_*(\psi, \eta, t), \quad p_{nr}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = p^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = \\
 & p^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \quad p^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = p_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0), \\
 & u^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t), \quad u_{nr}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = u^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = \\
 & = u^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \quad u^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = u_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0).
 \end{aligned} \right. \quad (2.53)$$

Розв'язок задачі (2.53) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [49, 51]:

$$\begin{aligned}
 c^{[n]} &= c_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\Pi}_j^{[n]} + \\
 & + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\Pi}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\tilde{\Pi}}_j^{[n]} + R_c^{[n]}, \\
 p^{[n]} &= p_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j p_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j^{[n]} + \\
 & + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{P}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\tilde{P}}_j^{[n]} + R_p^{[n]}, \quad (2.54) \\
 u^{[n]} &= u_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j u_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{U}}_j^{[n]} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{U}_j^{[n]} + R_u^{[n]},$$

де $R_c^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_p^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_u^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени, $c_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $p_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$ – члени регулярної частини асимптотики ($j = \overline{0, n}$); $\Pi_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{U}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ – функції типу примежового шару в околі на часових проміжках $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\bar{\Pi}_j^{[n]}(\bar{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j^{[n]}(\bar{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\bar{U}_j^{[n]}(\bar{\xi}, \psi, \eta, t)$ – в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\widehat{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\widehat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{U}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{U}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\widehat{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = \overline{0, 3}$) – в околах $\psi = 0$, $\psi = Q^*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$, $\bar{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$, $\tilde{\psi} = (Q^* - \psi)/\varepsilon$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \psi/\varepsilon$, $\tilde{\eta} = (Q^* - \eta)/\varepsilon$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \eta/\varepsilon$.

Аналогічно [51], в результаті підстановки (2.55) в (2.56), застосування стандартної “процедури прирівнювання” та розв’язання відповідних проміжних задач маємо:

$$c_0^{[n]} = \begin{cases} c_* (\psi, \eta, t - f) \exp \left[-\gamma \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{p_{nr} c_{nr} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ c_0^0 (f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[-\gamma p_{nr} c_{nr} t], & t < f, \end{cases}$$

$$c_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_{c1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{C}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_{c2}(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_{c1}} \int_{(n-1)\tau}^t \frac{\bar{C}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_{c2}(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$p_0^{[n]} = \begin{cases} p_*(\psi, \eta, t - f) \exp \left[\alpha \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{u_{nr} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ p_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[\alpha u_{nr} t], & t < f, \end{cases}$$

$$p_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_{p1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{P}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_{p2}(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_{p1}} \int_{(n-1)\tau}^t \bar{P}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s) e^{\lambda_{p2}(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$u_0^{[n]} = \begin{cases} u_*(\psi, \eta, t - f) \exp \left[-\beta \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{p_{nr} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ u_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[-\beta p_{nr} t], & t < f, \end{cases}$$

$$u_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_4} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{U}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_4} \int_{(n-1)\tau}^t \bar{U}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s) e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\text{де } \bar{c}_j^{[n]} = \left(\frac{\partial p_{j-1}^{[n]}}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial c_{j-1}^{[n]}}{\partial t} \right) \frac{\partial c_{j-1}^{[n]}}{\partial t}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\bar{C}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{c1} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c_j^{[n]}}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c_j^{[n]}}{\partial \eta} \right) - \gamma p_{j-1}^{[n]} c_{j-1}^{[n]},$$

$$\lambda_{c1}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\gamma \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{c2}(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= -\gamma \int_{(n-1)\tau}^t \frac{\rho_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$\bar{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha u_{j-1}^{[n]} - g \rho (p_{j-1}^{[n]} + \bar{\alpha} c_{j-1}^{[n]}) c_{j-1}^{[n]}(\varphi - \varphi_*),$$

$$\lambda_{p1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{u_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{p2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha \int_{(n-1)\tau}^t u_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) d\tilde{s},$$

$$\bar{C}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{ui} \left(v^2 \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u_j^{[n]}}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u_j^{[n]}}{\partial \eta} \right) - \beta p_{j-1}^{[n]},$$

$$\lambda_{u1}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{u2}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta \int_{(n-1)\tau}^t p_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \quad \text{— час проходження відповідною}$$

частинкою шляху від точки

$(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки

$(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної

лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$,

$0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$, f^{-1} — функція, обернена

до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує,

оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція.

Функції $\Pi_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{U}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_j^{[n]}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{U}_j^{[n]}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$, $\tilde{U}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ знаходяться аналогічно [49].

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [51].

Наведемо результати числового експерименту при $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 100 \exp(-\varphi^2)$ мг/дм³, $c_*(\psi, \eta, t) = 100$ мг/дм³, $p_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$ мг/дм³, $p_*(\psi, \eta, t) = 0$ мг/дм³, $u_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 100$ мг/дм³, $u_*(\psi, \eta, t) = 0$ мг/дм³,

$\gamma = \frac{1}{10}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 0.01$. Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, “монотонність звуження” в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми “підказує” практика), та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі [51] побудовано розрахункову динамічну сітку в G_z :

$$\varphi(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_i = \varphi_* + \left[(\varphi^* - \varphi_*) i \right] / n, \quad i = \overline{0, n},$$

$$\psi(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\psi}_j = (Q_* j) / m, \quad j = \overline{0, m},$$

$\eta(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\eta}_k = (Q^* k) / l, \quad k = \overline{0, l}$ для $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 6000$, $\kappa = 1$, $n = 30$, $m = 16$, $l = 16$ (параметри n , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,341$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $d_{i0}(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$) [51].

На рис. 2.16 – рис. 2.18 зображено розподіли c , p і u при $t_0 = 0,1$ год, $t_0 = 0,3$ год, $t_0 = 0,5$ год, $t_0 = 0,7$ год.

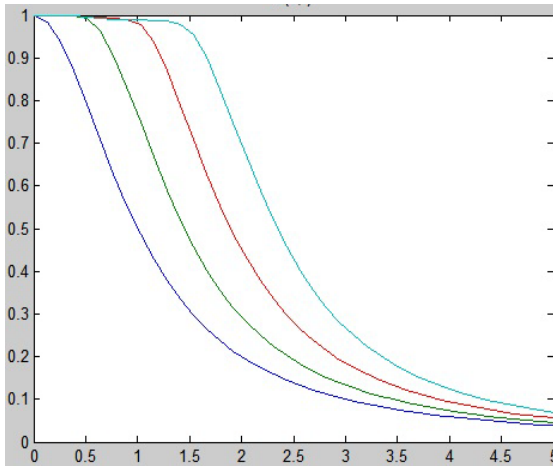


Рис. 2.16. Розподіл концентрації домішок c в різні моменти часу

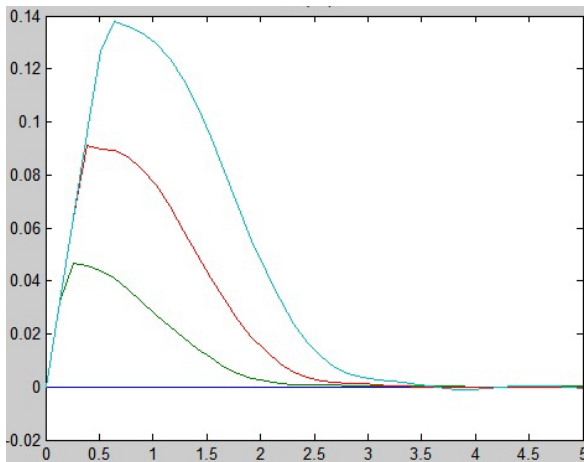


Рис. 2.17. Розподіл концентрації пластивців p в різні моменти часу

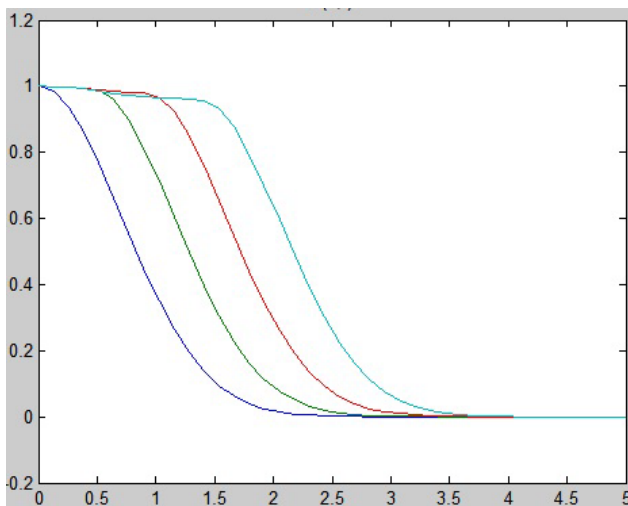


Рис.2.18. Розподіл концентрації речовини для створення пластівців u в різні моменти часу

Як бачимо концентрація домішок та коагулянтів вздовж фільтра-освітлювача з часом спадає, що підтверджує загальновідомий факт. Розподіл же концентрації пластівців (див. рис. 2.18) на початку фільтра стрімко зростає, до досягнення деякого стану “насичення”, досягнувши якого починає спадати. Це пояснюється тим, що саме в перших шарах фільтра під дією коагулянтів, відбувається реакція створення пластівців.

2.7. Висновки до другого розділу

1. Розроблено нову математичну модель процесу фільтрування двокомпонентних стічних вод, яка враховує зворотній вплив на фільтраційні компоненти, зокрема, на пористість, коефіцієнти захоплених частинок забруднення і відірваних частинок осаду, що дає можливість визначити важливі параметри процесу фільтрування (час захисної дії фільтра, граничне завантаження осаду, гранична втрата

напору тощо). Побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін”. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок для різних швидкостей, що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) засипки.

2. Побудовану математичну модель перенесено на процес, що описує закономірності магнітного осадження домішок в пористій фільтруючій насадці, закономірності накопичення (“заносу”) домішок у насадці, а також враховує зворотний вплив концентрації осаду на коефіцієнти пористості, фільтрації та масообміну. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної задачі, що, зокрема, включає: визначення часу захисної дії фільтруючої насадки, визначення граничної величини перепаду. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини насадки L , що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) насадки. В рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок в намагніченій фільтруючій насадці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається;

3. Розроблену математичну модель перенесено на процес очищення стічної води на сорбційних фільтрах з урахуванням зворотного впливу концентрації осаду на характеристики середовища та змінну швидкість фільтрування. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях швидкості фільтрування, та характеристик засипки фільтра. Проведена порівняльна характеристика даних отриманих дослідним шляхом і розрахованих на основі класичної моделі Мінца та одержаних

нами формул (зокрема, згідно даних наведених на рис. 2.3 та рис. 2.4, бачимо, що точність розрахунків за запропонованими нами формулами є значно більшою у порівнянні з розрахунками отриманими за класичною моделлю Мінца).

4. Сформовано просторову математичну модель, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну і т. ін.) під час моделювання процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень п-шаровими сорбційними фільтрами.

5. Сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води в освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової задачі для системи диференціальних рівнянь типу “конвекція-дифузія-масообмін”. Отримано розрахункові залежності концентрацій домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії з метою інженерного прогнозування залежності між затратами на виробництво фільтра-освітлювача та ступенем ефективності його роботи.

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАЗНИХ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ РІДИН У БІОЛОГІЧНИХ ФІЛЬТРАХ

Даний розділ присвячено розробці математичних моделей процесів біологічної очистки рідини від багатокомпонентного забруднення, зокрема моделюванню процесу прояснення стічної води у прояснювачі, моделюванню процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі, побудові числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення стічної води, моделюванню сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму, комп'ютерне моделювання процесу біологічного очищення води у регенераторі аеротенка.

3.1. Математичне моделювання процесу прояснення стічної води у прояснювачі

В практиці реагентної очистки води набули значного поширення прояснювачі з завислим шаром осаду. Процес прояснення води в таких спорудах протікає за умов одночасного затриманням домішок, що надходять зі свіжою водою, формуванням шару завислого осаду і відведенням надлишкової його маси за межі споруд. Такі споруди спроможні забезпечити достатньо якісне вилучення дисперсних домішок з води [262].

Процеси, що протікають в прояснювачах з завислим шаром осаду, під час прояснення води в його товщі, характеризуються достатньо хорошою вивченістю – мають широку інформативну базу теоретичного обґрунтування і експериментальної апробації [51]. Проте постійний інтерес широкого кола науковців до цих споруд, скерований на їх

удосконалення, свідчить не тільки про ефективність цих споруд, але і про потребу більш глибокого їх вивчення.

Відсутність досконалої математичної моделі опису сутнісних процесів формування шару завислого осаду є перепорою на шляху вирішення оптимізаційних задач, скерованих на удосконалення конструктивних елементів прояснювача, пошуку раціональних значень технологічних параметрів його роботи тощо.

Процес очищення стічної води у прояснювачі можна розділити на 2 стадії, що протікають одночасно: формування шару завислого осаду, що супроводжується вилученням з води дисперсних домішок і відвід надлишкової частини завислого осаду за межі споруди.

Забруднена попередньо оброблена реагентом вода, що характеризується присутністю домішок з концентрацією C^0 надходить в нижню частину прояснювача (рис. 3.1).

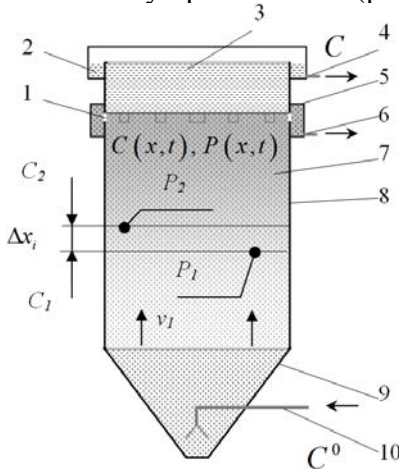


Рис. 3.1. Розрахункова схема прояснювача

1 – перепускні вікна; 2 – колектор збору проясненої води; 3 – зона проясненої води; 4 – трубопровід відводу проясненої води; 5 – колектор збору надлишкового шару осаду; 6 – трубопровід відводу надлишкового осаду; 7 – шар завислого осаду; 8 – корпус прояснювача; 9 – конічна частина прояснювача; 10 – трубопровід подачі забрудненої води на прояснення

В прояснювачі частинки домішок разом з водою рухаються в висхідному напрямку зі швидкістю v . Під час руху частинки в присутності гідроокису реагенту взаємодіють між собою і, збільшуючись в розмірах і масі, утворюють шар завислого осаду. Для опису цього процесу, аналогічно до [262], виділимо елементарний шар завислого осаду Δx на відстані x подачі забрудненої води. Площу поперечного перетину прийемо за одиницю. За таких умов зміну концентрації забруднення на відстані x у момент часу t можна представити у вигляді [262]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C - \gamma C, \quad (3.1)$$

де $C(x, t)$ – концентрація домішок в певній точці прояснювача в певний момент часу, v – швидкість руху води шарі завислого осаду (швидкість фільтрування), β – коефіцієнт, що характеризує ймовірність переходу забруднення у завислий осад, γ – коефіцієнт, що характеризує ймовірність випадання частинок в осад (випадок, коли гідравлічна крупність частинки перевищує швидкість висхідного руху води).

В процесі фільтрування концентрація забруднення C переходить у шар завислого осаду P . Концентрація завислого осаду зростатиме в часі за умови одночасного зменшення концентрації домішок в забрудненій воді. Виходячи з рівняння (3.1) маємо, що концентрація завислого осаду по висоті прояснювача з часом буде рівна різниці між вхідною концентрацією C^0 і концентрацією C , помноженою на масообмінний коефіцієнт β , тобто дорівнює масі домішок, що перейшли в завислий осад. Цей процес продовжується до тих пір, доки концентрація осаду не досягає деякого граничного стану P_* (стану граничного насичення).

Відповідний процес описується наступним рівнянням [51, 262]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \begin{cases} \beta(C^0 - C), P(x, t) < P_*, \\ P_*, P(x, t) \geq P_*. \end{cases} \quad (3.2)$$

Враховуючи граничне значення концентрації домішок в проясненій воді, що відводиться з прояснювача $C_{кр}$, зумовленої вимогами до ефективності роботи прояснювача, можна визначити висоту шару завислого осаду L .

Отже, враховуючи (3.1) та (3.2), математична модель шару завислого осаду, в якому одночасно протікають адсорбція, конвекція та масообмін, матиме вигляд системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} - (\beta + \gamma)C, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \begin{cases} \beta(C^0 - C) - \Phi(x)P, P(x, t) < P_*, \\ P_*, P(x, t) \geq P_*, \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$C|_{x=0} = C^0(t), P|_{x=0} = 0, C|_{t=0} = C_0(x), P|_{t=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$v = \kappa_\Phi(P) \cdot grad H, \quad (3.5)$$

де $\Phi(x) = e^{-\frac{(x-L)^2}{\varepsilon}}$, $C^0(t)$, $C_0(x)$ – концентрація домішок, що поступає на прояснювач та в початковий момент часу, $\kappa_\Phi(P) = \kappa_0 - \lambda P(x, t)$ – коефіцієнт фільтрації (κ_0, λ – параметри, які характеризують початкове значення коефіцієнта фільтрації та його зміну з часом вздовж шару завислого осаду), H – гідравлічний напір вздовж шару завислого осаду в певний момент часу, L – висота шару завислого осаду.

Функція $\Phi(x)$ характеризує зменшення об'єму надлишкового шару завислого осаду в результаті відводу його через перепускні вікна.

В результаті розв'язання модельної задачі (3.3)-(3.4) маємо:

$$C(x,t) = \begin{cases} C^0 \left(t - \frac{x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{(\beta+\gamma)x}{v}}, & t \geq \frac{x}{v}, \\ C_0 (x - vt), & t < \frac{x}{v}, \end{cases}$$

$$P(x,t) = \begin{cases} e^{-\Phi(x)t} \cdot \beta \cdot \int_0^t e^{\Phi(x)\tilde{t}} (C_*^*(\tilde{t}) - C(x,\tilde{t})) d\tilde{t}, & P(x,t) < P_*^*, \\ tP_*^*, & P(x,t) \geq P_*^*. \end{cases}$$

В результаті проведення комп'ютерного експерименту з використанням алгоритму розв'язку при $C^0 = 200 \text{ мг/дм}^3$, $C_0 = 200 \text{ мг/дм}^3$, $P_*^* = 2000 \text{ мг/дм}^3$, $v = 1.5 \text{ мм/с}$, $L = 1 \text{ м}$, $\beta = 36^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 1800^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 1$, $\kappa_0 = 0$, отримано розподіли концентрації забруднення (рис. 3.2 та рис. 3.3) та завислого шару осаду (рис. 3.4 та рис. 3.5).

В початковий період роботи прояснювача, вода що виходить з нього за вмістом домішок майже не відрізняється від якості води, що поступає на прояснювач. Проте з бігом часу, завдяки формуванню завислого шару осаду ефективність очистки води поступово зростає (рис. 3.2), наростає і маса (концентрація) завислого шару осаду (рис. 3.3). Впродовж 44 год процес прояснення в шарі завислого осаду сягає свого максимуму і стабілізується, тобто на виході з шару завислого осаду вміст домішок в проясненій воді відповідає наперед визначеним вимогам – 50 мг/дм^3 .

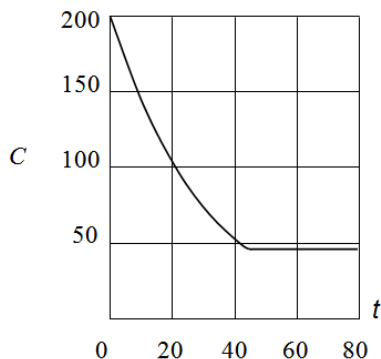


Рис. 3.2. Закономірність зміни в часі якості води на виході з прояснювача

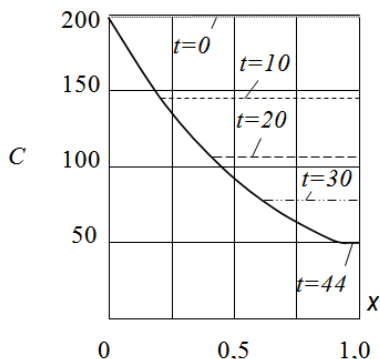


Рис. 3.3. Закономірність зміни концентрації домішок в шарі завислого осаду для t : 0 год, 10 год, 20 год, 30 год, 44 год

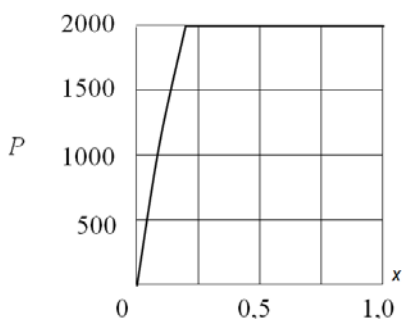


Рис. 3.4. – Розподіл концентрації завислого осаду у прояснювачі впродовж 44 год. x - змінна координата вздовж висоти шару завислого осаду

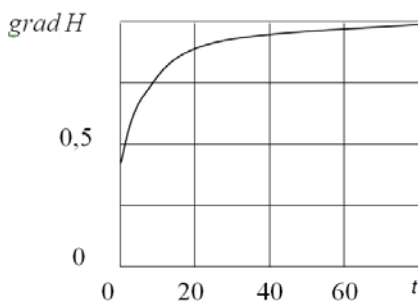


Рис. 3.5. – Зміна $grad H$ на виході фільтра з часом

Шар завислого осаду формується в міру затримання агрегованих домішок в об'ємі прояснювача. Варто відзначити, що концентрація осаду по його висоті не є сталою. Більше її значення, навіть на початковому етапі, спостерігається в верхній частині шару. З бігом часу концентрація осаду в об'ємі прояснювача зростає, досягаючи свого максимуму

$P = 2000 \text{ мг/дм}^3$. Тривалість цього процесу сягає 29 год (рис. 3.4).

Після досягнення максимального значення P спостерігається поступовий винос шару завислого осаду через перепускні вікна прояснювача. Маса осаду, що виноситься з стабілізованого завислого шару є пропорційною масі домішок, що поступають з забрудненою водою і затримані в його об'ємі.

Виходячи з задачі (3.3)-(3.5) зміна концентрації осаду призводить до зміни коефіцієнта фільтрації, а отже змінюється і напір в шарі завислого осаду. Це дає можливість знаходити у кожному поперечному перерізі шару завислого осаду (кожній точці x , $0 \leq x \leq L$) градієнт напору (тиску), зокрема використовуючи формулу $grad H = \frac{v}{\kappa(P)}$. Зміна

$grad H$ з часом показана на рис. 3.5.

Вважаючи, що у початковий момент часу, напір був близьким до нуля, то впродовж 44 год він зростає, сягаючи максимального значення і набуває стабільного значення впродовж наступного періоду роботи прояснювача.

Запропонована математична модель роботи прояснювача з завислим шаром осаду, базована на теорії фільтрування Мінца, адекватно описує фізичну суть технологічних процесів прояснення води, формування осаду, умов виносу надлишкової його частини за межі корпусу установки та зміну втрат напору по висоті завислого шару, і дозволяє для досліджуваних умов обчислити значення згаданих параметрів в кожний момент часу.

3.2. Математичне моделювання процесу очищення стічних вод в пористому середовищі

Біологічне очищення — один із методів очищення стічних вод від багатьох органічних і деяких неорганічних домішок на підприємствах целюлозно-паперової, деревообробної, харчової та інших галузей промисловості. За характером цей метод аналогічний природним процесам, наприклад, біологічному очищенню організмів (біоценозу), до складу яких входить багато різних бактерій (простих і високоорганізованих), пов'язаних між собою в єдиний комплекс складними взаємовідносинами (метабіозу, симбіозу та антагонізму). Основну роль у цьому комплексі відіграють бактерії, число яких в одному грамі сухої біомаси може суттєво різнитися. Число родів бактерій може досягати 5–10, а число видів – кілька десятків і навіть сотень.

Така різноманітність видів бактерій зумовлена наявністю в стічній воді органічних речовин різних класів. Якщо у складі стічних вод є лише одна або декілька близьких за складом органічних сполук, то можливий розвиток монокультури бактерій. Скорочення видів бактерій можливе, якщо очищення проводять при відсутності розчиненого у воді кисню (в анаеробних умовах) або при надто великому співвідношенні кількості поданих на очищення забруднень і біомас мікроорганізмів.

Метою даного підрозділа є розробка математичних моделей процесів очищення стічних вод від біогенних елементів, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі.

Розглянемо процес очищення рідин від органічних забруднень шляхом внесення розчину біопрепарату. Згідно літературних джерел (теоретичних і експериментальних даних) розрізняють наступні його складові (компоненти): розкладання органічного забруднення бактеріями, ріст і

відмирання бактерій, вироблення бактеріями поверхнево-активних речовин, перехід органічного забруднення до біологічно неокисної речовини, перенесення бактерій з урахуванням їх сорбції й десорбції, перенесення біологічно неокисної речовини з рідиною з урахуванням її сорбції й десорбції та дифузії (рис. 3.6).

Для опису динаміки бактеріальної популяції з урахуванням відмирання клітин мікроорганізмів використовується рівняння типу Моно [57]:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S} B - \lambda B, \quad (3.6)$$

де B – концентрація бактерій, μ_{\max} – максимальна швидкість їх росту бактерій, U – концентрація забруднення (субстрату) в рідині, K_S – константа спорідненості субстрату до мікроорганізму, λ – швидкість відмирання клітин.

Враховуючи те, що бактерії рухаються разом із забрудненою речовиною у пористому середовищі, аналогічно до [51], приходимо до наступного рівняння для росту, відмирання й перенесення бактерій:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S} B - \lambda B - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (3.7)$$

де v – швидкість руху речовини, σ_e – ефективна пористість ($\sigma_e = k_a \rho + \sigma$, k_a – коефіцієнт адсорбції бактерій, ρ – густина середовища, σ – пористість).

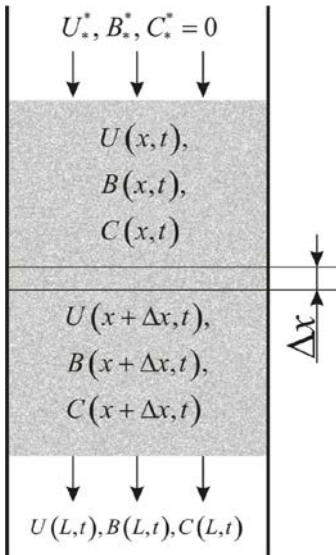


Рис. 3.6. Схематичне зображення процесу аеробного очищення

Зниження вмісту забруднення рідини відбувається за рахунок його розкладання бактеріями і фільтрування біологічно неокислювальних речовин. Біологічний розклад може бути описано рівнянням типу Моно, а вимивання – рівнянням конвективного переносу, їх комбінація описує зміну концентрації забруднення з часом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\mu_m U}{U + K_s} B - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (3.8)$$

де q – коефіцієнт пропорційності, який зв'язує кількість клітин, що утворилися при їх поглинанні субстратом, C – концентрація біологічно неокисної речовини.

У більшості випадків можна вважати, що бактерії виробляють поверхнево-активні речовини одночасно з розкладанням вуглеводнів, тобто деяка частина вуглеводнів використовується для створення поверхнево активних речовин.

Аналогічно до попереднього, використовуючи рівняння типу Моно, запишемо рівняння, що характеризує зміну концентрації біологічно неокисної речовини:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_s} \frac{\mu_m U}{K_s + U} B - v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (3.9)$$

де q_s – коефіцієнт пропорційності, що зв'язує кількість утвореної органічно неокисної речовини з поглиненням субстратом, β – коефіцієнт, який характеризує кількість захоплених частинок біологічно неокисної речовини фільтром, D_c – коефіцієнт дифузії, $D_c = b_c \varepsilon$, $0 < b_c \leq 1$, ε – малий параметр.

Система диференціальних рівнянь (3.7), (3.8) і (3.9) описує в комплексі зміну концентрації бактерій, органічної і

біологічно неокисної речовини в пористому середовищі. Різноманітні взаємовпливи характеристик середовища та процесу доцільно враховувати шляхом введення у відповідні рівняння запізнення за часом, що дає можливість вихідну “сильно нелінійну” задачу дещо “розщепити” на більш простіші нелінійні задачі. У реальних системах завжди є деяке запізнення, викликане певними причинами. У даному випадку перенесення забрудненої речовини вимагає певного часу. Далі прийматимемо, що будь-яка зміна зовнішніх факторів, наприклад, збільшення концентрації забруднення чи бактерій, відбувається лише по закінченні деякого часу (часу запізнення $\tau > 0$). Виходячи з вище сказаного, приходимо до наступної модельної задачі із запізненням:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = \Phi(U(x, t - \tau))B - \lambda B - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi(U(x, t - \tau))B - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_s} \Phi(U(x, t - \tau))B - v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$B|_{x=0} = B_*^*(t), \quad U|_{x=0} = U_*^*(t), \quad C|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (3.11)$$

$$B|_{t=0} = 0, \quad C|_{t=0} = 0, \quad U|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0,$$

де L – довжина фільтра, $\Phi(U) = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_s}$.

Розв’язування задачі (3.10)-(3.11) із запізненням τ на часових проміжках $[(n-1)\tau, n\tau]$ ($n = 1, 2, \dots$) замінимо послідовним розв’язанням n задач без запізнення [51]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B^{[n]}}{\partial t} = (\Phi_{nr} - \lambda) B^{[n]} - \frac{\nu}{\sigma_e} \frac{\partial B^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U^{[n]}}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{\nu \sigma}{\rho} \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C^{[n]}}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_s} \Phi_{nr} B^{[n]} - \nu \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x} - \beta C + \varepsilon b_c \frac{\partial^2 C^{[n]}}{\partial x^2}, \quad (3.11) \\ B^{[n]} \Big|_{x=0} = B_*^*(t), \quad U^{[n]} \Big|_{x=0} = U_*^*(t), \quad C^{[n]} \Big|_{x=0} = 0, \\ B^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad C^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad U^{[n]} \Big|_{t=\tilde{\tau}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{\tau} \leq 0, \\ \Phi_{nr} = \Phi(x, t) = \Phi(U^{[n-1]}(x, t - \tau)), \quad U^{[0]}(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Тут $B^{[n]}$, $U^{[n]}$, $C^{[n]}$ – відповідно концентрації бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі на часовому проміжку $[(n-1)\tau, n\tau]$.

Розв'язок задачі (3.11) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра ε [57]

$$\begin{aligned} B^{[n]}(x, t) &= B_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i B_i^{[n]}(x, t) + R_B^{[n]}(x, t, \varepsilon), \\ U^{[n]}(x, t) &= U_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i U_i^{[n]}(x, t) + R_U^{[n]}(x, t, \varepsilon), \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$C^{[n]}(x, t) = C_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i C_i^{[n]}(x, t) + \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{C}_i^{[n]}(\tilde{\mu}, t) + R_C^{[n]}(x, t, \varepsilon),$$

де $R_B^{[n]}$, $R_U^{[n]}$, $R_C^{[n]}$ – залишкові члени, $B_i^{[n]}(x, t)$, $U_i^{[n]}(x, t)$, $C_i^{[n]}(x, t)$ ($i = \overline{0, m}$) – члени регулярних частин асимптоти, $\tilde{C}_i^{[n]}(\tilde{\mu}, t)$ ($i = \overline{0, m}$) – функції типу примежового шару (відповідно поправки на виході фільтраційної речовини), $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

В результаті підстановки (3.12) у (3.11) та застосування стандартної “процедури прирівнювання” [57] отримаємо такі

задачі для визначення функцій $B_i^{[n]}(x, t)$, $U_i^{[n]}(x, t)$, $C_i^{[n]}(x, t)$ ($i = \overline{0, m}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_0^{[n]}}{\partial t} = (\Phi_{nr} - \lambda) B_0^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B_0^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_0^{[n]}}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x} + \beta C_0^{[n]} = \frac{1}{\rho q_S} \Phi_{nr} B^{[n]}, \\ B^{[n]}|_{x=0} = B_*^*(t), U^{[n]}|_{x=0} = U_*^*(t), C^{[n]}|_{x=0} = 0, \\ B^{[n]}|_{t=0} = 0, C^{[n]}|_{t=0} = 0, U^{[n]}|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \\ \Phi_{nr} = \Phi(U^{[n-1]}(x, t - \tau)), U^{[0]}(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_i^{[n]}}{\partial t} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \lambda B_i^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B_i^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_i^{[n]}}{\partial t} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x} + \beta C_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} + b_C \frac{\partial^2 C_{i-1}^{[n]}}{\partial x^2}, \\ B^{[n]}|_{x=0} = 0, U^{[n]}|_{x=0} = 0, C^{[n]}|_{x=0} = 0, B^{[n]}|_{t=0} = 0, U^{[n]}|_{t=0} = 0, C^{[n]}|_{t=0} = 0. \end{array} \right.$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$B_0^{[n]}(x, t) = \begin{cases} B_*^* \left(t - \frac{\sigma_e x}{v} \right) \cdot e^{\frac{\sigma_e}{v} \int_0^x (\lambda - \Phi_{nr}(\tilde{x}, t)) d\tilde{x}}, & t \geq \frac{\sigma_e x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_e x}{v}, \end{cases}$$

$$B_i^{[n]}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{v} e^{\frac{\lambda \sigma_e x}{v}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{\lambda \sigma_e \tilde{x}}{v}} g_i^{[n]} \left(\tilde{x}, t + \frac{\sigma_e}{v} (\tilde{x} - x) \right) d\tilde{x}, & t \geq \frac{\sigma_e x}{v}, \\ \frac{e^{\lambda t}}{\sigma_e} \cdot \int_0^t e^{-\lambda \tilde{t}} g_i^{[n]} \left(\frac{v}{\sigma_e} (\tilde{t} - t) + x, \tilde{t} \right) d\tilde{t}, & t < \frac{\sigma_e x}{v}, \end{cases}$$

$$C_i^{[n]}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{v} e^{\frac{\beta \sigma x}{v}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{\beta \sigma \tilde{x}}{v}} W_i^{[n]} \left(\tilde{x}, t + \frac{\sigma}{v} (\tilde{x} - x) \right) d\tilde{x}, & t \geq \frac{\sigma x}{v}, \\ \frac{e^{\beta t}}{\sigma} \cdot \int_0^t e^{-\beta \tilde{t}} W_i^{[n]} \left(\frac{v}{\sigma} (\tilde{t} - t) + x, \tilde{t} \right) d\tilde{t}, & t < \frac{\sigma x}{v}, \quad i = \overline{0, m}, \end{cases}$$

$$U_0^{[n]}(x, t) = \int_0^t G_0^{[n]}(x, \tilde{t}) d\tilde{t} + U_*^*(t) - \int_0^t G_0^{[n]}(0, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$U_i^{[n]}(x, t) = \int_0^t G_i^{[n]}(x, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

де
$$g_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]}, \quad W_0^{[n]} = \frac{1}{\rho q_s} \Phi_{nr} B^{[n]},$$

$$G_0^{[n]} = -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x}, \quad W_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} + b_c \frac{\partial^2 C_{i-1}^{[n]}}{\partial x^2},$$

$$G_i^{[n]} = -\Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Функції $\tilde{C}^{[n]} = \sum_{i=0}^m \tilde{C}_i^{[n]} \varepsilon^i$ ($i = \overline{0, m}$) призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $C^{[n]}(x, t) = \sum_{i=0}^m C_i^{[n]} \varepsilon^i$ в околі точки $x = L$ (виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують

виконання умови: $\frac{\partial}{\partial x}(C^{[n]} + \tilde{C}^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1})$. Для знаходження цих функцій маємо такі задачі:

$$\begin{cases} b_c \frac{\partial^2 \tilde{C}_0^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}^2} + v \frac{\partial \tilde{C}_0^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}} + \beta \tilde{C}_0^{[n]} = 0, \\ \tilde{C}_0^{[n]} \xrightarrow{\tilde{\mu} \rightarrow \infty} 0, \tilde{C}_{0\tilde{\mu}}^{[n]}(L, t) = C_{0x}^{[n]}(L, t), \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} b_c \frac{\partial^2 \tilde{C}_i^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}^2} + v \frac{\partial \tilde{C}_i^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}} + \beta \tilde{C}_i^{[n]} = \sigma \frac{\partial \tilde{C}_{i-1}^{[n]}}{\partial t}, \\ \tilde{C}_i^{[n]} \xrightarrow{\tilde{\mu} \rightarrow \infty} 0, \tilde{C}_{i\tilde{\mu}}^{[n]}(L, t) = C_{ix}^{[n]}(L, t), i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.14)$$

З огляду на те, що (3.13)-(3.14) є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку та параболічними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, розв'язки відповідних задач можна записати в явному вигляді. Оцінки залишкових членів проводяться, аналогічно до [51].

Наведемо результати розрахунків за формулами (3.12) при $B_*^*(t) = 10 \text{ кл/мл}$, $U_*^*(t) = 0.005 \text{ г/г}$, $L = 5 \text{ м}$, $v = 5 \text{ м/год}$, $\beta = 36^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 0.06 \text{ доб}^{-1}$, $\sigma_e = 5$, $\sigma = 0.37$, $\mu_m = 2.5 \text{ доб}^{-1}$, $K_s = 0.1 \text{ г/г}$, $b_v = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{год}$, $b_c = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{год}$, $\rho = 1.5 \text{ г/см}^3$, $q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ кл/г}$, $q_s = 4 \cdot 10^{11} \text{ кл/г}$.

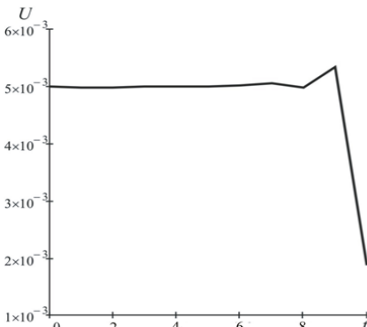


Рис. 3.7. Розподіл концентрації забруднення на виході фільтра протягом 9 год

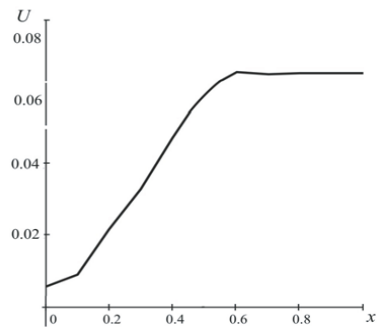


Рис. 3.8. Розподіл концентрації забруднення вздовж фільтра у момент часу 9 год

На рис. 3.7 та рис. 3.8 зображено розподіл концентрації забруднення на виході фільтру та вздовж фільтру відповідно. Як бачимо, протягом 9 год фільтр практично не діє, цей проміжок часу є так званою “зарядкою” фільтра, тобто за цей час утворюються біологічно активні елементи, які і сприяють процесу очищення стічної води (див. рис. 3.9 та рис. 3.10). Починаючи з даного моменту часу бактерії інтенсивно породжують самі себе, отже можемо призупинити їх подачу.

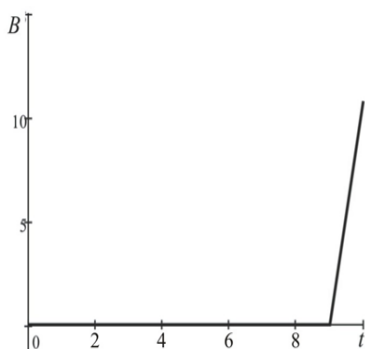


Рис. 3.9. Розподіл концентрації бактерій на виході фільтра протягом 9 год

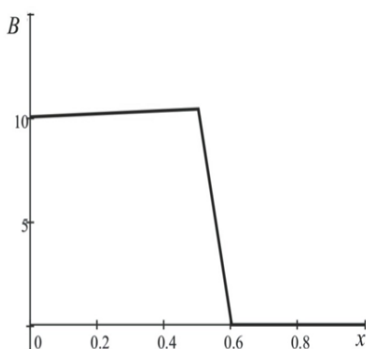


Рис. 3.10. Розподіл концентрації бактерій вздовж фільтра у момент часу 9 год

На рис. 3.11 та рис. 3.12 зображені розподіли концентрації біологічно неокисної речовини на виході фільтра протягом 9 год, та вздовж фільтра у момент часу 9 год. Як бачимо, вздовж фільтра концентрація біологічно неокисної речовини за даний період часу зростає практично за лінійним законом, це пояснюється тим, що ріст кількості бактерій (рис. 3.9 та рис. 3.10) продукт їх життєдіяльності впливає на утворення біологічно неокисної речовини.

