НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМ. В.М. ГЛУШКОВА

А.Я. БОМБА
В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ
В.В. СКОПЕЦЬКИЙ

НЕЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ГЕОГІДРОДИНАМІКИ

Київ Наукова думка 2007

УДК 517.954:536.21:532.546

Монографія присвячена побудові та дослідженню нових математичних моделей складних нелінійних процесів динаміки та забруднення ґрунтових вод. Зокрема, розглянуто нетрадиційні підходи до математичного моделювання процесів типу “фільтрація–суфозія” в середовищах, схильних до деформацій, досліджено нелінійні процеси вказаного типу з післядією у двозв’язних деформівних середовищах, розглянуто нелінійні крайові задачі на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища. Окремі розділи присвячено математичному моделюванню процесів конвективної дифузії забруднень в підземних фільтраційних потоках та моделюванню процесів фільтраційного ущільнення ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами, що актуально, зокрема, в зв’язку з проблемами охорони навколишнього середовища. Наведено численні результати числової реалізації одержаних розв’язків на ПЕОМ.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, які спеціалізуються у галузі прикладної математики, тепломасообміну, гідрогеомеханіки, охорони навколишнього середовища, а також аспірантів та студентів відповідних спеціальностей.

Відповідальний редактор член-кореспондент НАН України С.І. ЛЯШКО

Затверджено до друку вченою радою Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *М.К. Пуніна*

ISBN 978-966-00-0652-2

ПЕРЕДМОВА

Дослідження різноманітних фізичних процесів та явищ, що відбуваються у верхніх шарах земної кори мають широке коло застосувань, обумовлених їх значним впливом на життєдіяльність суспільства. При цьому серед всіх процесів у земній корі особливе значення має рух води в ґрунтах, оскільки система “ґрунт–вода” найбільш тісно пов’язана з практичною діяльністю людини. Важливе місце в цих дослідженнях займають методи математичного моделювання, які дають змогу одержати відповіді на багато запитань, поставлених, зокрема, гідротехнікою, геофізикою, гідрогеологією, ґрунтознавством, агрономією та ін. Ці методи успішно застосовуються, наприклад, при вивченні складних фільтраційних течій, зокрема, через гідротехнічні споруди, питань прогнозу швидкості осідання різних споруд, побудованих на водонасичених ґрунтах, при визначенні стійкості укосів земляних споруд, деформацій ядер та екранів земляних гребель і електростанцій, при вирішенні питань охорони навколишнього середовища, зокрема, в зв’язку з визначенням закономірностей протікання процесів забруднення побутовими і промисловими стоками підземних вод та ін. При вивченні таких процесів, які, як правило, описуються складними математичними моделями, все частіше останнім часом надається перевага обчислювальному експерименту.

Дослідження фізичних процесів методом обчислювального експерименту включає кілька етапів. На початку формують та вивчають математичну модель процесу певною мірою адекватну фізичній моделі явища. Далі розробляються числові методи та алгоритми наближеного розв’язання відповідних модельних задач. Заключні етапи – проведення багатоваріантних розрахунків на ЕОМ, аналіз результатів та подальше уточнення математичних моделей. Тобто, застосування методів математичного моделювання в наукових дослідженнях охоплює цілий комплекс питань: від аналізу фізичних особливостей досліджуваних процесів, постановки математичних задач, розробки аналітичних або числових методів їх розв’язання, до аналізу та інтерпретації отриманих результатів.

У монографії наведено результати математичного моделювання і дослідження складних нелінійних процесів динаміки та забруднення ґрунтових вод, які мають важливе значення, перш за все, в зв’язку з проблемами охорони навколишнього середовища.

У першому розділі на простіших прикладах викладено загальну концепцію математичного моделювання нелінійних процесів типу “фільтрація–конвекція–дифузія”. Зокрема, описані нові підходи до моделювання нелінійних процесів типу “фільтрація–суфозія” в середовищах

схильних до деформацій, методи наближеного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення та асимптотичного наближення розв'язків сингулярно-збурених задач типу "конвекція–дифузія".

У другому розділі представлені методи квазіконформних відображень в задачах теорії збурень квазіідеальних полів, як ефективні інструменти математичного моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях, дослідження нелінійних процесів з післядією типу "фільтрація–суфозія" у двозв'язних деформівних середовищах, обмежених еквіпотенціальними лініями. Розглянуто також нелінійні крайові задачі в шаруватих середовищах, нелінійні модельні крайові задачі на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища в двозв'язних деформівних анізотропних середовищах. В окремому параграфі представлені результати комп'ютерного моделювання фільтраційних процесів у ґрунтах.

Третій розділ присвячено математичним моделям процесів конвективної дифузії забруднень при усталеній плоско-вертикальній фільтрації з вільною поверхнею з урахуванням нерівноважності дифузійного процесу (суттєвого відхилення від класичного закону Фіка).

В останньому, четвертому, розділі пропонуються підходи до математичного моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами, що актуально в зв'язку з встановленням умов екологічно безпечного функціонування таких інженерних об'єктів як накопичувачі промислових та побутових відходів. Побудовано і чисельно реалізовано ряд нових математичних моделей процесів фільтраційного ущільнення за умов насичення масивів сольовими розчинами, як в неізотермічному, так і в ізотермічному випадках.

Слід зазначити, що в пропонованій монографії прийнято усталений для застосувань рівень строгості викладу матеріалу, обумовлений, перш за все, загальною спрямованістю роботи, яка адресована спеціалістам, зацікавленим у використанні викладених результатів при розв'язанні конкретних інженерних задач. Зазначимо також, що, з огляду на актуальність тематики, число публікацій щодо цього наукового напряму на даний час досить велике, тому наведена тут бібліографія заздалегідь не претендує на вичерпність.

Автори щиро вдячні науковому редактору члену-кореспонденту НАН України С.І. Ляшку за цінні зауваження і рекомендації при підготовці рукопису праці.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 3

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ “ФІЛЬТРАЦІЯ–КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ” 5

1.1. Нелінійні математичні моделі типу “фільтрація–суфозія” . 5

1.2. Сингулярно збурені математичні моделі процесів типу “фільтрація–конвекція–дифузія” і асимптотичні методи ... 13

1.3. Підходи до моделювання нелінійних процесів типу “фільтрація–суфозія” в середовищах, схильних до деформації .. 27

1.4. Нелінійні обернення крайових задач на конформні та квазіконформні відображення 43

1.4.1. Постановка обернених задач про конформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники та многочленні наближення їх розв’язків ... 43

1.4.2. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення 48

1.4.3. Метод сумарних зображень при розв’язанні нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення 62

1.5. Асимптотичний метод розв’язку сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція–дифузія” в неоднорідному анізотропному середовищі 65

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ 79

2.1. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації .....

79

2.2. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу 90

2.3. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів у ґрунтових греблях 97

2.4. Застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями 105

2.4.1. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у трикутних областях (обмежених однією еквіпотенціальною лінією та двома лініями течії) 105

2.4.2. Приклад моделювання збурення ідеального поля точковим джерелом на граничній лінії течії 110

2.4.3. Приклад моделювання збурення ідеального поля еквіпотенціальною ділянкою на граничній лінії течії 118

2.5. Нелінійні крайові задачі в шаруватих середовищах 126

2.6. Дослідження нелінійних процесів з післядією типу "фільтрація–суфозія" у двозв'язних деформівних середовищах, обмежених еквіпотенціальними поверхнями 132

2.7. Нелінійні крайові задачі на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища в двозв'язних деформівних анізотропних середовищах 144

2.8. Комп'ютерне моделювання фільтраційних процесів в ґрунтових масивах 158

2.8.1. Особливості програмної реалізації числових алгоритмів

моделювання фільтраційних процесів у пористих середовищах для багатозв'язних областей 158

2.8.2. Результати розрахунків фільтраційних процесів у пористих середовищах без урахування деформаційних явищ та з їх урахуванням, їх аналіз та порівняльна характеристика 160

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ЗАБРУДНЕНЬ ПРИ УСТАЛЕНІЙ ПЛОСКО-ВЕРТИКАЛЬНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ НЕРІВНОВАЖНОСТІ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ 178

3.1. Асимптотичні розв'язки двовимірних крайових задач конвективної дифузії забруднень при усталеній плоско-вертикальній фільтрації за умов нерівноважності дифузійного процесу 178

3.1.1. Вступ. Вихідне диференціальне рівняння 178

3.1.2. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації зі сховища промстоків до водозабору за умов нерівноважності дифузійного процесу 179

3.1.3. Випадок наявності на виході фільтраційного потоку інтенсивного відведення стоків 183

3.1.4. Випадок наявності водоупору та відомої концентрації забруднень на цьому водоупорі 185

3.1.5. Випадок скінченної напірної водойми та нескінченного водозабору 186

3.1.6. Задача фільтраційно-конвективної дифузії солей, що залягають у вигляді включень за умов нерівноважності дифузійного процесу 193

3.1.7. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації з напірної водойми до водозабору за наявності внутрішнього дренажу . 198

3.2. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації зі сховища промстоків до водозабору за умов нерівноважності дифузійного процесу та врахування масообміну 206

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ, НАСИЧЕНИХ СОЛЬОВИМИ РОЗЧИНАМИ 216

4.1. Чисельне моделювання фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов повзучості ґрунтового скелета 216

4.1.1. Вступ. Актуальність проблеми 216

4.1.2. Математична модель. Постановка задачі 216

4.1.3. Алгоритм наближеного розв’язку задачі 219

4.1.4. Результати чисельної реалізації. Висновки 221

4.1.5. Альтернативний підхід до моделювання процесу фільтраційної консолідації 223

4.2. Математичне моделювання фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, з урахуванням нелінійної повзучості ґрунтового скелета 225

4.2.1. Математична модель. Постановка крайової задачі 225

4.2.2. Алгоритм чисельного розв’язання задачі 227

4.2.3. Результати реалізації алгоритму. Висновки 228

4.3. Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів з урахуванням нерівноважності процесу формування дифузійного поля концентрацій 230

4.3.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі 230

4.3.2. Алгоритм наближеного розв’язання задачі 232

4.3.3. Результати чисельної реалізації алгоритму. Висновки 235

4.4. Математичне моделювання процесу консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, за умов релаксаційної фільтрації 237

4.4.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі 237

4.4.2. Алгоритм наближеного розв'язку задачі 239

4.4.3. Результати чисельної реалізації алгоритму. Висновки 243

4.5. Спрощена математична модель для опису процесу фільтраційної консолідації ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами, за умов релаксаційної фільтрації 245

4.5.1. Побудова спрощеної математичної моделі процесу консолідації 245

4.5.2. Постановка крайової задачі та алгоритм її наближеного розв'язку 247

4.5.3. Результати чисельної реалізації та висновки 249

4.6. Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів з урахуванням релаксаційності фільтраційного та дифузійного процесів 250

4.6.1. Побудова математичної моделі процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами масивів за умов релаксаційності фільтраційного та дифузійного процесів. Постановка крайової задачі 251

4.6.2. Алгоритм розв'язання задачі консолідації в рамках наближеної моделі 252

4.6.3. Алгоритм розв'язання задачі в рамках точної моделі консолідації 255

4.6.4. Чисельна реалізація і висновки 257

4.7. Комплексний підхід до проблеми математичного моделювання процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів 258