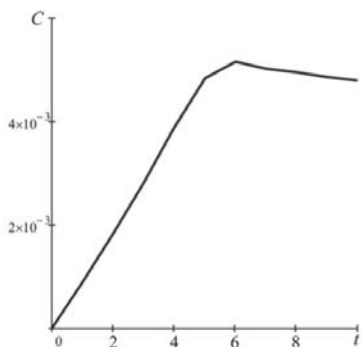


Рис. 3.11. Розподіл концентрації біологічно неокисної речовини на виході фільтра протягом 9 год

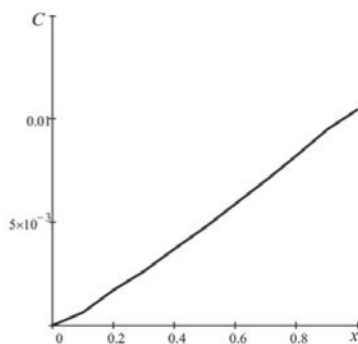


Рис. 3.12. Розподіл концентрації біологічно неокисної речовини вздовж фільтра у момент часу 9 год

3.3. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу очищення стічної води

Методи біологічного очищення стічних вод мають ряд суттєвих переваг перед іншими методами завдяки здатності мікроорганізмів адаптуватися до несприятливих умов (високі концентрації та токсичність, складна суміш забруднюючих речовин).

Пошуки економічно вигідних і екологічно прийнятних методів очищення промислових та господарсько-комунальних стічних вод були і залишаються вкрай актуальними у великих містах. Постійно зростаюча чисельність жителів міст, розгалужена інфраструктура, інтенсивне функціонування харчових, мікробіологічних, фармацевтичних та багатьох інших виробництв призводять до щоденного зростання обсягів стічних вод, забруднених органічними речовинами. Тому зростає потреба в очищенні води.

На даний час проектування систем очищення стічних вод засновано на результатах великого вітчизняного й закордонного досвіду. Оскільки стічні води можуть значно відрізнятися за можливостями культивування в них бактерій (наявність достатньої кількості живильних елементів, токсичність і т.д.), у кожному конкретному випадку необхідна перевірка придатності води для вирощування бактерій. Прогнозування якості води у водоймах, здійснюване згідно існуючих математичних, переважно одновимірних, моделей (для загально прийнятих нормованих показників) у значній мірі дозволяє визначити необхідний ступінь очищення стічних вод.

Метою даного підрозділу є розробка просторової математичної моделі процесу очищення стічної води від біогенних елементів, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі.

Розглянемо процес очищення рідин від органічних забруднень у пористому біофільтрі, що має форму криволінійного паралелепіпеда $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (рис. 3.13), обмеженого гладкими ортогональними між собою (вдovж ребер) екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ (зокрема $f_1(x, y, z) = z - z^*$), $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ (зокрема $f_2(x, y, z) = z - z_*$), а також поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$, шляхом фільтрування із внесенням розчину біопрепарату. Згідно літературних джерел (теоретичних і експериментальних даних) [201] розрізняють наступні його складові (компоненти): розкладання органічного забруднення бактеріями, ріст і відмирання

бактерій, вироблення бактеріями поверхнево-активних речовин, перехід органічного забруднення до біологічно неокисної речовини, перенесення бактерій з урахуванням їх сорбції й десорбції, перенесення біологічно неокисної речовини з рідиною з урахуванням її сорбції й десорбції та дифузії.

Для опису динаміки бактеріальної популяції з урахуванням відмирання клітин мікроорганізмів використовується рівняння типу Моно [54, 55]:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S} B - \lambda B, \quad (3.15)$$

де $B(x, y, z, t)$ – концентрація бактерій у внутрішній точці $(x, y, z,)$ області завантаження в момент часу t , μ_{\max} – максимальна швидкість росту бактерій, $U(x, y, z, t)$ – концентрація забруднення (субстрату) в рідині, K_S – константа спорідненості субстрату до мікроорганізму, λ – швидкість відмирання клітин.

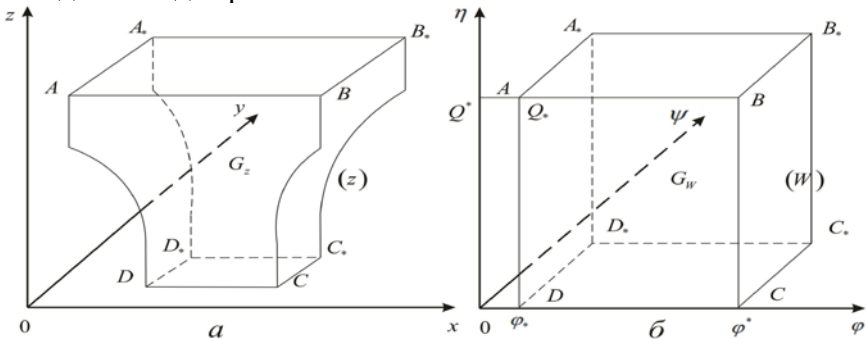


Рис. 3.13. Просторова фізична область G_z (біофільтр) (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Враховуючи те, що бактерії рухаються разом із забрудненою речовиною у пористому середовищі, аналогічно до [54], приходимо до наступного рівняння для росту, відмирання й перенесення бактерій:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_s} B - \lambda B - \frac{\vec{v}}{\sigma_e} \cdot \vec{\nabla} B, \quad (3.16)$$

де $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon > 0$), σ_e — ефективна пористість ($\sigma_e = k_a \rho + \sigma$, k_a — коефіцієнт адсорпції бактерій, ρ — густина середовища, σ — пористість), ε — малий параметр.

Зниження вмісту забруднення рідини відбувається за рахунок його розкладання бактеріями і фільтрування біологічно неокислювальних речовин. Біологічний розклад може бути описано рівнянням типу Моно, а вимивання — рівнянням конвективного переносу, їх комбінація описує зміну концентрації забруднення з часом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\mu_m U}{U + K_s} B - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U - \frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} C + D_U \Delta U, \quad (3.17)$$

де q — коефіцієнт пропорційності, що зв'язує кількість клітин, що утворилися, при їх поглиненні субстратом, $C(x, y, z, t)$ — концентрація біологічно неокислюваної речовини, $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона, $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — оператор Лапласа, D_U — коефіцієнт дифузії, $0 < b_U \leq 1$, $D_U = b_U \varepsilon$ (дифузійна складова даного процесу є малою у порівнянні з іншими його складовими).

У більшості випадків можна вважати, що бактерії виробляють поверхнево-активні речовини одночасно з розкладанням вуглеводнів, тобто деяка частина вуглеводнів використовується для створення поверхнево активних речовин.

Аналогічно до попереднього, використовуючи рівняння типу Моно, запишемо рівняння, що характеризує зміну концентрації біологічно неокисної речовини:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_s} \frac{\mu_m U}{K_s + U} B - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C - \beta C + D_c \Delta C, \quad (3.18)$$

де q_s – коефіцієнт пропорційності, що зв'язує кількість утвореної органічно неокисної речовини з поглиненим субстратом, β – коефіцієнт, який характеризує кількість захоплених частинок біологічно неокисної речовини фільтром, D_c – коефіцієнт дифузії, $0 < b_c \leq 1$, $D_c = b_c \varepsilon$.

Вважаємо, що: в початковий момент часу біофільтр є чистий, бокові його “стінки” є непроникними; на вході у фільтр відомі (задані) розподіли у часі всіх трьох концентрацій, а на виході спостерігається “швидке відведення” [51].

Враховуючи вище сказане, приходимо до наступної задачі, що описує в комплексі зміну концентрацій бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі $G = G_z \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = (\Phi(U) - \lambda) B - \frac{\vec{v}}{\sigma_e} \cdot \vec{\nabla} B, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -s\Phi(U) B - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U - \frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} C + D_U \Delta U, \\ \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = h\Phi(U) B - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C - \beta C + D_c \Delta C, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$B \Big|_{ABB_n} = B_*(M, t), \quad U \Big|_{ABB_n} = U_*(M, t), \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_n} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_n \cup BCC_n \cup ABCD \cup A_n B_n C_n D_n} = 0,$$

$$C \Big|_{ABB_n} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_n} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_n \cup BCC_n \cup ABCD \cup A_n B_n C_n D_n} = 0,$$

$$B(x, y, z, 0) = 0, \quad U(x, y, z, 0) = 0, \quad C(x, y, z, 0) = 0; \quad (3.20)$$

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (3.21)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3.22)$$

де $\Phi(U) = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S}$, $B_*(M, t)$, $U_*(M, t)$ – достатньо гладкі

функції, узгоджені між собою на ребрах області G , M – довільна точка відповідної поверхні; $s = q_*^{-1} \varepsilon$, $h = (\rho q_{S^*})^{-1} \varepsilon$

($q_* = q\varepsilon$, $q_{S^*} = q_S \varepsilon$), $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – фільтраційний потенціал

($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$), κ – коефіцієнт фільтрації середовища, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні [51]. Тут рівність нулю нормальних похідних від шуканих функцій вздовж чотирьох поверхонь течії є традиційними умовами непроникності, а вздовж ділянки виходу CDD_*C_* – умовами “швидкого відведення” (умови Веригіна).

Аналогічно до [51], приходимо до відповідної конвективно-дифузійно-масообмінної задачі для області $G_\omega = G_w \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} = (\Phi(u) - \lambda) b - \frac{v^2}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial b}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{q_*} \Phi(u) b - v^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{\rho} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \varepsilon b_v \left(v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \\ \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\rho q_{S^*}} \Phi(u) b - v^2 \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \beta c + \varepsilon b_c \left(v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \end{cases} \quad (3.23)$$

$$b(\varphi_*, \psi, \eta, t) = b_*(\psi, \eta, t), \quad b(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0,$$

$$u(\varphi_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t), \quad u_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$u_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = u_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = u_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = u_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \quad (3.24)$$

$$u(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \quad c_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0,$$

$$\text{де } b = b(\varphi, \psi, \eta, t) = B(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$u = u(\varphi, \psi, \eta, t) = U(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b(\varphi_*, \psi, \eta, t) = b_*(\psi, \eta, t) = B_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$u(\varphi_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t) = U_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = \bar{\nabla} \psi^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = \bar{\nabla} \eta^2,$$

$$d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi, \quad d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta \text{ (див., напр., [51])}.$$

Розв'язок задачі (3.23) – (3.24) з точністю $O(\varepsilon^2)$ в припущенні сильної узгодженості початкових та граничних умов (3.24) вздовж ребер та в кутових точках області G_{ω} (див. напр. [51]) шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів [54, 55]:

$$b = b_0 + \varepsilon b_1 + R_b, \\ u = u_0 + \varepsilon u_1 + \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i P_i + \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i \tilde{P}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{P}}_i + \\ + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{P}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\hat{P}}_i + R_u, \\ c = c_0 + \varepsilon c_1 + \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i \Pi_i + \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i \tilde{\Pi}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_i + \\ + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\Pi}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\hat{\Pi}}_i + R_c, \quad (3.25)$$

де $R_b(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_u(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_c(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени, $b_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $c_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ – члени

регулярної частини асимптотики ($i = 0, 1$); $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t)$, $P_i(\xi, \psi, \eta, t)$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтру) ($i = \overline{0, 1}$), $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t)$, $\tilde{P}_i(\tilde{\xi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t)$ – в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на вході у фільтр) ($i = \overline{0, 1}$), а функції, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0, 3}$) – в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтру), відповідно; $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$,

$$\tilde{\xi} = \frac{\varphi - \varphi_*}{\varepsilon}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}} -$$

“розтяги” відповідних змінних.

В результаті підстановки (3.25) у (3.23) – (3.25) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо такі задачі для знаходження $b_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_i(\varphi, \psi, \eta, t)$, $c_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_0}{\partial t} = (\Phi(u_0) - \lambda)b_0 - \frac{v^2}{\sigma_e} \frac{\partial b_0}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + v^2 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = -\frac{v^2}{\rho} \frac{\partial c_0}{\partial \varphi}, \\ \sigma \frac{\partial c_0}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_0}{\partial \varphi} + \beta c_0 = 0, \\ b_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, b_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = b_*(\psi, \eta, t), \\ u_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, u_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t), \\ c_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_1}{\partial t} = (\Phi(u_1) - \lambda)b_1 - \frac{v^2}{\sigma_e} \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + v^2 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = -\frac{v^2 \sigma}{\rho} \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{q_*} \Phi(u_0) b_0 + \\ + b_v \left(v^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right), \\ \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} + \beta c_1 = \frac{1}{\rho q_{s*}} \Phi(u_0) b_0 + \\ + b_c \left(v^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} \right), \\ b_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, b_1(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ u_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, u_1(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_1(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0. \end{array} \right.$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$u_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \int_0^t g_0(\varphi - v^2(t - \tilde{t}), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq \frac{\varphi}{v^2}, \\ \frac{1}{v^2} \int_0^{\varphi} g_0\left(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \frac{1}{v^2}(\tilde{\varphi} - \varphi + v^2 t)\right) d\tilde{\varphi} + u_*\left(\psi, \eta, t - \frac{\varphi}{v^2}\right), & t > \frac{\varphi}{v^2}, \end{cases}$$

$$b_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} b_* \left(t - \frac{\sigma_e \varphi}{v^2} \right) \cdot e^{\frac{(\lambda - \Phi(u_0)) \sigma_e \varphi}{v^2}}, & t \geq \frac{\sigma_e \varphi}{v^2}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_e \varphi}{v^2}, \end{cases}$$

$$c_1(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{v^2} e^{\frac{\beta\sigma\varphi}{v^2}} \cdot \int_0^{\varphi} e^{-\frac{\beta\sigma\tilde{\varphi}}{v^2}} w_1 \left(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t + \frac{\sigma}{v^2} (\tilde{\varphi} - \varphi) \right) d\tilde{\varphi}, & t \geq \frac{\sigma\varphi}{v^2}, \\ \frac{e^{\beta t}}{\sigma} \cdot \int_0^t e^{-\beta\tilde{t}} w_1 \left(\frac{v^2}{\sigma} (\tilde{t} - t) + \varphi, \psi, \eta, \tilde{t} \right), & t < \frac{\sigma\varphi}{v^2}, \end{cases}$$

$$u_1(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \int_0^t g_1(\varphi - v^2(t - \tilde{t}), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq \frac{\varphi}{v^2}, \\ \frac{1}{v^2} \int_0^{\varphi} g_1 \left(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \frac{1}{v^2} (\tilde{\varphi} - \varphi + v^2 t) \right) d\tilde{\varphi}, & t > \frac{\varphi}{v^2}, \end{cases}$$

$$b_1(\varphi, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$\text{де } g_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \frac{v^2}{\rho} \frac{\partial c_0}{\partial \varphi},$$

$$w_1 = \frac{1}{\rho q_s} \Phi(u_0) b_0 + b_c \left(v^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} \right),$$

$$g_1 = -\frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{1}{q} \Phi(u_0) b_0 + b_v \left(v^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right).$$

Функції $P_i(\xi, \psi, \eta, t)$, $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$) знаходяться шляхом розв'язання таких задач [51]:

$$\begin{cases} b_u \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0 \\ P_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial u_0(\varphi^*, \psi, \eta, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_0(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \\ b_c \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} = 0, \\ \Pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial c_0(\varphi^*, \psi, \eta, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi_0(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_u \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_1}{\partial \xi} = \tilde{q}_1, \\ P_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \frac{\partial P_1(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \end{cases} \begin{cases} b_c \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} = \tilde{p}_1, \\ \Pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \frac{\partial \Pi_1(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \tilde{q}_1(\xi, \psi, \eta, t) = v^{-2} b_u \left(b_1 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial P_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial P_0}{\partial \eta} \right),$$

$$\tilde{p}_1(\xi, \psi, \eta, t) = v^{-2} b_c \left(b_1 \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \eta} \right).$$

Задачі для знаходження функцій $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0,1}$) та $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{P}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{P}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0,3}$) будуються аналогічно. Оцінки залишкових членів проводяться, аналогічно до [51].

Наведемо результати розрахунків за формулами (3.25) (для спрощення розрахунків покладемо, що фільтр є одновимірний) при $V_*^*(t) = 10 \text{ кл/мл}$, $U_*^*(t) = 0.005 \text{ г/г}$, $v = 5 \text{ м/год}$, $\beta = 36^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 0.06 \text{ доб}^{-1}$, $\sigma_e = 5$, $\sigma = 0.37$, $\mu_m = 2.5 \text{ доб}^{-1}$, $K_S = 0.1 \text{ г/г}$, $b_U = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $b_C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{год}$, $\rho = 1.5 \text{ г/см}^3$, $q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ кл/г}$, $q_S = 4 \cdot 10^{11} \text{ кл/г}$.

На рис. 3.14 та рис. 3.15 наведені результати моделювання, що описує процес біологічної очистки у фільтрі товщиною $L = 5$, зокрема, на рис. 3.14 зображено розподіл концентрації забруднення вздовж фільтра в різні моменти часу, на рис. 3.15 – розподіл концентрації бактерій вздовж фільтра, рис. 3.16 – розподіл концентрації біологічно неокисної речовини вздовж фільтра в різні моменти часу.

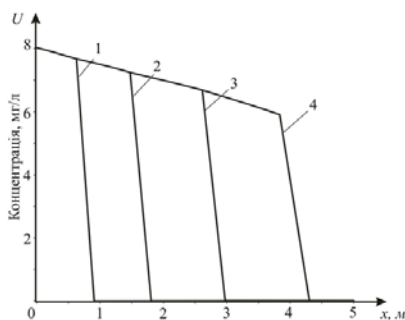


Рис. 3.14. Розподіл концентрації забруднення вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 10 \text{ год}$, $t_2 = 20 \text{ год}$, $t_3 = 30 \text{ год}$, $t_4 = 40 \text{ год}$

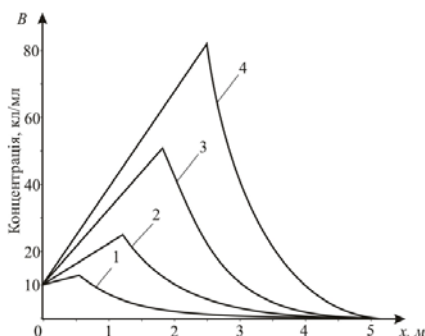


Рис. 3.15. Розподіл концентрації бактерій вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 10 \text{ год}$, $t_2 = 20 \text{ год}$, $t_3 = 30 \text{ год}$, $t_4 = 40 \text{ год}$

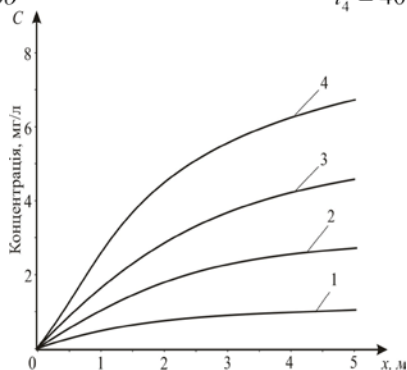


Рис. 3.16. Розподіл концентрації біологічно неокисної речовини вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 10 \text{ год}$, $t_2 = 20 \text{ год}$, $t_3 = 30 \text{ год}$, $t_4 = 40 \text{ год}$

Як показують розрахунки, після певного моменту часу можна припинити подачу бактерій у біофільтр і це не вплине на ріст бактерій у фільтрі, а також на процес фільтрування, що у свою чергу значно зменшить вартість процесу очищення. Таким чином задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до

збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом.

3.4. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму

У роботах [26, 27] викладено основні результати розробки та досліджень асимптотичних методів для розв'язування сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь типових крайових та мішаних задач у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (ребрових) точках. Подальше успішне застосування та розвиток ці асимптотичні методи знайшли у роботі [51], де модифіковано відповідні алгоритми стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях. Ті ж алгоритми успішно застосовано і до розв'язування таких задач в двозв'язних та багатозв'язних областях. В працях [27, 51] розв'язано проблему ефективного застосування методики переходу до області комплексного потенціалу i , разом з нею, асимптотичного методу до розв'язання систем двох рівнянь для сингулярно збурених задач типу “конвекція–дифузія–масообмін” у випадку малого масообміну. Актуальною залишається проблема застосування асимптотичних методів до розв'язання систем сингулярно збурених крайових задач багатокомпонентної конвективної дифузії. У даній роботі йдеться про асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії з урахуванням малої тримолекулярної реакції забруднюючих речовин та температурного режиму.

Розглядається процес конвективно-дифузійного масопереносу чотирьох розчинних речовин при фільтрації в

області $G = G_z \times (0, \infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв’язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній та $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 3.17, а). Три речовини ($\tilde{C}^1, \tilde{C}^2, \tilde{C}^3$) вступають у хімічну реакцію типу $a_1\tilde{C}^1 + a_2\tilde{C}^2 + a_3\tilde{C}^3 = a_4 \cdot \tilde{N} + U$, в результаті чого утворюється четверта розчинна речовина \tilde{N} та виділяється певна кількість теплової енергії U ($a_i, i = \overline{1,4}$ – деякі фіксовані натуральні числа, значення яких залежать від конкретної реакції і визначають кількість молекул відповідних речовин, що візьмуть участь в реакції).

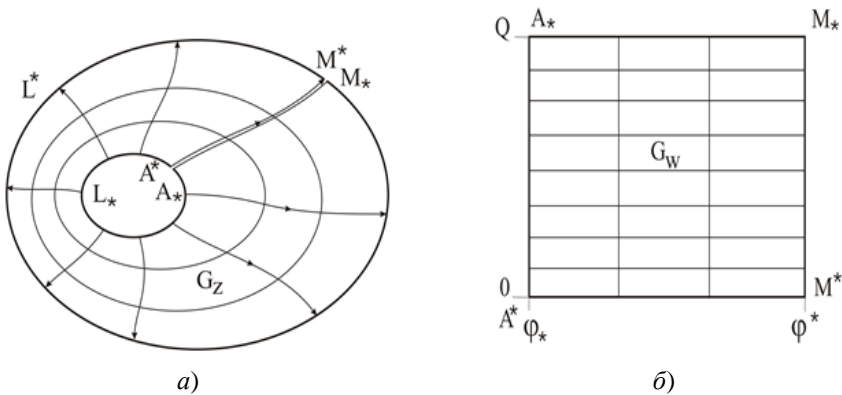


Рис. 3.17. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Відповідна модельна задача типу “конвекція-дифузія-масообмін” [264] матиме вигляд:

$$D_i \left(\tilde{C}_{xx}^i(x, y, t) + \tilde{C}_{yy}^i(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{C}_x^i(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{C}_y^i(x, y, t) - k(\tilde{T}) \cdot a_i \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{C}_t^i(x, y, t), \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.26)$$

$$D_4 \left(\tilde{N}_{xx}(x, y, t) + \tilde{N}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{N}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{N}_y(x, y, t) + k(\tilde{T}) \cdot a_4 \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{N}_t(x, y, t), \quad (3.27)$$

$$D_5 \left(\tilde{T}_{xx}(x, y, t) + \tilde{T}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{T}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{T}_y(x, y, t) + k \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{T}_t(x, y, t), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^i \Big|_{L_*} &= \tilde{C}_*^i(M, t), \quad \tilde{C}^i \Big|_{L^*} = \tilde{C}^{i*}(M, t), \quad \tilde{C}^i(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{i0}(x, y), \\ \tilde{N} \Big|_{L_*} &= \tilde{N}_*(M, t), \quad \tilde{N} \Big|_{L^*} = \tilde{N}^*(M, t), \quad \tilde{N}(x, y, 0) = \tilde{N}_0^0(x, y), \\ \tilde{T} \Big|_{L_*} &= \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{L^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T}(x, y, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi \Big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad (3.30)$$

де $\tilde{C}^i(x, y, t)$, $\tilde{N}(x, y, t)$ – відповідно концентрації чотирьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{T}(x, y, t)$ – температура середовища, M – біжуча точка відповідної кривої, $D_i = s_i \cdot \varepsilon$ – коефіцієнти дифузії ($i = \overline{1, 4}$, s_i – задані додатні дійсні числа), $D_5 = s_5 \cdot \varepsilon$ – коефіцієнт теплової дифузії, $k(\tilde{T}) = k^*(\tilde{T}) \cdot \varepsilon$, де $k^*(\tilde{T})$ – функція швидкості хімічної реакції, $k = k^* \cdot \varepsilon$, k^* – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $\tilde{C}_*^i(M, t)$, $\tilde{C}^{i*}(M, t)$, $\tilde{C}_0^{i0}(x, y)$, $\tilde{N}_*(M, t)$, $\tilde{N}^*(M, t)$, $\tilde{N}_0^0(x, y)$, $\tilde{T}_*(M, t)$, $\tilde{T}^*(M, t)$, $\tilde{T}_0^0(x, y)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб

можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв'язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Розв'язавши задачу (3.30) шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), де $G_z^* = G_z \setminus L$; L – розріз області G_z вздовж деякої лінії течії A_*M_* (на рис. 3.17, а) через A_*M_* та A^*M^* зображені береги цього розрізу), зокрема, знаходимо поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ та отримуємо динамічну сітку [264]. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (3.26 – 3.28) та умовах (3.29), приходимо до відповідної задачі для області G_w (рис. 3.17, б):

$$D_i v^2(\varphi, \psi) \left(C_{\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) C_\varphi^i(\varphi, \psi, t) - k(T) \cdot a_i \cdot \prod_{j=1}^3 (C^j(x, y, t))^{a_j} = C_t^i(\varphi, \psi, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3.31)$$

$$D_4 v^2(\varphi, \psi) \left(N_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) N_\varphi(\varphi, \psi, t) + k(T) \cdot a_4 \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = N_t(\varphi, \psi, t), \quad (3.32)$$

$$D_5 v^2(\varphi, \psi) \left(T_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) T_\varphi(\varphi, \psi, t) + k \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = T_t(\varphi, \psi, t), \quad (3.33)$$

$$C^i \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_*^i(\psi, t), \quad C^i \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^{i*}(\psi, t), \quad C^i \Big|_{t=0} = C_0^i(\varphi, \psi), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$N \Big|_{\varphi=\varphi_*} = N_*(\psi, t), \quad N \Big|_{\varphi=\varphi^*} = N^*(\psi, t), \quad N \Big|_{t=0} = N_0^0(\varphi, \psi),$$

$$T \Big|_{\varphi=\varphi_*} = T_*(\psi, t), \quad T \Big|_{\varphi=\varphi^*} = T^*(\psi, t), \quad T \Big|_{t=0} = T_0^0(\varphi, \psi), \quad (3.34)$$

де $T(\varphi, \psi, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $C^i(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}^i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$,

$N(\varphi, \psi, t) = \tilde{N}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $i = \overline{1,3}$ інші функції (C^i_* , C^{i*} , C^{i0}_0 N_* , N^* , N^0_0 , T_* , T^* , T^0_0) – інтерпретуються аналогічно.

Розв’язок (C^i, N, T) , $i = \overline{1,3}$ задачі (3.31)–(3.34) у випадку тримолекулярної реакції типу $\tilde{C}^1 + \tilde{C}^2 + \tilde{C}^3 = \tilde{N}$ ($a_i = 1$, $i = \overline{1,4}$) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C^i(\varphi, \psi, t) = C^i_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C^i_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Pi_j^i(\xi, \psi, t) + R_2^i, \quad (3.35)$$

$$N(\varphi, \psi, t) = N_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 N_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Gamma_j(\xi, \psi, t) + R_2^4, \quad (3.36)$$

$$T(\varphi, \psi, t) = T_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 T_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j E_j(\xi, \psi, t) + R_2^5, \quad (3.37)$$

де $R_l^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $l = \overline{1,5}$, – залишкові члени; $C_j^i(\varphi, \psi, t)$, $N_j(\varphi, \psi, t)$, $T_j(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C^i_0 , N_0 , T_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); C^i_1 , N_1 , T_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi_j^i(\xi, \psi, t)$, $\Gamma_j(\xi, \psi, t)$, $E_j(\xi, \psi, t)$ ($j = \overline{0,2}$ $i = \overline{1,3}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z); $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу). При цьому вимагатимемо, щоб функція $k^*(\tilde{T})$ дозволяла розклад в ряд за степенями ε у вигляді:

$$k^*(\tilde{T}) = G_0(T_0) + \varepsilon G_1(T_0, T_1) + M_0(T_0, T_1, E_0) + \varepsilon M_1(T_0, T_1, E_0, E_1) +$$

$$+\varepsilon^2 M_2(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) + F(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^5, \varepsilon),$$

де $G_0(\bullet), G_1(\bullet), M_0(\bullet), M_1(\bullet), M_2(\bullet), F(\bullet)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Аналогічно до [27, 51] після підстановки (3.35) – (3.37) в (3.31) – (3.34) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій C^i_j, N_j, T_j ($j = \overline{0,1}$ $i = \overline{1,3}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C^i_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + C^i_{jt}(\varphi, \psi, t) = g^i_j(\varphi, \psi, t), \\ C^i_j(\varphi, \psi, 0) = h^{i1}_j(\varphi, \psi), C^i_j(\varphi_*, \psi, t) = b^i_j(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot N_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{jt}(\varphi, \psi, t) = g^4_j(\varphi, \psi, t), \\ N_j(\varphi, \psi, 0) = h^4_j(\varphi, \psi), N_j(\varphi_*, \psi, t) = b^4_j(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot T_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{jt}(\varphi, \psi, t) = g^5_j(\varphi, \psi, t), \\ T_j(\varphi, \psi, 0) = h^5_j(\varphi, \psi), T_j(\varphi_*, \psi, t) = b^5_j(\psi, t), \end{cases}$$

$$g^{ik}_0(\varphi, \psi, t) = 0, h^{ik}_j(\varphi, \psi) = 0, b^{ik}_j(\psi, t) = 0, k = \overline{1,5},$$

$$h^{i0}_0(\varphi, \psi) = C^{i0}_0(\varphi, \psi), h^4_0(\varphi, \psi) = N^0_0(\varphi, \psi), h^5_0(\varphi, \psi) = T^0_0(\varphi, \psi),$$

$$b^i_0(\psi, t) = C^i_*(\psi, t), b^4_0(\psi, t) = N_*(\psi, t), b^5_0(\psi, t) = T_*(\psi, t),$$

$$g^i_1(\varphi, \psi, t) = s_i v^2(\varphi, \psi) (C^i_{0\varphi\varphi} + C^i_{0\psi\psi}) - G_0(T_0) C^1_0 C^2_0 C^3_0,$$

$$g^4_1(\varphi, \psi, t) = s_4 v^2(\varphi, \psi) (N_{0\varphi\varphi} + N_{0\psi\psi}) + G_0(T_0) C^1_0 C^2_0 C^3_0,$$

$$g^5_1(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) (T_{0\varphi\varphi} + T_{0\psi\psi}) + k C^1_0 C^2_0 C^3_0.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$C^i_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C^i_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), t \geq f(\varphi, \psi), \\ C^{i0}_0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 N_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} N_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ N_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
 T_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} T_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
 C_1^i(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
 N_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
 T_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^5(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^5(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}
 \end{aligned}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) d\tilde{\varphi}$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$ від екіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ до екіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi$; $f^{-1}(\varphi, \psi)$ – функція, обернена до функції $f(\varphi, \psi)$ стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $v^{-2}(\varphi, \psi)$ – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

$$\text{Функції } \Pi^i = \sum_{j=0}^2 \Pi_j^i \varepsilon^j, i = \overline{1,3}, \quad \Gamma = \sum_{j=0}^2 \Gamma_j \varepsilon^j, \quad E = \sum_{j=0}^2 E_j \varepsilon^j$$

призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Таким чином повинні виконуватись умови: $(C^i + \Pi^i)|_{\varphi=\varphi^*} = C^{i*} + O(\varepsilon^2)$, $(N + \Gamma)|_{\varphi=\varphi^*} = N^* + O(\varepsilon^2)$, $(T + E)|_{\varphi=\varphi^*} = T^* + O(\varepsilon^2)$. Ці функції знаходимо в результаті розв'язку наступних задач аналогічно до [264]:

$$s_1 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi}^i(\xi, \psi, t) = \sigma_j^i(\xi, \psi, t), i = \overline{1,3},$$

$$s_4 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (\Gamma_{j\xi\xi}(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Gamma_{j\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_j^4(\xi, \psi, t),$$

$$s_5 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (E_{j\xi\xi}(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) E_{j\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_j^5(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_j^i \rightarrow 0, \Gamma_j \rightarrow 0, E_j \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Pi_j^i(0, \psi, t) = q_j^i(\psi, t),$$

$$\Gamma_i(0, \psi, t) = q_i^4(\psi, t), \quad E_i(0, \psi, t) = q_i^5(\psi, t), \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{0,2},$$

де $q_0^i(\psi, t) = C^{i*}(\psi, t) - C_0^i(\varphi^*, \psi, t)$, $q_0^5(\psi, t) = T^*(\psi, t) - T_0(\varphi^*, \psi, t)$,

$$q_1^i(\psi, t) = -C_1^i(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^4(\psi, t) = -N_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$q_1^5(\psi, t) = -T_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$q_2^i(\psi, t) = 0, \quad \sigma_0^j(\xi, \psi, t) = 0, \quad i = \overline{0,5},$$

$$\sigma_1^i(\xi, \psi, t) = \Pi_{0r}^i(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^4(\xi, \psi, t) = \Gamma_{0r}(\xi, \psi, t),$$

$$\sigma_1^5(\xi, \psi, t) = E_{0r}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^i(\xi, \psi, t) =$$

$$= \Pi_{1r}^i(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi \Pi_{0r}^i(\xi, \psi, t) - \\ - s_1 v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}^i(\xi, \psi, t) + M_0(T_0, T_1, E_0) \tau(\xi, \psi, t);$$

$$\sigma_2^4(\xi, \psi, t) = \Gamma_{1r}(\xi, \psi, t) - s_1 v^2(\varphi^*, \psi) \Gamma_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + \\ + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi \Gamma_{0r}(\xi, \psi, t) - M_0(T_0, T_1, E_0) \tau(\xi, \psi, t);$$

$$\begin{aligned} & \sigma_2^5(\xi, \psi, t) = \\ & = E_{1t}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_{\xi}(\varphi^*, \psi)\xi E_{0t}(\xi, \psi, t) - k\tau(\xi, \psi, t) - \\ & \quad - s_1 v^2(\varphi^*, \psi)E_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) \\ & \quad , \quad \tau(\xi, \psi, t) = C_0^1(\varphi^*, \psi, t)C_0^2(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0^3 + \\ & \quad + \Pi_0^1 C_0^2(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0^3 + C_0^3(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0^1 \Pi_0^2 + \Pi_0^1 \Pi_0^2 \Pi_0^3 + \\ & \quad + C_0^1(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0^2 \Pi_0^3 + C_0^2(\varphi^*, \psi, t)C_0^3(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0^1. \end{aligned}$$

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{aligned} & \varepsilon s_i v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - \\ & \quad - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \varepsilon \cdot k(R_2^5(\varphi, \psi, t, \varepsilon)) \times \\ & \quad \times \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^i(\varphi, \psi, t) - b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\ & R_2^i(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\ & \varepsilon s_4 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^4(\varphi, \psi, t) \right) - \\ & \quad - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot k(R_2^5(\varphi, \psi, t, \varepsilon)) \times \\ & \quad \times \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^4(\varphi, \psi, t) - b_4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\ & R_2^4(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0, \\ & \varepsilon s_5 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^5(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^5(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^5(\varphi, \psi, t) + \\ & \quad + \varepsilon \cdot k \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^5(\varphi, \psi, t) - b_5(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\ & R_2^5(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^5(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^5(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Тут $b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (3.35)-(3.37), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$ в ряд Тейлора в околі

$$\varphi = \varphi^* .$$

Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (3.31)–(3.33), та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0, L_* \times 0$, області $G = G_z \times [0, T]$, де $[0, T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ($i = \overline{1, 5}, (\varphi, \psi, t) \in G$).

Наведемо результати розрахунку розглянутого вище процесу на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \times \ln((z - z_1) / (z - z_2))$, при $\varphi_* = -2.7$, $\varphi^* = -1.5$, $AD = \{z : \psi(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : \psi(x, y) = 2\pi\}$ [264]. На рис. 3.18 зображено залежність розподілу концентрації розчинної речовини C^1 від швидкості хімічної реакції вздовж лінії течії $\psi = 1,2566$ в момент часу $t = 0.1265$ при $K_1(T) = 10^3 \cdot e^{\frac{T-10}{10}}$, $K_2(T) = 10^5 \cdot e^{\frac{T-10}{10}}$, $K_3(T) = 10^7 \cdot e^{\frac{T-10}{10}}$, $C_0^{10}(\varphi, \psi) = 0.4 + (1/4) \times \sin^2(\psi) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $C_0^{20}(\varphi, \psi) = 0.7 - (1/3) \times \cos^2(\psi + \pi/2) \times (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $C_0^{30}(\varphi, \psi) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $N_0^0(\varphi, \psi) = 0.2 + \sin(\psi + \pi/6) \times 10^{-1} \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $T_0^0(\varphi, \psi) = 10$, $C_*^1(\psi, t) = 0.4 + (1/4) \cdot \sin^2(\psi) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $C_*^2(\psi, t) = 0.7 - (1/3) \cdot \cos^2(\psi + \pi/2) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $C_*^3(\psi, t) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$,

$$N_*(\psi, t) = 0.2 + \sin(\psi + \pi / 6) \cdot e^{-t} \cdot 30^{-1},$$

$$T_*(\varphi, \psi) = 10, \quad C^{1*}(\psi, t) = 0.4 + (1/4) \sin^2(\psi) \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$C^{2*}(\psi, t) = 0.7 - (1/3) \cdot \cos^2(\psi + \pi / 2) \times e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$C^{3*}(\psi, t) = 0.5 + \sin(\psi + \pi / 6) \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$N^*(\psi, t) = 0.2 + \sin(\psi + \pi / 6) \cdot 10^{-1} \cdot e^{-2t} \cdot (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

$$T^*(\varphi, \psi) = 10.$$

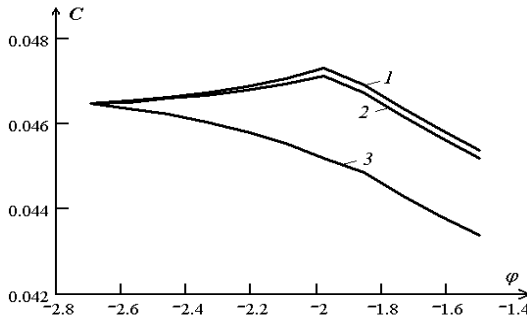


Рис. 3.18. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини C^1 від швидкості хімічної реакції при різних $K_i(T)$, $i = \overline{1,3}$. Крива 1 – $K_1(T) = 10^3 \cdot e^{(T-10)/10}$; 2 – $K_2(T) = 10^5 \cdot e^{(T-10)/10}$; 3 – $K_3(T) = 10^7 \cdot e^{(T-10)/10}$

На рис. 3.19 зображено розподіл температури речовини T вздовж лінії течії $\psi = 1,885$ в моменти часу $t_1 = 0$, $t_2 = 0.02$, $t_3 = 0.05$, $t_4 = 0.13$, $t_5 = 0.18$.

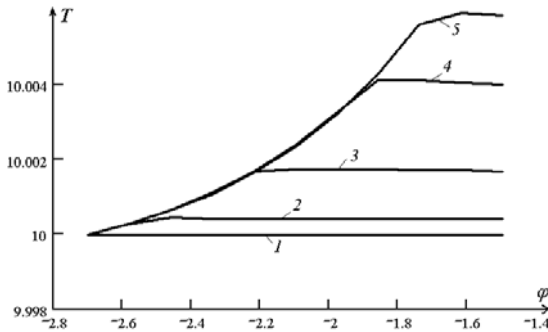


Рис. 3.19. Розподіл температури речовини T у різні моменти часу t . Крива 1 – $t = 0$; 2 – $t = 0.02$, 3 – $t = 0.05$, 4 – $t = 0.13$, 5 – $t = 0.18$

Встановлено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та функцією швидкості хімічної реакції. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин, що візьмуть участь у реакціях, з метою ефективного очищення стічних вод.