4.7.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі 259

4.7.2. Побудова наближеного розв’язку крайової задачі 261

4.7.3. Результати чисельної реалізації. Висновки 265

4.8. Математичне моделювання неізотермічної фільтраційної консолідації за умов руху сольових розчинів та релаксаційності фільтраційного і дифузійного процесів 269

4.8.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі 269

4.8.2. Побудова наближеного розв’язку крайової задачі 270

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 288

РОЗДІЛ 1

математичне моделювання і дослідження нелінійних ПРОЦЕСІВ типу "фільтрація–конвекція–дифузія"

1.1. Нелінійні математичні моделі типу "фільтрація–суфозія"

Закони руху рідини (води, нафти тощо) та газу в пористому середовищі відіграють важливу роль при проектуванні, будівництві та подальшій експлуатації гідротехнічних та гідромеліоративних конструкцій, при добуванні нафти, газу та екологічних дослідженнях. Для кількісної оцінки стану середовищ, що перебувають під дією меліоративних та інших антропогенних заходів, досить ефективними є методи математичного моделювання.

Одним з перших питання про закон руху рідин в пористих середовищах поставив і експериментально дослідив французький інженер А. Дарсі. Результати його досліджень вилились в закон, що був опублікований в 1856 р. у вигляді $v = -kI$, де v – швидкість фільтрації; I – градієнт напору; k – коефіцієнт пропорційності, що пізніше отримав назву коефіцієнта фільтрації [167], який і до цього часу дослідники вважають основним законом фільтрації в пористих середовищах. Теоретичні ж дослідження даного закону започаткував його співвітчизник Ж. Дюпюї.

Ф. Форхгеймер вперше запропонував нелінійні залежності між швидкістю фільтрації та градієнтом напору:

$$I = av + bv^2 \text{ або } I = av + bv^2 + cv^3, \tag{1.1}$$

де a, b, c – сталі, які визначаються (як і коефіцієнт фільтрації) експериментально. Дані формули дослідник відносить лише до тих крупнозернистих ґрунтів, для яких процес фільтрації не підпорядковується закону Дарсі. Ним також наведені різного роду залежності даних коефіцієнтів від пористості, розміру частинок та іншого роду чинників. Аналогічні дослідження нелінійних процесів фільтрації (що не описуються за допомогою закону Дарсі) викладено в [207].

Важливою для розвитку теорії фільтрації була постановка питання про межі застосування закону Дарсі щодо різних параметрів (напір, швидкість, характеристики середовища тощо). Питання швидкості фільтрації було досить повно досліджено Рейнольдсом. Пізніше М.М. Павловський [160] запропонував за критерій застосування закону фільтрації прийняти число Рейнольдса, а при дослідженні руху рідини під гідротехнічними спорудами

вибирати таку припустиму швидкість фільтрації, а, отже, і градієнт напору, які б не спричиняли руйнування ґрунту при фільтрації. Крім того, ним був запропонований точний теоретичний метод розв'язання плоских задач усталеної фільтрації – метод конформних відображень. Даний метод було успішно використано та розвинуто в працях [4, 63, 166, 248].

С.В. Ізбаш, якому належить термін "фільтраційні деформації ґрунтів", пов'язує ці деформації із дією на ґрунти градієнтів напору фільтраційних потоків. Він вперше розробив класифікацію деформацій ґрунту, де під фільтраційними деформаціями розумів зміну структури ґрунту, а не його руйнування. Зокрема, С.В. Ізбаш [95] розглянув питання можливості переміщення частинок дрібнозернистого ґрунту через суміжний з ним крупнозернистий. Основним чинником, що визначає фільтраційну деформацію ґрунту, який характеризується діаметром частинок d, взята дійсна швидкість в порах дрібнозернистого ґрунту. Дана швидкість визначає можливість вимивання цього ґрунту в пори крупнозернистого з діаметром частинок D.

А.М. Патрашовим [161] розроблено два критерії вимивання дрібних частинок ґрунту в процесі фільтрації: структурний і механічний. При виведенні залежностей він вважав, що ґрунт складається зі скелету і дрібних частинок, що заповнюють пори ґрунту. Проте, оскільки ґрунти складаються більш як з двох фракцій, то А.М. Патрашев запропонував вибрати двофракційну модель для опису структури ґрунту. Механічний критерій вимивання частинок із ґрунту автор отримує на основі розгляду сил, що діють на частинку: 1) власної ваги; 2) гідродинамічного тиску потоку на частинку; 3) опору, що зазнає частинка ґрунту з боку рідини, яка витісняється нею при переміщенні; 4) взаємодії між рухомим фільтраційним потоком і частинкою, що рухається в ньому. Праці С.В. Ізбаша та А.М. Патрашева поклали початок для більш ґрунтовного вивчення і дослідження суфозійних явищ та кольматажу у ґрунті.

Досліджуючи явища суфозії та кольматажу, М.І. Хрисанов [206] фільтраційні деформації якісно ділить на: 1) стікання ґрунтової маси в отвори дренажних труб; 2) деформації скелету ґрунту; 3) внутрішню механічну суфозію і кольматаж. Побудову моделей та розв'язання відповідних задач, що описують вказані фільтраційні деформації, він проводить окремо для кожного виду деформації, оскільки вони відбуваються за неоднакових граничних умов та підпорядковуються різним граничним законам.