3.5. Комп'ютерне моделювання процесу біологічного очищення води у регенераторі аеротенка

На сьогодні у зв'язку з погіршенням якості води відкритих водойм постає проблема зменшення антропогенного навантаження на водні об'єкти. Одним з ефективних шляхів вирішення цієї проблеми є підвищення ефективності роботи очисних споруд. Біологічне очищення стічних вод займає домінуюче положення, що пояснюється його універсальністю та відносно низькими експлуатаційними витратами. В Україні утворюється щодоби близько 8 млн. стоків, частина яких піддається біологічному очищенню в аеротенках чи біофільтрах. Значно підвищити ефективність роботи споруд біологічного очищення стічних вод можливо завдяки розробці та впровадженню оптимальних технологічних режимів процесу біологічного очищення стоків.

Відомі експериментальні дослідження з визначення впливу параметрів процесу біологічного очищення на концентрацію домішок, бактерій, пластівців та період фільтроциклу [201]. Але відповідні експерименти дороговартісні, вимагають великих затрат часу та трудового ресурсу. Відповідно до цього, актуальною задачею є комп'ютерне моделювання процесу біологічного очищення домішок при очищенні водних систем та визначення параметрів, які найбільш суттєво впливають на якість та час очистки.

Для математичного опису явищ, що відбуваються в регенераторі, будемо виходити з відомої роботи [204, 205]. Як і в даній роботі будемо вважати, що відбуваються в регенераторі процеси в достатній мірі забезпечені киснем. За аналогією з [256] опишемо дані процеси наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = V_1 \frac{\partial P}{\partial x} + (-a_x + b_x L)P + \varepsilon k_2 PB - k_1 P + k_4 CP, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = V_2 \frac{\partial B}{\partial x} + (-a_z + b_z L)B - k_2 BP + k_1 P + k_4 CB, \\ \frac{\partial L}{\partial t} = V_3 \frac{\partial L}{\partial x} - \varepsilon(g_x P + g_z B)L, \\ \frac{\partial C}{\partial t} = (k_3 - \varepsilon k_4 P)C, \end{cases} \quad (3.38)$$

$$P|_{t=0} = P_0^*(x), B|_{t=0} = B_0^*(x), L|_{t=0} = L_0^*(x), C|_{t=0} = C_0^*(x),$$

$$P(0,t) = P_*(t), B(0,t) = B_*(t), L(0,t) = B_*(t), C(0,t) = B_*(t), \quad (3.39)$$

де $P(x,t)$ – концентрація пластівців в рідкому середовищі, що фільтрується; $B(x,t)$ – концентрація бактерій в розчині, що знаходиться в регенераторі; $L(x,t)$ – концентрація продуктів автолізу, що утворилися внаслідок взаємодії бактерій з забрудненням; $C(x,t)$ – концентрація забруднення, що надходить з вхідним розчином; k_1 – швидкість ерозії пластівців, k_2 – константа, що характеризує подальшу швидкість агрегації пластівців; m – константа; k_3 і k_4 – константи, визначають швидкість утворення та окислення продуктів автолізу; a_x , a_z – швидкості відмирання пластівців і дисперсних бактерій; b_x , b_z – константи, що характеризують швидкості утворення пластівців та дисперсних бактерій за

рахунок розмноження; g_x, g_z – швидкості споживання субстрату пластівцями і дисперсними бактеріями.

Розв’язок системи рівнянь (3.38) за умов (3.39) – (3.40) отримуємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned}
 P(x,t) &= P_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i P_i(x,t) + R_P(x,t,\varepsilon), \\
 B(x,t) &= B_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i B_i(x,t) + R_B(x,t,\varepsilon), \\
 L(x,t) &= L_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i L_i(x,t) + R_L(x,t,\varepsilon), \\
 C(x,t) &= C_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i C_i(x,t) + R_C(x,t,\varepsilon). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Після підстановки (3.40) в (3.38)-(3.39) та застосування стандартної “процедури прирівнювання” для знаходження $P_i, B_i, L_i, C_i, (i = \overline{0, n})$ (аналогічно до [51]) приходимо до задач розв’язок яких отримуємо за допомогою програмного середовища MatLab, зокрема М-функції *pdepe*. Для роботи з даною функцією перетворимо систему (3.38) у командний код MatLab, де кожне з рівнянь зводиться до наступного вигляду:

$$c(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} (x^m f(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x})) + s(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}).$$

Команди в MatLab:

```

function [c,f,s] = pdex2pde(x,t,u,DuDx)
ax=1.2*10^-10; bx=7*10^-8;
az=3*10^-10; bz=3.7*10^-5;
gx=3.5*10^-8; gz=3.5*10^-3;
G=2*10^3;
k1=5*10^-8; k2=3.4*10^-10;
k3=1.5*10^-3; k4=3.8*10^-3;
V1=1.26; V2=1.26; V3=1.26; V4=1.26;
c1=1; c2=1; c3=1; c4=1;
    
```

```

s1=V1*DuDx(1)+(-ax+bx*u(3))*u(1)+k2*G*u(1)*u(2)-
k1*G*u(1)+k4*u(4)*u(1);
s2=V2*DuDx(2)+(-az+bz*u(3))*u(2)-
k2*G*u(1)*u(2)+k1*G*u(1)+k4*u(4)*u(2);
s3=V3*DuDx(3)-(-gx*u(1)+gz*u(2))*u(3);
s4=V4*DuDx(4)+(k3-k4*u(4))*(u(1)+u(2));
c = [c1;c2; c3; c4];
f = [0; 0; 0; 0];
s = [s1; s2; s3; s4];

```

Початкові умови (3.39) командами MatLab представимо у наступному вигляді:

```

function u0 = pdex2ic(x)
u10=0.01;
u20=100;
u30=100;
u40=100*exp(-0.02*x);
u0 = [u10;u20;u30;u40];

```

Граничні умови (3.39) задамо наступною функцією:

```

function [pl,ql,pr,qr] = pdex2bc(xl,ul,xr,ur,t)
function [pl,ql,pr,qr] = pdex2bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl = [0; 0; 0; 0];
ql = [1; 1; 1; 1];
pr = [0; 0; 0; 0];
qr = [1; 1; 1; 1];

```

В результаті комп'ютерного моделювання в середовищі MatLab при $k_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ год}$, $k_2 = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ л/г}$, $k_3 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ год}$, $k_4 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ л/г}$, $G = 2 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}$, $a_x = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$, $a_z = 3 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$, $b_x = 7 \cdot 10^{-8} \text{ л/(г} \cdot \text{год)}$, $b_z = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ л/(г} \cdot \text{год)}$, $g_x = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ л/(г} \cdot \text{год)}$, $g_z = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ л/(г} \cdot \text{год)}$, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 1,26 \text{ м/год}$,

$P_0^*(x) = 0,01$, $B_0^*(x) = 100$, $L_0^*(x) = 100$, $C_0^*(x) = 100 \cdot e^{(-0,02 \cdot x)}$
отримуємо наступні результати (див. рис. 3.20 – рис. 3.27).

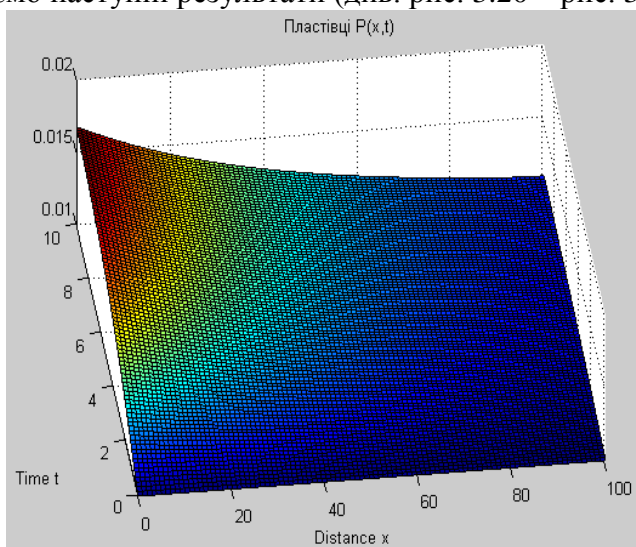


Рис. 3.20. Просторовий розподіл концентрації пластівців P у рідкому середовищі

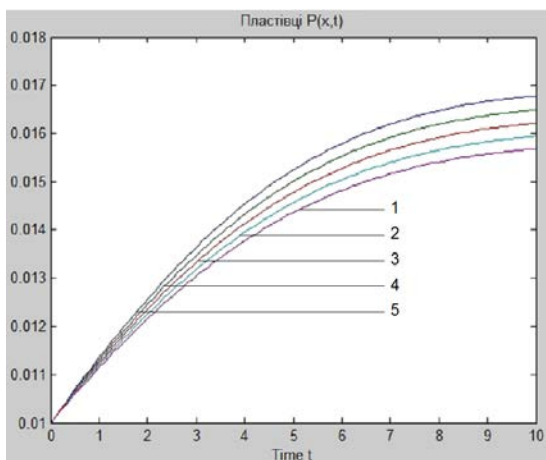


Рис. 3.21. Розподіл концентрації пластівців P у рідкому середовищі в різних точках фільтра

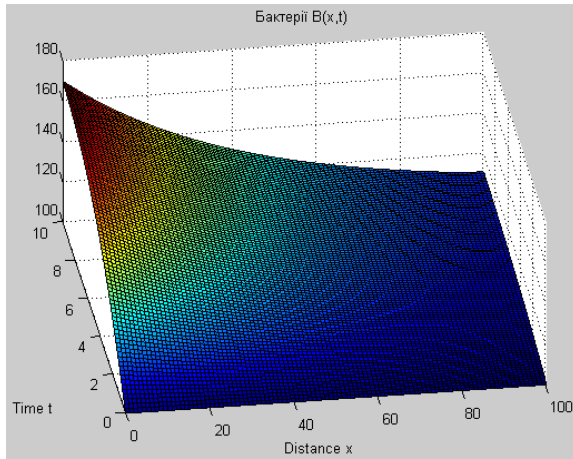


Рис. 3.22. Просторовий розподіл концентрації бактерій B у розчині регенератора

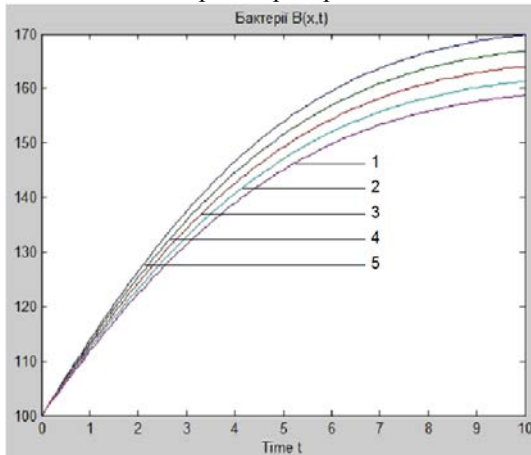


Рис. 3.23. Розподіл концентрації бактерій B у розчині регенератора в різних точках фільтра

Як видно з рис. 3.20 та рис. 3.21 концентрація пластівців вздовж фільтра з часом зростає, це пояснюється тим, що пластівці постійно утворюються і лише частина з них захоплює частинки, які утворилися від взаємодії бактерій та забруднення. Аналогічно росте концентрація бактерій, що

показано на рис. 3.22 та рис. 3.23 у зв'язку з тим, що у фільтр надходить достатня кількість кисню та створюються нормальні умови для розмноження бактерій.

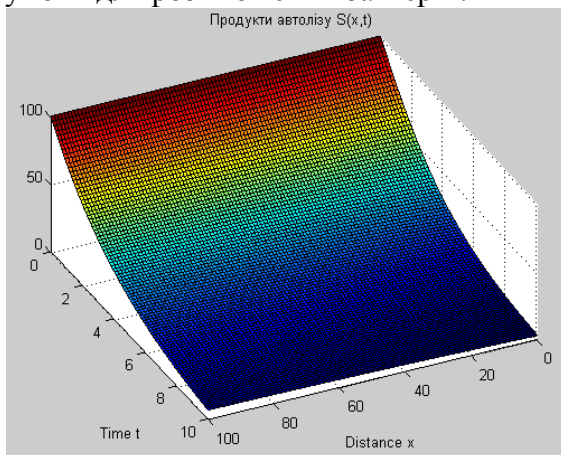


Рис. 3.24. Просторовий розподіл концентрації продуктів автолізу S

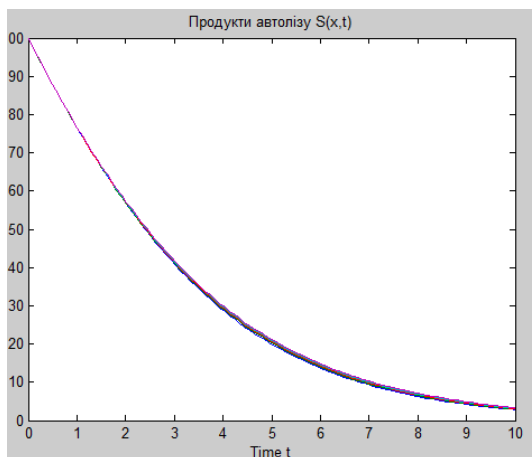


Рис. 3.25. Розподіл концентрації продуктів автолізу S в різних точках фільтра

На рис. 3.24 та рис. 3.25 концентрація продуктів автолізу вздовж фільтра з часом спадає, це пояснюється тим, що швидкість утворення продуктів автолізу напряму залежить від

концентрації забруднення та швидкості відведення продуктів автолізу. Як видно з рис. 3.26 та рис. 3.27 кількість частинок забруднення з часом спадає, що підтверджує ефективну роботу фільтра.

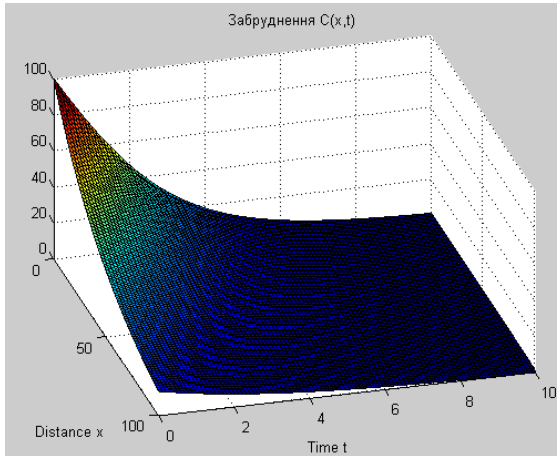


Рис. 3.26. Просторовий розподіл концентрації C забруднення по довжині фільтра

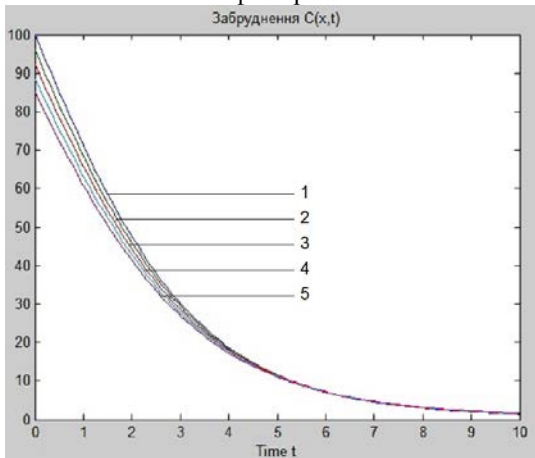


Рис. 3.27. Розподіл концентрації забруднення C по довжині фільтра в різних точках фільтра

3.6. Комп'ютерне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод

Промисловість – один з напрямів індустрії, який інтенсивно розвивається протягом багатьох останніх десятиліть, проте зі збільшенням чисельності харчових, мікробіологічних, фармацевтичних та багатьох інших виробництв щоденно зростають обсяги стічних вод, забруднених органічними речовинами, які несуть негативний вплив на екосистеми.

Побутові стічні води містять забруднення мінерального і органічного походження, тоді як промислові відрізняються, як за складом, так і за концентрацією залежно від галузі. Незалежно від типу всі стічні води потребують обов'язкового очищення, оскільки в них містяться забруднюючі речовини, які значно перевищують допустимі концентрації [256].

Для запобігання згубному впливу домішок на довкілля використовують системи магнітних, механічних, біологічних та інших фільтрів, які забезпечують допустимі показники концентрацій забруднення. Різноманіття забруднених стічних вод і природа їх походження при проектуванні визначають, використовуючи результати вітчизняного та закордонного досвіду [204, 205], бажаний ступінь та тип системи очищення забрудненої води.

Одним з найчастіше застосовуваних методів є біологічне очищення [201]. Розрізняють процеси аеробної очистки, коли додатково вводять кисень і анаеробної очистки.

Розглянемо процес аеробної очистки, в якому для стимулювання активності бактерій використовують додаткове добавляння повітря та підтримання оптимальної температури середовища. При такій очистці стічних вод мікроорганізми розмножуються в активному мулі, поглинаючи забруднення та кисень. Проте з часом поглинаюча здатність бактерій падає, і вони осідають у вигляді твердого субстрату, який необхідно

забирати. Підтримуючи сукупність цих параметрів на відповідному рівні, можна забезпечити оптимальні умови для ефективної очистки стічних вод.

Основним питанням автоматизації аеротенків є розробка схеми автоматичної підтримки в оптимальних межах співвідношення між кількістю стічної води, яка надходить і концентрацією забруднень в них з кількістю введеного в аеротенки повітря та активного мулу. Підтримання цього співвідношення в оптимальних межах є основною умовою високоефективної роботи аеротенків в санітарному та техніко-економічному відношеннях. Автоматичні пристрої можуть бути використані для рівномірного розподілу стічних вод між окремими аеротенками, суворої підтримки за заданою програмою кількості добавляється повітря та активного мулу, що вводиться в різних точках кожного аеротенку. Також системи автоматизації застосовують для найбільш економічного регулювання турбоповітрянодувних установок при їх спільній роботі з повітропроводами і змінній потребі в кількості стисненого повітря, надійного безперервного контролю якісних і кількісних показників роботи аеротенків.

В останні роки проведено значні наукові дослідження питань автоматизації біохімічної очистки стічних вод в аеротенках. Ці дослідження розширили уявлення про динаміку процесів в аеротенках, вплив окремих змінних параметрів, необхідної для автоматичного керування вихідної інформації, а також визначили деякі принципи побудови схем і засобів автоматизації.

Так, в [201] розглядається очистка стічних вод як технологічний процес з деталями механічних конструкцій, проте хоча запропоновані математичні параметри дозволяють розрахувати оптимальні параметри аеротенка, відстійника для відповідного процесу, але не враховують динаміку зміни часу ефективної дії фільтра залежно від вхідної концентрації

забруднення, потреби в кисні та віку активного мулу, що осідає.

Взаємодію активного мулу та домішок враховує математична модель, запропонована в [205], що є досить загальною моделлю, оскільки система взаємодіючих параметрів, яка детально описує технологічний об'єкт керування (рис. 3.28), запропонована в [206].

Описана в роботі [204] сукупність рівнянь не враховує взаємного впливу параметрів між собою. Відповідно метою даної роботи є розробка математичної моделі процесу очищення стічних вод від забруднення, що враховує взаємодію бактерій, активного мулу і домішок в пористому середовищі, дослідження запропонованої системи за допомогою комп'ютерного моделювання для розрахунку оптимальних параметрів технологічного процесу.

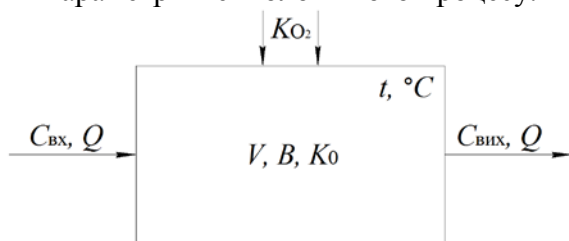


Рис. 3.28. Структурна схема процесу біологічного очищення

На рис. 3.28 зображено структурну схему біологічного очищення, тут: $C_{вх}$ – концентрація домішок в стічній воді, яка надходить, $мг/дм^3$; $C_{вих}$ – концентрація забруднення на виході з системи, $мг/дм^3$; V – об'єм реактора $м^3$; Q – витрата води, яка надходить, $м^3/год$; B – концентрація активного мулу в реакторі, $г/л$.

Розглянемо процес очищення рідин від органічних забруднень шляхом внесення біологічних бактерій. Згідно з літературними джерелами (теоретичними і експериментальними даними) [51] розрізняють такі етапи

очищення стічних вод від забруднення: розкладання органічного забруднення бактеріями, ріст і відмирання бактерій, вироблення активним мулом “молодих” бактерій, перехід домішок до біологічно неокисної речовини.

Для опису динаміки зміни концентрації забруднення з урахуванням впливу активного мулу на поглинання домішок використовується рівняння типу [204, 205]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = v_c \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C B + w_c + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (3.41)$$

де $\beta = \frac{Q \cdot (1 + k_i)}{V}$ – коефіцієнт, який враховує конструктивні особливості фільтра та швидкість потоку рідини; C – концентрація забруднення в воді; V – об’єм фільтра; k_i – коефіцієнт рециркуляції активного мулу; w_c – швидкість поглинання субстрату відповідно до адекватності моделі; v_c – швидкість руху субстрату; D_c – коефіцієнт дифузії.

Враховуючи те, що бактерії рухаються разом із забрудненою речовиною у пористому середовищі, а також осідають в нижній частині фільтра у вигляді активного мулу, приходимо до рівняння для росту, відмирання й перенесення бактерій з урахуванням біологічної потреби кисню

$$\frac{\partial B}{\partial t} = v_B \frac{\partial B}{\partial x} + \beta B K \cdot K_B + w_B + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \quad (3.42)$$

де B – концентрація активного мулу; K_B – коефіцієнт поглинання кисню та бактерій; w_B – швидкість накопичення активного мулу відповідно до адекватності моделі; v_B – швидкість руху активного мулу; D_B – коефіцієнт дифузії.

Для поліпшення ефективності процесу та забезпечення оптимальних умов життєдіяльності бактерій додатково з забрудненням вводиться кисень, рівняння, що описує динаміку даного процесу має такий вигляд

$$\frac{\partial K}{\partial t} = v_K \frac{\partial K}{\partial x} + \beta K + K_K \cdot C \cdot (K_0 - K) + w_K + D_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \quad (3.43)$$

де K – концентрація кисню, необхідна для підтримання найкращого поглинання бактеріями забруднення; K_K – коефіцієнт масопередачі кисню; K_0 – концентрація насичення води киснем при заданих температурі та тиску; w_K – швидкість поглинання субстрату кисню; v_K – швидкість руху кисню; D_K – коефіцієнт дифузії.

Сукупність диференціальних рівнянь (3.41)–(3.43) описує в комплексі зміну концентрації бактерій, забруднення та кисню в пористому середовищі. Різноманітні взаємовпливи характеристик середовища та процесу очищення доцільно враховувати шляхом введення у відповідні рівняння коефіцієнтів, що дає можливість аналізувати процеси, які відбуваються в реакторі, як сукупність взаємопов'язаних впливів. Зміна керованого параметру на збурення у реальних системах відбувається з деяким запізненням, викликане певними причинами. У даному випадку перенесення забрудненої речовини вимагає певного часу. Далі прийматимемо, що будь-яка зміна зовнішніх факторів, наприклад збільшення концентрації забруднення чи бактерій, відбувається лише по закінченні деякого часу (часу запізнення $\tau > 0$). Виходячи з вищесказаного приходимо до такої модельної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = v_C \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C B + w_C + D_C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = v_B \frac{\partial B}{\partial x} + \beta B K \cdot K_B + w_B + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial K}{\partial t} = v_K \frac{\partial K}{\partial x} + \beta K + K_K \cdot C \cdot (K_0 - K) + w_K + D_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
 C|_{x=0} &= C^*(t), \quad B|_{x=0} = B^*(t), \quad K|_{x=0} = K^*(t), \\
 \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=l} &= 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \\
 C|_{t=0} &= C^*(x), \quad B|_{t=0} = B^*(x), \quad K|_{t=0} = K^*(x),
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

де l – довжина фільтра.

Розв’язки системи (3.44) за умов (3.45) отримаємо за допомогою моделювання в програмному середовищі Matlab, зокрема М-функцію *pdepe*. Для роботи з даною функцією перетворимо системи (3.44), (3.45) у машинний код

Команди в Matlab

```

Q=7.2;          c1=1;
ki=1;          c2=1;
V=0.7;         c3=1;
wC=0.01;      f1=D1*DuDx(1);
wB=14.72;    f2=D2*DuDx(2);
wK=0.01;     f3=D3*DuDx(3);
KK=0.001;    s1=V1*DuDx(1)-u(1)*u(2)*b+wC;
KB=100;      s2=V2*DuDx(2)+u(3)*u(2)*b*KB+wB;
K0=6;        s3=V3*DuDx(3)+u(3)*b+wK+KK*u(1)*(K0-
b=Q*(1+ki)/V; u(3));
V1=1.26;     c = [c1;c2; c3];
V2=1.92;     f = [f1; f2; f3];
V3=1.53;     s = [s1; s2; s3];
D1=0.721;
D2=10^-5;
D3=10^-5;
    
```

Для виклику функції *pdepe* маємо такий код та використаємо стандартні функції для побудови відповідних графіків:

```

m = 0;
x = linspace(0,1,100);
    
```

```
t = linspace(0,0.1,100);
sol = pdepe(m,@pdex2pde,@pdex2ic,@pdex2bc,x,t);
u1 = sol(:,1);
u2 = sol(:,2);
u3 = sol(:,3);
```

Після проведення комп'ютерного моделювання (при $L|_{t=0} = 50 - 15 \cdot e^x \text{ г/л}$, $X|_{t=0} = 0,1 \text{ г/л}$, $C|_{t=0} = 0,001 \text{ г/л}$, $Q = 7,2 \text{ м}^3/\text{год}$, $V = 0,7 \text{ м}^3$, $w_L = 0,01 \text{ мг/л} \cdot \text{год}$, $w_X = 14,72 \text{ мг/л} \cdot \text{год}$, $w_C = 0,01 \text{ мг/л} \cdot \text{год}$, $K_C = 0,001 \text{ год}^{-1}$, $K_X = 100 \text{ год}^{-1}$, $C_0 = 6 \text{ мг/дм}^3$, $v_C = 1,26 \text{ м/год}$, $v_B = 1,92 \text{ м/год}$, $v_K = 1,26 \text{ м/год}$, $D_C = 0,721$, $D_B = 10^{-5}$, $D_K = 10^{-5}$) отримали такі результати (див. рис. 3.29 – рис. 3.31).

На рис. 3.29 – рис. 3.31 наведено результати комп'ютерного експерименту, що відображають характер динаміки функцій (а) з часом в різних точках фільтра: 1 – при $x=0,1 \text{ м}$, 2 – при $x=0,3 \text{ м}$, 3 – при $x=0,5 \text{ м}$, 4 – при $x=0,7 \text{ м}$, 5 – при $x=0,9 \text{ м}$; (б) по довжині фільтра в різні моменти часу. Як видно з рис. 3.29 концентрація активного мулу вздовж фільтра з часом зростає, це пояснюється тим, що створюються сприятливі умови для розмноження бактерій, а саме: постійно надходить забруднення у вигляді домішок і відбувається регулювання подачі кисню, як показано на рис. 3.30 відповідно до зміни концентрації залізовмісних частинок, які при взаємодії між собою осідають в нижніх шарах фільтра у вигляді активного мулу. На рис. 3.31 відображено зміну концентрації домішок, яка з часом спадає, що підтверджує ефективну роботу фільтра, проте на ранньому етапі очищення на виході з фільтра не досягнуто потрібної кількості бактерій і кисню, що зумовлює збільшення концентрації забруднення, які визначено початковими умовами.

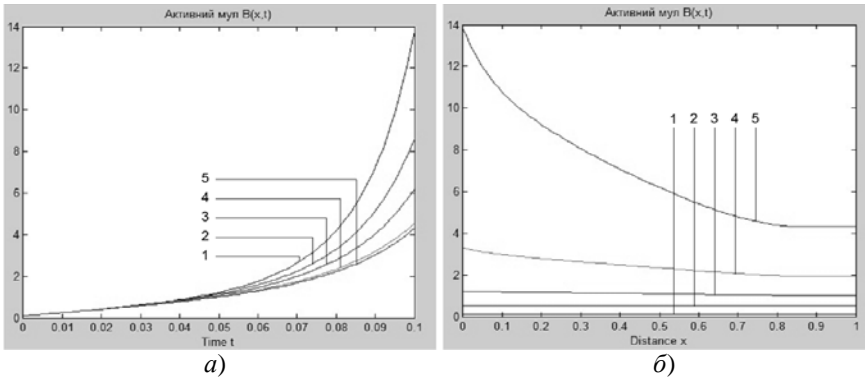


Рис. 3.29. Розподіл зміни концентрації активного мулу: (а) з часом в різних точках фільтра; (б) по довжині фільтра в різні моменти часу

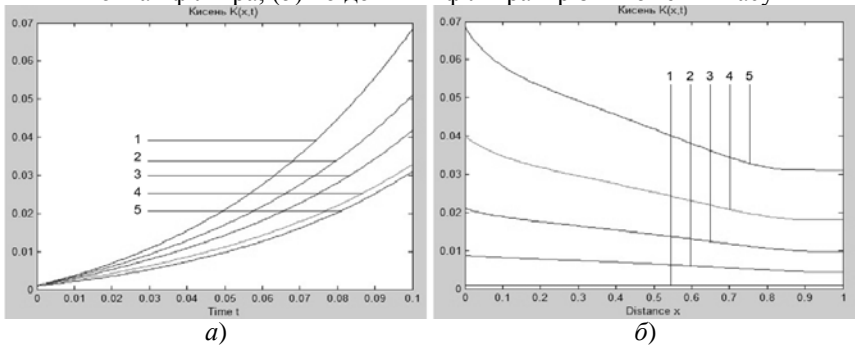


Рис. 3.30 Зміна концентрації кисню: (а) з часом в різних точках фільтра; (б) по довжині фільтра в різні моменти часу

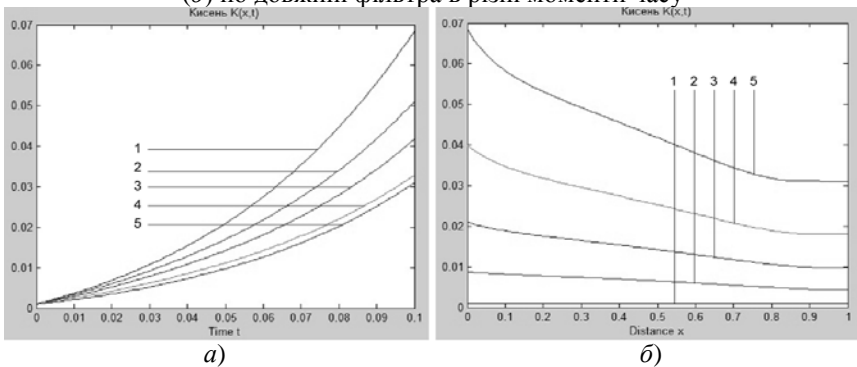


Рис. 3.31. Характер зміни концентрації забруднення: (а) з часом в різних точках фільтра; (б) по довжині фільтра в різні моменти часу

3.7. Висновки до третього розділу

1. Запропонована математична модель роботи прояснювача з завислим шаром осаду, базована на теорії фільтрування Мінца, адекватно описує фізичну суть технологічних процесів прояснення води, формування осаду, умов виносу надлишкової його частини за межі корпусу установки та зміну втрат напору по висоті завислого шару, і дозволяє для досліджуваних умов обчислити значення згаданих параметрів в кожний момент часу.

2. На основі узагальнення моделей типу Моно розроблено нову математичну модель процесу аеробного очищення стічної води в пористому середовищі, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі, що надає можливість автоматизованого визначення оцінки ефективної роботи біофільтра, зокрема, часу припинення подачі бактерій, а отже суттєво зменшувати вартість процесу очищення.

3. Розроблено просторову математичну модель, що описує основні закономірності очищення стічної води у біофільтрі і алгоритм розв'язання відповідної сингулярно збуреної задачі. Одержані формули та графічні залежності між величинами є ефективні для проведення теоретичних досліджень, спрямованих на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). Як показують розрахунки, після певного моменту часу можна припинити подачу бактерій у біофільтр і це не вплине на ріст бактерій у фільтрі, а також на процес фільтрування, що у свою чергу значно зменшить вартість процесу очищення. Таким чином задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів

фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом.

4. Встановлено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та функцією швидкості хімічної реакції. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин, що візьмуть участь у реакціях, з метою ефективного очищення стічних вод.

5. Побудована математична модель біологічної очистки, що описує закономірності процесів зміни концентрацій пластівців, дисперсних бактерій, продуктів автолізу і субстрату в регенераторі аеротенка, тобто в першій фазі процесу очищення. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі з використанням функції *pdepe* середовище Matlab. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації забруднення та бактерій протягом часу очистки рідини.

6. Побудована математична модель, що описує закономірності процесів зміни концентрацій забруднення, активного мулу і кисню в регенераторі аеротенка, тобто в першій фазі процесу очищення. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі з використанням функції *pdepe* середовище MatLab. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації забруднення, бактерій та кисню протягом часу очистки рідини, що надає можливість враховувати вік активного мулу, а також враховує такі параметри середовища, як окислення та ін.

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОСАДЖЕННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ДОМШОК МАГНІТНИМИ ФІЛЬТРАМИ

Даний розділ присвячено питанням побудови математичних моделей процесів очищення рідин від багатокomпонентного забруднення магнітними фільтрами (осаджувачами) та аналізу відповідних процесів очищення на основі розроблених моделей, зокрема: вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну тощо) для випадку багатокomпонентності домішкових частинок у магнітних фільтрах, досліджується залежність процесу очищення від швидкості, тиску тощо.

4.1. Математичне моделювання процесу магнітного очищення води від багатокomпонентних феромагнітних забруднень

В якості досліджуваного пристрою використовується магнітний фільтр-осаджувач для очищення рідких середовищ, в якому магнітопроводи обладнані додатковим пружинним пристроєм-розмикачем контактів магнітопроводів з загрузкою. Корисна модель якого належить до магнітного розділення речовин, переважно до очищення рідких середовищ в магнітному полі і може бути використана в енергетичній, хімічній, металургійній, скляній, харчовій промисловості, в газоочистці, при очищенні стічних, технологічних і природних вод.

Є відомий магнітний фільтр для очищення рідких і газових середовищ, що включає котушки намагнічування, корпус, що виготовлений з двох циліндричних каналів, які

заповнені феромагнітною фільтруючою загрузкою. Канали з фільтруючою загрузкою і котушки намагнічування створюють замкнутий магнітний контур. Недоліком даного магнітного фільтра є невисока ефективність регенерації загрузки. При відключенні котушок намагнічування феромагнітна фільтруюча загрузка зберігає замкненість магнітного контуру, а це призводить до збереження залишкової намагніченості значної величини, що в свою чергу не дозволяє виконувати ефективну регенерацію і за рахунок цього зменшується коефіцієнт магнітного очищення середовища.

Також відомий магнітний фільтр для очищення рідких і газових середовищ, що включає корпус з феромагнітною фільтруючою загрузкою, намагнічуючу систему у вигляді соленоїдів, розміщених на поверхні корпусів, магнітопроводів у вигляді пластин і встановленими між корпусами з утворенням замкненого магнітного контуру. Недоліком даного магнітного фільтра є також невисока ефективність регенерації фільтруючої загрузки через значну залишкову намагніченість гранул загрузки. При відключенні магнітного поля магнітний контур даного фільтра залишається замкненим, а це є причиною значної залишкової намагніченості. Через невисоку ефективність регенерації знижується і коефіцієнт магнітного очищення рідких і газових середовищ.

Головною задачею даної моделі є покращення умов виконання регенерації фільтруючої загрузки і підвищити коефіцієнт ефективності магнітного очищення середовищ.

Таке технічне рішення забезпечує покращення умов виконання регенерації фільтруючої загрузки, за рахунок зменшення величини залишкової намагніченості, а також підвищення коефіцієнта магнітного очищення середовища, за рахунок зменшення розсіювання магнітного потоку і підвищення рівня намагніченості феромагнітної загрузки в режимі фільтрування.

Експлуатація магнітних фільтрів включає процес осадження (фільтрування) домішок у феромагнітній фільтруючій загрузці і процес регенерації загрузки. Процес фільтрування характеризується періодом фільтроциклу (τ_3) і часом регенерації (τ_p). Період фільтроциклу (τ_3) складає від кількох годин до кількох сотень годин, а час регенерації може складати

3–20 хв. При цьому залежно від форми, розмірів, маси гранул фільтруючої загрузки використовуються значні об'єми води для регенерації. Виникає необхідність створити такі умови, й розрахувати такі теоретичні рекомендації, при яких ефективність процесів фільтрування та регенерації максимальна, а витрати води при регенерації мінімальні.

Магнітний фільтр складається з немагнітного корпусу 1, заповненого феромагнітною фільтруючою загрузкою 2, намагнічуючих котушок 3, магнітопроводів 4, додаткового пристрою-розмикача у вигляді пружних елементів 5, феромагнітних стрижнів 6, що закріплені до пластин 7. Для введення і відведення середовища, що очищується у корпусах фільтра передбачені патрубки 8, 9. В якості фільтруючої загрузки можуть бути використані феромагнітні кульки, гранули дробу, стружки, фериту, суміш гранул фериту і кульок, стрижні, пластини.

Магнітний фільтр працює наступним чином. Включають намагнічуючі котушки 3, під дією магнітних сил магнітопроводи 4 переміщуються і щільно прилягають до верхніх і нижніх пластин 7, і разом з стрижнями 6 і намагнічено. Фільтруючою загрузкою 2 утворюють замкнений магнітний контур. По патрубкам 8 поступає середовище, що очищається, а очищене від домішок середовище виводиться через патрубки 9. Для проведення регенерації відключають котушки 3, під дією пристрою розмикача 5 магнітопроводи переміщуються (верхній вгору, а нижній вниз), розривають контакт з феромагнітною загрузкою. На рис. 4.1 показано

розміщення магнітопроводів в режимі регенерації. Водоповітряною сумішшю через патрубки 8, 9 змивають осаджені в фільтруючій загрузці домішки в дренажну ємність. Після завершення регенерації магнітний фільтр включають в роботу.

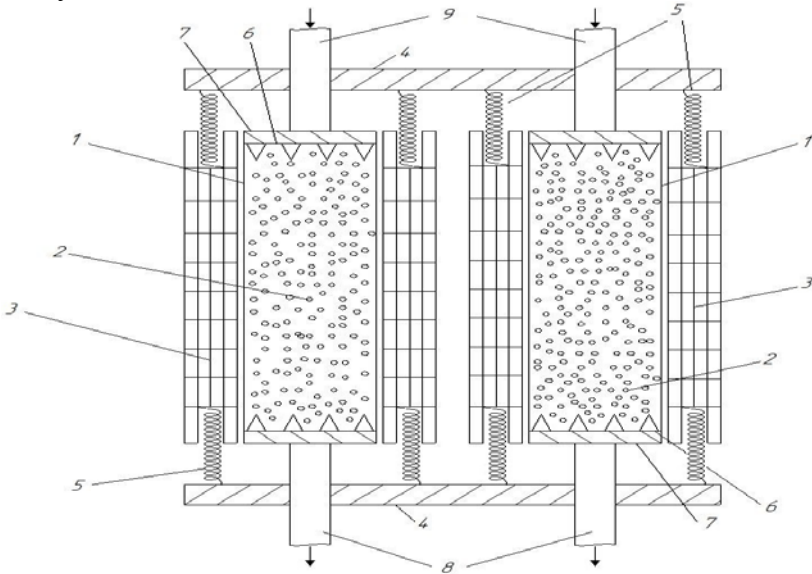


Рис. 4.1. Магнітний фільтр-осаджувач з додатковим пристроєм-розмикачем, виготовленим у вигляді пружних елементів, розміщених між магнітопроводами і торцевими поверхнями соленоїдів

Наявність додаткових пристроїв-розмикачів, якими забезпечені магнітопроводи дозволяє в режимі регенерації, при відключеній намагнічуючій системі, створити розрив контактів магнітопроводів з загрузкою, при цьому зменшується залишкова намагніченість загрузки і створюються умови для її ефективної регенерації. В режимі очищення, при включеній намагнічуючій системі, створюється контакт магнітопроводів з загрузкою, що значно зменшує розсіювання магнітного потоку i , за рахунок цього,

збільшується рівень очищення рідкого чи газового середовища.

Застосування запропонованого магнітного фільтра-осаджувача з додатковим пружинним пристроєм-розмикачем контактів магнітопроводів з загрузкою, забезпечує покращення умов виконання регенерації фільтруючої загрузки, за рахунок зменшення величини залишкової намагніченості, а також підвищення коефіцієнта магнітного очищення середовища, за рахунок зменшення розсіювання магнітного потоку і підвищення рівня намагніченості феромагнітної загрузки, в режимі фільтрування [216].

У роботі [43] була розроблена математична модель магнітного фільтра з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, проте дана модель була однокомпонентною і не враховувала змінної швидкості фільтрування, що є суттєвим для технічної реалізації магнітних фільтрів. Виходячи з цього, розглянемо процес магнітного осадження домішок, що реалізується в магнітному фільтрі ($0 \leq x \leq L$) з однорідною гранульованою фільтруючою насадкою. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [44], з урахуванням зворотного впливу осаджених частинок на пористість σ , масообмінні коефіцієнти, а також на коефіцієнт фільтрації та змінну швидкість фільтрування.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_i(x,t))}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} &= \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m k_i c_i(x,t) \right) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t), \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } P, \quad (4.3)$$

де $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул насадки домішкових частинок;

$$\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho(x, t), \quad (4.4)$$

v – швидкість фільтрування ($v = const$, що характеризує замкненість технологічного процесу), $\sigma(\rho)$ – пористість фільтруючої насадки (σ_0 – вихідна пористість насадки),

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x, t), \quad (4.5)$$

$\kappa(\rho)$ – коефіцієнт фільтрування, ρ_2 – граничне завантаження осадом,

$$\kappa(\rho) = \begin{cases} \kappa_0 - \varepsilon\gamma\rho(x, t), & \rho < \rho_2 \ (t < \tau_3), \\ \kappa^0, & \rho = \rho_2 \ (t \geq \tau_3), \end{cases} \quad (4.6)$$

$\kappa^0 = \kappa_0 - \varepsilon\gamma\rho_2$, α_0 , α_* , σ_* , κ_0 , γ , ε – жорсткі параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\alpha(\rho)$, $\sigma(x, t)$, $\kappa(x, t)$ – м'які параметри і знаходяться дослідним способом), P – тиск.

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових частинок в насадці, змінюються відповідні параметри фільтрування. Оскільки система є замкненою, то зміна коефіцієнта фільтрування призводить до зміни величини перепаду тиску $\Delta P = P(L, t) - P(0, t)$ у пористій насадці.

Розв'язок системи (4.1) за умов (4.2) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (2.3) (див. [43, 44]).

Аналогічно до [51], після підстановки (1.6) в (4.1) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_{i,0}, \\ c_0|_{x=0} = c_i^*(t), \quad c_0|_{t=0} = 0, \quad \rho_0|_{x=0} = 0, \quad \rho_0|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_{i,j} + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_{i,j} - g_i, \\ c_{i,j}|_{x=0} = 0, \quad c_{i,j}|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{x=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{i,0}(x, t) = \begin{cases} c_i^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{\beta x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_0(x, t) = \beta \int_0^t c_{i,0}(x, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$c_{i,j}(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_i(x,t)}}{v} \cdot \int_0^x g_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) \cdot e^{\lambda_i(\tilde{x}, t)} d\tilde{x}, & t \geq f_i(x), \\ 0, & t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x, t) = \int_0^t (\beta c_{i,j}(x, \tilde{t}) - g_i(x, \tilde{t})) d\tilde{t},$$

$$\text{де } g_i(x, t) = \sum_{j=1}^i \rho_{j-1} \left(\alpha_0 + I(i, j) \sum_{j=2}^i (\alpha_* \rho_{i-2}) \right),$$

$$\lambda_i(x, t) = \frac{1}{v} \int_0^x \psi_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) d\tilde{x},$$

$$\psi_i(x, t) = \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}(x, t)}{\partial t} + \beta, \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases} \quad \text{Наближені}$$

значення функцій $f_i(x)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву (x_j, t_j) , $j = \overline{1, n}$, де $x_j = \Delta x \cdot j$,

$$t_{j+1} = t_j + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j).$$

Для оцінки залишкових членів маємо задачу, аналогічну до [51].

Згідно [237-239] коефіцієнти захоплених домішкових частинок і відірваних частинок осаду обчислюються за наступною формулою: $\beta = \frac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2}$ [237], де β_0 – вільний параметр, H – напруженість магнітного поля, v – швидкість фільтрування, d – діаметр гранульованої насадки фільтру.

Наведемо результати розрахунків за формулами (1.3) при $c_1^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $c_2^*(t) = 1 \text{ мг/дм}^3$, $v = 200 \text{ м/год}$, $L = 1 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.35 \text{ с}^{-1}$, $H = 60 \text{ кА/м}$, $d = 2.4 \text{ мм}$. $\alpha_* = 1$.

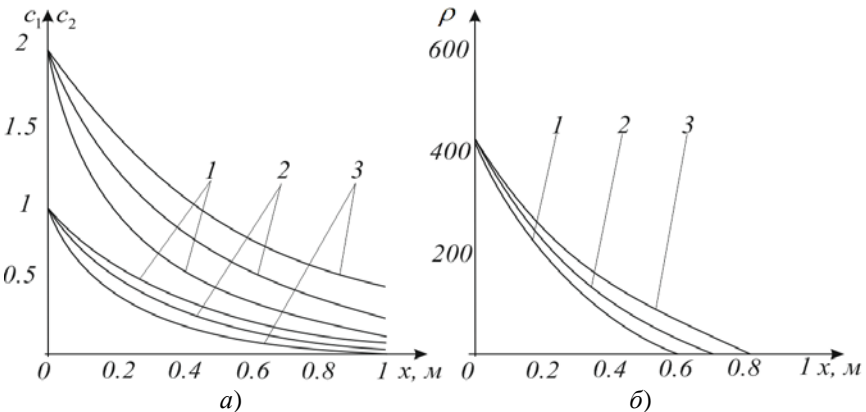


Рис. 4.2. Розподіл концентрації домішок у рідині (а) та осаду (б) вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 10 \text{ год}$, $t_2 = 15 \text{ год}$, $t_3 = 25 \text{ год}$

Підкреслимо, що в процесі розрахунку ми приймали $v = \text{const}$, хоча коефіцієнт фільтрації (як і пористості) спадає

за рахунок прилипання до стінок (засипки) твердих частинок. Це дає можливість знаходити у кожному поперечному перерізі фільтра (кожній точці x , $0 \leq x \leq L$) градієнт напору (тиску), зокрема використовуючи формулу $grad P = \frac{v}{\kappa(\rho)}$

можна знайти час надходження більшого за критичне значення градієнта і приймати відповідні “рішення автоматизації”. Зміна $grad P$ з часом показана на рисунку 4.4.

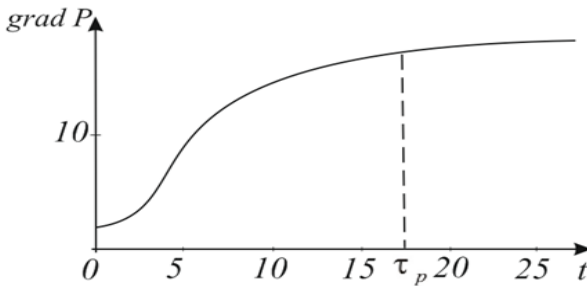


Рис. 4.3. Зміна $grad P$ на виході фільтра з часом

Як бачимо (рис. 4.4), у випадку $c_*(t) = c_* = const$ ефективність фільтра практично не змінюється до моменту часу τ_3 , після якого починає спадати, що підтверджує відомий факт розподілу ефективності фільтра з часом.

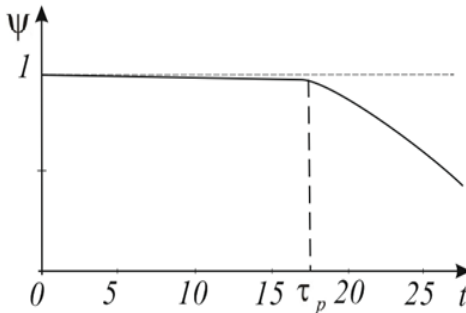


Рис. 4.4. Розподіл ефективності фільтра $\psi = \left(\sum_{i=1}^m c_i^* - \sum_{i=1}^m c_i \right) / \sum_{i=1}^m c_i^*$

4.2. Моделювання процесу магнітного очищення рідких середовищ від феродомішок у випадку змінної швидкості

Стрімкий науково-технічний прогрес, високі темпи розвитку промисловості, впровадження сучасних технологічних процесів вимагають суттєвого покращення якості водних систем, які є основою або складовою більшої частини технологічних виробничих процесів в різних галузях промисловості. Одним з головних показників якості водних систем є ступінь їх чистоти по відношенню до різного роду домішок. Причиною наявності домішок є неперервна і прогресуюча в часі корозія, зношення технологічного та комунікаційного обладнання, наявність застарілих технологій виробництва, які обумовлюють появу забруднюючих домішок. Встановлено, що основна маса цих домішок складається з залізовмісних сполук. В тому випадку, коли вимоги до якості водних середовищ високі, залізовмісні домішки суттєво, а інколи визначально, впливають на якість і сортність водних середовищ або на продукцію, виготовлену з рідких середовищ. При цьому порушуються технологічні процеси, зменшується потенціальний рівень виробництва, зменшується надійність та довговічність роботи обладнання [237-239].

На теплових і атомних електростанціях залізовмісні домішки погіршують якість конденсату та, відповідно, живильної води котельних агрегатів. Досліджено, що навіть при концентрації залізовмісних домішок $(0,02-0,2) \text{ мг/дм}^3$ на парогенеруючих поверхнях труб котлів та в проточній частині турбін утворюються так звані “залізисті відкладення” [237-239]. Ці відкладення збільшують термічний та гідравлічний опір, погіршують теплопередачу, призводять до перевитрат палива і теплової енергії, перепалам та розривам труб, зменшенню потужності турбіни, збільшенню часу простою обладнання в ремонті і скорочення вироблення електроенергії. Відкладення на парогенеруючих трубах в кількості всього

200-300 г/м² (це відповідає товщині відкладень не більше 0,4...0,5 мм) обумовлює додатковий перегрів труб на 50...120°C, а відкладення в кількості біля 1 кг на лопатках циліндра високого тиску турбін блоків потужністю 300 мВт викликає зменшення потужності на 5...10 мВт, що еквівалентно недовиробленню 35...70 млн кВт.год/рік електроенергії [237-239]. Якщо ж конденсати з високою концентрацією залізовмісних домішок (особливо в пускові режими) скидати у водойми, то це призводить до забруднення водного басейна, навколишнього середовища та додатковим втратам тепла.

В оборотних (стічних) водах металургійних виробництв концентрація диспергованої окалини сягає ~100 мг/дм³ і більше, при нормі 10 мг/дм⁴. Така висока концентрація окалини призводить до швидкого зносу технологічного обладнання, позапланового виведення в ремонт і погіршення якості металопродукції, що випускається.

Дослідженнями та спостереженнями встановлено, що 70-95%, а в окремих випадках до 98-100% залізовмісні забруднюючі домішки у вказаних галузях промисловості мають феромагнітні властивості [237]. Тому для їх видалення запропоновано використовувати високошвидкісний і ефективний метод магнітного осадження. Суттєвими перевагами даного методу є можливість очищати рідкі середовища з температурою до 500°C і швидкістю фільтрування порядку 1000 м/год, в той час як в механічних фільтрах швидкість коливається в межах 5-10 м/год. В тих технологічних процесах, де температура рідкого середовища сягає ~100°C і вище, і середовища є хімічно агресивними, метод магнітного очищення майже єдиний, який може забезпечити ефективне очищення середовищ від феромагнітних домішок.

Процес очищення рідких (водних) середовищ від феромагнітних домішок найбільш ефективно відбувається в

намагнічених пористих загрузках. Для цього необхідно щоб виконувалась умова $F_M > F_C$, F_M , F_C – магнітна і гідродинамічна сили.

$$F_M = \mu_0 \chi V_c H \text{grad} H, \quad F_C = 3\pi d_e \eta (v - v_c) K,$$

де χ , V_c , d_e – магнітна проникність, об'єм і еквівалентний ефективний діаметр часток; H – напруженість магнітного поля між гранулами загрузки; η – динамічна в'язкість рідкого середовища; v , v_c – швидкості рідкого середовища і частки; K – динамічний коефіцієнт форми частки; μ_0 – магнітна стала.

Розрахунки показали, що інерційна і архімедова сили, які діють на ферочастки у два рази менші від магнітних сил. Дослідами встановлено, що ефективне осадження часток (феромагнітних, феримагнітних, антиферомагнітних) відбувається при значеннях силового магнітного фактора $H \text{grad} H \approx 1 \cdot 10^{12} - 1 \cdot 10^{15} \text{ A}^2/\text{M}^4$.

В початковий момент часу ($t=0$) пориста загрузка відносно “чиста”, тобто не насичена домішковими частинками, її пористість – σ_0 . В процесі осадження домішок величина пористості σ поступово зменшується, коефіцієнт гідравлічного опору збільшується і, відповідно у випадку замкнутості системи, збільшується величина перепаду тиску ΔP у пористій загрузці. Ефективність процесу очищення рідкого середовища залишається на досить високому рівні протязі певного часу $t = \tau_3$ (часу фільтроциклу, часу захисної дії фільтра). При накопиченні критичної маси домішок в об'ємі пористої загрузки, що характеризується величиною робочої ємності поглинання, ефективність процесу очищення ψ , що дорівнює відношенню різниці концентрацій домішок на вході і виході фільтра до концентрації на вході, знижується і режим очищення переходить в нестационарну

стадію. Як відомо [237], при $t > \tau_3$, певна кількість домішок ще осаджується в порових прошарках загрузки, а більша їх частина “зривається” і виноситься з середовищем, що очищується. Поступово комірki по довжині пористої загрузки максимально насичуються домішками і самовідключаються при досягненні часу захисної дії фільтра τ_n .

Аналітично величина τ_3 розраховується [239]:

$$\tau_3 = \frac{\rho_n \cdot c \cdot L \cdot \mu}{\rho_{ж} \cdot \psi \cdot C_0 \cdot v \cdot K_c}, \text{ де } \rho_n - \text{густина матеріалу загрузки; } c -$$

ємність поглинання загрузкою залізовмісних домішок; L – довжина шару намагніченої загрузки; μ – щільність пакування загрузки; $\rho_{ж}$ – густина рідкого середовища, що очищається; ψ – коефіцієнт магнітного осадження; C_0 – концентрація залізовмісних домішок до очищення, v – швидкість фільтрування, K_c – коефіцієнт відповідності між молекулярною масою феромагнітних окисів Fe_3O_4 ; $\gamma - \text{Fe}_2\text{O}_3$ і потроєною, і подвоєною масами чистого заліза.

У даному підрозділі запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок в пористій фільтруючій загрузці, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, зокрема на пористість, коефіцієнт, що характеризує процес відрив від гранул загрузки частинок домішок, коефіцієнт фільтрації, що дає можливість уточнити такі параметри процесу фільтрування, як час фільтроциклу (час стабільної очистки, на протязі якого ефективність процесу очистки практично не змінюється), граничну масу домішок в загрузці, граничну величину перепаду тиску і аналогічно [43, 44, 51] побудовано алгоритм розв’язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу “конвекція-масообмін”. При цьому процес магнітного осадження відбувається при змінній швидкості і сталому перепаді тиску.

Аналітичні рівняння, які описують процес фільтрування [51] і процес магнітного осадження [25], не дозволяють в широкому діапазоні зміни параметрів описувати процес очистки, окрім того, не враховують зворотній вплив характеристики процесу очистки. Тому актуальним завданням теоретичних досліджень є розробка нелінійного математичного моделювання процесу магнітного осадження домішок в намагнічених пористих загрузках. Розв'язок цієї задачі дозволить прогнозувати і розраховувати ефективність процесу магнітного осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем.

Розглянемо процес магнітного осадження домішок, що реалізується в магнітному фільтрі ($0 \leq x \leq L$) з однорідною гранульованою фільтруючою загрузкою. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [25], з урахуванням зворотного впливу осаджених частинок на пористість σ та коефіцієнт α , а також на коефіцієнт фільтрації, при умовах що $v \neq const$, а $\Delta P = const$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c(x,t))}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho)c(x,t) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t), \end{cases} \quad (4.7)$$

$$c|_{x=0} = c^*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (4.8)$$

$$v(x,t) = \kappa(x,t) \cdot grad P. \quad (4.9)$$

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових часток в загрузці, змінюються відповідні параметри фільтрування. Оскільки система є замкненою, то зміна коефіцієнта фільтрування призводить до зміни величини

перепаду тиску $\Delta P = P(L, t) - P(0, t)$ у пористій загрузці, тобто $grad P$ можна записати як $\frac{\Delta P}{\Delta L} \Delta P_* = const$.

Розв'язки системи (4.7), (4.9) за умов (4.8) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (див. [51]):

$$\begin{aligned} c(x, t) &= c_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x, t) + R_c(x, t, \varepsilon), \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \\ v(x, t) &= v_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i(x, t) + R_v(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.10)$$

де R_c, R_ρ, R_v – залишкові члени, $c_i(x, t)$, $\rho_i(x, t)$, $v_i(x, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптоти.

Аналогічно до [48], після підстановки (4.10) в (4.7)-(4.9) та застосування “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій c_i , ρ_i та v_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} c_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 c_0, v_0 = \kappa_0 \Delta P_*, \\ c_0|_{x=0} = c_0^*(t), c_0|_{t=0} = 0, \rho_0|_{x=0} = 0, \rho_0|_{t=0} = 0, \\ \sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial x} c_i + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta_i c_i - g_i, v_i = k_i \Delta P_*, \\ c_i|_{x=0} = 0, c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де $k_i = \kappa_0 - \gamma \rho_{i-1}(x, t)$.

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(x, t) = \begin{cases} c_*^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v_0} \right) \cdot e^{-\frac{\beta_0 x}{v_0}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v_0}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v_0}, \end{cases} \quad \rho_0(x, t) = \beta_0 \int_0^t c_0(x, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$c_i(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda_i(x, t)} \cdot \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) \cdot e^{\lambda_i(\tilde{x}, t)}}{v_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x))} d\tilde{x}, & t \geq f_i(x), \\ 0, & t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x, t) = \int_0^t (q_i(x, \tilde{t}) - g_i(x, \tilde{t})) d\tilde{t},$$

де $g_i(x, t) = \sum_{j=1}^i \rho_{j-1} \left(\alpha_0 + I(i, j) \sum_{j=2}^i (\alpha_* \rho_{i-2}) \right),$

$$\lambda_i(x, t) = \int_0^x \frac{\psi_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x))}{v_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x))} d\tilde{x},$$

$$q_i(x, t) = \sum_{j=1}^i c_j \left(I(i, j) \sum_{j=1}^i (\beta_* \rho_{i-1}) \right),$$

$$\psi_i(x, t) = \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x} + \beta, \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$$

Наближені значення функцій $f_i(x)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву (x_j, t_j) , $j = \overline{1, n}$, де $x_j = \Delta x \cdot j$,

$$t_{j+1} = t_j + \frac{\Delta x}{v_i(x_j, t_j)} \sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j).$$

Для оцінки залишкових членів R_c, R_ρ, R_v маємо відповідну задачу аналогічну до [51].

Згідно [48] коефіцієнти захоплених домішкових часток і відірваних часток осаду обчислюються за наступною

формулою: $\beta(x,t) = \frac{\beta_0 H^{0.75}}{v(x,t)d^2}$ [237], де β_0 – вільний параметр, H – напруженість магнітного поля, v – поле швидкостей фільтрування, d – діаметр гранулованої загрузки фільтру.

Наведемо результати розрахунків процесу магнітного очищення живильної води, конденсату за формулами (4.10):

1). При $c_*^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $L = 1 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.35 \text{ с}^{-1}$, $H = 60 \text{ кА/м}$, $d = 2.4 \text{ мм}$, $\alpha_* = 1$.

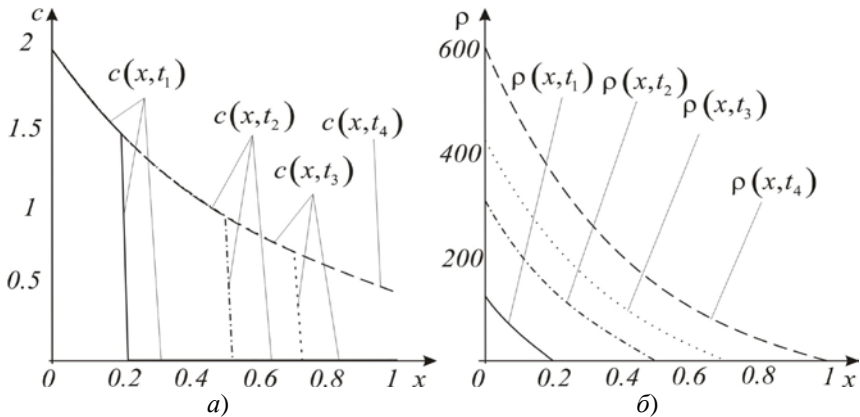


Рис. 4.5. Розподіл концентрації домішок у рідині (а) та осаду (б) вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 20 \text{ год}$, $t_2 = 40 \text{ год}$, $t_3 = 60 \text{ год}$, $t_4 = 80 \text{ год}$

На рис 4.5 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу. Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 1$) допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.59 \text{ мг/дм}^3$, розрахунками знаходимо час його захисної дії: $t = \tau_3 = 71 \text{ год}$, що на 4 години відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [237]. При цьому магнітний фільтр накопичить 240 г осаду.

2). При $c_*^*(t) = 0.2 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.26 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}$, $H = 80 \text{ кА/м}$, $d = 3 \text{ мм}$. $\alpha_* = 1$.

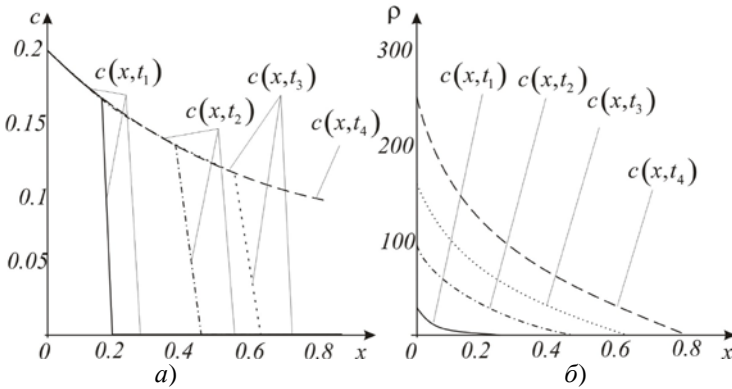


Рис. 4.6. Розподіл концентрації домішок у рідині (а) та осаду (б) вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 20 \text{ год}$, $t_2 = 40 \text{ год}$, $t_3 = 60 \text{ год}$, $t_4 = 80 \text{ год}$

На рис. 4.6 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу. Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 0.8$) допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.059 \text{ мг/дм}^3$, розрахунками знаходимо час його захисної дії: $t = \tau_s = 79 \text{ год}$. При цьому магнітний фільтр накопичить 140 г осаду.

Зміна втрати напору та поле швидкостей у фільтруючій загрузці зображено на рис. 4.7 та рис. 4.8 відповідно.

Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої загрузки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини загрузки L , що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) загрузки. В рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок в намагніченій фільтруючій загрузці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається.

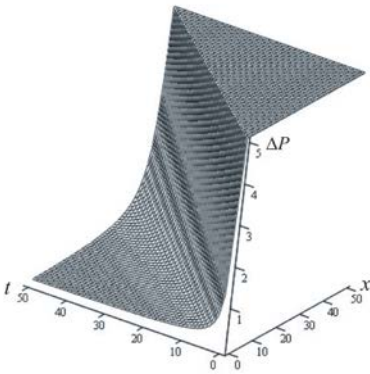


Рис. 4.7. Зміна втрати напору у фільтруючій загрузці

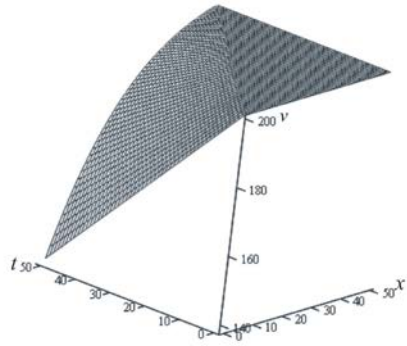


Рис. 4.8. Просторово-часовий розподіл швидкості процесу фільтрування

Розрахункова залежність втрати напору у фільтруючій загрузці від швидкості фільтрування та вздовж фільтруючої загрузки проілюстровано на рис. 4.9 та рис. 4.10.

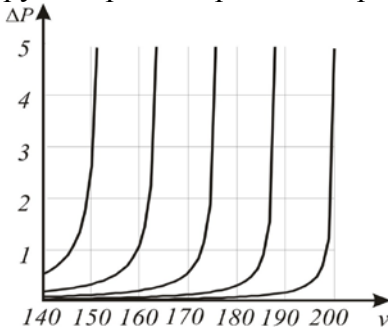


Рис. 4.9. Розрахункова залежність втрати напору у фільтруючій загрузці від швидкості фільтрування

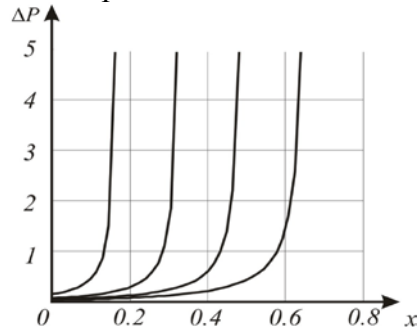


Рис. 4.10. Розрахункова втрата напору вздовж фільтруючої загрузки

4.3. Математичне моделювання процесів магнітного фільтрування і регенерації та оцінка їх ефективності

Технологічні водні системи різних галузей промисловості забруднені різного роду домішками. Гостро ця проблема стоїть в тепловій і атомній енергетиці (ТЕЦ, ТЕС, АЕС), хімічній, металургійній промисловості. Основною причиною наявності домішок у водних технологічних системах є неперервна корозія технологічного та комунікаційного обладнання. Численними дослідженнями встановлено, що основна маса цих домішок складається з залізовмісних домішок з феромагнітними властивостями [237-239]. Відкладення домішок на парогенеруючих поверхнях котлів теплових станцій в кількості всього $200-300 \text{ г/м}^2$, що відповідає товщині відкладень $0,3-0,5 \text{ мм}$, обумовлює додатковий перегрів труб на $50-120 \text{ }^\circ\text{C}$, що в окремих випадках призводить до перепалів та розривів труб.

Як вже було зазначено, в оборотних (стічних) водах металургійних виробництв концентрація диспергованої окалини сягає 100 мг/дм^3 , при нормі 10 мг/дм^3 . Така висока концентрація окалини призводить до швидкого зносу технологічного обладнання, погіршення якості продукції, що випускається. Для видалення феромагнітних домішок з технологічних водних систем запропоновано використовувати метод магнітного осадження домішок в намагніченому зернистому фільтруючому матеріалі. Перевагами даного методу є можливість очищення водного середовища з температурою до $500 \text{ }^\circ\text{C}$, швидкістю фільтрування до 1000 м/год , можливість очищати хімічно агресивні середовища. Регенерація зернистих феромагнітних фільтруючих матеріалів не потребує хімічних реагентів, що робить метод магнітного очищення екологічно безпечним. Відомі експериментальні дослідження з визначення впливу параметрів процесу магнітного очищення на коефіцієнт

магнітного осадження, концентрацію залізовмісних домішок, період фільтроциклу [237-239]. Актуальною задачею є математичний аналіз параметрів та моделі процесу магнітного осадження домішок при очищенні як багатоконцентрованих, так і малокоцентрованих водних систем.

Розглянемо просторово-одновимірний процес очищення рідини шляхом фільтрування у шарі фільтруючого матеріалу товщиною L (що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі Ox). Припускаємо [260], що частинки забруднення (домішки) можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву) і, при цьому, має місце зворотній вплив відповідних концентрацій на характеристики розглянутого шару. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й захоплених частинок) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну, напруженості магнітного поля) за аналогією з [25, 43, 44, 48]) опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta(H,v,d)c(x,t) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t), \end{cases} \quad (4.11)$$

$$c|_{x=0} = c_*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (4.12)$$

$$v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } p, \quad (4.13)$$

де β – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу ($\beta(H,v,d) = \frac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2}$ [237], де β_0 – вільний параметр, H – напруженість магнітного поля, v – швидкість фільтрування, d – діаметр гранул

фільтруючого матеріалу), $\alpha(\rho, H)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул фільтруючого матеріалу домішкових частинок.

При цьому зазначимо, що на відміну від [260], в більш загальному випадку тиск $p = p(x, t)$ варто було б визначати в

результаті розв'язання рівняння $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma(\rho) p}{\partial t}$, яке

отримане на підставі записаного вище рівняння руху і рівняння стану: $\text{div } v = \frac{\partial \sigma(\rho) p}{\partial t}$ при крайових $p(0, t) = p_*(t)$,

$p(L, t) = p^*(t)$ ($0 < t < \infty$) і початкових $p(x, 0) = p_*(x)$ ($0 < x < L$) умовах ($p_*(t)$, $p^*(t)$, $p_*(x)$ – задані досить гладкі

й погоджені в кутових точках області $G = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < \infty\}$ функції. При цьому, у процесі

розв'язання задачі, можемо визначати відповідне значення $\text{grad } p$, зокрема – різницю напорів $\Delta P = p^*(t) - p_*(t)$ на

вході й виході з фільтра.

Розв'язки системи (4.11) за умов (4.12) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (4.10), аналогічно до попереднього підрозділу.

Для визначення параметрів α_0 та α_* задамо додаткові

умови $c(x_*, t_*) = c_*$, $\rho(x_*, t_*) = \rho_*$, $\rho(x_*, t^*) = \rho^*$, $c(x^*, t_*) = \bar{c}_*$,

$\rho(x^*, t_*) = \bar{\rho}_*$, $\rho(x^*, t^*) = \bar{\rho}^*$ де значення функцій

c_* , ρ_* , ρ^* , \bar{c}_* , $\bar{\rho}_*$, $\bar{\rho}^*$ це є відповідні концентрації забруднення та осаду в конкретні (експериментальні заміри) момент часу t_* , t^* (причому $t^* = t_* + \Delta t$) та у деяких перерізах (замірних,

контролюючих ділянках) фільтра x_* , x^* (знайдені експериментальним способом [237]). Тоді, виходячи з другого рівняння системи (4.11) отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими α_0 та α_* :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho_* = P_*, \\ \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\bar{\rho}_* = P^*, \end{cases}$$

де $P_* = \frac{\rho_* - \rho^* + \Delta t \frac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2} c_*}{\varepsilon\Delta t \rho_*}$, $P^* = \frac{\bar{\rho}_* - \bar{\rho}^* + \Delta t \frac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2} \bar{c}_*}{\varepsilon\Delta t \bar{\rho}_*}$.

Наведемо результати розрахунків процесу магнітного очищення на основі комп'ютерного експерименту з використанням формули (4.10).

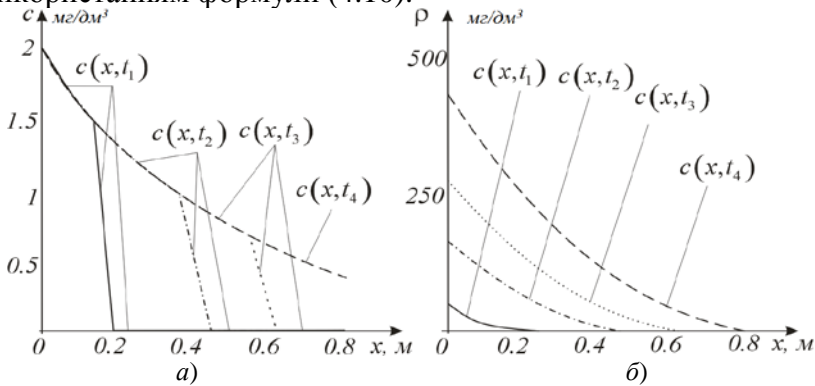


Рис. 4.11. Розподіл концентрації домішок у рідині (а) та осаду (б) вздовж магнітного фільтра при очищенні виробничого конденсату ТЕС в моменти часу $t_1 = 20$ год, $t_2 = 40$ год, $t_3 = 60$ год, $t_4 = 80$ год

На рисунку 4.11 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду для виробничого конденсату ТЕС при $c_*^*(t) = 2$ мг/дм³, $L = 0.8$ м, $v = 300$ м/год, $\beta_0 = 0.9 \cdot 10^{-9}$ с⁻¹, $H = 80$ кА/м, $d = 5$ мм, $\alpha_0 = 0.28 \cdot 10^{-13}$ с⁻¹, $\alpha_* = 0.65$ (знайдені на основі (4.10) та даних наведених у [237]). При заданих на виході фільтра (для $x = 0.8$ м) допустимим значенням концентрації $c = c_{кр} = 0.5$ мг/дм³, знайдемо час його захисної дії: $t = t_\tau = 82$ год. Розрахунками встановлено, що магнітний фільтр при цьому накопичить 680 г осаду.

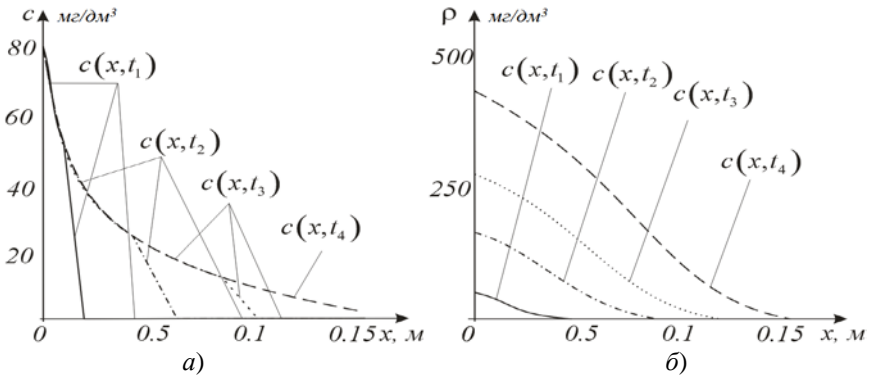


Рис. 4.12. Розподіл концентрації домішок у рідині та осаду вздовж магнітного фільтра при очищенні стічних вод металургійного виробництва в моменти часу $t_1 = 10$ год, $t_2 = 20$ год, $t_3 = 30$ год, $t_4 = 40$ год

На рис. 4.12 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду для стічних вод металургійного виробництва при $c_*^*(t) = 80 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.15 \text{ м}$, $v = 250 \text{ м/год}$, $\beta_0 = 18 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $H = 30 \text{ кА/м}$, $\alpha_0 = 0.64 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_* = 0.34$ (знайдені на основі (4.10) та даних наведених у [237]), $d = 6 \text{ мм}$. При заданих на виході фільтра (при $x = 0.15$) допустимим значенням концентрації $c = c_{кр} = 10 \text{ мг/дм}^3$, знайдемо час його захисної дії: $t = \tau_3 = 35 \text{ год}$. При цьому магнітний фільтр накопичить 1020 г осаду.

На рис. 4.13 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду для малоконцентрованих розчинів при $c_*^*(t) = 0.03 \text{ мг/дм}^3$, $L = 1 \text{ м}$, $v = 200 \text{ м/год}$, $\beta_0 = 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $H = 100 \text{ кА/м}$, $\alpha_0 = 0.28 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_* = 0.65$, $d = 5 \text{ мм}$. При заданих на виході фільтра (при $x = 0.8$) допустимим значенням концентрації $c = c_{кр} = 0.015 \text{ мг/дм}^3$, знайдемо час його захисної дії: $t = \tau_3 = 73 \text{ год}$. При цьому магнітний фільтр згідно розрахунків накопичить 25 г осаду.

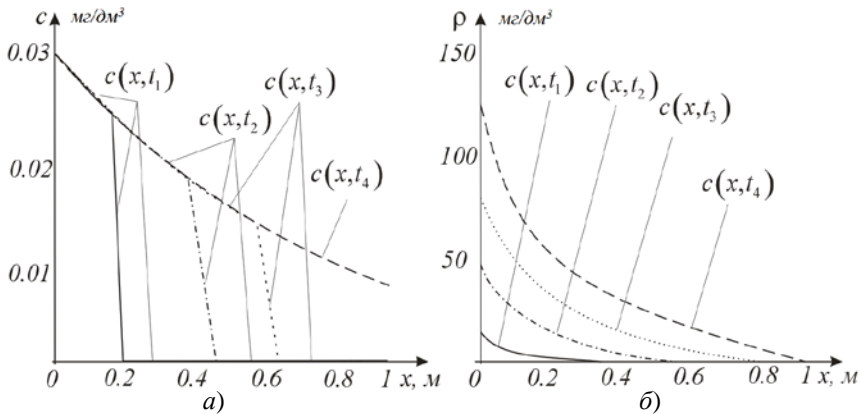


Рис. 4.13. Розподіл концентрації домішок у рідині та осаді вздовж магнітного фільтра при очищенні живильної води ТЕС в моменти часу $t_1 = 20 \text{ год}$, $t_2 = 40 \text{ год}$, $t_3 = 60 \text{ год}$, $t_4 = 80 \text{ год}$

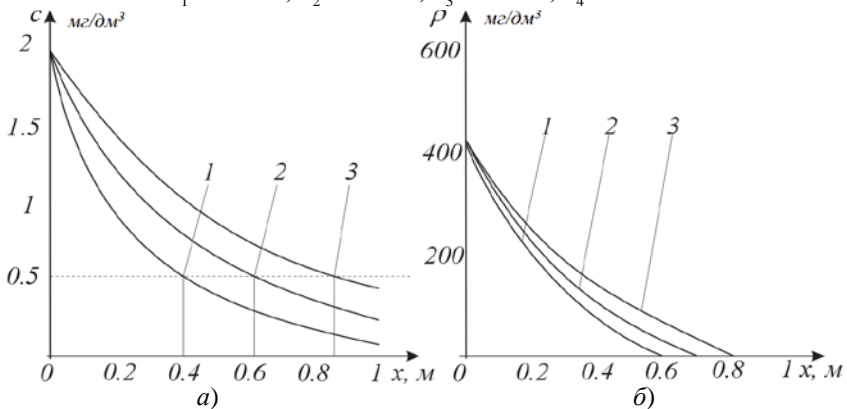


Рис. 4.14. Розподіл концентрації домішок у рідині та осаді вздовж магнітного фільтра при очищенні виробничого конденсату ТЕС в момент часу $t = 40 \text{ год}$, при різних значеннях напруженості магнітного поля H : 1 – $H = 80 \text{ кА/м}$, 2 – $H = 50 \text{ кА/м}$, 3 – $H = 20 \text{ кА/м}$

Як видно з рис. 4.14 (де $c_*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $d = 2.4 \text{ мм}$, $\alpha_0 = 0.28 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_* = 0.65$) при збільшенні напруженості магнітного поля H фільтр сильніше захоплює домішкові частинки, а також видно що в основному

працюють верхні шари фільтруючої засипки, тому із збільшенням напруженості магнітного поля доцільніше зменшувати розмір фільтра, тим самим відбувається економія зернистого фільтруючого матеріалу.