Зазначимо, що чимало інших дослідників (Р. Колінз, В.С. Козлов, С.В. Ковальчук, О.Я. Олійник, О.М. Костяков, Д.М. Мінц, М.Т. Ефендієв та ін.) спостерігали і досліджували виникнення фільтраційних деформацій у ґрунті та вказували на градієнт напору як на основний фактор, що зумовлює їх появу. Однак вплив деформацій ґрунту на роботу дренажу враховувався, у кращому випадку, формальним призначенням коефіцієнта фільтрації в залежності від пористості, розміру частинок, тощо. А при обчисленні витрати

коефіцієнт фільтрації ґрунту відповідно до класичної теорії фільтрації приймався сталою величиною. Проте, у випадках великих градієнтів напору (більших за критичні значення) навколо дрени (свердловини) відбуваються суфозійні деформації ґрунту (переміщення та зупинка дрібних частинок, переорієнтація у просторі частинок, які формують скелет, тощо), що спричиняють зміну коефіцієнта фільтрації як в просторі, так і в часі, та суттєво впливають на водоприймальну спроможність, наприклад, дренажних систем. Зокрема, А.І. Мурашко, розглядаючи недосконалий за характером розкриття ґрунту дренаж, вказує на виникнення в придренній зоні під дією гідродинамічних сил градієнтів напору, що часто перевищують значення 20–30, яке набагато більше критичного за умовами фільтраційної стійкості ґрунтів. А.П. Вавилов на основі експериментальних досліджень виявив збільшення проникності ґрунту при наближенні до дрени. При наявності штучного фільтра, внаслідок вимивання частинок ґрунту в дрену, спостерігається утворення деякої системи зон з різною проникністю (багатошаровий природний фільтр). Даний факт спостерігався, зокрема, в ґрунтах Голодного степу, де велика кількість дрен не працює, або погано працює, через неправильний вибір гранулометричного складу фільтра.

Проведений аналіз наукових джерел показує, що на приплив до дрени (питому витрату) впливають деформативні процеси, які виникають в придренній зоні, що зумовлює перерозподіл напорів, їх градієнтів та зміну коефіцієнта фільтрації. Однак на даний час це враховується як на практиці, так і в теорії певною залежністю коефіцієнта фільтрації ґрунту від характеристик середовища і аж ніяким чином не від характеру збурення чи градієнта напору. Виявляючи фільтраційні деформації, дослідники намагалися компенсувати зміну коефіцієнта фільтрації та градієнта напору застосуванням фільтра чи засипки з певним значенням коефіцієнта фільтрації. Коефіцієнт фільтрації ґрунту при дослідженнях вище згаданих процесів вважався, як правило, сталою величиною.

В праці [206] наведено експерименти на ґрунтових моделях, які показали, що складний характер роботи дрен осушувально-зволожувальних систем зумовлює значне зменшення дренажного стоку і витрати з дрени в ґрунт. За результатами експериментів було зроблено висновок про те, що втрата фільтраційної міцності ґрунтів (це пов’язане зі зміною коефіцієнта фільтрації) в навколодренному середовищі відбувається при перевищенні діючими градієнтами припустимого (критичного) значення для даного ґрунту. З метою математичного моделювання такого типу процесів фільтрації з урахуванням взаємовпливу градієнтів напору та коефіцієнта фільтрації був розроблений і запропонований підхід до розв’язання відповідних нелінійних крайових задач з післядією [25], що отримав експериментальне підтвердження та практичне застосування для розрахунку дренажних систем [204].

Залежність коефіцієнта фільтрації від градієнта напору на початку представимо у вигляді

$$k(gradh) = \begin{cases} k_*(gradh), & ï\,ðè\ \ dh/dr > I_{kp}, \\ k_o, & ï\,ðè\ \ dh/dr \le I_{kp}, \end{cases} \tag{1.2}$$

де $k_*(\tau)$ – деяка функція; I_{kp} – критичний градієнт напору; k_o – коефіцієнт фільтрації недеформованого середовища. Зокрема, при моделюванні процесів осесиметричної фільтрації в режимі осушувальної дії дренажу з урахуванням впливу градієнтів напору на коефіцієнт фільтрації, пропонуються такі базові моделі зміни коефіцієнта фільтрації на ділянці збурення: а) $k = k_*$, б) $k = k_o \dfrac{r_c}{r}$, в) $k = k_o(a\dfrac{r_c}{r} + b)$, $a + b = 1$, г) $k = k_o\left(1 + \varepsilon\left(1 - \dfrac{r}{r_c}\right)\right)$, д) $k = k_o\left(1 + \varepsilon\left(\dfrac{dh}{dr} - I_{kp}\right)\right)$ (зміст величин у правих частинах даних рівностей розкриємо нижче). Вибір на початковій стадії досліджень простіших осесиметричних задач (стаціонарних моделей фільтрації у круговому недеформованому пласті)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(k_o r \dfrac{dh(r)}{dr}\right) = 0, \quad r_o < r < R_o, \\ h(r_o) = h_o,\ h(R_o) = H_o, \end{cases} \tag{1.3}$$

де $h(r)$ – напір на колі радіуса r (в точці r); r_o, R_o – радіуси відповідно дрени та її зони впливу, продиктований зручністю для порівняння результатів комп'ютерного і фізичного моделювання при встановленні меж застосування та адекватності моделей. Легко бачити, що розв'язок такої задачі (відповідно напір, його градієнт та витрата) має вигляд

$$h(r) = h_o(r) = h_o + \frac{H_o - h_o}{\ln R_o / r_o} \ln r / r_o,\ \frac{dh_o}{dr} = I_o = \frac{H_o - h_o}{\ln R_o / r_o} \frac{1}{r},$$
$$q_o = \frac{2\pi k_o (H_o - h_o)}{\ln(R_o / r_o)}. \tag{1.4}$$

Розв'язавши рівняння $dh_o(r)/dr = I_{kp}$, де I_{kp} – критичне значення градієнта напору для даного середовища, отримаємо початкове наближення радіуса

$$r_{co} = \frac{1}{I_{kp}} \frac{H_o - h_o}{\ln(R_o / r_o)}, \tag{1.5}$$

що ділить область фільтрації $r_o \le r \le R_o$ на “збурену” $[r_o\,, r_{co}]$ (де $dh/dr > I_{kp}$) та “незбурену” $[r_{co}\,, R_o]$ ($dh/dr \le I_{kp}$) ділянки. Отримані залежності $h = h_o(r)$, $I = I_o(r)$, $q = q_o$, $r_c = r_{co}$ приймаємо за вихідні (початкові, «нульові») значення відповідно напору, його градієнта, витрати та радіуса поділу зон.