Розрахункова залежність втрати напору $\Delta p = p^* - p_*$ у зернистому фільтруючому матеріалі від швидкості фільтрування та вздовж фільтруючого матеріалу проілюстровано на рис. 4.15. (при $c_*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.28 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_* = 0.65$, $d = 2.4 \text{ мм}$).

Відоме також рівняння, отримане на основі експериментальних даних, для розрахунку втрати напору у гранульованих фільтруючих матеріалах [239]. Так для ламінарного режиму водного потоку:

$$\Delta P = k \frac{\rho \cdot v^2 \cdot L}{\Pi^{4.2} \cdot d^3} \text{Re}, \quad (4.14)$$

де ρ, v – густина і кінематична в'язкість водного потоку; L, Π – довжина і пористість фільтруючого матеріалу; d – діаметр гранул фільтруючого матеріалу; k – параметричний коефіцієнт, (25÷30) для кулькового фільтруючого матеріалу (при стаціонарному стані); Re – число Рейнольдса; $\text{Re} = V \cdot d / \nu$, V – швидкість фільтрування.

Залежності $\Delta P - V$ розраховані за (4.14) та залежності, що наведені на рис. 4.15 корелюють між собою. Відмінність залежностей на рис. 4.15 полягає в тому, що математична модель дозволяє розраховувати $\Delta P - V$ у фільтруючій загрузці для різних поперечних перерізів магнітного фільтра та в різні проміжки часу.

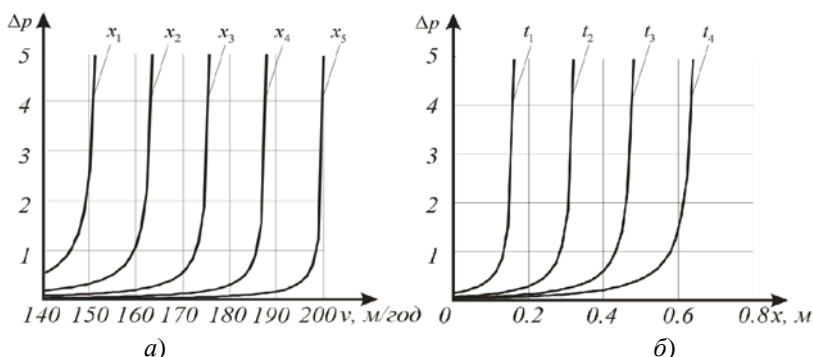


Рис. 4.15. Розрахункова залежність втрати напору у фільтруючій загрузці від швидкості фільтрування (а) та вздовж фільтруючого матеріалу (б) для різних поперечних перерізів фільтра ($x_1 = 0.2 \text{ м}$, $x_2 = 0.4 \text{ м}$, $x_3 = 0.6 \text{ м}$, $x_4 = 0.8 \text{ м}$, $x_5 = 1 \text{ м}$) та в певні проміжки часу ($t_1 = 20 \text{ год}$, $t_2 = 40 \text{ год}$, $t_3 = 60 \text{ год}$, $t_4 = 80 \text{ год}$)

Якщо коефіцієнт очищення ψ не змінювати, то при зменшенні d гранул фільтруючого матеріалу виникає необхідність зменшувати масу фільтруючого матеріалу, відповідно зменшувати висоту фільтра і зменшувати напруженість магнітного поля (рис. 4.16). Відповідно, зменшується кількість дорогавартісного обмотувального дроту або постійних магнітів на виготовлення намагнічуючої системи. В цілому покращуються техніко-економічні показники фільтра. З іншої сторони при очищенні водних систем забруднених грубодисперсними домішками використання гранул загрузки невеликого діаметру призведе до швидкого “заносу” фільтруючої загрузки домішками.

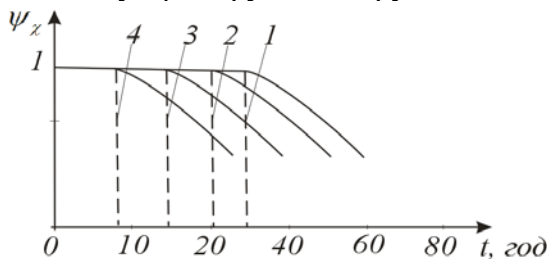


Рис. 4.16. Залежність ефективності процесу очистки ψ_x від діаметру кульок засипки фільтра d , мм (1 – $d = 2.4$, 2 – $d = 3$, 3 – $d = 4$, 4 – $d = 5$)

4.4. Просторове узагальнення математичної моделі процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення

Проведений в [25, 43, 44, 237-239] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувались у “традиційних” (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, що вносяться до “вихідної” (базової) моделі з метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і малоефективних (з точки зору чисельної реалізації і практичного використання) математичних моделей. Також, у роботі [51] показано, що задання форми фільтру відіграє суттєву роль в процесі фільтрування. Проте у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів.

Відповідно до розглянутих вище проблем, у підрозділі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну тощо) при моделюванні процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень магнітними фільтрами.

Загальна постановка задачі. Розглянемо криволінійний паралелепіпед (фільтр) $G_z = ABCDA * B * C * D *$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$, а

також поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$,
 $BCC_*B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$,
 $A_*B_*C_*D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 3.7).

Припускаємо [44], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ($C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$), де C_i концентрація i -ї компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу визначальних факторів (концентрації забруднення рідини й осідання) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації по аналогії з [43, 44, 48, 51]) для області $G = G_z \times (0, \infty)$ опишемо такою модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} C_l C_g = \varepsilon \alpha_i P, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u C_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q P, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$C_i \Big|_{ABB_*A_*} = C_i^*(M, t),$$

$$C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (4.16)$$

$$\vec{v} = \kappa(P) \nabla \bar{\phi}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.17)$$

$$\bar{\varphi} \Big|_{ABB_*A_*} = \bar{\varphi}^*, \quad \bar{\varphi} \Big|_{CDD_*C_*} = \bar{\varphi}^*, \quad (4.18)$$

де $P(x, y, z, t)$ – концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; β_i, α_i – коефіцієнти,

що характеризують масові об'єми осадження домішок та відірваних від гранул завантаження частинок за одиницю часу, $\sigma(P)$ – пористість середовища ($\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* P(x, y, z, t)$); $\bar{\nabla}$ – оператор Гамільтона; σ_*, ε – тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр $\sigma(P)$), що знаходяться експериментальним способом, ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншими, а саме, десорбційні складники та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складниками); $C_i^*(M, t), C_{i,0}^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M – довільна точка відповідної поверхні; $\bar{\phi}$ – фільтраційний потенціал ($0 < \bar{\phi}_* \leq \bar{\phi} \leq \bar{\phi}^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); $\kappa = K(P)$ – коефіцієнт фільтрації відповідного пористого середовища ($K(P)$ – задана, достатнього гладка функція); \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Приймемо, що задача (4.15), (4.16) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \bar{\varphi}_* < \varphi < \bar{\varphi}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу) при деякому усередненому значенні $\kappa \in$ розв'язана [51], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta), y = y(\varphi, \psi, \eta), z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (4.15) та умовах (4.18), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \phi} + \beta_i c_i + \varepsilon \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_l c_g = \varepsilon \alpha_i \rho, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho, \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$$c_i(\overline{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_i^*(\psi, \eta, t),$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (4.20)$$

де $c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \quad (\text{див.},$$

напр., [43, 44, 48, 51]).

Розв'язок задачі (4.19, (4.20) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [43, 44, 48, 51]

$$c_i = c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + R_{c,i}, \quad \rho = \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + R_\rho, \quad (4.21)$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени,

$c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ – члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}$).

Шляхом підстановки співвідношень (4.21) у (4.19), (4.20) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів біля однакових степенях ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{0, n}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \phi} + \beta_i c_{i,0} = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0}, \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, \quad c_{i,0}(\overline{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_{i^*}^*(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,j} + \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1} = \alpha_i \rho_{j-1}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1}, \\ c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Внаслідок послідовного розв'язування задач (4.22)-(4.23) матимемо [51]:

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t - f) \exp \left[-\beta_i \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0} \right) d\tilde{t} + \rho_0^0,$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1} \right) d\tilde{t},$$

де $U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha_i \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= -\beta_i \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})}$$
 — час проходження відповідною частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетин деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція). Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [43].

Далі застосовуємо стандартну процедуру [51] почергової фіксації характеристик процесу та середовища. А саме: за заданими на даному ітераційному кроці значення для $\rho = \rho(\phi, \psi, \eta, t)$ згідно з формулою

$$k = \kappa(\rho) = K(P(x(\phi, \psi, \eta), y(\phi, \psi, \eta), z(\phi, \psi, \eta), t))$$

“підправляємо” значення k ; розв’язуємо відповідну фільтраційну задачу, зокрема, знаходимо поле швидкості, і, на основі цього, в результаті розв’язання задач (4.19), (4.20) знаходимо наступні наближення для шуканих концентрацій.

Розглянемо процес очищення рідини від двокомпонентної феромагнітної домішки ($m = 2$) у намагніченій пористій насадці (для спрощення викладок вважатимемо фільтр одновимірним). Домішкові частинки під дією магнітного силового фактора $H \cdot grad H$, (де H – напруженість магнітного поля), величина якого може досягати значення $2 \cdot 10^{15} A^2/m^3$, осаджуються в точках контакту гранул насадки. Припустимо, що в початковий момент часу $t=0$ пориста насадка відносно чиста.

Ефективність процесу очищення середовища залишається достатньо високою протягом певного часу $t = \tau_3$ — часу захисної дії фільтра. При нагромадженні критичної маси домішок в об'ємі пористої насадки, що відповідає величині робочої ємності поглинання, ефективність процесу очищення $\bar{\psi}(t)$ дорівнює відношенню різниці концентрацій домішок на вході й виході фільтра до концентрації на вході, знижується й режим очищення переходить у стадію нестационарного режиму.

Для розглянутого випадку очищення рідини від двокомпонентного забруднення магнітним фільтром з однорідною гранульованою фільтруючою насадкою, матимемо таку задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_1(x,t))}{\partial t} + v \frac{\partial c_1(x,t)}{\partial x} + \beta_1 c_1 + \varepsilon \beta_{12} c_1 c_2 = \varepsilon \alpha_1 \rho, \\ \frac{\partial(\sigma(\rho)c_2(x,t))}{\partial t} + v \frac{\partial c_2(x,t)}{\partial x} + \beta_2 c_2 + \varepsilon \beta_{12} c_1 c_2 = \varepsilon \alpha_2 \rho, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta_1 c_1(x,t) + \beta_2 c_2(x,t) - \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2)\rho(x,t), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$c_1|_{x=0} = c_1^*(t), \quad c_1|_{t=0} = 0, \quad c_2|_{x=0} = c_2^*(t), \quad c_2|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (4.25)$$

$$v = \kappa \cdot \text{grad } \bar{\varphi}, \quad (4.26)$$

де $v = \text{const}$; $\sigma(x,t)$ — пористість фільтруючої насадки, $\sigma(x,t) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x,t)$, σ_0 — вихідна пористість насадки; ρ_2 — граничне завантаження осадом,

$$\kappa(\rho) = \begin{cases} \kappa_0 - \varepsilon \gamma \rho(x,t), & \rho < \rho_2 \quad (t < \tau_3), \\ \kappa^0, & \rho = \rho_2 \quad (t \geq \tau_3), \end{cases} \quad \sigma_*, \kappa_0, \gamma, \varepsilon \quad \text{і}$$

$\sigma(x,t)$, $\kappa(x,t)$ — тверді й м'які параметри.

Такий характер зміни коефіцієнтів пористості і фільтрації пояснюється тим, що при збільшенні об'єму домішкових частинок в насадці змінюються відповідні параметри фільтрування.

Розв'язок системи (4.24) при умовах (4.26) знаходимо аналогічно (4.19), (4.20) у вигляді асимптотичних рядів (4.23) [43, 44, 48, 51].

Згідно з даними, наведеними у роботі [237], коефіцієнти захоплених домішкових частинок й відірваних частинок осаду обчислюються за формулою $\beta = \frac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2}$, де β_0 – вільний параметр; d – діаметр гранульованої насадки фільтра. Наведемо результати розрахунків за формулами (4.21) при $c_1^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $c_2^*(t) = 1 \text{ мг/дм}^3$, $v = 200 \text{ м/год}$, $L = 1 \text{ м}$, $\beta_1 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 0.35 \text{ с}^{-1}$, $\beta_2 = 0.2 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $H = 60 \text{ кА/м}$, $d = 2.4 \text{ мм}$.

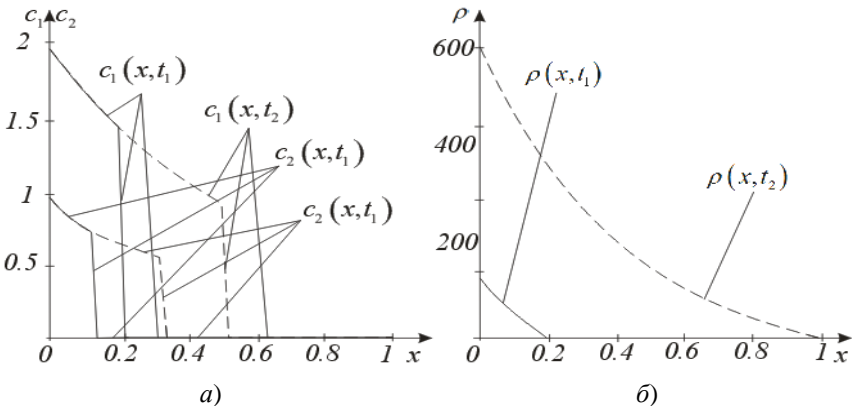


Рис. 4.17. Графіки розподілу концентрації домішок у рідині (а) та осаді (б) уздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 20 \text{ год}$, $t_2 = 80 \text{ год}$

На рис. 4.17 подано графік розподілу концентрації домішок у рідині й осаді в певні моменти часу. Задавши на

виході фільтра (при $L = 1$) припустимо значення концентрації $c = c_1 + c_2 = c_{кр} = 0.59 \text{ мг/дм}^3$, знайдемо час його захисної дії; $t = \tau_3 = 71 \text{ год}$, що на чотири години відрізняється від експериментальних даних [237]. При цьому нагромадження осаду у фільтрі складе 240 гр .

Варто відмітити, що значення коефіцієнта фільтрації зменшуються при зростанні часу (фізично це пояснюється прилипанням твердих частинок до стінок пор). При заданій швидкості $v = const$ за формулою $grad \bar{\varphi} = \frac{v}{\kappa(\rho)}$ знаходимо

величину градієнта тиску в пористому середовищі, а також час досягнення його критичного значення, що дає можливість приймати відповідні рішення.

У випадку $c_*(t) = c_1^*(t) + c_2^*(t) = c_* = const$ величина $\bar{\psi}$ ($\bar{\psi}(t) = (c_*(t) - c(L, t)) / c_*(t)$) практично не змінюється до моменту часу τ_3 , що підтверджує відомий факт розподілу ефективності фільтра залежно від часу [44].

4.5. Моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпо-нентного забруднення в n -шарових магнітних фільтрах

Процес очищення рідин від феромагнітних домішок найбільше ефективно відбувається в намагнічених пористих засипках. Домішкові частинки під дією магнітного силового фактора (величина якого може досягати значення порядку $2 \cdot 10^{15} \text{ А}^2/\text{м}^3$) осаджуються в точках контакту гранул насадки.

При цьому, із практичних міркувань, на сьогоднішній день більш ефективними є багат шарові фільтри (у порівнянні з одношаровими). Аналіз результатів досліджень [111, 115] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності

різних факторів, які визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Фільтрування в напрямку зменшення еквівалентного діаметра гранул завантаження – один із загальновизнаних методів підвищення ефективності роботи фільтрів [234].

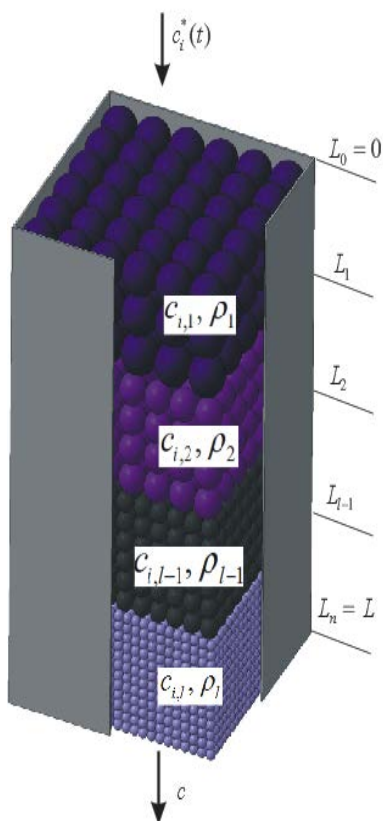


Рис. 4.18. Схематичне представлення n -шарового фільтра

У складних змінних технологічних умовах, оптимальний гранулометричний склад засипки повинен був би залежати від часу. Проте через складність реалізації й експлуатації на практиці фільтрування не одержали широкого поширення навіть фільтри з однорідною засипкою.

У роботах [17, 18, 43, 44, 48, 51] запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок у пористому фільтруючому завантаженні, яке враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [17], з урахуванням зворотного впливу захоплених частинок на пористість σ і коефіцієнта α , а також на коефіцієнт фільтрації.

Розглянемо просторово-одномірний процес очищення рідини фільтруванням в n -шаровому фільтрі товщиною L

(рис. 4.18), що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі Ox . Вважаємо [43], що частинки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву, сорбції, десорбції) і, при цьому, має місце зворотний вплив концентрації забруднення на характеристики відповідних шарів.

Концентрація забруднення – багатокомпонентна, $c = c(x, t) = (c_1, \dots, c_m) = (c_1(x, t), \dots, c_m(x, t))$, де $c_i(x, t)$ – концентрація i -ї компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтрівному середовищі. Відповідну математичну модель процесу фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, масообмінну і т. ін. [39, 46]) представимо у вигляді наступної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho_i)c_i)}{\partial t} = \varepsilon \alpha_i(t) \rho_i - \frac{\partial(v c_i)}{\partial x} - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \varepsilon f_{m-1} \left(\sum_{p_1, \dots, p_u=1}^m h_{i, p_1, \dots, p_u} c_i^{\gamma_{p_1}} c_{p_1}^{\gamma_{p_2}} \dots c_{p_u}^{\gamma_{p_u}} \right), \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_l = \{x: L_{l-1} < x < L_l, 0 < t < \infty\}, l = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \varepsilon \alpha_i(\rho) \rho_i, \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, [c_i]_{x=L_l} = 0, [\rho_i]_{x=L_l} = 0, \quad (4.28)$$

де $\rho = \rho(x, t) = (\rho_1, \dots, \rho_m) = (\rho_1(x, t), \dots, \rho_m(x, t))$, $\rho_i(x, t)$ – концентрація i -ї компоненти домішок, захоплених фільтруючою засипкою; h_{i, p_1, \dots, p_u} – коефіцієнт, що характеризує взаємодію між концентраціями компонентів домішків ($h_{i, p_1, \dots, p_u} = 0$ при співпадінні індексів), α_* , σ_* , q_p , ε – тверді параметри, які характеризують відповідні коефіцієнти; ε – малий

параметр; $[L_{l-1}, L_l]$ – 1-й шар фільтра ($l = 1, 2, \dots, n$); в (4.28) [] – збільшення відповідної функції в даній точці $x = L_l$. Тут

$$f_{m-1}(W_u) = \sum_{u=1}^{m-1} W_u, \text{ причому, з метою спрощення розрахунків, у}$$

$$\text{роботі розглядається випадок коли } f_{m-1}(W_u) = \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_i c_p.$$

Складові $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$, ($i = \overline{1,m}; j = \overline{0,k}; l = \overline{1,n}$) асимптотичного наближення розв'язку вихідної модельної

$$\text{задачі } c_i(x,t) = \begin{cases} c_{i,1}(x,t), & L_0 = 0 \leq x < L_1, \\ c_{i,2}(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ c_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \leq x < L_l = L, \end{cases}, \rho_i(x,t) = \begin{cases} \rho_{i,1}(x,t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \rho_{i,2}(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \rho_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \leq x < L_l = L, \end{cases}$$

знаходимо у вигляді асимптотичних рядів [36, 43, 44, 46]:

$$c_{i,l}(x,t) = c_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j c_{i,l,j}(x,t) + R_{c,i,l}(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho_{i,l}(x,t) = \rho_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \rho_{i,l,j}(x,t) + R_{\rho,i,l}(x,t,\varepsilon), \quad (4.29)$$

де $R_{c,i,l}, R_{\rho,i,l}, R_{\alpha,i,l}$ – залишкові члени, $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$ – члени регулярних частин асимптотики.

Аналогічно [46], у результаті підстановки (4.31) в (4.29)-(4.30) і здійснення стандартної “процедури прирівнювання”, для визначення функцій $c_{i,l,j}(x,t)$, $\rho_{i,l,j}(x,t)$, $\alpha_{i,l,j}(t)$ приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial t} = -v \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial x} - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right), & \frac{\partial \rho_{i,l,0}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{i,l,0} \right), \\ c_{i,l,0} \Big|_{x=L_{l-1}} = \bar{c}_{i,l}(t), c_{i,l,0} \Big|_{t=0} = 0, \rho_{i,l,0} \Big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

де $\bar{c}_{i,0}(t) = c_i^*(t)$, $\bar{c}_{i,l}(t) = c_{i,l-1,0}(L_{l-1}, t)$, $l = \overline{1, n}$;

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial t} = g_{i,l,j}(x, t) - v \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial x} - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{i,p,j} \right) - \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_{i,l,j-1} c_{p,l,j-1}, \\ \frac{\partial \rho_{i,l,j}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,l,j} \right) - g_{i,l,j}(x, t), \\ c_{i,l,j} \Big|_{x=0} = 0, c_{i,l,j} \Big|_{t=0} = 0, \\ \rho_{i,l,j} \Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}, l = \overline{1, n-1}; \end{cases}$$

У результаті їх послідовного розв'язку маємо:

$$c_{i,l,0}(x, t) = \begin{cases} \bar{c}_{i,l}^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{q_i x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_{i,l,0}(x, t) = \beta_i \int_0^t \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{i,l,0}(x, \tilde{t}) \right) d\tilde{t},$$

$$c_{i,l,j}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_* e^{-\int_0^x \lambda_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{v} \times \\ \times \int_0^x \frac{g_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int_0^{\tilde{x}} \lambda_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{i,l,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ 0, & t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_{i,l,j}(x, t) = \beta_i e^{-\int_0^t g_{i,l,j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{p,l,j}(x, \tilde{t}) \right) e^{\int_0^{\tilde{t}} g_{i,l,j-1}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

де $g_{i,l,j}(x, t) = \sum_{j=1}^i \rho_{i,l,j-1} \left(\alpha_0 + I(i, j) \sum_{j=2}^i (\alpha_* \rho_{i,l,j-2}) \right)$,

$\lambda_{i,l,j}(x, t) = -\sigma_* \frac{\partial \rho_{i,l,j-1}(x, t)}{\partial t}$. Наближені значення функцій

$f_j(x)$ знаходимо шляхом [39, 46] інтерполяції масиву (x_i, t_i) , $i = \overline{1, k}$, де $x_i = \Delta x \cdot i$, $t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{l, j-1}(x_i, t_i)$, $l = \overline{1, n}$.

Приведемо результати розрахунків за формулами (4.29) при $n=2$ $c_1^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $c_2^*(t) = 1 \text{ мг/дм}^3$, $\beta = 60 \text{ с}^{-1}$, $v = 250 \text{ м/год}$, $L = 1 \text{ м}$. $q_1 = q_2 = 1$; $\sigma_0 = 0.5$; $\sigma_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

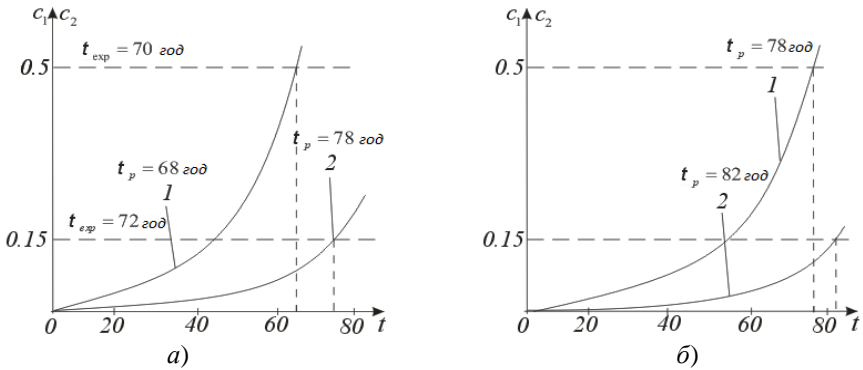


Рис. 4.19. Графіки розподілу концентрації забруднення на виході фільтр у момент часу t за формулами (4.29) при $n = 3$ – (а) і $n = 1$ – (б)

На рис. 4.19 зображений розподіл концентрації забруднення на виході фільтра у момент часу t за формулами (4.31) при $n = 3$ – (а) і $n = 1$ – (б) відповідно (припустиме значення концентрації $c_1 = c_{xp1} = 0.5 \text{ мг/дм}^3$, $c_2 = c_{xp2} = 0.15 \text{ мг/дм}^3$ [239]). Як видно з рисунку час захисної дії n -шарового фільтра (для $n = 1$ – $t_p = 78 \text{ год}$ і $t_p = 82 \text{ год}$) суттєво більший часу захисної дії для одношарового фільтра (для $n = 3$ – $t_p = 68 \text{ год}$ і $t_p = 78 \text{ год}$).

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [46]. Як і слід було чекати [51], для розрахунків досить брати по 2 члена з кожного асимптотичного ряду (4.31) щоб одержати наближення з точністю до 6 значущих цифр у проміжку

розрахункового часу фільтроциклу.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial t} = v \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial x} + \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p R_{c,p,j} \right) - \varepsilon^{m+1} S(c, \rho, \varepsilon), \\ \frac{\partial R_{\rho,i,l}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{i=1}^m q_i R_{c,i,l} \right) - \varepsilon^{m+1} U(c, \rho, \varepsilon), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{c,i,l}(0, t, \varepsilon) &= R_{c,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{c,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{c,i,l}(0, t, \varepsilon) = \\ &= R_{\rho,i,l}(0, t, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(0, t, \varepsilon) = \\ &= R_{\alpha,i,l}(0, t, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}), \quad l = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

з яких пригидимо до висновку про малість

$$R_{c,i,l} = O(\varepsilon^{m+1}), R_{\rho,i,l} = O(\varepsilon^{m+1}), R_{\alpha,i,l} = O(\varepsilon^{m+1}) \quad \text{при}$$

обмеженому часі (часі фільтроциклу), $S(c, \rho, \varepsilon)$, $U(c, \rho, \varepsilon)$ – відомі функції.

Побудована математична модель процесу очищення рідин від багатокомпонентних забруднень n -шаровим магнітним фільтром, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості) і включає можливість визначення невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Запропонований алгоритм розв'язку відповідної збуреної задачі, який, зокрема, припускає можливість визначення часу τ_3 захисної дії фільтра (за заданими значеннями припустимих концентрацій на виході фільтра). Наведені результати числових розрахунків. У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій насадці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища.

4.6. Висновки до четвертого розділу

1. Побудована математична модель, що, у випадку змінної вхідної швидкості, описує закономірності магнітного осадження та накопичення домішок у пористій фільтруючій загрузці, яка враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної збуреної задачі з визначення розподілу концентрацій домішок та осаду, а також часу τ_z захисної дії фільтруючої загрузки, змінної величини $gradP(x,t)$, зокрема, граничної величини перепаду тиску ΔP . Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої загрузки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини загрузки L , що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) загрузки. В рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок в намагніченій фільтруючій загрузці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається.

2. Розв'язана модельна задача типу “конвекція-масообмін” для процесу очищення водних середовищ у зернистому намагніченому фільтруючому матеріалі, яка враховує зворотній вплив характеристик процесу на фільтраційні (технологічні) параметри. Виконаний математичний аналіз параметрів і моделі процесу магнітного осадження домішок. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті намагніченого зернистого фільтруючого матеріалу для різних моментів часу. Показано вплив довжини фільтруючого матеріалу на величину коефіцієнта

фільтрування. Розрахунками, з використанням комп'ютерного експерименту, перевірена адекватність математичної моделі.

3. Побудована математична модель, яка враховує взаємовплив характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) на прикладі очищення рідини у магнітних і сорбційних фільтрах, а саме: побудовану математичну модель перенесено на процес, що описує закономірності магнітного осадження домішок в пористій фільтруючій насадці, закономірності накопичення (“заносу”) домішок у насадці, а також враховує зворотний вплив концентрації осаду на коефіцієнти пористості, фільтрації та масообміну. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної задачі, що, зокрема, включає: визначення часу τ_3 захисної дії фільтруючої насадки, визначення граничної величини перепаду тиску $\Delta\bar{\varphi}$ та величини $grad \bar{\varphi}$ при зміні $x \in [0, L]$ і $t \in [0, \tau_3]$. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини насадки L , що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) насадки.

4. Сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води в освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової задачі для системи диференціальних рівнянь типу “конвекція-дифузія-масообмін”. Отримано розрахункові залежності концентрацій домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії з метою інженерного прогнозування залежності між затратами на виробництво фільтра-освітлювача та ступенем ефективності його роботи.

РОЗДІЛ 5. ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ РІДИНИ ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ЗАБРУДНЕННЯ

У даному розділі розглядаються та вирішуються питання очищення рідини від багатокomпонентного забруднення в припущенні домінування одних складових процесу над іншими, а також розв'язання обернених задач на знаходження невідомих коефіцієнтів з метою ідентифікації параметрів процесу очищення, та з врахуванням зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії).

5.1. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін

У роботі [53] запропонована математична модель процесу очищення стічної води сорбційним фільтром, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом. У даній же роботі, опираючись на праці А.М. Тихонова, А.І Прилепко, Н.І Іванчова, А.Б. Костіна й ін., присвячені питанням коректності рішення зворотних завдань ідентифікації невідомих коефіцієнтів, побудований алгоритм рішення відповідного нелінійного зворотного завдання типу “конвекція-дифузія-масообмін”, з визначенням невідомого коефіцієнта, що характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки домішкових частинок.

Відомі аналітичні рівняння, які описують процес фільтрування [143, 183, 184] і процес очищення стічних вод [205], не дозволяють у широкому діапазоні зміни параметрів

описувати процес очищення, крім того, не враховують зворотний вплив характеристик процесу на характеристики середовища. Так само недостатньо уваги приділено вивченню масообмінних коефіцієнтів, а експериментальні залежності [263] не дають повної картини. Тому актуальним завданням є побудова нелінійної математичної моделі процесу очищення стічної води сорбційним фільтром, що включає визначення масообмінного коефіцієнта. Розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних, більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу фільтрування різних технологічних водно-дисперсних систем.

Розглянемо просторово-одновимірний (з метою спрощення викладів) процес очищення рідини шляхом фільтрування у фільтрі-шарі товщиною L тотожним відрізу $[0, L]$ осі Ox . Припускаємо, що частки забруднення домішки можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції) і, при цьому, має місце зворотній вплив відповідних концентрацій на характеристики розглянутого шару. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну й т.п. за аналогією з [34, 35, 38]) опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \varepsilon\alpha(t)\rho(x,t) + D_\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$c|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (5.2)$$

$$\alpha(t) \int_0^L \rho(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \quad (5.3)$$

де $c(x, t)$ – концентрація домішок у рідкому середовищі в точці x у момент часу t , $\rho(x, t)$ – концентрація домішок, захоплених фільтром, β – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішок за одиницю часу, $\alpha(t)$ – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки частинок, $\mu(t)$ – функція, що характеризує масовий розподіл осаду з часом (знаходиться експериментальним способом [206]), умова перевизначення (5.3) – призначено для знаходження $\alpha(t)$, $c^*(t), c_*^*(t), \rho^*(t), \rho_*^*(t)$ – концентрації домішок та осаджених частинок на вході фільтра та в початковий момент часу відповідно, $\sigma(\rho)$ – пористість фільтруючої засипки (σ_0 – вихідна пористість засипки $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x, t)$), $v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } p$ – швидкість фільтрування, $\kappa(\rho)$ – коефіцієнт фільтрування $\kappa(\rho) = \kappa_0 - \varepsilon \gamma \rho(x, t)$ (див. [51]), $\sigma_*, \kappa_0, \gamma, \varepsilon$ – тверді параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\sigma(\rho), \kappa(\rho)$ – м'які параметри, знаходяться експериментальним способом), D_c, D_ρ – коефіцієнт дифузії, де $D_c = b_c \varepsilon, D_\rho = b_\rho \varepsilon, 0 < b_c \leq 1, 0 < b_\rho \leq 1$, ε – малий параметр, характеризує відповідні збурення, p – тиск. При цьому зазначимо, що в більше загальному випадку тиск $p = p(x, t)$ варто було б визначати в результаті розв'язання рівняння $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma(\rho) p}{\partial t}$ (яке виходить

на підставі записаного вище рівняння руху і рівняння стану: $\operatorname{div} v = \frac{\partial \sigma(\rho) p}{\partial t}$) при крайових $p(0, t) = p_*(t)$, $p(L, t) = p^*(t)$ ($0 < t < \infty$) і початкових $p(x, 0) = p_*(x)$ ($0 < x < L$) умовах ($p_*(t)$, $p^*(t)$, $p_*(x)$ – задані досить гладкі й погоджені в кутових точках області $G = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < \infty\}$ функції). З метою спрощення викладів у цій роботі розглядаємо випадок, коли $v = \text{const}$. При цьому, у процесі розв’язання задачі, можемо визначати відповідне значення $\operatorname{grad} p$, зокрема – різниця напорів $p^*(t) - p_*(t)$ на вході й виході з фільтра.

Розв’язок системи (5.1) за умов (5.2) і (5.3) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів (див., напр., [34, 35, 38, 51]):

$$\begin{aligned}
 c(x, t) &= c_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \underline{U}_i(\xi, t) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{U}_i(\xi, t) + R_c(x, t, \varepsilon), \\
 \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \underline{P}_i(\mu, t) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{P}_i(\mu, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \\
 \alpha(t) &= \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \alpha_i(t) + R_\alpha(t, \varepsilon),
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

де R_c, R_ρ, R_α – залишкові члени, $c_i(x, t)$, $\rho_i(x, t)$, $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) – шукані члени асимптоти, $\underline{U}_i(\xi, t)$, $\underline{P}_i(\mu, t)$, $\tilde{U}_i(\xi, t)$, $\tilde{P}_i(\mu, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару, (відповідно

поправки на вході та на виході фільтраційного потоку),
 $\xi = (L - x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (L - x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно [34], у результаті підстановки (5.4) в (5.1)-(5.3) і здійснення стандартної “процедури прирівнювання”, для визначення функцій c_i , ρ_i , α_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0, \\ c_0|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c_0|_{t=0} = 0, \quad \rho_0|_{x=0} = 0, \quad \rho_0|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t),$$

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = b_c \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - g_i + b_\rho \frac{\partial^2 \rho_{i-1}}{\partial x^2}, \\ c_i|_{x=0} = 0, \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{x=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \alpha_1(t) \int_0^L \rho_{i-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \dots + \alpha_i(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0.$$

У результаті їх розв’язання маємо:

$$c_0(x, t) = \begin{cases} c_*^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{\beta x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases} \quad \rho_0(x, t) = \beta \int_0^t c_0(x, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$\alpha_0(t) = \frac{\mu(t)}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

$$c_i(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda_i(x, t)} \cdot \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) \cdot e^{\lambda_i(\tilde{x}, t)}}{v(\tilde{x}, t)} d\tilde{x}, & t \geq f_i(x), \\ 0, & t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x, t) = \int_0^t (q_i(x, \tilde{t}) - g_i(x, \tilde{t})) d\tilde{t}, \quad \alpha_i(t) = -\frac{\sum_{k=1}^i \alpha_{i-k}(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x}}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

де $g_i(x, t) = \sum_{j=1}^i \rho_{j-1} \left(\alpha_0 + I(i, j) \sum_{j=2}^i (\alpha_* \rho_{i-2}) \right) + b_* \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial x^2},$

$$q_i(x, t) = \sum_{j=1}^i c_j \left(I(i, j) \sum_{j=1}^i (\beta_* \rho_{i-1}) \right),$$

$$\lambda_i(x, t) = \frac{1}{v} \int_0^x \psi_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) d\tilde{x},$$

$$\psi_i(x, t) = v_x + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}(x, t)}{\partial t} + \beta_*, \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$$

Наближені значення функцій $f_i(x)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву (x_j, t_j) , $j = \overline{1, n}$, де $x_j = \Delta x \cdot j$,

$$t_1 = t_0 + \frac{\Delta x}{v(x_0, t_0)} \sigma_0, \quad t_{j+1} = t_j + \frac{\Delta x}{v(x_j, t_j)} \sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j).$$

$$\text{Функції} \quad \underline{U} = \sum_{i=0}^{n+1} \underline{U}_i \varepsilon^i, \quad \tilde{U} = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{U}_i \varepsilon^i, \quad \underline{P} = \sum_{i=0}^{n+1} \underline{P}_i \varepsilon^{i/2},$$

$\tilde{P} = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{P}_i \varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення неузгодженостей,

внесених побудованими регулярними частинами

$$c(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i \varepsilon^i, \quad \rho(x, t) = \sum_{i=0}^m \rho_i \varepsilon^i \text{ в околах точок } x = 0, \quad x = L$$

(входу та виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують

$$\text{виконання умов: } \frac{\partial}{\partial x}(c + \underline{U}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(c + \tilde{U}) = O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho + \underline{P}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \tilde{P}) = O(\varepsilon^{n+1}). \text{ Дані функції}$$

знаходяться аналогічно до [34]. Оцінка залишкових членів приводить до задачі, аналогічно до [51].

Наведемо результати розрахунків за формулами (5.4) при $c_*^*(t) = 170 \text{ мг/дм}^3$, $L = 0.8 \text{ м}$, $\beta_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 10 \text{ м/год}$, $\sigma_0 = 0.5$, $\alpha_* = 1$, $\beta_* = 1$, $\sigma_* = 1$.

В результаті інтерполяції експериментальних даних [206] нами отримане масовий розподіл $\mu(t)$ осаду з часом (див. рис. 5.1, а). Тимчасову залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ зображено на рис. 5.1, б. Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_s , ефективної роботи фільтра.

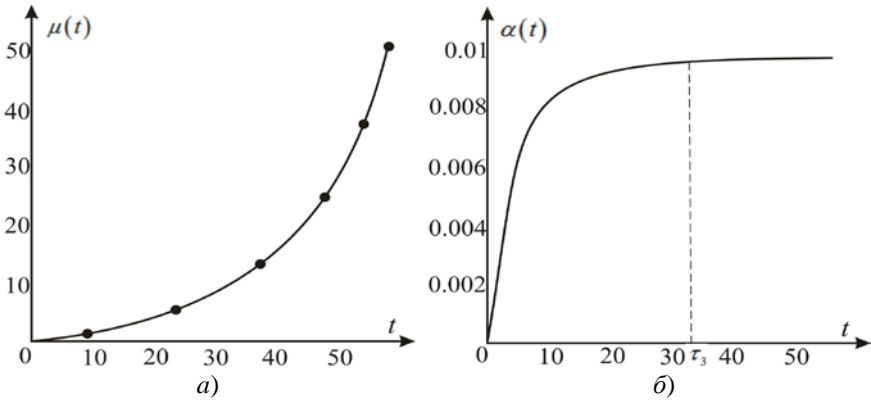


Рис 5.1. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ – (а) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ – (б) з часом

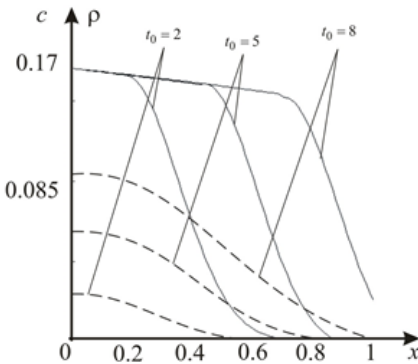


Рис. 5.2. Розподіл $c(x,t)$ – “суцільна лінія” і $\rho(x,t)$ – “пунктирна лінія” в різні моменти часу t_0

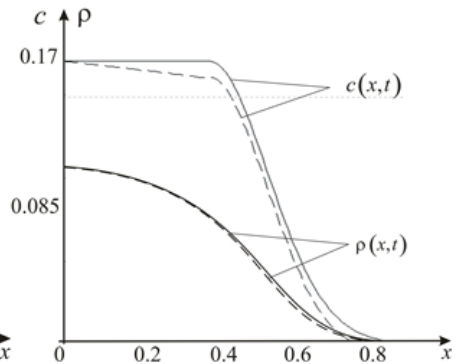


Рис. 5.3. Розподіл $c(x,t)$ і $\rho(x,t)$ при $t = 2$ год і різних ε ($\varepsilon = 0.01$ – суцільна лінія, $\varepsilon = 0.05$ – пунктирна лінія)

Вплив коефіцієнта дифузії на концентрації домішок у рідині та осаді проілюстровано на рис. 5.2. На рис. 5.3 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу.

Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 0.8$)

допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.0015$ г/л, знаходимо час його захисної дії: $t = t_3 = 32$ год, що на 4% відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [206].

5.2. Ідентифікація коефіцієнта врахування масообмінного збурення при моделюванні процесу магнітного фільтрування

Аналогічно до попереднього підрозділу, застосуємо відповідну методологію знаходження невідомих параметрів для процесу магнітного очищення. Припускаємо [34, 35, 38], що частинки забруднення домішки можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції) і, при цьому, має місце вплив відповідних концентрацій на характеристики розглянутого шару. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну тощо, за аналогією з [51]) опишемо наступної модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \varepsilon\alpha(t)\rho(x,t), \end{cases} \quad (5.5)$$

$$c|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c|_{l=0} = 0, \quad \rho|_{l=0} = 0, \quad (5.6)$$

$$\alpha(t) \int_0^L \rho(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \quad (5.7)$$

Розв'язок системи (5.5) при умовах (5.6) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів (див., напр., [34, 35, 38, 51]):

$$c(x,t) = c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + R_c(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \quad (5.8)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \alpha_i(t) + R_\alpha(t, \varepsilon),$$

де R_c, R_ρ, R_α – залишкові члени, $c_i(x, t), \rho_i(x, t), \alpha_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) – шукані члени асимптотик.

Аналогічно [35], у результаті підстановки (5.8) в (5.5)-(5.7) і здійснення стандартної “процедури прирівнювання”, для визначення функцій c_i, ρ_i, α_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0, \\ c_0|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c_0|_{t=0} = 0, \quad \rho_0|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t),$$

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - g_i, \\ c_i|_{x=0} = 0, \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \alpha_1(t) \int_0^L \rho_{i-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \dots + \alpha_i(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0.$$

У результаті їх розв'язку маємо:

$$c_0(x, t) = \begin{cases} c_*^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{\beta x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_0(x, t) = \beta \int_0^t c_0(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \alpha_0(t) = \frac{\mu(t)}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

$$c_i(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_i(x, t)}}{\nu} \cdot \int_0^x g_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) \cdot e^{\lambda_i(\tilde{x}, t)} d\tilde{x}, & t \geq f_i(x), \\ 0, & t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x, t) = \int_0^t (\beta c_i(x, \tilde{t}) - g_i(x, \tilde{t})) d\tilde{t},$$

$$\alpha_i(t) = - \frac{\sum_{k=1}^i \alpha_{i-k}(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x}}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

де $g_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \alpha_{i-k}(t) \rho_{k-1}(x, t)$, $\lambda_i(x, t) = \frac{1}{\nu} \int_0^x \psi_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) d\tilde{x}$,

$\psi_i(x, t) = \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}(x, t)}{\partial t} + \beta$. Наближені значення функцій

$f_i(x)$ знаходяться шляхом інтерполяції масиву (x_j, t_j) ,

$j = \overline{1, n}$ де $x_j = \Delta x \cdot j$, $t_{j+1} = t_j + \frac{\Delta x}{\nu} \sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j)$ [35]. Оцінка

залишкових членів проводиться аналогічно [51].

Згідно [237], коефіцієнт, що характеризує захоплення частинок домішків обчислюється по формулі $\beta = \frac{\beta_0 H^{0.75}}{\nu d^2}$, де

β_0 – вільний параметр, ν – швидкість фільтрування, d – діаметр гранульованої насадки фільтра.

Приведемо результати розрахунків згідно (5.8) при

$c_*^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$, $\beta = 60 \text{ с}^{-1}$, $v = 200 \text{ м/год}$, $L = 1 \text{ м}$. У результаті інтерполяції експериментальних даних [237] нами отриманий масовий розподіл $\mu(t)$ осаду з часом (див. рис. 5.4, а). Тимчасову залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ зображено на рис. 5.4, б. Ріст масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_3 ефективної роботи фільтра.

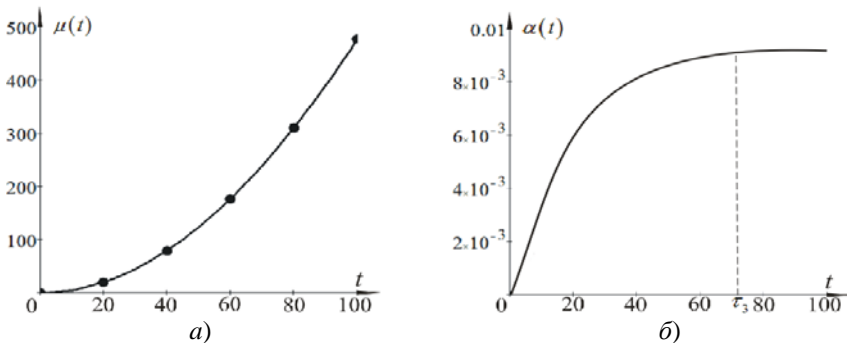


Рис. 5.4. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ – (а) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ – (б) з часом

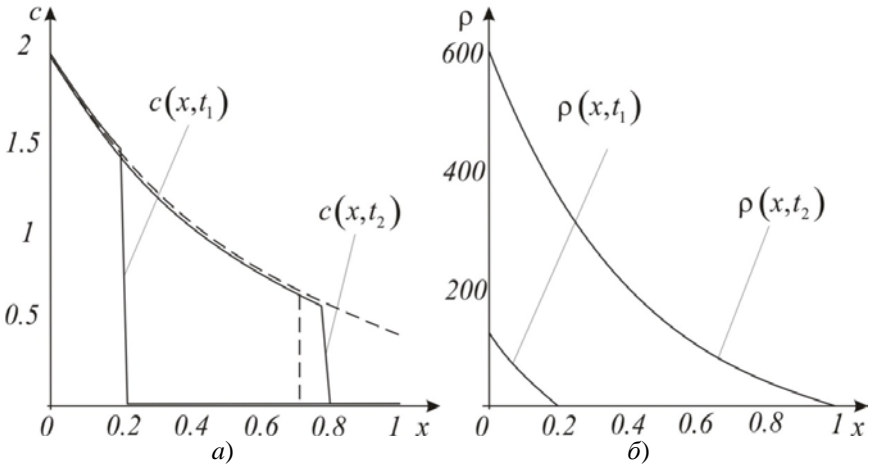


Рис. 5.5. Розподіл $c(x,t)$ – (а) і $\rho(x,t)$ – (б) у моменти часу $t_1 = 25$ год, $t_2 = 75$ год

На рис. 5.5 подано графік розподілу концентрації домішок у рідині й осаді в певні моменти часу. Задавши на виході фільтра (при $L = 1$) припустимо значення концентрації $c = c_{кр} = 0.5$ мг/дм³, знайдемо час його захисної дії; $t = \tau_s = 75$ год, що на 7 годин відрізняється від експериментальних даних [237]. При цьому нагромадження осаду у фільтрі складе 340 г.

5.3. Моделювання процесу магнітного осадження домішок у рівно-циклічній насадці з визначенням масообмінного коефіцієнта

Глибоке очищення технологічних рідких середовищ від забруднюючих домішок, в багатьох галузях промисловості є визначальним фактором надійності та довговічності роботи обладнання і устаткування. Особливо гостро ця проблема стоїть в тепловій, атомній енергетиці, металургійній, хімічній промисловості, де внаслідок неперервної корозії технологічного та комунікаційного обладнання, рідкі

середовища забруднюються домішками. Дослідженнями встановлено, що основна маса забруднень складається з залізовмісних домішок з феромагнітними властивостями [297, 340]. Для очищення технологічних вод від феромагнітних домішок використовується метод магнітного осадження домішок в намагнічених феромагнітних (феримагнітних) гранульованих загрузках. Метод є екологічно безпечним, безреагентним, з широким діапазоном зміни швидкості (до 1000 м/год) і температури середовища, що очищується (до 500°C) [43, 44].

Відомі математичні моделі з достатньою адекватністю описують процес очищення водних середовищ в пористих фільтруючих загрузках з врахуванням технологічних параметрів. Особливістю магнітного очищення водних середовищ є те, що ефективність очищення в значній мірі залежить від параметрів магнітного поля. Існуючі моделі механічного фільтрування не можуть бути автоматично перенесені на модель магнітного очищення. Тому необхідне створення математичної моделі процесу магнітного осадження з врахуванням параметрів магнітного поля.

Досліджено, що концентрація домішок в рідкому середовищі, що очищується, вздовж фільтруючої загрузки експоненціально зменшується впродовж робочого фільтроциклу [237-239]. Причому в процесі магнітного очищення насичуються перші по ходу руху рідини шари загрузки, а “глибинні” шари працюють в режимі “недонасичення” домішками. При збільшенні довжини загрузки ця різниця збільшується. Разом з тим, можна створити такі умови, при яких час заповнення об’ємів фільтруючої загрузки буде однаковим, тобто можна створити рівно циклічну загрузку [237].

У роботі [48] запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок у пористій фільтруючій загрузці, що враховує зворотний вплив

характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом.

Метою підрозділа є створення математичної моделі процесу фільтрування рідини n -шаровим магнітним фільтром з визначенням невідомого масообмінного коефіцієнта.

Розглянемо просторово одномірний процес очищення рідини n -шаровим магнітним фільтром товщиною L (рис. 5.6), що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі Ox . Вважатимемо [38], що часточки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву), при цьому концентрація домішок впливає на досліджуваний шар загрузки.

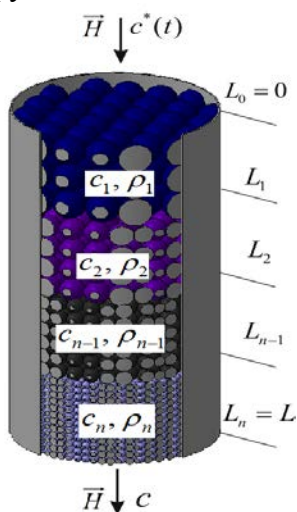


Рис. 5.6. Схематичне зображення n -шарового магнітного фільтра

Відповідну математичну модель процесу фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації домішок рідини та осаду фільтруючої загрузки) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості [34, 35, 38, 297, 340]) представимо у вигляді наступної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + \beta c = \varepsilon \alpha(t) \rho(x,t), \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \varepsilon \alpha(t) \rho(x,t), \end{cases} \quad (5.9)$$

$$c|_{x=0} = c^*(t), \quad c|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad [c]_{x=L_k} = 0, \quad [\rho]_{x=L_n} = 0, \quad (5.10)$$

$$\alpha(t) \int_0^{L_n} \rho(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \quad (5.11)$$

де $c(x,t)$, $\rho(x,t)$ – концентрації домішок рідини та осаду загрузки, відповідно; $\beta = \frac{a\kappa\delta^2 H^{0,75}}{\eta v d^2}$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги магнітного осадження феромагнітних домішкових частинок за одиницю часу, a, κ, δ, η – м'які параметри, які характеризують масообмінний коефіцієнт β (знаходяться експериментально [237]), H – напруженість магнітного поля; d – діаметр гранульованої загрузки магнітного фільтра, $\alpha(t)$ – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних від гранул загрузки частинок, $\mu(t)$ – функція, що характеризує масовий розподіл осаду з часом (знаходиться дослідним способом [237]), умова перевизначення (3) – призначено для знаходження $\alpha(t)$, v – швидкість фільтрування, $c^*(t)$ – концентрації домішок на вході фільтра, $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x,t)$, де σ_0 – вихідна пористість загрузки, σ_* – параметр, який характеризує відповідний коефіцієнт пористості; ($x \in [L_{n-1}, L_n]$); ε – малий за значенням параметр; $[L_{n-1}, L_n]$ – n -ий шар фільтра ($n=1, 2, \dots, l$); у рівняннях (5.10) [] – приріст відповідної функції в даній точці $x = L_n$.

Асимптотичне наближення розв'язку модельної задачі

$$c(x,t) = \begin{cases} c_1(x,t), & L_0 = 0 \leq x < L_1, \\ c_2(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ c_n(x,t), & L_{n-1} \leq x < L_n = L, \end{cases} \quad \rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1(x,t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \rho_2(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \rho_n(x,t), & L_{n-1} \leq x < L_n = L, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \alpha_2(t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \alpha_n(t), & L_{n-1} \leq x < L_n = L, \end{cases} \quad \text{знаходимо у вигляді}$$

асимптотичних рядів [297, 340]:

$$c_n(x,t) = c_{n,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j c_{n,j}(x,t) + R_{c,n}(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho_n(x,t) = \rho_{n,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \rho_{n,j}(x,t) + R_{\rho,n}(x,t,\varepsilon), \quad (5.12)$$

$$\alpha_n(t) = \alpha_{n,0}(t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \alpha_{n,j}(t) + R_{\alpha,n}(t,\varepsilon),$$

де $R_{c,n}, R_{\rho,n}, R_{\alpha,n}$ – залишкові члени, $c_{n,j}(x,t), \rho_{n,j}(x,t), \alpha_{n,j}(t)$ ($j = 0, k; n = 0, l$) – члени регулярних частин асимптотики.

Аналогічно [51], у результаті підстановки (5.12) в (5.9)-(5.11) і здійснення стандартної “процедури прирівнювання”, для визначення функцій c_j, ρ_j, α_j ($j = 0, k$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{n,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{n,0}}{\partial x} + \beta c_{n,0} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_{n,0}, \\ c_{n,0}|_{x=0} = \bar{c}_n(t), c_{n,0}|_{l=0} = 0, \rho_{n,0}|_{l=0} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{n,0}(t) \int_0^{L_n} \rho_{n,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t),$$

де $\bar{c}_{n,j}(t) = c^*(t)$, якщо $n = 0$, $\bar{c}_n(t) = c_{n-1,0}(L_{n-1}, t)$,
 $\bar{\rho}_n(t) = \rho_{n-1,0}(L_{n-1}, t)$, якщо $n = \overline{1, l}$;

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{n,j-1} \frac{\partial c_{n,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{n,j}}{\partial x} + \beta c_{n,j} = g_{n,j}(x, t), \\ \frac{\partial \rho_{n,j}}{\partial t} = \beta c_{n,j} - g_{n,j}(x, t), \\ c_{n,j}|_{x=0} = 0, c_{n,j}|_{t=0} = 0, \rho_{n,j}|_{t=0} = 0, \quad j = \overline{1, k}, n = \overline{1, l-1}; \end{cases}$$

$$\alpha_{n,0}(t) \int_0^{L_n} \rho_{n,j}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \alpha_{n,1}(t) \int_0^{L_n} \rho_{n,j-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \dots + \alpha_{n,j}(t) \int_0^{L_n} \rho_{n,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{n,0}(x, t) = \begin{cases} \bar{c}_n^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{\beta x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_{n,0}(x, t) = \beta e^{-\alpha_0 t} \int_0^t c_{n,0}(x, \tilde{t}) e^{\alpha_0 \tilde{t}} d\tilde{t} + \bar{\rho}_n^*(x),$$

$$\alpha_{n,0}(t) = \frac{\mu(t)}{\int_0^{L_n} \rho_{n,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

$$c_{n,j}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_* e^{-\int_0^x \lambda_{n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{v} \cdot \int_0^x \frac{g_{n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{\int_0^{\tilde{x}} \lambda_{n,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{n,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ 0, & t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_{n,j}(x,t) = \beta e^{-\int_0^t g_{n,j-1}(x,\tilde{t})d\tilde{t}} \int_0^t c_{n,j}(x,\tilde{t}) e^{\int_0^{\tilde{t}} g_{n,j-1}(x,\tilde{t})d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

$$\alpha_{n,j}(t) = -\frac{\sum_{w=1}^j \alpha_{n,j-w}(t) \int_0^{L_n} \rho_{n,j}(\tilde{x},t)d\tilde{x}}{\int_0^{L_n} \rho_{n,0}(\tilde{x},t)d\tilde{x}},$$

де $g_{n,j}(x,t) = \sum_{w=1}^j \alpha_{n,j-w}(t) \rho_{n,j-1}(x,t)$, $\lambda_{n,j}(x,t) = -\sigma_* \frac{\partial \rho_{n,j-1}(x,t)}{\partial t} + \beta$.

Наближені значення функцій $f_j(x)$ знаходимо шляхом [237] інтерполяції масиву (x_i, t_i) , $i = \overline{1, k}$, де $x_i = \Delta x \cdot i$,

$t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{v} \sigma_* \rho_{j-1}(x_i, t_i)$. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [51].

Приведемо результати розрахунків за формулами (5.12) для рівноциклічної загрузки при вихідних даних [237]: $c_1^*(t) = 2 \text{ мг}/\text{дм}^3$, $v = 72 \text{ м}/\text{год}$, $a = 0,65 \text{ кг}/\text{м} \cdot \text{с}^2$, $\kappa = 0,38$, $\delta = 15 \text{ мкм}$, $L_i \in \{1.2; 10; 20; 40; 60\} \text{ см}$, $d_i \in \{3.5; 8.3; 12; 16.2; 19\} \text{ мм}$, $H_i \in \{5000; 4050; 3200; 2500; 1800\} \text{ кА}/\text{м}$, $(i = \overline{1, 5})$, $\eta = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, $q_1 = q_2 = 1$; $\sigma_0 = 0.5$; $\alpha_* = 1$; $\sigma_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

У результаті інтерполяції експериментальних даних [237] нами отримане масовий розподіл $\mu(t) = \mu_n(t)$ і залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ від часу (для різних кількостей шарів фільтра n) (рис. 5.7). Збільшення масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження частинок гранули пористої загрузки максимально насичуються домішковими частинками та під дією

гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_3 ефективної роботи фільтра.

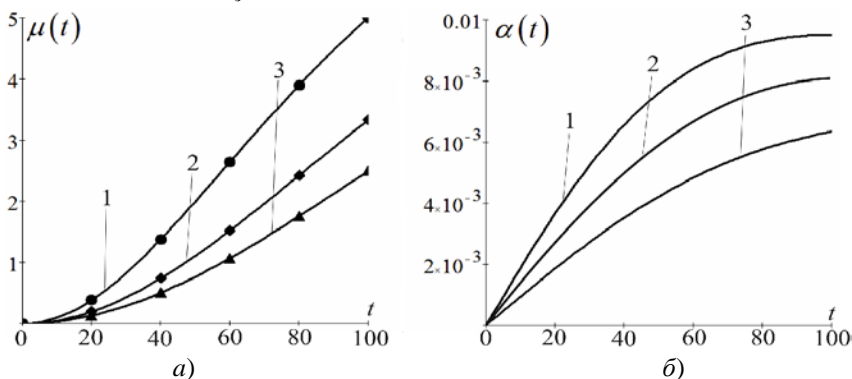


Рис. 5.7. Масовий розподіл осаду $\mu_n(t)$ – (а) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha_n(t)$ – (б) (1 – для $n = 3$, 2 – для $n = 1$), $d_i \in \{8.3; 12; 16.2\}$ мм

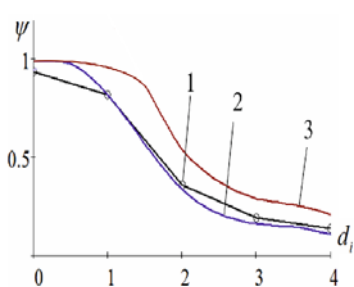


Рис. 5.8. Ефективність очищення в рівноциклічній загрузці при збільшенні діаметра гранул кульок загрузки: 1 – експериментальні дані; 2 – теоретично розраховані дані для 3-шарового фільтра, 3 – теоретично розраховані дані для 1-шарового фільтра

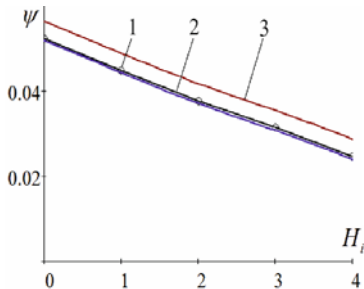


Рис. 5.9. Ефективність очищення в рівноциклічній загрузці при зменшенні напруженості зовнішнього магнітного поля: 1 – експериментальні дані; 2 – теоретично розраховані дані для 3-шарового фільтра, 3 – теоретично розраховані дані для 1-шарового фільтра

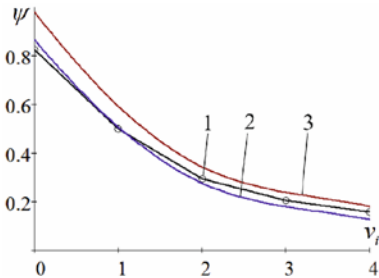


Рис. 5.10. Ефективність очищення в рівноциклічній загрузці при збільшенні швидкості фільтрування: 1 – експериментальні дані; 2 – теоретично розраховані дані для 3-шарового фільтра, 3 – теоретично розраховані дані для 1-шарового фільтра

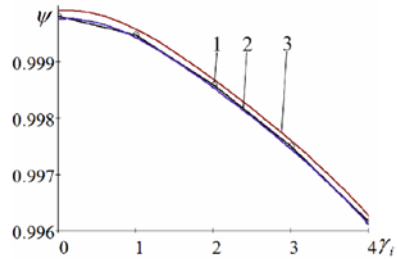


Рис. 5.11. Ефективність очищення в рівноциклічній загрузці при зменшенні густини "насичення" домішками шарів загрузки 1 – експериментальні дані; 2 – теоретично розраховані дані для 3-шарового фільтра, 3 – теоретично розраховані дані для 1-шарового фільтра

У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій загрузці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища.

5.4. Моделювання процесу фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення в n -шаровому магнітному фільтрі в умовах ідентифікації масообмінного коефіцієнта

У роботах [34, 35, 38, 297, 340] запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок у пористому фільтруючому завантаженні, яке враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [51], з урахуванням зворотного впливу захоплених частинок на пористість σ і коефіцієнт α , а також на коефіцієнт фільтрації.

Розглянемо просторово-одномірний процес очищення рідини фільтруванням в n -шаровому фільтрі товщиною L (рис. 5.18), що ототожнюється з відрізком $[0, L]$ осі Ox . Вважаємо [51], що частинки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву, сорбції, десорбції) і, при цьому, має місце зворотний вплив концентрації забруднення на характеристики відповідних шарів.

Концентрація забруднення – багатокомпонентна, $c = c(x, t) = (c_1, \dots, c_m) = (c_1(x, t), \dots, c_m(x, t))$, де $c_i(x, t)$ – концентрація i -ї компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтрівному середовищі. Відповідну математичну модель процесу фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, масообмінну і т. ін. [35, 38]) представимо у вигляді наступної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho_i)c_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \\ - \varepsilon f_{m-1} \left(\sum_{p_1, \dots, p_u=1}^m h_{i, p_1, \dots, p_u} c_i^{\gamma_i} c_{p_1}^{\gamma_{p_1}} \dots c_{p_u}^{\gamma_{p_u}} \right), \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_l = \{x : L_{l-1} < x < L_l, 0 < t < \infty\}, l = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, [c_i]_{x=L_l} = 0, [\rho_i]_{x=L_l} = 0, (5.14)$$

$$\alpha_i(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu_i(t), \quad (5.15)$$

де $\rho = \rho(x, t) = (\rho_1, \dots, \rho_m) = (\rho_1(x, t), \dots, \rho_m(x, t))$, $\rho_i(x, t)$ – концентрація i -ї компоненти домішок, захоплених фільтруючою засипкою, $\alpha_i(t)$ – шуканий коефіцієнт, який характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки частинок, $\mu_i(t)$ – масовий розподіл осаду з часом (знаходиться дослідним способом [237]), умова перевизначення (5.15) – призначена для знаходження $\alpha_i(t)$, v – швидкість фільтрування (з метою спрощення числових розрахунків, розглянемо окремий випадок, коли $v = const$), $c_i^*(t)$ – концентрації домішок на вході фільтра, $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* \rho(x, t)$ (σ_0 – вихідна пористість засипки); h_{i, p_1, \dots, p_u} – коефіцієнт, що характеризує взаємодію між концентраціями компонентів домішків ($h_{i, p_1, \dots, p_u} = 0$ при співпаданні індексів), σ_* , q_p , ε – тверді параметри, які характеризують відповідні коефіцієнти; ε – малий параметр; $[L_{l-1}, L_l]$ – l -й шар фільтра ($l = 1, 2, \dots, n$); в (5.14) [] – збільшення відповідної функції в даній точці $x = L_l$. Тут

$$f_{m-1}(W_u) = \sum_{u=1}^{m-1} W_u, \text{ причому, з метою спрощення розрахунків, у}$$

$$\text{роботі розглядається випадок коли } f_{m-1}(W_u) = \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_i c_p.$$

Складові $c_{i,l,j}(x, t)$, $\rho_{i,l,j}(x, t)$, $\alpha_{i,l,j}(t)$ ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{0, k}$; $l = \overline{1, n}$) асимптотичного наближення розв'язку

$$\text{вихідної модельної задачі } c_i(x,t) = \begin{cases} c_{i,1}(x,t), & L_0 = 0 \leq x < L_1, \\ c_{i,2}(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ c_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \leq x < L_n = L, \end{cases}$$

$$\rho_i(x,t) = \begin{cases} \rho_{i,1}(x,t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \rho_{i,2}(x,t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \rho_{i,l}(x,t), & L_{l-1} \leq x < L_n = L, \end{cases} \quad \alpha_i(t) = \begin{cases} \alpha_{i,1}(t), & L_0 = L \leq x < L_1, \\ \alpha_{i,2}(t), & L_1 \leq x < L_2, \\ \dots \\ \alpha_{i,l}(t), & L_{l-1} \leq x < L_n = L \end{cases}$$

знаходимо у вигляді асимптотичних рядів [51]:

$$c_{i,l}(x,t) = c_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j c_{i,l,j}(x,t) + R_{c,i,l}(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho_{i,l}(x,t) = \rho_{i,l,0}(x,t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \rho_{i,l,j}(x,t) + R_{\rho,i,l}(x,t,\varepsilon), \quad (5.16)$$

$$\alpha_{i,l}(t) = \alpha_{i,l,0}(t) + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \alpha_{i,l,j}(t) + R_{\alpha,i,l}(t,\varepsilon),$$

де $R_{c,i,l}, R_{\rho,i,l}, R_{\alpha,i,l}$ – залишкові члени, $c_{i,l,j}(x,t), \rho_{i,l,j}(x,t), \alpha_{i,l,j}(t)$ – члени регулярних частин асимптотики.

Аналогічно [297], у результаті підстановки (5.16) в (5.13)-(5.15) і здійснення стандартної “процедури порівнювання”, для визначення функцій $c_{i,l,j}(x,t), \rho_{i,l,j}(x,t), \alpha_{i,l,j}(t)$ приходимо до таких задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial t} = -v \frac{\partial c_{i,l,0}}{\partial x} - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_p \right), \quad \frac{\partial \rho_{i,l,0}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{i,l,0} \right), \\ c_{i,l,0} \Big|_{x=L_{l-1}} = \bar{c}_{i,l}(t), \quad c_{i,l,0} \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_{i,l,0} \Big|_{t=0} = 0, \end{array} \right.$$

$$\alpha_{i,l,0}(t) \int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu_{i,l}(t),$$

де $\bar{c}_{i,0}(t) = c_i^*(t)$, $\bar{c}_{i,l}(t) = c_{i,l-1,0}(L_{l-1}, t)$, $l = \overline{1, n}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial t} = g_{i,l,j}(x, t) - v \frac{\partial c_{i,l,j}}{\partial x} \\ -\beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{l,p,j} \right) - \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_{i,l,j-1} c_{p,l,j-1}, \\ \frac{\partial \rho_{i,l,j}}{\partial t} = \beta_i \left(\sum_{i=1}^m q_i c_{i,l,j} \right) - g_{i,l,j}(x, t), \\ c_{i,l,j} \Big|_{x=0} = 0, c_{i,l,j} \Big|_{t=0} = 0, \\ \rho_{i,l,j} \Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1, m}, \\ j = \overline{1, k}, l = \overline{1, n-1}; \end{array} \right.$$

$$\alpha_{i,l,0}(t) \int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \alpha_{i,l,1}(t) \int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \dots + \\ + \alpha_{i,l,j}(t) \int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0.$$

У результаті їх послідовного розв'язку маємо:

$$c_{i,l,0}(x, t) = \begin{cases} \bar{c}_{i,l}^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{\frac{q_i x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_{i,l,0}(x, t) = \beta_i \int_0^t \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{i,l,0}(x, \tilde{t}) \right) d\tilde{t}, \quad \alpha_{i,l,0}(t) = \frac{\mu_{i,l}(t)}{\int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

$$c_{i,l,j}(x,t) = \begin{cases} -\frac{\sigma_* e^{-\int_0^x \lambda_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\nu} \times \\ \times \int_0^x \frac{g_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) e^{-\int_0^{\tilde{x}} \lambda_{i,l,j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)) d\tilde{x}}}{\rho_{i,l,j-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x))} d\tilde{x}, & t \geq f(x), \\ 0, & t < f(x), \end{cases}$$

$$\rho_{i,l,j}(x,t) = \beta_i e^{-\int_0^t g_{i,l,j-1}(x,\tilde{t}) d\tilde{t}} \int_0^t \left(\sum_{p=1}^m q_p c_{p,l,j}(x,\tilde{t}) \right) e^{-\int_0^{\tilde{t}} g_{i,l,j-1}(x,\tilde{t}) d\tilde{t}} d\tilde{t},$$

$$\alpha_{i,l,j}(t) = -\frac{\sum_{w=1}^j \alpha_{i,l,j-w}(t) \int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,j}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}}{\int_{L_{l-1}}^{L_l} \rho_{i,l,0}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

де $g_{i,l,j}(x,t) = \sum_{w=1}^j \alpha_{i,l,j-w}(t) \rho_{i,l,j-1}(x,t)$, $\lambda_{i,l,j}(x,t) = -\sigma_* \frac{\partial \rho_{i,l,j-1}(x,t)}{\partial t}$.

Наближені значення функцій $f_j(x)$ знаходимо шляхом [51] інтерполяції масиву (x_i, t_i) , $i = \overline{1, k}$, де $x_i = \Delta x \cdot i$,

$$t_{i+1} = t_i + \frac{\Delta x}{\nu} \sigma_* \rho_{l,j-1}(x_i, t_i), \quad l = \overline{1, n}.$$

Приведемо результати розрахунків за формулами (5.16) при $n=2$ $c_1^*(t) = 2 \text{ мг}/\partial \text{м}^3$, $c_2^*(t) = 1 \text{ мг}/\partial \text{м}^3$, $\beta = 60 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 250 \text{ м}/\text{год}$, $L = 1 \text{ м}$. $q_1 = q_2 = 1$; $\sigma_0 = 0.5$; $\sigma_* = 1$; $\varepsilon = 0.001$.

У результаті інтерполяції експериментальних даних

[237] нами отриманий масовий розподіл $\mu(t)$ і тимчасову залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ (для різних кількостей шарів n) осаду з часом (див. рис. 5.12). Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження частинок гранули пористого завантаження максимально насичуються домішковими частинками і під дією гідравлічного напору ступінь відриву частинок від гранул зростає протягом усього часу τ , ефективної роботи фільтра.

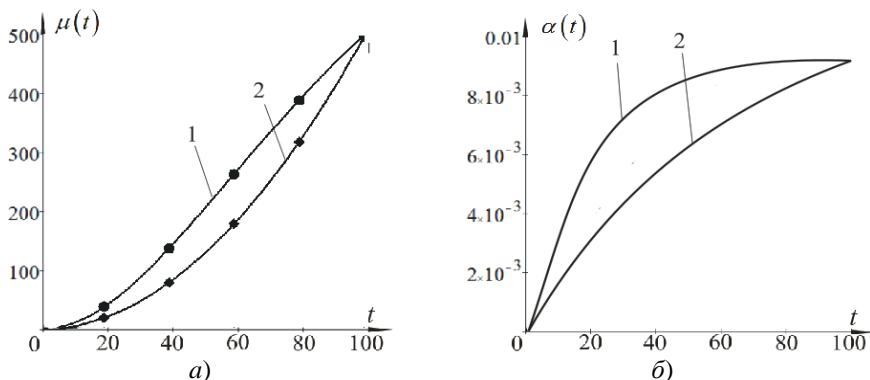


Рис. 5.12. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ – (а) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ – (б) з часом (1 – для $n = 3$, 2 – для $n = 1$)

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [297, 340]. Як і слід було чекати [51], для розрахунків досить брати по 2 члена з кожного асимптотичного ряду (5.16) щоб одержати наближення з точністю до 6 значущих цифр у проміжку розрахункового часу фільтроциклу.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_* \rho_{i,l,j-1} \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial t} &= v \frac{\partial R_{c,i,l}}{\partial x} + \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p R_{c,p,j} \right) - \varepsilon^{m+1} S(c, \rho, \varepsilon), \\ \frac{\partial R_{\rho,i,l}}{\partial t} &= \beta_i \left(\sum_{i=1}^m q_i R_{c,i,l} \right) - \varepsilon^{m+1} U(c, \rho, \varepsilon), \end{aligned} \right.$$

$$R_{\alpha,i,l} \int_{L_{i-1}}^{L_i} R_{\rho,i,l}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0;$$

$$\begin{aligned} R_{c,i,l}(0, t, \varepsilon) &= R_{c,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{c,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{c,i,l}(0, t, \varepsilon) = \\ &= R_{\rho,i,l}(0, t, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{\rho,i,l}(0, t, \varepsilon) = \\ &= R_{\alpha,i,l}(0, t, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(L_i, t, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(x, 0, \varepsilon) = R_{\alpha,i,l}(0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}), l = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

з яких пригодимо до висновку про малість $R_{c,i,l} = O(\varepsilon^{m+1})$, $R_{\rho,i,l} = O(\varepsilon^{m+1})$, $R_{\alpha,i,l} = O(\varepsilon^{m+1})$ при обмеженому часі (часі фільтроциклу), $S(c, \rho, \varepsilon)$, $U(c, \rho, \varepsilon)$ – відомі функції.

5.5. Просторова задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокomпонентного забруднення

Аналіз результатів досліджень [39-48] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, які визначають процеси фільтрації й фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. У роботі [25] показано, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом. В свою чергу для побудови математичних моделей процесів очищення рідин від багатокomпонентного

забруднення просторовим фільтром на даний час практично відсутні “модельні механізми”, що враховують зворотній вплив різного роду характеристик процесу на характеристики середовища та ідентифікації невідомих параметрів, що входять до відповідних моделей. У роботі [51] розроблено математичну модель процесу очищення рідини у пористій фільтруючій насадці, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом.

Метою даного підрозділа є просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта, та побудова асимптотичного розв’язку відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі.

Розглянемо зернистий (пористий) фільтр, що має форму криволінійного паралелепіпеда $G_Z = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмежений гладкими ортогональними між собою в кутових точках і ребрах еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (див. рис. 2.7). Припускаємо [51], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-

відриву, сорбції-десорбції тощо) і при цьому концентрації забруднення “впливають” на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації, тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ($C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$), де C_i концентрація i -ї компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування для області $G = G_Z \times (0, \infty)$ опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}C_i - \beta_i \left(\sum_{p=1}^m q_p C_p \right) - \\ - \varepsilon f_{m-1} \left(\sum_{p_1, \dots, p_u=1}^m h_{i, p_1, \dots, p_u} C_i^{\gamma_{p_1}} C_{p_1}^{\gamma_{p_2}} \dots C_{p_u}^{\gamma_{p_u}} \right) + D_i \Delta C_i, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\sum_{i=1}^m \beta_i C_i \right) - \varepsilon\alpha(t)P, i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$C_i \Big|_{ABB, A_*} = C_{i,*}(M, t), \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD, C_*} = 0, \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_* \cup BCC, B_* \cup ABCD \cup A, B, C, D_*} = 0, \\ C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z), \quad (5.18) \\ \vec{v} = \kappa \vec{\nabla} \varphi, \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (5.19)$$

$$\varphi \Big|_{ABB, A_*} = \varphi_*, \varphi \Big|_{CDD, C_*} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD, A_* \cup BCC, B_* \cup ABCD \cup A, B, C, D_*} = 0; \quad (5.20)$$

$$\alpha(t) \iiint_G P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = \mu(t), \quad (5.21)$$

де $P(x, y, z, t)$ – концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області G (завантаження фільтра) в момент часу t ; β_i – коефіцієнти, що характеризують масові об’єми осадження домішок за одиницю часу, $\alpha(t)$ – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові об’єми відірваних від гранул

завантаження частинок, $\mu(t)$ – функція, що характеризує масові розподілу осаду з часом (знаходиться експериментальним способом [206]), (5.21) – умова пере визначення; $\sigma(P)$ – пористість середовища ($\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* P(x, y, z, t)$); $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ – оператор Лапласа; $D_i = d_{0i} \varepsilon$ – коефіцієнт дифузії домішки у рідині; σ_* , d_{0i} , ε – тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр $\sigma(P)$), що знаходяться експериментальним способом, ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншими, а саме, десорбційні складники та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складниками); $C_i^*(M, t)$, $C_{i,0}^0(x, y, z)$ — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M – довільна точка відповідної поверхні; φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$), κ – коефіцієнт фільтрації.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово квазікомплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [51] і заміною граничних умов на умови: $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*$, задача замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу квазіконформного відображення області G_Z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}, \text{ де } Q_*,$$

Q^* – невідомі параметри, $Q_* \cdot Q^* = Q = \int_{EFF_*E_*} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$ – кількість

рідини, що проходить через деяку квазіеквіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області G_Z (повна фільтраційна витрата).

Прийемо, що дана задача на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_Z$ (

$$G_w = \left\{ w = (\varphi, \psi, \eta) : \overline{\varphi} < \varphi < \overline{\varphi}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^* \right\} \quad -$$

відповідна G_Z область комплексного квазіпотенціалу) при деякому усередненому значенні $\kappa \in$ розв'язана [51], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (5.17) та умовах (5.18), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} &= \varepsilon\alpha(t)\rho - v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \varphi} - \beta_i \sum_{p=1}^m q_p C_p - \varepsilon \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i,p} c_{i,j-1} c_{p,j-1} + \\ &+ \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \varepsilon\alpha(t)\rho, \end{aligned} \right. \quad (5.22)$$

$$c_i(\overline{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_i^*(\psi, \eta, t), c_{i,\varphi}(\overline{\varphi}^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (5.23)$$

$$\alpha(t) \iiint_{G_w} \rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t), \quad (5.24)$$

де $c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ b_1 &= b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\overline{\nabla\psi})^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\overline{\nabla\eta})^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\psi, \\ d_2 &= d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\eta, \\ v^2(\varphi, \psi, \eta) &= v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + \\ &+ v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \quad (\text{див., напр., [51]}). \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (5.22), (5.24) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [34, 35, 38, 297, 340]:

$$\begin{aligned} c_i &= c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\tilde{\Pi}}_{i,j} + R_{c,i}, \\ \rho &= \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \\ &+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\tilde{P}}_j + R_\rho, \quad (5.25) \\ \alpha &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j \alpha_j + R_\alpha, \end{aligned}$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $R_\alpha(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\alpha_j(t)$ – члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{0, n}$); $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ – в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$,

$\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\hat{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\hat{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = \overline{0,3}$) – в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки в околі бічних “стінок” фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$, $\tilde{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$, $\tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = (Q_* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\eta} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — “розтяги” відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (5.25) у (5.22)-(5.24) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{0,n}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0}, \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, \quad c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i*}(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \end{array} \right.$$

$$\alpha_0(t) \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = \mu(t),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} = U_{i,j} - v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} - \beta_i \left(\sum_{j=1}^m q_j c_j \right), \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1}, \\ c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{array} \right.$$

$$\alpha_0 \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \alpha_1 \iiint_{G_w} \rho_{j-1}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} + \dots +$$

$$+ \alpha_j \iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta} = 0.$$

В результаті їх розв'язання отримаємо:

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t-f) \exp \left[-\beta_i \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f-t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,0} \right) d\tilde{t} + \rho_0^0, \quad \alpha_0 = \frac{\mu}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{U_{i,j}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -\frac{e^{-\lambda_1}}{\sigma_*} \int_0^t \frac{U_{i,j}(f^{-1}(s+f-t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s+f-t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i c_{i,j} - \sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \rho_{k-1} \right) d\tilde{t},$$

$$\alpha_j = \frac{\sum_{k=1}^j \alpha_{j-k} \iiint_{G_w} \rho_j(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}}{\iiint_{G_w} \rho_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t) d\tilde{\varphi} d\tilde{\psi} d\tilde{\eta}},$$

де $U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \eta} \right) +$

$$+ \alpha_{j-1} \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_1 \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \quad \text{— час проходження відповідною}$$

частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_{ij}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$), $\bar{\Pi}_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{P}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ знаходяться аналогічно [34]. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [35]. Обґрунтування збіжності розв'язку проводиться аналогічно до [51].

Наведемо результати числового експерименту. На рис. 5.13 проілюстровано розподіл концентрації c_1, c_2 і ρ з часом вздовж ліній течії для $L = 1\text{ м}$, $\beta_1 = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.0056 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0,001$; $k = 1$; $c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.017 \exp(-\varphi^2)$, $c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.021 \exp(-\varphi^2)$, $c_1^*(\psi, \eta, t) = 0.017$, $c_2^*(\psi, \eta, t) = 0.021$, $\rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$.

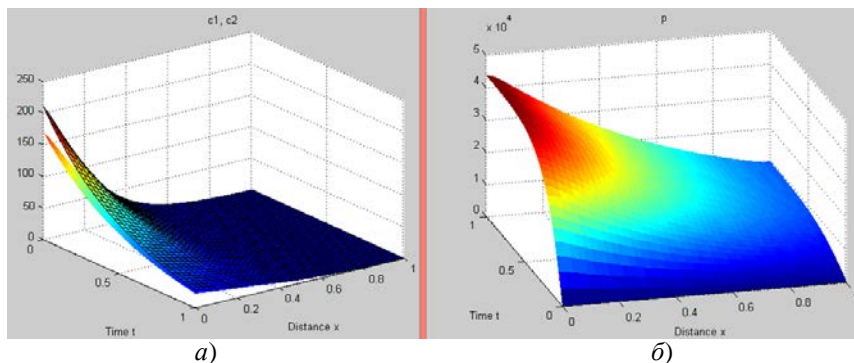


Рис. 5.13. Просторовий розподіл концентрації c_1, c_2 – (а) і ρ – (б)

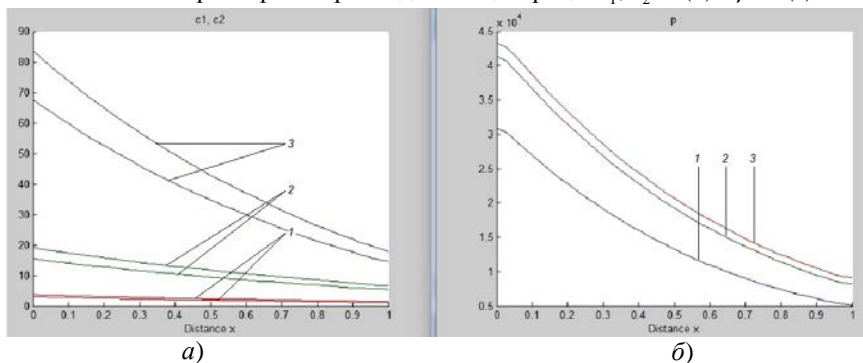


Рис. 5.15. Розподіл концентрації c_1, c_2 – (а) і ρ – (б) вздовж фільтра в різні моменти часу (для $t_1 = 10$ год, $t_2 = 20$ год, $t_3 = 30$ год)

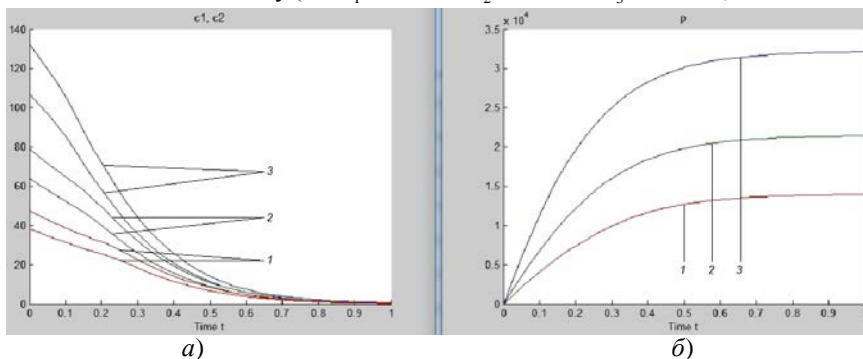


Рис. 5.15. Розподіл концентрації c_1, c_2 – (а) і ρ – (б) з часом в різних поперечних перерізах фільтра (для $x_1 = 25$ см, $x_2 = 50$ см, $x_3 = 75$ см)

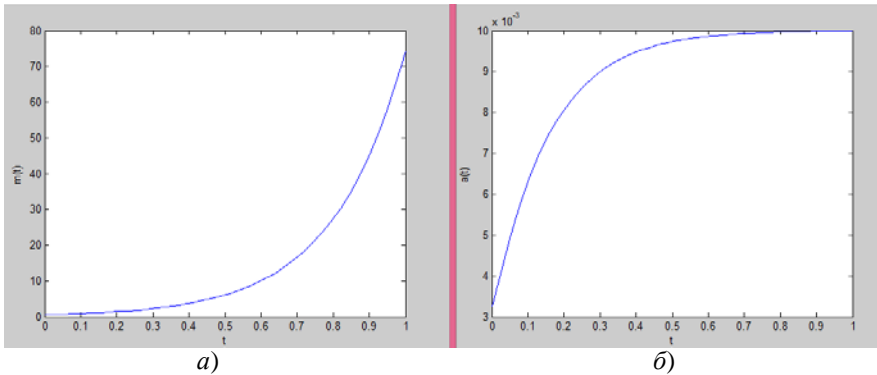


Рис. 5.16. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ – (а) і відповідного масо обмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ – (б) з часом

На рис. 5.14 та рис. 5.15 проілюстровано розподіл концентрації c_1 , c_2 і ρ з часом та в різних поперечних перерізах фільтра відповідно вздовж ліній течії.

В результаті інтерполяції експериментальних даних [206] нами отримане масовий розподіл $\mu(t)$ осаду з часом (див. рис. 5.16, а). Залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ від часу зображено на рис. 5.16, б. Зростання масообмінного коефіцієнта з часом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_3 ефективної роботи фільтра.

Провівши аналіз із розрахунковими даними, отриманими в [51], бачимо, що розрахунки на основі просторово узагальненої математичної моделі процесу очищення рідини можуть характеризувати протікання процесу фільтрування як з кращої так і гіршої сторони, в залежності від форми задання просторового фільтра.

5.6. Висновки до п'ятого розділу

1. Побудовано математичну модель, що описує закономірності фільтрування й нагромадження домішок у пористій засипці з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну) і включає можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта. Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної збуреної задачі, що, зокрема, забезпечує можливість визначення часу захисної дії фільтра. Наведено результати розрахунків розподілу питомої концентрації й масового об'єму домішок (по довжині фільтруючої пористої засипки) для різних моментів часу.

2. Запропонований алгоритм розв'язку відповідної оберненої задачі, який, зокрема, припускає можливість визначення часу τ , захисної дії фільтра. Наведені результати розрахунків розподілу питомої концентрації й масового об'єму домішок (по довжині фільтруючої пористої засипки) для різних моментів часу. У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій засипці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища, і так само приймати рішення щодо зміни потужності двигуна насоса подачі рідини у фільтр.

3. Побудована математична модель процесу очищення рідин від багатокомпонентних забруднень n -шаровим магнітним фільтром. У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій насадці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища.

4. Побудовано математичну модель процесу очищення рідин від багатокомпонентних домішок n -шаровим магнітним фільтром, що враховує зворотний вплив концентрації домішок рідини і осаду на характеристики загрузки (коефіцієнт пористості) і створює умови визначення невідомого масообмінного коефіцієнта. Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної оберненої задачі, що припускає можливість визначення часу τ_z захисної дії фільтра. Наведено результати чисельних розрахунків. У рамках даної моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій загрузці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища.

5. Запропоновано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудований розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями [206]), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем. Аналіз результатів дослідження показав, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом.

ВИСНОВКИ

В монографії вирішено важливу науково-прикладну проблему розвинення теорії математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень з урахуванням ідентифікації параметрів при домінуванні одних компонент процесу над іншими, а також розвинення методів розв'язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води.

Найбільш важливі наукові і практичні результати, висновки і рекомендації полягають у наступному:

1. Розроблено нову математичну модель процесу очищення дво- та багатокомпонентної концентрації забруднення стічних вод, яка враховує зворотній вплив на фільтраційні компоненти, зокрема, на пористість, коефіцієнт фільтрації, коефіцієнти захоплених частинок забруднення і відірваних частинок осаду, що дає можливість визначити важливі параметри процесу фільтрування (час захисної дії фільтра, граничне завантаження осаду, гранична втрата напору тощо). Розроблену математичну модель перенесено на процес очищення стічної води на сорбційних фільтрах зі змінною швидкістю фільтрування. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях швидкості фільтрування, та характеристик засипки фільтра. Проведено порівняльну характеристику даних отриманих дослідним шляхом і розрахованих на основі класичної моделі Мінца та показано переваги розробленої моделі.

2. Сформульовано та обґрунтовано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентних забруднень одно та n -шаровими

сорбційними фільтрами. Розроблену математичну модель узагальнено на процес очищення води прояснювачем із шаром завислого осаду, що адекватно описує фізичну суть технологічних процесів прояснення води, формування осаду, умов виносу надлишкової його частини за межі корпусу установки та зміну втрат напору по висоті завислого шару, і дозволяє для досліджуваних умов обчислити значення згаданих параметрів у кожний момент часу.

3. На основі узагальнення моделей типу Моно розроблено нову математичну модель процесу аеробного очищення стічної води в пористому середовищі, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі, що надає можливість автоматизованого визначення оцінки ефективної роботи біофільтра, зокрема, часу припинення подачі бактерій, а отже суттєво зменшувати вартість процесу очищення.

4. Розроблено просторову математичну модель, що описує основні закономірності очищення стічної води у біофільтрі, і алгоритм розв'язання відповідної сингулярно збуреної задачі. Одержані формули та графічні залежності між величинами є ефективні для проведення теоретичних досліджень, спрямованих на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). Як показують розрахунки, після певного моменту часу можна припинити подачу бактерій у біофільтр і це не вплине на ріст бактерій у фільтрі, а також на процес фільтрування, що у свою чергу значно зменшить вартість процесу очищення.

5. Сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води в освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової

задачі для системи диференціальних рівнянь типу “конвекція-дифузія-масообмін”. Отримано розрахункові залежності концентрацій домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії з метою інженерного прогнозування залежності між затратами на виробництво фільтра-освітлювача та ступенем ефективності його роботи.

6. Встановлено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та функцією швидкості хімічної реакції. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин, що візьмуть участь у реакціях, з метою ефективного очищення стічних вод.

7. Побудовано математичну модель біологічної очистки, що описує закономірності процесів зміни концентрацій пластівців, дисперсних бактерій, продуктів автолізу і субстрату в регенераторі аеротенка, тобто в першій фазі процесу очищення. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації забруднення та бактерій протягом часу очистки рідини.

8. Побудовано математичну модель, для випадку змінної вхідної швидкості, що описує закономірності магнітного осадження та накопичення домішок у пористій фільтруючій загрузці та враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної збуреної задачі з визначення розподілу концентрацій домішок та осаду, а також часу τ , захисної дії фільтруючої загрузки, змінної величини $gradP(x,t)$, зокрема, граничної величини перепаду тиску ΔP . Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої загрузки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини загрузки L , що відповідає часу захисної дії

(фільтроциклу) загрузки. В рамках цієї моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій загрузці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Авер'янов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / Авер'янов С. Ф. – М. : Колос, 1982. – 237 с.
2. Адинберг Р. З. К измерению локальных: скоростей потока в стационарном зернистом слое / Адинберг Р. З., Дильман В. В. // Теорет. основы хим. технологии. – 1990. – Т. 29, № 2. – С. 213–216.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Айнс Э. Л. – Харьков : Гос. научно-тех. изд-во Украины, 1939. – 718 с.
4. Алексеенко В. А. Экспериментальное исследование фильтрационного осветления модельных суспензий с помощью радиометрического метода / Алексеенко В. А., Скворцов Н. Г., Веницианов Е. В. // Журн. прикл. химии. – 1975. – Т. 48, № 5. – С. 1001–1006.
5. Антонцев С. Н. Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах / Антонцев С. Н., Монахов В. Н. // Докл. АН СССР. – 1978. – 243, №3. – С. 553–556.
6. Аэров М. Э. Аппараты со стационарным зернистым слоем / М. Э. Аэров, О. М. Тодес, Д. А. Наринский. – Л. : Химия, 1979. – 176 с.
7. Басс Г. М. Оптимальная продолжительность фильтроцикла скорых фильтров, работающих с падающей скоростью / Басс Г. М., Грабовский П. А., Ларкина Г. М. // Наука и техника в гор. хоз-ве. – 1978. – Вып. 38. – С. 37–39.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. – М. : Наука, 1987. – 451 с.
9. Берестюк Г. И. Регенерация фильтров для разделения суспензий / Берестюк Г. И. – М. : Химия, 1978. – 96 с.
10. Бомба А. Я. Закономірності фільтрування із змінною концентрацією домішок. Узагальнена модель Мінца / А. Я. Бомба, В. М. Сівак, А. П. Сафоник та ін. // Матеріали другої

Міжнародної науково-практичної конференції “Водні ресурси. Проблеми раціонального використання, охорони та відтворення”. – Київ : НПП “Екологія Наука Техніка”, 2007. – С. 76–78.

11. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения одного класса сингулярно возмущенных пространственных задач конвективной диффузии при фильтрации со свободной поверхностью / Бомба А. Я. // В кн. : Теория гидродинамических моделей, Свердловск, 1988. – С. 76–79.

12. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса / Бомба А. Я. // В кн. : Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения, М. : Наука, 1988. – С. 115–120.

13. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса / Бомба А. Я. – Киевский ун-т. – Киев, 1986. – 20 с. (Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86).

14. Бомба А. Я. Асимптотичне наближення розв’язку оберненої сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія» / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик // Міждержавна науково-методична конференція “Проблеми математичного моделювання”. – Дніпродзержинськ, 2009. – С. 36–37.

15. Бомба А. Я. Асимптотичне розвинення розв’язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням / Бомба А. Я., Присяжнюк І. М. // Доповіді НАН України. – 2005. – №3 – С. 60–66.

16. Бомба А. Я. Закономірності фільтрування з урахуванням дифузії / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, А. П. Сафоник // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І. Пулюя. – 2007. – Т.12, №2. – С. 146–152.

17. Бомба А. Я. Закономірності фільтрування у n-шарових фільтрах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, А. П. Сафоник // Вісник Тернопільського державного технічного університету

імені І. Пулюя. – 2009. – №1. – С. 162–167.

18. Бомба А. Я. Закономірності фільтрування у двошарових фільтрах / А. Я. Бомба, І. М.Присяжнюк, А. П. Сафоник // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 41–51.

19. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін / А. Я. Бомба, А.П. Сафоник // Тези доповідей V міжнародної наукової конференції. – Кам'янець-Подільський, 2012. – С. 18.

20. Бомба А. Я. Комп'ютерне моделювання процесу освітлення води на прояснювачах із шаром завислого осаду / А. Я. Бомба, В. М. Сівак, А. П. Сафоник // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : Зб. наук. пр. – Вип. 4 (40).ч. 2. – Рівне : НУВГП. – 2007. – С. 365–372.

21. Бомба А. Я. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Электронное моделирование : междунар. науч.-теорет. Журн. – 2012. – Том 34, N 3. – С. 47-58.

22. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу фільтрування та регенерації фільтру / А. Я. Бомба, В. М. Сівак, А. П. Сафоник // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : Зб. наук. пр. – Вип. 2 (42). – Рівне : НУВГП. – 2008. – С. 263–268.

23. Бомба А. Я. Моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням зворотного впливу / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, А. П. Сафоник // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 6. – С. 101–108.

24. Бомба А. Я. Нелінійне математичне моделювання процесів фільтрування з урахуванням зворотного впливу / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник, В. М. Сівак // Вісник Національного

- університету водного господарства та природокористування : 36. наук. пр. – Вип. 3 (47). ч.2. – Рівне : НУВГП. – 2009. – С. 150–157.
25. Бомба А. Я. Нелінійне математичне моделювання процесу магнітного осадження домішок / А. Я. Бомба, В. І. Гаращенко, А. П. Сафоник та ін. // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І. Пулюя. – 2009. – №3. – С. 118–123.
26. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопечкий В. В. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
27. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу “конвекція – дифузія” / Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. // Рівне : НУВГП, 2008. – 252 с.
28. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде / Бомба А. Я. // Укр. матем. журн. – 1982. – Т.4, №4. – С. 493–496.
29. Бомба А. Я. Про асимптотичне наближення розв’язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях із вільними межами та проблеми моделювання розмивів / Бомба А. Я., Барановський С. В. // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 15–20.
30. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія / Бомба А. Я., Климяк Ю. Є. – Рівне: “Асоль”, 2014. – 273 с.
31. Бомба А. Я. Розв’язання обернених сингулярно збурених задач – математичних моделей процесів фільтрування / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик // Науковий журнал “Математичне моделювання”. – Дніпродзержинськ, ДДТУ – 2009. – Вип. 1(20). – С. 62–65.
32. Бомба А. Я. Розв’язування сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням / А. Я. Бомба,

В. А. Гурін, А. П. Сафоник та ін. // VI Міжнародної конференції “Пористі матеріали. Теорія і експеримент”. – Львів : Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2007. – С. 11–12.

33. Бомба А. Я. Чисельно-асимптотичне наближення розв’язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації / Бомба А. Я. // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С.12–21.

34. Бомба А. Я. Задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Вісник Харківського національного університету серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. – 2015. – №1156. – Вип. 26. – С. 36–45.

35. Бомба А. Я. Идентификация коэффициента учета массообмена при моделировании процесса магнитного фильтрования / Бомба А. Я., Сафоник А. П., Фурсачик Е. А. // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 2. – С. 49–54.

36. Бомба А. Я. Ідентифікація коефіцієнта процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення n-шаровим просторовим фільтром / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // VIII Міжнародна конференція імені академіка І.І.Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”. –Київ, 2015. – С. 27–28.

37. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі очищення води від багатокомпонентного забруднення / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // XVII Міжнародний симпозіум МДОЗМФ-2015.– Харків, 2015. – С. 37–39.

38. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін / А. Я. Бомба, А. П.

Сафоник // Серія: фізико-математичні науки. - Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет. – 2012. – Вип. 7. – С. 37–44.

39. Бомба А. Я. Математическое моделирование процессов фильтрования жидкостей от многокомпонентного загрязнения в n-шаровых фильтрах / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Компьютерная математика. – 2014. – № 1. – С. 9-18.

40. Бомба А. Я. Математичне моделювання аеробного процесу очищення стічної води в пористому середовищі / Бомба А. Я., Сафоник А. М., Гіроль А. М., Lagod G. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса. – 2011. – Випуск № 42. – С. 9–16.

41. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод у пористому середовищі / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // IV Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ, 2011. – С. 47.

42. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного осадження домішок у багатошаровому фільтрі з визначенням масообмінного коефіцієнта / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // III Міжнародна науково-практична конференція “Стратегічні рішення інформаційного розвитку економіки, суспільства та бізнесу”. – Рівне, 2014. – С. 51.

43. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Проблемы машиностроения. – 2012. – Т. 15. – №5-6. – С. 49–55.

44. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентних феромагнітних домішок / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Вісник Харківського національного університету серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. – 2012. – №1037. – Вип. 20. – С. 18–27.

45. Бомба А. Я. Математичний аналіз параметрів і моделі

- процесу магнітного осадження домішок / Бомба А. Я., Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вісник Інженерної академії України. – 2012. – №3. – С. 198–203.
46. Бомба А. Я. Моделирование процессов фильтрования жидкостей от многокомпонентного загрязнения в n-шаровых магнитных фильтрах в условиях идентификации массообменных коэффициентов / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія “Прикладна математика”. – 2014. – № 3(117). – С. 32–39.
47. Бомба А. Я. Моделювання нелінійних процесів фільтрування рідин від багатокomпонентних забруднень з урахуванням зворотних впливів та дифузійно-масообмінних збурень / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне, 2013. – С. 35.
48. Бомба А. Я. Моделювання процесу магнітного очищення рідких середовищ від феродомішок у випадку змінної швидкості / Бомба А. Я., Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вода і водоочисні технології. Науково технічні вісті. – 2011. – №3. – С. 49–57.
49. Бомба А. Я. Моделювання процесу очищення води фільтром-освітлювачем із шаром завислого осаду / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т. 17. – №4. – С. 36–43.
50. Бомба А. Я. Моделювання процесу сорбційного очищення рідин від багатокomпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // V Міжнародна конференція до 90-річчя від дня народження І.І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ, 2012. – С. 37.
51. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / Бомба А. Я., Гаврилюк В. І., Сафоник А. П., Фурсачик О. А. – Монографія. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
52. Бомба А. Я. Про моделювання процесів фільтрування

рідин від багатокомпонентного забруднення за умов ідентифікації масообмінного коефіцієнта / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // VI Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ, 2013. – С. 64–65.

53. Бомба А. Я. Про моделювання процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень у сорбційних фільтрах / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 32–41.

54. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення стічної води / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2011. – Вип. 6 (71). – С. 31–36.

55. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Всеукраїнська наукова конференція “Математичне моделювання та математична фізика”. – Кременчук, 2011. – С. 23–24.

56. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Доповіді НАН України. – 2014. – № 11. – С. 26–32.

57. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі // А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет. – 2011. – Вип. 5. – С. 36–44.

58. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод шляхом фільтрування // PDMU-2011 International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties. Lviv, 2011. – P. 38–39.

59. Бомба А. Я. Анализ особенностей фильтрования суспензий змінних детермінованих концентрацій на підставі узагальненої моделі Д.М. Мінца / А. Я. Бомба, В. А. Гурин, А. П. Сафоник та ін. // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : Зб. наук. пр. – Вип. 2 (38). – Рівне : НУВГП. – 2007. – С. 228–235.
60. Бондарев Э. Н. Перемешивание жидкости в осесимметрическом фильтрационном потоке / Бондарев Э. Н., Николаевский В. Н. // Изв. АН СССР, ОТН. механ. и машиностр. – 1961. – №6. – С. 170–171.
61. Бочеввер Ф. М. Гидрогеологическое обоснование защиты подземных вод и водозаборов от загрязнений. / Бочеввер Ф. М., Орадovская А. Е. – М. : Недра, 1972. – 129 с.
62. Буевич Ю. А. К теории разрушения зернистого слоя потоком сплошной среды / Буевич Ю. А., Элленгорн С. М. // Инж.-физ. журн. – 1979. – Т. 37, № 3. – С. 433–442.
63. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. – Київ : Наук. Думка. – 2005. – 282 с.
64. Бурак Я. Й. Деформация электронных тел с учетом гетеродиффузии заряженных перемесных частиц / Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Чапля Е. Я. // Физ.-хим. мех. материалов. – 1980. – №5. – С. 8–14.
65. Бурак Я. Й. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів / Бурак Я. Й., Чапля Е. Я., Чернуха О. Ю. – К. : Наукова думка, 2006. – 272 с.
66. Бурак Я. Й. Рівняння електродинаміки повільно рухомих пористих насичених тіл / Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф. // Волинський математичний вісник. – Рівне. – 2001. – Випуск 8. – С. 27–32.
67. Бутузов В. Ф. Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии / Бутузов В. Ф. // Докл. АН СССР. – 1978. – 242, №2. – С. 268–

271.

68. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k(x, y)u = f$ в прямоугольной области. / Бутузов В. Ф. // М. : ДУ. – 1973. – Т.9, №9. – С. 1654–1660.

69. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Бутузов В. Ф. Васильева А. Б., Федорюк М. В. // Сб. : «Итоги науки». – М.: Матем. анализ. – 1967. – С.5–73.

70. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Бутузов В. Ф. // Дифференц. уравнения. – 1975. – 13, №8. – С. 1131–1138.

71. Бутузов В. Ф. Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “реакция-диффузия-перенос” / Бутузов В. Ф. // В кн. : Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. – Рига : Intelstrv, 1990. – С. 18–26.

72. Бутузов В. Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области / Бутузов В. Ф. // Дифференц. уравнения. – 1975. – 11, №6. – С. 1030–1041.

73. Бутузов В. Ф. Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных / Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1982. – 22, №4. – С. 865–870.

74. Бутузов В. Ф. Об одной сингулярно возмущенной задаче параболического типа / Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. // В кн. : IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев : Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С. 73–74.

75. Бутузов В. Ф. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа / Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. // Вестник МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1978. – № 2. – С. 49–56.

76. Бутузов В. Ф. Процедура згладжування в одній

сингулярно збуреній квазілінійній параболічній задачі / Бутузов В. Ф., Мамонов В. М. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – т.27, №3. – С. 391–399.

77. Бутузов В. Ф. Угловой погранслои в сингулярно возмущенных задачах с частными производными / Бутузов В. Ф. // Дифференц. уравнения. – 1975. – 15, №10. – С. 1848–1862.

78. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Мир, 1968. – 464 с.

79. Валиулин С.С. Моделирование гидродинамических процессов в циклонной части фильтра-сепаратора. Вестник АГТУ 2011. № 3. –С. 72-77.

80. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.

81. Вейцер Ю. И. Влияние знака электрического заряда загрузки и взвешенных веществ на процесс фильтрования / Вейцер Ю. И., Колобова З. А., Сафонов Г. // М. – В кн. : Водоснабжение, М., 1974. – С. 33–42.

82. Венецианов Е. В. Математическое описание фильтрационного осветления суспензий / Венецианов Е. В., Сенявин М. М. // Теорет. основы хим. технологии – 1976 – № 4. – С. 584–591.

83. Венецианов И. В. О возможности распространения теории динамики сорбции на расчет осветления воды зернистыми фильтрами / Венецианов И. В., Рубинштейн Р. Н., Сенявин М. М. // Докл. АН СССР. – Т. 195, № 3. – С. 658–661.

84. Венецианов Е. В. Динамика сорбции из жидких сред / Венецианов Е. В., Рубинштейн Р. Н. – М. : Наука, 1983. – 237 с.

85. Венецианов Е. В. Метод лимитирующей стадии в динамике сорбционных процессов. Сообщ. I. Области влияния внутренней и продольной диффузий в случае динамики,

- лимитируемой внешнедиффузионной кинетикой / Веницианов Е. В. // Изв. АН СССР. Сер. хим., 1980. – № 8. – С. 1709–1713.
86. Веницианов Е. В. Методы количественного описания и расчета фильтрационного осветления суспензий / Е. В. Веницианов, М. М. Сенявин // Теорет. основы хим. Технологии, 1980, – Т. 14, № 3. – С. 405–417.
87. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, и др. // Москва : Недра. – 1977. – 271 с.
88. Веригин Н. Н. Очистка нефтяных вод методом фильтрации / Варигин Н. Н., Родзиллер И. Д. // Неф. хоз–во. – 1956. – № 10. – С. 52–56.
89. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / Власюк А. П., Мартинюк П. М. – Рівне : Вид-во УДВГП, 2004. – 211 с.
90. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / Власюк А. П., Мартинюк П. М. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. – 417 с.
91. Волок В. О. Влияние физико–химического состава воды на эффективность очистки ее от взвешенных веществ фильтрованием через намывной слой перлита / Волок В. О., Медведев М. И. // Наука и техника в город, хоз–ве. – 1975. – Вып. 30. – С. 68–73.
92. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / Ляшко И. И., Сергиенко И. В., Мистецкий Г. Е., Скопецкий В. В. – Киев : Наукова думка, 1977. – 288 с.
93. Воскресенский Н. М. Влияние входного участка в измерениях коэффициента продольной диффузии в плотном зернистом слое / Воскресенский Н. М., Сафонов М. С., Ширяев З. К. // Теорет. основы хим. технологии. – 1975. – Т. 9, № 5. – С. 684–689.
94. Галкина А. Д. Прилипание кварцевых нитей в водных средах / Галкина А. Д., Дерягин Б. В. // Коллоидн. журн. –

1950. – Т. 12, № 6. – С. 431–447.

95. Гаращенко В. І. Теоретичні основи процесу осадження магнітних домішок в намагнічених феромагнітних загрузках / Гаращенко В. І., Гаращенко О. В., Лебедь О. О., Сафоник А. П., Кочергіна О. Д. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. - Вип. 1 (65). – Рівне: НУВГП. – 2014. – С. 390-397.

96. Горелкин В. Н. Вычисление силы взаимодействия макроскопических тел, разделенных тонкой пленкой электролита / Горелкин В. Н., Смилга В. П. // Коллоид. журн. – 1972. – Т. 34, № 5. – С. 685–695.

97. Грабовский П. А. Математическая модель регенерации скорых фильтров / Грабовский П. А. // Химия и технология воды. – 1989. – Т. 11, № 4. – С. 296–300.

98. Грабовский П. А. Механизм промывки скорых фильтров и способы ее интенсификации / Грабовский П. А. // Химия и технология воды. – 1984. – Т. 6, № 3. – С. 232–236.

99. Грабовский П. А. Новый способ промывки скорых фильтров в переменных режимах / Грабовский П. А., Ларина Г. М., Тюрев В. Ф. // Водоснабжение и сан. техника. – 1984. – № 7. – С. 19–21.

100. Грабовский П. А. Приближенная математическая модель водовоздушной промывки скорых фильтров / Грабовский П. А. // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1976. – № 1. – С. 123–128.

101. Грабовський П. О. Чисельна реалізація математичної моделі фільтрування / Грабовський П. О., Гурінчик Н. О. // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2006. – Вип.6. – С. 4–13.

102. Гурин В. А. Про один підхід до прийняття рішення та керування системою типу “забруднення-очищення” / А. Я. Бомба, В. А. Гурин, А. П. Сафоник та ін. // PDMU-2008 International Conference “Problems of decision making under uncertainties”. – Rivne, 2008. – P. 93–94.

103. Гурин В. А. Про один підхід керування системою типу «забруднення-очищення» / В. А. Гурин, А. Я. Бомба, А. П. Сафоник та ін. // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : Зб. наук. пр. – Вип. 3 (43). – Рівне: НУВГП. – 2008. – С. 192–202.
104. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. – К. : Наукова думка, 1995. – 262 с.
105. Дейнека В. С. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 2. – С. 12–25.
106. Дейнека В. С. Моделювання та коефіцієнтна ідентифікація адсорбційного масопереносу в неоднорідному каталітичному середовищі з використанням схеми Кранка-Ніколсона / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТНТУ. – 2011. – Том 16. – № 1. – С. 186–194.
107. Дейнека В. С. Ідентифікація кінетичних параметрів однокомпонентного адсорбційного масопереносу / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТНТУ. – 2010. - №3 – С. 141–149.
108. Демчик І. І. Деякі питання теорії фільтрування / Демчик І. І. // Вісник Рівненського державного технічного університету : Зб. наук. Праць. – Рівне, 2002 – Вип. 1 (14). – С. 80–89.
109. Демчик І. І. Лінійна модель фільтрування (модель Мінца) та її узагальнення / Демчик І. І. // Вісник УДУВГП (збірник наукових праць). – 2004. – Вип. 1(25). – С. 107–118.
110. Демчик І. І. Функція Рімана та її застосування для розв'язання рівнянь гіперболічного типу / І. І. Демчик // Науковий журнал “Математичне моделювання”. – Дніпродзержинськ, ДДТУ – 2004. – Вип. 1(11). – С. 15–20.
111. Демчик І. І. Хвильовий режим масопереносу в n -шарових фільтрах / Демчик І. І. // Вісник РДТУ (збірник наукових

праць). – 2002. – Вип. 3(16). – С. 164–175.

112. Дерягин Б. В. Молекулярное притяжение конденсированных тел / Дерягин Б. В., Абрикосова И. И., Лифшиц Е. М. // Успехи физ. наук. – 1958. – Т. 64, вып. 3. – С. 493–528.

113. Дзялошинский И. Е. Общая теория Ван-дер-Ваальсовых сил / Дзялошинский И. Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. // Успехи физ. наук. – 1961. – Т. 73, вып. 3. – С. 381–422.

114. Дубинин М. М. Физико-химические основы сорбционной техники / Дубинин М. М. – М.Ж ОНТИ, 1935. – 536 с.

115. Дяконюк Л. Математичне моделювання процесів теплопровідності у багатопарових середовищах із тонкими включеннями / Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів. – 2000. – №1. – С. 212–216.

116. Ефремов И. Ф. Периодические коллоидные структуры / Ефремов И. Ф. – Л. : Химия, 1971. – 191 с.

117. Жуховицкий А. А. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала / А. А. Жуховицкий, Я. Л. Забежинский, А. Н. Тихонов // Журн. физ. химии. – 1945. – Т. 19, вып. 6. – С. 253–261.

118. Запольський А. К. Водопостачання, водовідведення та якість води: Підручник / Запольський А. К. – К. : Вища школа, 2005. – 671 с.

119. Згуровський М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ и др. – К : Наукова думка. – 1997. – 367 с.

120. Золотарев П. П. О задаче равновесной динамики адсорбции для прямоугольной изотермы / Золотарев П. П. // Изв. АН СССР. Сер. хим. – 1969. – № 3. – С. 700–702.

121. Избаш С. В. Фильтрационные деформации грунта / С. В. Избаш // Изд-во НИИГ, 1933. – Т. 10. – С. 189–218.

122. Исакова Е. К. Асимптотика решения дифференциального

- уравнения в частных производных второго порядка параболического вида с малым параметром при производной / Исакова Е. К. // ДАН СССР. – Т.117, №6. – 1957. – С. 935–938.
- 123.Исакова Е. К. Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром / Исакова Е. К. // Матем. сборник. – 1966. – Т.69(111). – С. 300–320.
- 124.Калугин Ю. И. Моделирование удаления железа из воды фильтрованием с учетом изменения фильтрационных свойств среды / Калугин Ю. И., Киселев С. К., Олейник А. Я. // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 183–187.
- 125.Калиничев А. И. Новая кинетическая модель многокомпонентного массопереноса и концентрационные волны в бифункциональной матрице нанокомпозитов / Сорбционные и хроматографические процессы. 2013. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 413-428.
- 126.Карташев А. Л. Математическое моделирование течений многокомпонентных сред в кольцевых соплах / А. Л. Карташев, М. А. Карташева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». 2013. – Том 13 – № 2. – С. 37–46.
- 127.Карташева М. А. Моделирование динамики совершенного газа в кольцевых соплах летательных аппаратов // Вестник ЮУрГУ. 2012. – №33. –С. 57–63.
- 128.Ковалев Ю. М. Анализ возможности применения некоторых численных методов для решения задач механики многокомпонентных сред / Ю. М. Ковалев, Е. А. Ковалева // Вестник ЮУрГУ. Серия “Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника”. – 2014. – Том 14. – № 1. – С. 57–62.
- 129.Ковалев Ю. М. Математический анализ уравнений сохранения двухфазных смесей. Ю. М. Ковалев, Е. А. Ковалева // Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. – 2014. – Том 7. – № 2. – С. 29-37.

130. Кафаров В. В. Характер и интенсивность обменных процессов между потоком и застойными зонами / Кафаров В. В., Арва П., Дорохов И. Н. // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 199, № 2. – С. 402–405.
131. Каменомостская С. Л. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных / Каменомостская С. Л. // Матем. сб. – 1952. – Т. 31(73). – С. 703–708.
132. Касамаян М. А. Перенос вещества в свободном объеме неподвижного зернистого слоя / Касамаян М. А., Кириллов В. А., Матрос Ю. Ш. // Инж. – физ. журн. – 1973. – Т. 25, № 1. – С. 36–41.
133. Касаткин А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии / Касаткин А. Г. – М. : Химия, 1973. – 752 с.
134. Кельцев Н. В. Основы сорбционной техники / Н. В. Кельцев. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Химия, 1984. – 592 с.
135. Киселев С. К. Гидродинамическая модель фильтрования при очистке подземных вод от соединений железа / Киселев С. К., Олейник А. Я. // Прикладная гидромеханика. – 1999. – 1(73). – С. 20–25.
136. Китаев Б. И. Теплообмен в доменной печи / Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Лазарев Б. Л. – М.: Металлургия, 1966. – 355 с.
137. Кленов В. В. Некоторые вопросы расчета фильтров / В. В. Кленов // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук., 1960. – С. 55–62.
138. Клячко В. А. О модификации поверхности зернистых фильтров серноокислым алюминием / Клячко В. А., Рукавишников Г. А. // Водоснабжение и сан. техника. – 1968. – № 4. – С. 205–208.
139. Колин В. Л. Внутрикристаллическая диффузия / В. Л. Колин и др. // Кинетика и динамика физической адсорбции. – М. : Наука, 1973. – С. 98–100.
140. Колтунова Л. Н. Экспериментальное исследование

структуры потока жидкости в зернистом слое / Колтунова Л. Н., Аэров М. Э. // Теорет. основы хим. технологии. – 1981. – Т. 15, № 6. – С. 803–808.

141. Котелкин В. Д. Влияние деформации засыпки на течение газа в химическом реакторе с неподвижным слоем катализатора / Котелкин В. Д., Мясников В. П. // Докл. АН СССР, 1979. – Т. 247, № 1. – С. 170–174.

142. Кочмарский В. З. Модель фильтра с переменной геометрией загрузки и одновременным заполнением слоев / В. З. Кочмарский, И. И. Демчик // Журн. Химия и технология воды, 1986. – Т. 8, № 2. – С. 11–15.

143. Кочмарский В. З. Статистическая интерпретация математической модели фильтрования Минца / Кочмарский В. З., Демчик И. И. // Теорет. основы хим. технологии. – 1989. – Т. 23, № 3. – С. 405–407.

144. Кремез В. С. Розрахунок витрат напору на фільтрі при очищенні води з низькою концентрацією завислих забруднень / Кремез В. С. // Меліорація і водне господарство. – 2000. – Вип. 87. – С. 70–74.

145. Кульский Л. А. Влияние ζ -потенциала зернистой фильтрующей загрузки на ее задерживающую способность при очистке воды / Кульский Л. А., Ярошевская Н. В. // Химия и технология воды, 1984. – Т. 6, № 2. – С. 136–139.

146. Кульский Л. А. Влияние начального распределения частиц малоконцентрированной суспензии на характеристики фильтрования / Кульский Л. А., Кочмарский В. З., Демчик И. И. // Химия и технология воды. – 1984. – Т. 6, № 1. – С. 24–28.