Таким чином, розв’язок відповідної задачі для моделі за залежністю (б) має вигляд

$$\frac{dh(r)}{dr} = I_1 = \begin{cases} I_{11} = \dfrac{dh_{11}(r)}{dr} = \dfrac{H_o - h_o}{\hat{O}(r_{co})}\dfrac{1}{r_{co}}, & r_o \le r \le r_{co}, \\ I_{12} = \dfrac{dh_{12}(r)}{dr} = \dfrac{H_o - h_o}{\hat{O}(r_{co})}\dfrac{1}{r}, & r_{co} \le r \le R_o, \end{cases}$$

де $\hat{O}(r_{co}) = 1 - r_o / r_{co} + \ln(R_o / r_{co})$.

Звідси як розв’язок рівняння $I_{12} = I_{kp}$ знаходимо перше наближення $r = r_{c1}$ ($r_{co} < r_{c1} < R_o$) точки поділу деформованої і недеформованої зон (аналогічно знаходяться наступні наближення для точки r_c). Легко довести, що існує єдина точка r_c поділу збуреної та незбуреної ділянок, яка може бути знайдена як розв’язок рівняння: $r_c = \dfrac{1}{I_{kp}} \dfrac{H_o - h_o + I_{kp} r_o}{1 + \ln(R_o / r_c)}$ або $r_c = \lim\limits_{n \to \infty} r_{cn}$, де r_{cn} – її наближення на n-му кроці.

У рамках даної моделі встановлено, що область виникнення фільтраційних деформацій $[r_o, r_c]$ однозначно визначається конструкцією дренажу (радіуса r_o), характеристикою ґрунту (I_{kp}), гідродинамічною дією фільтраційного потоку ($H_o - h_o$) та розміром контуру живлення (R_o). Із зростанням радіуса дрени r_o деформована зона збільшується від дрени в масив фільтрації, причому для $r_o = r_o(R_o) = R_o - (H_o - h_o)/I_{kp}$ незбурена зона зникає ($r_c = R_o$). Аналіз же відповідних залежностей підтверджує той факт, що граничні (при $n \to \infty$) значення градієнтів напору даної моделі зменшуються до їх критичного значення за рахунок повного вимивання суфозійних частинок у порожнину дрени.

Провівши розрахунки в рамках моделі (в), одержимо співвідношення для знаходження точки розмежування зон, градієнтів напору та притоку до дрени відповідно у вигляді

$$r_c = \frac{1}{I_{kp}} \frac{b(H_o - h_o)}{\Phi_a(r_c)}, \ \Phi_a(r) = \ln \frac{r_c}{ar_c + br_o} + b \ln \frac{R_o}{r_c}, \tag{1.6}$$

$$\left[\begin{array}{ll} I_1 = \dfrac{b(H_o - h_o)}{\Phi_a(r_c)} \dfrac{1}{ar_c + br}, & r_o \le r \le r_c, \\ I_2 = \dfrac{b(H_o - h_o)}{\Phi_a(r_c)} \dfrac{1}{r}, & r_c \le r \le R_o, \end{array} \right.$$

$$q_a = \frac{2\pi k_o (H_o - h_o)}{\Phi_a(r_c)/(1-a)}. \tag{1.7}$$

Встановлено, що величина притоку до дрени в значній мірі залежить від деформаційних процесів, які відбуваються у придренній зоні (ділянці $r_o \le r \le r_c$) і інтенсивність яких, у свою чергу, визначається характеристиками ґрунту (a, b), розміром контуру живлення (R_o) та конструктивними параметрами дрени (r_o).

Результати досліджень показують, що витрата зростає при зменшенні критичного градієнта, і спадає при зменшенні параметра a.

При збільшенні радіуса дрени r_o в ґрунтах, в яких відсутні суфозійні частинки ($a \to 0$), витрата зростатиме за рахунок збільшення ділянки виходу потоку (зауважимо, що в дійсності збільшення витрати в цьому випадку може відбуватись ще й за рахунок переорієнтації в просторі частинок скелета ґрунту). У сильно суфозійних ґрунтах ($a \to 1$) збільшення притоку до дрени відбувається за рахунок вимивання частинок в порожнину дрени.

На рис. 1.1 подані графіки залежностей витрати q від діючого напору ΔH. Аналіз графіків показує, що експериментальні результати перевищують відповідні числові значення, обчислені для витрати в недеформованому середовищі (без урахування фільтраційних деформацій середовища), однак, вони досить точно збігаються із числовими результатами для фільтраційної витрати за залежністю (1.7), що підтверджує адекватність вибраної версії коефіцієнта фільтрації щодо даних одержаних, експериментально.

У праці [25] наведено приклади дискретного моделювання процесу фільтрації в середовищах, що деформуються, з урахуванням зміни коефіцієнта фільтрації в просторі і часі.

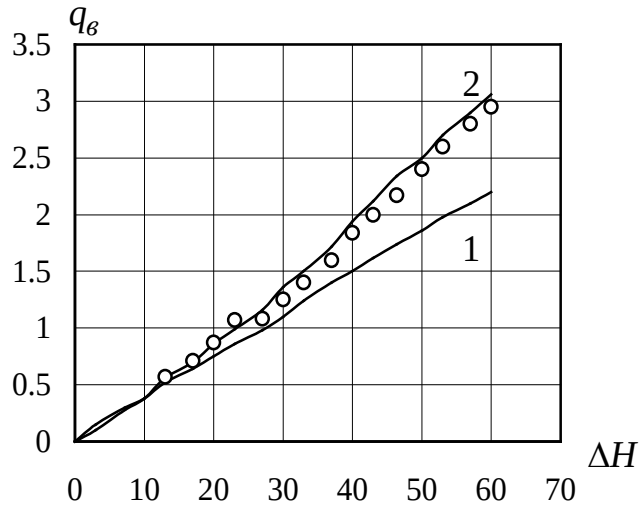


Рис. 1.1. Графіки залежності $q = q(\Delta H)$ при r_o=0,1м; $R_o = 1,0$ м; $a = 0,346$: 1 – за залежністю (1.4), 2 – за залежністю (1.8), точки – дослідні дані

Традиційно вважається, що закладення фільтрів навколо дрен забезпечує їх захист від механічного замулення, збільшує осушувальну дію дренажу та сприяє його довговічності. Обгортка або засипка дренажних труб добре фільтруючим і правильно підібраним матеріалом змінює структуру потоку (лінії течії направляються перпендикулярно до поверхні дрени) та зменшує втрати напору в придренній зоні, що сприяє збільшенню водоприймальної спроможності дрен. Однак дрена і фільтр у процесі роботи дренажу взаємодіють з ґрунтом (у якому можуть виявлятися фільтраційні деформації), що може спричинити вихід меліоративної системи з ладу – дренаж не виконуватиме покладених на нього функцій. У працях [52, 182] побудовано математичну модель для випадку процесу фільтрації до дрени з об'ємним фільтром (засипкою), згідно з якою градієнти напору на початковому (нульовому) етапі, коли дія критичного градієнта не враховується (діючі градієнти у ґрунті та фільтрі не перевищують відповідних критичних значень), отримано у вигляді

$$\begin{cases} I_{oç} = \dfrac{dh_{oç}(r)}{dr} = \dfrac{k_o}{k_ç}\dfrac{H_o - h_o}{\Phi(r_{ãç})}.\dfrac{1}{r}, & r_o \le r \le r_ç, \\ I_{oã} = \dfrac{dh_{oã}(r)}{dr} = \dfrac{H_o - h_o}{\Phi(r_{ãç})}.\dfrac{1}{r}, & r_ç \le r \le R_o, \\ q = \dfrac{2\pi k_o (H_o - h_o)}{\Phi(r_{ãç})}. \end{cases} \tag{1.8}$$

де $\Phi(r_{ãç}) = (k_o / k_ç)\ln(r_ç / r_o) + \ln(R_o / r_ç)$; $r_ç$, $k_ç$ – відповідно радіус та коефіцієнт фільтрації засипки. Звідси бачимо, що понижуючи коефіцієнт фільтрації засипки (об'ємного фільтра), можна досягати зменшення діючих

градієнтів у ґрунті, зокрема, при наявності суфозійних явищ, та не допускати можливих фільтраційних деформацій. Витрата до дрени із засипкою зростає як при збільшенні відношення коефіцієнтів фільтрації засипки та ґрунту $k_ç / k_o$, так і при збільшенні радіуса засипки $r_ç$. У загаданих вище працях подані графіки залежності відносної витрати $q_{â} = q / \left(2\pi k_o \left(H_o - h_o\right)\right)$ від товщини фільтра при R_o=1,0 м, r_o=0,036 м для $k_ç / k_o$=2; 5; 10; 50; 100. Результати досліджень показують, що більш суттєвий вплив на витрату $q_{â}$ має відношення $k_ç / k_o$, ніж величина $r_з$. Тому при необхідності підвищення притоку до дрени більш доцільно і економічно збільшувати коефіцієнт фільтрації засипки (об'ємного фільтра), а не її товщину.

Характерною особливістю моделювання процесів фільтрації із зволожувача в ґрунт є те, що на відміну від режиму осушення, тут обов'язково виникають два типи різних збурених зон. Безпосередньо навколо зволожувача формується зона вимивання суфозійних частинок (коефіцієнт фільтрації зростає), за нею зона їх зупинки (ділянка кольматажу), де коефіцієнт фільтрації певним чином зменшується, а далі незбурена зона. Такі зміни в навколодренній зоні суттєво впливають на витрату з дренажу.

При моделюванні процесу фільтрації із зволожувача в середовище, що деформується, шляхом введення радіусів $r_{â}$ та $r_ç$ ($r_o < r_{â} < r_ç < R_o$), формувались три зони: $r_o < r < r_{â}$ – зона вимивання частинок ґрунту, де $k = k_{â} > k_o$, $r_{â} < r < r_ç$ – зона "закупорення" пор частинками, $k = k_ç < k_o$; $r_ç < r < R_o$ – незбурена зона, $k = k_{í} = k_o$. Градієнти напору з урахуванням даного типу збурень отримані відповідно у вигляді

$$I = \left|\frac{dh(r)}{dr}\right| = \begin{cases} I_{â}(r) = \dfrac{H_o - h_o}{\Phi} . \dfrac{k_{í}}{k_{â}} \dfrac{1}{r}, & r_o \le r \le r_{â}, \\ I_ç(r) = \dfrac{h_o - H_o}{\Phi} \dfrac{k_{í}}{k_ç} \dfrac{1}{r}, & r_{â} \le r \le r_ç, \\ I_{í}(r) = \dfrac{h_o - H_o}{\Phi} \dfrac{1}{r}, & r_ç \le r \le R_o, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $\Phi = \dfrac{k_{í}}{k_{â}} \ln \dfrac{r_{â}}{r_o} + \dfrac{k_{í}}{k_ç} \ln \dfrac{r_ç}{r_{â}} + \ln \dfrac{R_o}{r_ç}$.