147. Куропатенко В. Ф. Методика расчета нестационарных течений в многокомпонентных неравновесных смесях веществ / В. Ф. Куропатенко, В. К. Мустафин // Вестник Челябинского государственного университета. – 1997. – № 1. – Том 6. – 97–102.

148. Кухарський В. М. Чисельне дослідження задач адвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими

криволінійними шарами / Кухарський В. М., Савула Я. Г., Копитко М. Ф. // Волинський математичий вісник. – Рівне. – 2001. – Випуск 8. – С.86–92.

149.Лаврик В. И. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод / Лаврик В. И., Милютин А. Ф. // Киев : 1978. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 78-24).

150.Лаврик В. И. Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена / Лаврик В. И., Никифорович Н. А. – К. : 1982. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 82.20).

151.Лаврик В. И. Исследования поля скорости фильтрации при движении подземных вод из открытых водоемов к дренажному каналу / Лаврик В. И., Бомба А. Я. // В кн. : Исследование по краевым задачам гидродинамики и теплофизики. – К. : Изд. ин-та математики АН УССР, 1979. – С. 20–41.

152.Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / Лаврик В. И., Фильчакова В. П., Яшин А. А. – Киев : Наукова думка, 1990 – 374 с.

153.Лаврик В. И. Математическое моделирование в гидроэкологических системах / Лаврик В. И., Никифорович Н. А. – Киев : Фитосоцицентр, 1998. – 288 с.

154.Лаврик В. И. О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью / Лаврик В. И. // Укр. мат. журн. – 1976. – Т.28, №5. – С. 677–681.

155.Лаврик В. И. О некоторых математических моделях подземной гидродинамики / Лаврик В. И., Олейник А. Я. // Физико-технические приложения краевых задач. – К. : Наукова думка, 1978. – С. 76–96.

156.Лаврик В. И. О приближенном решении одной краевой

задачи диффузии при плановой напорной фильтрации / Лаврик В. И., Бомба А. Я. // Математические методы исследования физических полей. – К. : Изд. ин-та математики АН УССР, 1980. – С. 26–36.

157. Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде / Лаврик В. И., Бомба А. Я., Власюк А. П. – Киев : 1985. – 16 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 85-72).

158. Лаврик В. И. Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / Лаврик В. И., Бомба А. Я. // ДАН УССР. – 1980. – №5. – С. 47–51.

159. Лаврик В. И. Постановка и решение задач о диффузии растворимых веществ при фильтрации грунтовых вод / Лаврик В. И., Рудченко П. А. // Краевые задачи подземной гидродинамики. – К. : Изд. ин-та математики АН УССР, 1975. – С. 42–57.

160. Лаврик В. И. Постановка и решение некоторых краевых задач конвективной диффузии / Лаврик В. И., Рудченко П. А. // Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. – Киев : Наукова думка, 1975. – С. 115–121.

161. Лаврик В. И. Применение метода прямых к решению задач массопереноса при профильной и плановой фильтрации подземных вод / Лаврик В. И., Рогаль И. В. – К. : 1983. – 46 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 83.32).

162. Лаврик В. И. Применение метода суммарных представлений к задачам конвективной диффузии / Лаврик В. И., Бездетный Б. П. // ДАН УССР. Сер. А. – 1976. – №5. – С. 420–423.

163. Лаврик В. И. Решение задач массопереноса водорастворимых веществ в случае зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости

- фльтрации подземных вод / Лаврик В. И. // Киев : 1981. – С. 3–24. – (Препринт. / АН УССР. Ин-т математики ; 81–18)
164. Лейчикс И. М. Фильтрование низко-концентрированных суспензий как стохастический процесс / Лейчикс И. М., Бойко Р. В. // Теоретич. основы хим. технологии. –1980. –Т. 14, №5. – С. 780-783
165. Лейчикс И. М. Фильтрование низко-концентрированных суспензий как стохастический процесс / Лейчикс И. М., Бойко Р. В. // Теоретич. основы хим. технологии. –1980. –Т. 14, №5. – С. 780-783
166. Лейчикс И. М. Фильтрование с применением вспомогательных веществ / Лейчикс И. М. – Киев : Техника, 1975. – 191 с.
167. Лифшиц Е. М. Теория молекулярных сил притяжения между конденсированными телами / Лифшиц Е. М. // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 97, № 4. – С. 643–646.
168. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / Ломов С. А. – М. : Наука, 1981. – 398 с.
169. Люстерник Л. А. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр / Люстерник Л. А., Олейник О. А. // Труды 3 матем. съезда. – Т.2. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – С. 158–169.
170. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / Ляшко И. И. Великоиваненко И. М. – К. : Наукова думка, 1973. – 264 с.
171. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий –/ К : Наукова думка. – 1991. – 262 с.
172. Ляшко І. І. Вологоперенос у насичено-ненасичених пористих середовищах / Ляшко І. І., Демченко Л. І., Мистецький Г. Ю. // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1979. –№8. – С. 600–603.
173. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного

- массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. С. Тригуб // К : Наукова думка, 1998. – 240 с.
- 174.Максименко Ю.А. Эффективность массопередачи при ректификации многокомпонентных смесей // Вестник АГТУ. – 2004. – №1. – С.225-230.
- 175.Марон Б. И. Математическое описание безреагентного осветления воды фильтрованием / Марон Б. И., Пинская Г. И. // Химия и технол. воды. – 1983. – Т. 5, № 4. – С. 301–304.
- 176.Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук // М : Наука, 1982. – 320 с.
- 177.Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Марчук Г. И. – М. : Наука, 1989. – 608 с.
- 178.Хабиров Р. С. Математическая модель процесса доочистки сточных вод на каркаснозасыпных фильтрах / Хабиров Р. С., Коммунар Г. М., Коган Ю. А., и др. // Химия и технол. воды. – 1983. – Т. 5, № 5. – С. 395–398.
- 179.Мацкрле В. Исследование явления прилипания в пористой среде / В. Мацкрле – Прага : Изд-во АН ЧССР, 1961. – 132 с.
- 180.Мацкрле С. Л. Исследование процессов адгезии взвешенных веществ в зернистом фильтре, применительно к процессам очистки воды: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. / С. Л. Мацкрле. // М., 1956. – 22 с.
- 181.Медведев М. И. Роль электрокинетического потенциала при очистке воды фильтрованием через намывной слой перлита / Медведев М. И., Волок В. О. // Стр-во и архитектура. – 1977. – № 2. – С. 112–115.
- 182.Ляшко И. И.Метод мажорантных областей в теории фильтрации / Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. – К. : Наук. думка, 1974. – 200 с.
- 183.Минц Д. М. Моделирование процесса фильтрования суспензий через зернистые слои / Минц Д. М., Криштул В. П. // В кн. : Водоснабжение // Тр. АКХ им. К.Д. Памфилова, вып. I. – М., 1960. – С. 21–41.

184. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Минц Д. М. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
185. Митин Б. А. Исследование влияния структурно–механических: свойств осадка на работу зернистых осветлительных фильтров: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / Митин Б. А. – М. : ВНИИ ВОДГЕО, 1969. – 18 с.
186. Мокін В. Б. Аналітичне моделювання динаміки річкових процесів з одночасним врахуванням ламінарної та турбулентної зон / Мокін В. Б. // Вісник ВПІ. – 2001. – № 2. – С 108–113.
187. Мокін В. Б. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод / Мокін В. Б., Мокін Б. І. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 152 с.
188. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / Молчанов И. Н. – Киев : Наук. думка, 1988. – 343 с.
189. Натансон Г. Л. Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата / Натансон Г. Л. // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 112, № 1. – С. 100–103.
190. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах / Николаевский В. Н. // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1042–1050.
191. Никсон Я. М. О роли диффузионно–кинетических факторов в динамической сорбции : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. физ. – мат. наук / Никсон Я. М. // М. : Ин–т физ. химии АН СССР, 1950. – 6 с.
192. Неумоина Н. Г. Обоснование кинетического метода расчета многокомпонентной изотермической абсорбции / Неумоина Н. Г., Белов А. В // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10. С. – 1010–1013.
193. Оводова Н. В. Технология модификации молекулярных групп на поверхности зерен фильтрующей загрузки / Оводова Н. В. // В кн. : Очистка природных и сточных вод // Тр.

- Новочеркасского политехн. ин-та им. Серго Орджоникидзе, т. 307, Новочеркасск, 1974. – С. 54–65.
194. Олейник А. Я. Вопросы моделирования фильтрации и массопереноса для целей охраны подземных вод от загрязнения / Олейник А. Я. // Гидротехническое строительство. – 1985. – №7. – С. 13–16.
195. Олейник А. Я. Геогидродинамика дренажа / Олейник А. Я. – К. : Наук. думка, 1981 – 284 с.
196. Олейник А. Я. Математическая модель трансформации и миграции азотных соединений в почве при внесении минеральных азотных удобрений / Олейник А. Я., Поляков В. Л. // Доповіді НАН України. – 1992. – №4. – С. 142–145.
197. Олейник А. Я. Математические модели фильтрации и массопереноса в связи с решением задач гидротехники, мелиорации и охраны окружающей среды / Олейник А. Я. // Прикладная гидромеханика. – 1989. – С. 100–122.
198. Олейник А. Я. Математическое моделирование экологических катастроф, связанных с изменением режима грунтовых вод / Олейник А. Я., Добронра-вов А. А., Кремез В. С. // Вісник Української державної академії водного господарства. Сучасні проблеми теорії фільтрації. – Рівне, 1998. – С. 113–118.
199. Олейник А. Я. Моделирование процессов доочистки хозяйственно-бытовых сточных вод на фильтрах / Олейник А. Я., Василенко Т. В., Рибаченко С. А., Хамад Ихаб Ахмад. // НТЗ Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2–6. – вип.7 – С. 85–97.
200. Олейник А. Я. Некоторые актуальные вопросы миграции питательных веществ и загрязнений в системе растение - почва - грунтовые воды / Олейник А. Я., Поляков В. Л., Кремез В. С. // Гидромеханика. – 1996. – Вып. 70. – С. 88–98.

201. Олейник А. Я. Об одной модели биологической очистки сточных вод / Олейник А. Я., Калугин Ю. И., Шайеб Шуджа Валид // Докл. НАН Украины. – 1995. – №5. – С. 146–148.
202. Олейник А. Я. Особенности моделирования процессов удаления органических загрязнений из сточных вод на установках малой производительности / Олейник А. Я., Тетеря А. И. // Прикладная гидромеханика – 2001, т.3, № 4 – С. 20–27.
203. Олійник О. Я. Деякі результати теоретичних досліджень процесів масообміну в пористих середовищах / Олійник О. Я., Калугін Ю. І. // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2005. – Вип.5. – С. 100–112.
204. Олійник О. Я. Математичне моделювання процесів перенесення субстрату та кисню в біодискових фільтрах / Олійник О. Я., Степова Н. Г. // Доп. НАН України. – 1998. – №10. – С. 206–209.
205. Олійник О. Я. Моделювання і розрахунки параметрів глибокої очистки стічних вод на фільтрах в аеробних умовах / Олійник О. Я., Рибаченко С. О. // Національний університет водного господарства та природокористування. Вісник : Зб. наук. праць. – Вип. 4(40). Ч.2. – Рівне : НУВГП, 2007. – С. 515–520.
206. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / Орлов В. О. – Рівне : НУВГП, – 2005. – 163 с.
207. Орлов В. О. Знезалізнення підземних вод спрощеною аерацією та фільтруванням. Монографія Рівне: НУВГП, 2008. – 158 с.
208. Орлов В. О. Пінополістирольні фільтри в технологічних схемах водопідготовки. / Орлов В. О., Зошук А. М., Мартинов С. Ю. – Рівне: РДТУ, 1999. – 143 с.
209. Орлов В. О. Знезалізнення підземних вод для питних цілей / Орлов В. О., Квартенко О. М., Мартинов С. Ю., Гордієнко Ю. І. – Рівне: УДУВГП, 2003. – 155 с.

210. Орлов В. О. Зернистые фильтры для подготовки воды. / Орлов В. О., Колотило В. Д. – Х.: Фактор, 2004. – 256 с.
211. Орлов В. О., Мартинов С. Ю. Контактное обезжелезивание вод на пенополистирольных фільтрах / Орлов В. О., Мартинов С. Ю. Орлов В. О., Мартинов С. Ю. – Монографія. Міжнародний Видавничий Дім "LAP Lambert Academic Publishing", 2015. – 322 с.
212. Орлов В. О. Очищення природної води на пінополістирольних фільтрах / Орлов В. О., Мартинов С. Ю., Орлова А. М., Зошук В. О., та ін. – Монографія. – Рівне: НУВГП, 2012. – 172 с.
213. Орлов В. О. Интенсификация работы водоочистных сооружений / Орлов В. О., Шевчук Б. И. – К.: Будивэльнык, 1989. – 128 с.
214. Панченко Г. М. Динамика нестационарных физико-химических процессов в потоке при условии бимолекулярного закона скорости процесса / Панченко Г. М. // Докл. АН СССР. – 1961. – Т 140, № 2. – С. 412–415.
215. Пасканов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасканов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов – М : Наука, 1984. – 285 с.
216. Пат. 78422 Україна, МПК В01D 35/06 (2006.1). Магнітний фільтр-осаджувач / Гаращенко В.І., Гаращенко О.В., Скрипник І.Г., Сафоник А.П. // Власник Національний університет водного господарства та природокористування. – UA 78422; зареєстровано 25.03.2013.
217. Патрашев А. Н. Диффузия солей при фильтрации по трещинам / Патрашев А. Н. // Известия ВНИИГ. – 1946. – №31. – С. 55–92.
218. Патрашев А. Н. Напорное движение грунтового потока, насыщенного мелкими песчаными и глинистыми частицами. Ч.І. Заиление грунтовых скелетов / А. Н. Патрашев // Изд–во НИИГ, 1935. – Т. 15. – С. 58–98.
219. Петрик М. Р. Моделирование и анализ концентрационных

полей нелинейной конкуритивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частей / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73–82.

220. Петрик М. Р. Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа “фильтрация-консолидация” / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 74–85.

221. Поляков В. Л. Моделирование осветления суспензий в зернистых загрузках при нелинейной фильтрации / Поляков В. Л. // Коммунальное хозяйство городов : Науч.-техн. сб. – К. : Техніка, 2007. – Вип. 74. – С. 222–230.

222. Поляков В. Л. О фильтровании суспензии при начальном загрязнении загрузки (линейная кинетика массообмена) / Поляков В. Л. // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 65–71.

223. Поляков В. Л. Расчет разделения суспензий фильтрованием через трехслойную загрузку при линейном массообмене / Поляков В. Л. // Проблемы водопостачання, водовідведення та гідраліки. – Київ, 2006. – Вип. 7. – С. 122–131.

224. Поляков В. Л. Расчет ступенного фильтрования суспензий через зернистые загрузки / Поляков В. Л., Шевчук Е. А. // Національний університет водного господарства та природокористування. Вісник : Зб. наук. праць. – Вип. 4(40). Ч. 2. – Рівне : НУВГП, 2007. – С. 544–553.

225. Поляков В. Л. Расчет фильтрования суспензий через многослойную загрузку при линейной кинетике массообмена / Поляков В. Л. // Химия и технология воды. – 2008. – № 1. – С. 3–31.

226. Поршнев С. В. Численные методы на базе Mathcad / Поршнев С. В., Беленкова И. В. – С-Пб : БХВ-Петербург, 2005. – 456 с.

227. Пшежецкий С. И. Протекание каталитических реакций в

потоке. Общие уравнения. Теплоизолированная система / С. И. Пшежецкий, Р. К. Рубинштейн // Журн. физ. химии – 1946. – Т. 20, № 3. – С. 1421–1434.

228. Работа фильтрующих сооружений с переменной скоростью / М. Н. Сысоева, Л. П. Козакова, С. И. Богданова, Л. С. Круглов // Водоснабжение и сантехника. – 1969. – № 2. – С. 23–27.

229. Радеке К. Х. Кинетика адсорбции органических веществ и их смесей из водных растворов / К. Х. Радеке, Г. Бунке, Д. Гелбин // Кинетика и динамика физической адсорбции. – М.: Наука, 1973. – С. 132–139.

230. Радушкевич Л. В. Теория динамики сорбции на реальном зерненом сорбенте / Л. В. Радушкевич // Докл. АН СССР, 1947. – Т. 57, № 5. – С. 471–474.

231. Радушкевич Л. В. Природа вторичных процессов при фильтрации аэрозолей, Сообщ. I. Простейшая теория осаждения частиц в фильтре и кинетика коагуляции / Радушкевич Л. В. // Изв. АН СССР, Сер. хим. – 1963. – № 3. – С. 407–414.

232. Расчет ионообменных колонн. I Динамика сорбции одного вещества во внешнедиффузионной области / Никашина В. А., Волков Б. И., Сенявин М. М., Рубинштейн Р. Н. // Журн. Физ. химии. – 1972. – Т. 46, № 10. – С. 2580–2585.

233. Результаты сравнения различных методик исследования структуры потоков в аппарате с насадкой / Кафаров Б. В., Шестопалов Б. В., Железнова Г. Л., Вайнштейн Ы. Б. // Теорет. основы хим. технологии. – 1969. – Т. 3, № 6. – С. 941–944.

234. Савула Я. Г. Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями / Савула Я. Г., Дяконюк Л. М. // Вісник ЛНУ ім. Івана Франка. Сер. Прикл. матем. та інформат. – 2000. – Вип. 3. – С. 125–131.

235. Савула Я. Г. Некоторые приложения метода конечных элементов / Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. Н. //

Львов : Редакционно-издательская группа Львов. ун-та, 1981. – 38 с.

236. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

237. Сандуляк А. В. Магнитно-фильтрационная очистка жидкостей и газов / А. В. Сандуляк – М. : Химия, 1988. – 132 с.

238. Сандуляк А. В. Особенности магнитного фильтрования воды в циркуляционных системах электростанций / Сандуляк А. В. // Изв. вузов СССР. Сер. Энергетика. – 1983, – № 3. – С. 90–93.

239. Сандуляк А. В. Очистка жидкостей в магнитном поле / Сандуляк А. В. – Львов : Вища школа, изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 166 с.

240. Сафоник А. П. Автоматизація процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ. – С. 145.

241. Сафоник А. П. Асимптотичне розвинення розв’язків сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням / А. П. Сафоник // XV Міжнародна наукова конференція вчених України, Білорусії, Росії “Прикладні задачі математики та механіки”. – Севастопіль, 2007. – С. 477–480.

242. Сафоник А. П. До теорії фільтрування рідин із змінною концентрацією домішок. Узагальнена модель Шехтмана / А. П. Сафоник // Сьома щорічна міжнародна науково-практична конференція і бліц-виставка “Ефективність реалізації наукового, ресурсного й промислового потенціалу в сучасних умовах”. – Рівне, 2007. – С. 174–176.

243. Сафоник А. П. Комп’ютерне моделювання і дослідження процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Матеріали Міжнародної наукової конференції

- “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 146.
- 244.Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання процесу магнітного очищення рідин з ідентифікацією масообмінного коефіцієнта / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // III міжнародна науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки”. – Чернівці: Видавничий дім “Родовід”, 2014. – С. 70–72.
- 245.Сафоник А. П. Методика визначення концентрації забруднення при русі рідини у пористому середовищі/ А. П. Сафоник // Восьма щорічна міжнародна науково-практична конференція і бліц-виставка “Ефективність реалізації наукового, ресурсного й промислового потенціалу в сучасних умовах”. – Рівне, 2008. – С. 386–388.
- 246.Сафоник А. П. Моделювання фільтрування рідин із змінною концентрацією домішок / А. П. Сафоник // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : Зб. наук. пр. – Вип. 2(34). Част. 1 – Рівне : НУВГП, 2006. – С. 157–164.
- 247.Сафоник А. П. Нелінійне математичне моделювання магнітних фільтрів з урахуванням зворотного впливу / А. П. Сафоник // Волинський математичний вісник. Серія : Прикладна математика. – 2009. – Вип. 6(15). – С. 137–143.
- 248.Сафоник А. П. Нелінійні сингулярно збурені математичні моделі процесів фільтрування / А. П. Сафоник // Волинський математичний вісник. Серія : Прикладна математика. – 2007. – Вип. 4(13). – С. 119–128.
- 249.Сафоник А. П. Про ідентифікацію масообмінних коефіцієнтів у задачі фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення / Сафоник А. П. // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 144.
- 250.Сафоник А. П. Розв'язок одного класу обернених

сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія” з невідомими джерелами забруднення / Сафоник А. П., Фурсачик О. А. // Всеукраїнська науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки”. – Чернівці : Видавничий дім “Родовід”, 2013. – С. 59–61.

251. Сафоник А. П. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування з післядією / А. П. Сафоник // Волинський математичний вісник. Серія : Прикладна математика. – 2008. – Вип. 5(14). – С. 230–240.

252. Сафоник А. П. Автоматизація процесу знезалізнення технічної води / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Збірник тез I Всеукраїнської науково-технічної конференції “Комп'ютерні технології: інновації, проблеми, рішення 2015”. – Житомир, 2015. – С. 85–86.

253. Сафоник А. П. Автоматизація процесу очищення стічних вод від нафти з використанням магнітних фільтрів / А. П. Сафоник, І. М. Таргоній // Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем управління організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – К: НУХТ, 2014. – С. 89–90.

254. Сафоник А. П. Ідентифікація малого масообмінного коефіцієнта в задачі магнітного фільтрування / Сафоник А. П., Фурсачик О. А. // XVII Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів, 2011. – С. 92.

255. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання і дослідження процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 4 (68). – Рівне: НУВГП. – 2015. – С. 190–200.

256. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання процесу

- біологічного очищення води у регенераторі аеротенка / Сафоник А. П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 2 (66). – Рівне: НУВГП. – 2014. – С. 114–122.
257. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання та автоматизація процесу магнітного очищення води / А. П. Сафоник, І. М. Таргоній // Бионика интеллекта: науч.-техн. Журнал. – 2014. – №2(83). – С. 117–122.
258. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання та автоматизація процесу фільтрування та регенерації в магнітному фільтрі / А. П. Сафоник // Вісник Інженерної академії України. – 2015. – №1. – С. 202–208.
259. Сафоник А. П. Математичне моделювання аеробного процесу очищення стічної води в пористому середовищі / Сафоник А. П., Гіроль А. М. // Збірка доповідей міжнародного конгресу ЕТЕВК-2011 “Водопостачання, каналізація, екологія, технологія, економіка”. – Ялта, 2011. – С. 210-212.
260. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесів магнітного фільтрування і регенерації та оцінка їх ефективності / Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І. Пулюя. – 2012. – №2(66). – С. 242-248.
261. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу очищення рідини шляхом фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища // XXXI науково-технічна конференція “Моделювання”. – Київ, 2012. – С. 41.
262. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу прояснення стічної води у прояснювачі / А. П. Сафоник, А. М. Гіроль, В. А. Савченко // Науковий вісник будівництва. Вип. 63. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2011. – С. 401-407.
263. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу фільтрування двокомпонентних стічних вод з урахуванням зворотного впливу // Волинський математичний вісник. Серія:

Прикладна математика. – 2010. – Вип. 7(16). – С. 193-198.

264. Сафоник А. П. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму / Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В., Сафоник А. П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 2 (50). – Рівне: НУВГП. – 2010. – С. 229-237.

265. Сафоник А. П. Моделирование процесса очистки сточной воды в осветлителе // Сборник трудов XXV Международной научной конференции “Математические методы в технике и технологиях. ММТТ – 25”. Саратов. – 2012. – Том 2. – С. 127-129.

266. Сафоник А. Моделювання процесу магнітного осадження домішок у рівноциклічній насадці з визначенням масообмінного коефіцієнта / А. Сафоник, В. Гаращенко, І. Астрелін, О. Гаращенко // Вісник Інженерної академії України. – 2013. – №3-4. – С. 116-120.

267. Сафоник А. П. Моделювання та автоматизація процесу магнітного фільтрування води / А.П. Сафоник, І.М. Таргоній // XXI Міжнародна конференція “Контроль і управління в складних системах” (КУСС-2014). – Вінниця, 2014. – С. 42.

268. Сафоник А. П. Про моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення у n-шарових фільтрах // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (Рівне, 22-23 лютого 2013 року). – С. 131.

269. Сенявин М. М. Способ повышения эффективности сорбционного фильтра / Сенявин М. М., Веницианов Е. В. // Теорет. основы хим. технологии. – 1987. – Т. 21, № 2. – С. 277–280.

270. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. – К. : Наукова думка,

1991. – 432 с.

271.Скворцов Н. Г. Расчет фильтрационного осветления малоконцентрированных суспензий на тонкодисперсных нагрузках / Скворцов Н. Г., Веницианов Е. В., Сенявин М. М. // Теорет. основы хим. Технологии. – 1981. – Т. 15, № 1. – С. 141–144.

272.Сахаров О. С. Чисельне дослідження процесу змішування в'язких рідин в коаксіальному зазорі / О. С. Сахаров, В. І. Сівецький, О. Л. Сокольський // Вісник НТУУ “КПІ”. Машинобудування : збірник наукових праць. – 2009. – № 57. – С. 180–185.

273.Славянский А. С. Инженерный метод расчета адсорбционных установок для глубокой очистки сточных вод : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / Славянский А. С. // М. : ВНИИ ВОДГЕО, 1975. – 24 с.

274.Смирнов А. Д. Сорбционная очистка воды / Смирнов А. Д. – Л. : Химия, 1982. – 166 с.

275.Стечкина И. Б. Исследования в области волокнистых аэрозольных фильтров. Расчет осаждения аэрозолей в модельных фильтрах в области максимального проскока частиц / Стечкина И. Б., Кириш А. А., Фукс Н. А. // Коллоидн. журн. – 1969. – Т. 31, № 1. – С. 109–112.

276.Суров В. С. Гиперболическая модель многоскоростной гетерогенной среды // Инж.-физ. журн. 2012. – Т. 85. – №3. – С. 495–502.

277.Сухинов А. И. Математическое моделирование движения многокомпонентной воздушной среды и транспорта загрязняющих веществ / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Д. С. Хачунц // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – №8 (121). – С. 73–79.

278.Терловская Т. Р. Определение параметров дивизионной модели с застой-ными зонами для потоков в насадке / Терловская Т. Р., Кац М. Б., Генин Л. С. // Теорет. основы хим. технологии. – 1979. – Т. 13, № 2. –

С. 268–270.

279. Тихонов А. Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала / Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. А. // Журн. физ. химии. – 1946. – Т. 20, Вып. 10. – С. 1113–1126.

280. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных / Тихонов А. Н. // УМН. – 1952. – Т. 7, Вып. 1(47). – С. 140–142.

281. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 256 с.

282. Торочешников Н. С. Кинетика и динамика адсорбции / Торочешников Н. С., Кельцев Н. В., Шумяцкий Ю. И. // Кинетика и динамика физической адсорбции. – М. : Наука, 1973. – С. 110–116.

283. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вішика / Треногин В. А. // УМН. – 1970. – Т. 25, вып. 4. – С. 123–156.

284. Федоткин К. М. Разделение суспензий и гиперфильтрация / Федоткин К. М., Криль С. И., Борщевская Л. И. // Киев : Техніка, 1972. – 156 с.

285. Фешенко С. Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / Фешенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. // К. : Наукова думка, 1966. – 251 с.

286. Фоминых А. М. Производственные испытания нового фильтрующего материала в двухступенчатой схеме очистки питьевой воды / Фоминых А. М., Мякишев В. А., Артемюк Н. Д. // Водоснабжение и сан. техника. – 1970. – № 3. – С. 37–38.

287. Чапля Є. Я. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха – К : Наукова думка, 2009. – 302 с.

288. Шабас И. Н. Моделирование на высокопроизводительных

- вычислительных системах процессов распространения многокомпонентных примесей в водоеме / Вестник ЮУрГУ. Серия “Вычислительная математика и информатика”. – 2014. – Т. 3. – № 1. – С. 89-96.
- 289.Шейдегер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды / Шейдегер А. Э. – М. : Гостоптехиздат, 1960. – 249 с.
- 290.Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий / Шехтман Ю. М. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 212 с.
- 291.Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / Шкіль М. І. – К. : Вища школа, 1971. – 324 с.
- 292.Эльсгольц Л. С. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Эльсгольц Л. С., Норкин С. Б. – М : Наука, 1971. – 296 с.
- 293.Эндрюс Д. Математическое моделирование : Пер. с англ. / Эндрюс Д., Мак-Лоун Р. – М. : Мир, 1979. – 278 с.
- 294.Ярошевская Н. В. Метод расчета фильтровальных сооружений, работающих с убывающей скоростью / Ярошевская Н. В., Кульский Л. А. // Химия и технология воды. – 1985. – Т. 7, № 12. – С. 3–5.
- 295.A. Bomba Mathematical modeling of magnetic treatment process of liquids from multicomponent pollution / A. Bomba, A. Safonyk // VIII International Conference Porous Materials. Theory and Experiment (INTERPOR'12). – Lviv. – P. 17-18.
- 296.Aiba S. A mass transfer in porous media / Aiba S., Humphrey A. E., Milles N. Z. // Biochem. Eng. – 1965. – V. 9. – P. 1892–1904.
- 297.Andrey Ya. Bomba Identification of Mass Transfer Distribution Factor and Its Account for Magnetic Filtration Process Modeling / Andrey Ya. Bomba, Andrey P. Safonyk, Elena A. Fursachik // Journal of Automation and Information Sciences. – Volume 45, 2013. – Issue 4. – P. 16-22.
- 298.Andrii Safonyk Mathematical modelling process of liquid

filtration taking into account reverse influence of process characteristics on medium characteristics / Andrii Safonyk, Andrii Bomba // International Journal of Applied Mathematical Research. – Vol. 4. – No. 1. – 2015. – P. 1-7.

299. Andrii Safonyk Model of magnetic filter in systems of fluid cleaning / Andrii Safonyk, Andrii Koval // The fifth International conference on information technologies and computer engineering. – Ivano-Frankivsk, 2015. – P. 206-207.

300. Aronson D. G. Linear parabolic equations containing a small parameter / Aronson D. G. // J. Rational Mech. Anal. – 1956. – №5. – P. 1003–1014.

301. Baumann E. R. Polyelectrolyte coatings for filter media / Baumann E. R., Oulman Ch. S. // Ind. Water Eng. – 1971. – V., № 5. – P. 22–25.

302. Baumann E. R. Polyelectrolyte coating for filter media / Baumann E. R., Oulman Ch. S. // Filter and Separ. – 1970. – V. 7, № 6. – P. 682–690.

303. Baumann T. Migration of dissolved heavy metal compounds and PCP in the presence of colloids through a heterogeneous calcareous gravel and a homogeneous quartz-sand / Baumann T., Muller S., Niessner R. // Water Res. – 2002. – 36. – P. 1213–1223.

304. Bayadziev L. Parameter evaluation by the method of moments for PDE–model of semi–closed reactors / Bayadziev L., Elenkov D., Kyuchukov G. // Comm. Depart. Chem. Buld. Acad. Sci. – 1975. – V. 20, № 8. – P. 485–493.

305. Baer M. F, Nunziato J. Two-Phase Mixture Theory for the Deagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. Int. J. Multiphase Flow. 1986. – Vol. 12. – P. 861–889.

306. Biesen L. On the Application of the Power of GIS to Environmental Measurements for the Monitoring, Exploitation and Sustainable Environmental Management of Marine Ecosystems / L. Biesen, Z. Cisneros, T. Chebreegziabeber // XVII IMEKO World Congress – Metrology in the 3rd Millennium. Proceedings. – Dubrovnik, Croatia: HMD Croatian Metrology Society – 2003. –

TC19. – P. 2110–2113.

307. Bobisud L. E. Parabolic Equations with a Small Parameter and discontinuous Data / Bobisud L. E. // *Journal of mathematical analysis and applications*. – 1969. – Volume 26, №1. – P. 208–220.

308. Bomba A. Mathematical modeling of aerobic wastewater treatment in porous medium / Bomba Andrij, Safonyk Andrij // *Zeszyty Naukowe WSInf Vol 12, Nr 1*. – 2013. – P. 21–29.

309. Bomba A. Ya. Identification of mass-transfer coefficient in spatial problem of filtration / Bomba A. Ya., Safonyk A. P. // *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 1. – No. 2. – 2014. – P. 134–142.

310. Bomba A. Ya Simulation of biological treatment of water in aeration tanks regenerator / Bomba A. Ya., Safonyk A. P. // *Mathematics for life sciences: Abstracts of III Int. Conference*. – Rivne, 2015. – P. 6–7.

311. Bomba A. Modelling filtration processes in n-layered filters / A. Bomba, A. Safonik, Ye. Chaplya // VII International Conference “Interpor Porous Materials Theory And Experiment & Workshop Capillary Transport in Unsaturated Porous Materials”, Lubostron, 2008, Poland. – P. 65–66.

312. Burman E. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion problems: Preprint / Burman E., Hansbo P. // *Chalmers University of Technology. Chalmers Finite Element Center* ; 2002.17. – Goteborg : 2002. – 18 p.

313. Burns D. E. Partikulate removal on coated filter media / Burns D. E., Baumann E. R., Oulman Ch. S. // *J. Amer. Water Works Assoc.* – 1970. – V. 82, № 2. – P. 121–126.

314. Deb A. K. Theory of sand filtration / A. K. Deb // *Journal of the Sanitary Engineering Division*. – 1969. – № 3. – P. 399–423.

315. Dofweller V. P. Mass Transfer at low flow rates in a packed column / Dofweller V. P., Fahien R. W. // *A. I. Ch. E. Journal*. – 1959. – V. 5, № 2. – P. 139–145.

- 316.Emelko M. V. Removal of viable and inactivated Cryptosporidium by dual and trimedia filtration / Emelko M. V. // Water Res. – 2003. – 37, N12. – P. 2998–3008.
- 317.Fahien R. W. An equation for the velocity profile in packed columns / Fahien R. W., Stankovic I. M. // Chem. Engng. Sci. – 1979. – V. 34, № 11. – P. 1350–1359.
- 318.Ison C. R. Removal mechanisms in deep bed filtration / C. R. Ison, K. J. Ives // Chem. Eng. Sci. – 1969. – V. 24. – P. 717–729.
- 319.Ives K. J. Advances in deep-bed filtration / Ives K. J. //Trans. Inst. Chem. Eng. – 1970. – V. 48, № 3. – P. 94–100.
- 320.Ives K. J. Deep-bed water filters / K. J. Ives // New developments. Filtr. And Separ. – 1969. – V. 6, № 1. – P. 42–48.
- 321.Ives K. J. Filtration suspended particles in porous media / Ives K. J., Gregory J. // Proc. Soc. Wat. Treat. Exam. – 1966. – V. 15. – P. 93–105.
- 322.Ives K. J. Research on variables affecting filtration / K. J. Ives, I. Sholji // J. San. Eng. Div., Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. – 1965. – V. 91 (SA4). – P. 1–12.
- 323.Ives K. J. Simulation of filtration on electronicdigital computer / Ives K. J. // J. Amer. Water Works Assoc. – 1960. – V.52, № 7. – P. 933–939.
- 324.Ives K. J. Filtration. The significance of theory / Ives K. J. // J. Inst. Water Eng. – 1971. – V.25, № 1. – P. 13–25.
- 325.Iwasaki T. Some notes on sand filtration / T. Iwasaki // J. Am. Water Works Assoc. – 1937. – V. 29. – P. 1591–1603.
- 326.Lallemand, M.H. Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows / M.H. Lallemand, A. Chinnayya, O. Le Metayer // Int. J. Numer. Meth. Fluid. 2005. Vol. 49. P. 1–56.
- 327.Levinson N. The first boundary problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε / Levinson N. // Ann. Of Math. – 1950 – 51, №2. – P. 428–445.
- 328.Mackrle V. Adhese vefiltracnim lozi / V. Mackrle, S.

- Mackrle // Praha, 1959. – 66 p.
- 329.Mackrle V. The theory of rapid Filtration / V. Mackrle – International Water Supply Congress. – Barselona, 1966. – 32 p.
- 330.Marivoet J. Porosity, velocity and temperature profiles in cilindrikal packed beds / Marivoet J., Theodorou P., Waic S. J. // Ibid. – 1974. – V. 29, № 8. – P. 1836–1841.
- 331.Martin R. E. Application of clean-bed filtration theory to bacteria deposition in porous media / Martin R. E., Bouwer E. J., Hanna L. M. // Environ.Sci.Technol – 1992. – 26. – P. 1053–1058.
- 332.Matsuura A. Axial dispersion of liquid in concurrent gas–liquid downflow in pached beds / Matsuura A., Akehata T., Shirai T. // Chem. Engng. Japan. – 1974. – V. 9, № 4. – P. 294–301.
- 333.Mickley H. S. Fluid flow in packed beds / Mickley H. S., Smith K. A., Korchak E. G. //Chem. Eng. Sci. – 1965. – V. 20, № 3. – P. 237–244.
- 334.Qulman Ch. S. Effect on filtration of polielectrolite coatings of diatomite filter media / Qulman Ch. S., Bunns D. E., Baumann E. R. // J. Amer. Water Works Assoc. – 1964. – V. 56. № 9. – P. 1233–1238.
- 335.Rajagopalan R. Trajectory analysis of deep-bed filtration with the sphere-in-cell porous media model / Rajagopalan R., Tien C. // A.I.Ch.E. – 1976. – 22. – P. 523–533.
- 336.Safonyk A. Modeling of fluid filtering n-layer filters with multicomponent pollution / Safonyk Andriy, Danylyshyna Nadiya // International Conference “Computer Science & Engineering 2013” (CSE-2013). Lviv, 2013. – P. 84-85.
- 337.Safonyk A. P. Computer simulation of cleaning fluid from multicomponent pollution by multilayer filter / Safonyk A. P. // Proceedings of the International Scientific Conference “Modern Problems of Mathematical Modeling and Computational

Methods”. – Rivne : EPD RSHU, 2015. – P. 228.

338.Safonyk A. Simulation of fluid filter n-layer filters multicomponent with the pollution in view / Andrij Safonyk, Oleksandr Naumchuk // Informatyka Automatyka Pomiary w Gospodarce i Ochronie Srodowiska 4/2014. – Poland, P. – 28-31.

339.Safonyk A. P. Computer simulation of biological treatment of water in aeration tanks regenerator and identification of mass transfer coefficient / Safonyk A. P., Bilyk A. B. // IV Міжнародна науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп’ютерної техніки” ПІКТ-2015. –Чернівці, 2015. – С. 68-69.

340.Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient / A. P. Safonyk // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – Vol. 9. – 2015. – P. 189-192.

341.Safonyk Andriy. Identification of unknown mass-transfer coefficient in tasks of the convection-diffusion-mass-transfer / Safonyk Andriy, Mamay Lyudmyla // “Innovative technologies in water management complex” collected articles of young scientists. – Rivne, 2012. – P. 233-236.

342.Safonyk Andriy. The nonlinear mathematical modeling processes of filtration taking into account reverse influence // International scientific conference of young scientists and students “Water management - state and prospect of development”. – Rivne, 2010. – P. 260-263.

343.Saiers J. E. First – and second-order kinetics approaches for modeling the transport of colloidal particles in porous media / Saiers J. E., Hornberger G. M. // Water Resour. Res. – 1994. – 30, № 9. – P. 2499–2506.

344.Schwartz C. E. Flow distribution in pached beds / Schwartz C. E., Smith J. M. // Ind. Chem. Engng. – 1953. – V. 45, № 6. – P. 1209–1217.

345. Shumann T. E. W. Heat transfer: a liquid flowing through a porous prism / Shumann T. E. // J. Franklin Inst. – 1929. – V.208, № 3. – P. 405–438.
346. Skopp J. Analysis of time-dependent chemical processes in soils / Skopp J. // J. Environ. Qual. – 1986. – 15. – P. 205–213.
347. Song L. Dynamics of colloid deposition in porous media: modeling the role of re-tained particles / Song L., Elimelech M. // Colloids Surf. – 1993. – 73. – P. 49–63.
348. Zatvala A. Multilayer intermittent sand filter / Zatvala A. // Water Sci. Tech. – 1993. – 28, N10. – P. 125–132.