Результати числових досліджень показали, що діючі градієнти в зоні кольматажу та незбуреній зоні зростають навіть при незначному вимиванні частинок із зони суфозії ($k_{â} > k_o$), а в зоні вимивання ($r_o \le r \le r_{â}$) – стають меншими за початкові їх значення, а саме

$$\begin{cases} I_{\hat{a}}(r) < I_o(r), \text{ ï ðè } r_o \le r \le r_{\hat{a}}, \\ I_{ç}(r) > I_o(r), \text{ ï ðè } r_{\hat{a}} \le r \le r_{ç}, \\ I_{í}(r) > I_o(r), \text{ ï ðè } r_{ç} \le r \le R_o. \end{cases} \tag{1.10}$$

Нами розглядались декілька варіантів формування збурених зон. Проілюструємо один із них. Прирівнюючи $I_{\hat{a}}(r_{\hat{a}})$ та $I_{ç}(r_{ç})$ відповідно до $I_{kp\hat{a}}$ та $I_{kpç}$, отримаємо співвідношення для знаходження радіусів (точок) поділу зон:

$$\begin{cases} r_{\hat{a}} = \dfrac{1}{I_{kp\hat{a}}} \dfrac{h_o - H_o}{\ln\dfrac{r_{\hat{a}}}{r_o} + \dfrac{k_{\hat{a}}}{k_{í}}\ln\dfrac{R_o}{r_{\hat{a}}} + \left(\dfrac{k_{\hat{a}}}{k_{í}} - \dfrac{k_{\hat{a}}}{k_{ç}}\right)\ln\dfrac{k_{ç}I_{kpç}}{k_{\hat{a}}I_{kp\hat{a}}}}, \\ r_{ç} = \dfrac{1}{I_{kpç}} \dfrac{h_o - H_o}{\dfrac{k_{ç}}{k_{\hat{a}}}\ln\dfrac{r_{ç}}{r_o} + \left(\dfrac{k_{ç}}{k_{\hat{a}}} - 1\right)\ln\dfrac{k_{ç}I_{kpç}}{k_{\hat{a}}I_{kp\hat{a}}} + \dfrac{k_{ç}}{k_{í}}\ln\dfrac{R_o}{r_{ç}}}, \end{cases} \tag{1.11}$$

де $I_{kp\hat{a}}$ – критичне значення градієнта напору щодо границі вимивання суфозійних частинок; $I_{kpç}$ – градієнт, що відповідає межі зупинки суфозійних частинок (при розв’язанні задачі за значення $I_{kpç}$ візьмемо величину $I_{ç}(r)$ при $r = r_{ç}$), а для знаходження параметрів $k_{\hat{a}}$, $k_{ç}$ та $I_{kpç}$ використовуються спеціальні методики.

Викладений метод є природним щодо розв’язання нелінійних задач з післядією, які виникають при моделюванні осесиметричної стаціонарної фільтрації в режимі осушувальної та зволожувальної дії дренажу із врахуванням фільтраційних деформацій придренного середовища, що дає змогу на основі покрокової побудови послідовних наближень точки поділу збуреної та незбуреної ділянок області фільтрації, напору та його градієнта моделювати процеси взаємовпливу градієнтів напору та фільтраційних характеристик середовища в часі.

1.2. Сингулярно збурені математичні моделі процесів типу “фільтрація – конвекція – дифузія” і асимптотичні методи

Актуальними на даний час залишаються відомі проблеми моделювання різного типу процесів масоперенесення (конвекція, дифузія, масообмін типу сорбція–десорбція, тощо) на фільтраційних і довільних інших ідеальних та

квазіідеальних фонах. Перші спроби теоретичного дослідження таких (головним чином одновимірних) процесів були зроблені, зокрема, у працях [1, 2, 26–28, 151, 161]. Використання ідеї переходу у рівнянні конвективної дифузії до координат області комплексного потенціалу разом з аналітичними або чисельно-аналітичними методами дало змогу [118–120, 193, 200] отримати точні або наближені аналітичні розв'язки типових двовимірних задач масоперенесення при плоско-вертикальній і плановій, усталеній або квазіусталеній фільтрації, що виникають при дослідженні процесів забруднення або засолення ґрунтових вод. Розробці різних методів чисельного та чисельно-аналітичного розв'язання такого типу одновимірних і двовимірних задач волого- і солеперенесення, розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі та суміжних з ними присвячені праці [30–36, 38–40, 67–69, 93, 118–125, 134, 136, 151–157, 173, 184–188].

У працях [20, 120] розроблений метод асимптотичного наближення розв'язків сингулярно збурених задач масоперенесення при плановій фільтрації підземних вод у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними, які описують найбільш важливі з точки зору практичних застосувань явища перенесення забруднюючих підземні води речовин. Ефективність цієї методики пов'язана із можливістю розщеплення складної математичної моделі вихідного процесу на послідовність простіших задач: встановлення характеру фільтраційної течії в області розміщення джерела забруднень та розрахунку поля швидкості; знаходження часу проходження частинок вздовж ліній течії (у рамках схеми поршневого витіснення); оцінки значущості дисперсійних ефектів, що зумовлюють випередження фронту конвективної течії; оцінки можливих перерозподілів забруднень внаслідок впливу поперечної дифузії; внесення "дифузійних поправок" у різних примежових зонах і інше.

Задачі, що містять малий параметр при старших похідних у рівнянні належать до сингулярно збурених задач (задач особливих збурень), де будь-яка зміна параметра збурення призводить до довільної (як малої, так і "нормальної", і, навіть, великої на певних ділянках області) зміни розв'язку. Інтенсивний розвиток теорії сингулярних збурень започаткований роботами А.Н. Тихонова [194–196], які з'явились у 1948, 1950 і 1952 роках. У них була розглянута початкова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь, в яких частина похідних входить з малим параметром $\varepsilon > 0$.

А.Н. Тихонов отримав умови, при яких розв'язок поставленої задачі при $\varepsilon \to 0$ прямує до одного з розв'язків (було також з'ясовано, до якого саме) так званої виродженої системи, яку було отримано з початкової, якщо в ній формально покладали $\varepsilon = 0$. У працях С.А. Ломова [129] було розроблено метод регуляризації. Базуючись на працях А.М. Ільїна розвинуто метод зрощування.

Побудові асимптотики розв'язку, вивченню характеру граничного переходу різних задач для параболічного рівняння і подібних задач для інших видів

рівнянь з малим параметром при старших похідних присвячено низку праць і зарубіжних авторів [220–222, 226–234]. Зокрема, Д. Аронсон побудував нульові асимптотики із звичайним примежовим шаром. У працях американських вчених (Коул, Ван-Дайк і ін.) [54, 55, 109, 110] було розвинуто асимптотичний метод – метод зовнішніх і внутрішніх розкладів, на основі яких одержано низку результатів в механіці суцільного середовища.

Ефективним методом розв'язку сингулярно збурених задач є асимптотичний метод Вішика–Люстерника. Деякі ідеї цього методу наведено раніше в працях прикладного характеру, проте строга математична теорія і її обґрунтування вперше були зроблені М.Й. Вішиком і Л.А. Люстерником [64]. Подальший розвиток і широке застосування метод отримав у працях [97, 98, 100]. Важливим досягненням методу є його ідейна простота, "охоплення" ним основних і другорядних явищ – складових частин процесу, що вивчається, чутливе реагування на них, застосування до широкого кола задач, які пов'язані з розв'язанням різноманітних рівнянь з частинними похідними. Так, метод дозволяє дослідити задачі з примежовим шаром, задачі на "спектрі", задачі з швидкою осциляцією і ін. В основу методу покладено дві ідеї: регулярного перетворення, яка йде ще від Прандтля, а також ідея примежових поправок. Цим і пояснюється ефективне застосування методу Вішика–Люстерника в багатьох прикладних задачах.

У працях [41–50, 56, 57] широкий розвиток і застосування отримав так званий метод примежових функцій та метод згладження "негладкостей". Модифікуючи цей метод, В.Ф. Бутузов отримав асимптотику розв'язків сингулярно збурених задач типу "реакція–дифузія–перенесення" із описом відповідних алгоритмів побудови асимптотики для багатьох класів задач математичної фізики, що приводять до сингулярно збурених рівнянь. На прикладі побудови розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння еліптичного типу проілюструємо ідею побудови кутових примежових функцій В.Ф. Бутузова:

$$\varepsilon^2 \Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y), \ (x,y) \in (0,a)\times(0,b) = \Omega, \ u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.12)$$

Асимптотичний розклад її розв'язку отримано у вигляді: $u = \bar{u} + \Pi + P,$ де $\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x,y)$ – регулярна частина асимптотики. Примежові функції Π в околах сторін прямокутника, що "ліквідують нев'язки", внесені в граничні умови на цих сторонах регулярною частиною асимптотики, та знайдені у вигляді

$$\Pi = \overset{(1)}{\Pi} + \overset{(2)}{\Pi} + \overset{(3)}{\Pi} + \overset{(4)}{\Pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta) + \overset{(2)}{\Pi}_k(\xi, y) + \overset{(3)}{\Pi}_k(x,\eta_*) + \overset{(4)}{\Pi}_k(\xi_*, y)),$$

де $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta_* = (b-y)/\varepsilon$, $\xi_* = (a-x)/\varepsilon$ – примежовошарові змінні відповідно в околах сторін $y = 0,\ x = 0,\ y = b,\ x = a$. Тут, наприклад, функції $\overset{(1)}{\Pi}_k$ визначаються за допомогою примежовошарового оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2} - k^2(x,0)$ $(\eta > 0)$ і граничних умов $\overset{(1)}{\Pi}_k(x,0) = -\overline{u}_k(x,0)$, $\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\infty) = 0$, зокрема: $\Pi_0(x,\eta) = -\overline{u}_0(x,0)\exp(-k(x,0)\eta)$; всі функції $\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta)$ для $k = 1, 2, \ldots$ мають експоненціальну оцінку: $\left|\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta)\right| \le c\exp(-\chi\eta)$. Кутові примежові функції P, які призначені для “ліквідації нев’язок”, породжених функціями $\overset{(j)}{I}_k(x,\eta)$ $(j = \overline{1,4})$, в околах вершин прямокутника отримані у вигляді

$$P = \overset{(1)}{P} + \overset{(2)}{P} + \overset{(3)}{P} + \overset{(4)}{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\overset{(1)}{P}_k(\xi,\eta) + \overset{(2)}{P}_k(\xi,\eta_*) + \overset{(3)}{P}_k(\xi_*,\eta_*) + \overset{(4)}{P}_k(\xi_*,\eta)).$$

Задачі для знаходження функцій $\overset{(1)}{P}_k(\xi,\eta)$ отримуються з вихідного рівняння (1.12) шляхом переходу до змінних $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, розкладом коефіцієнта $k^2(\varepsilon\xi, \xi\eta)$ в ряд за степенями ε з використанням стандартної процедури зрівнювання

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_k}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_k}{\partial\eta^2} - k^2(0,0)\overset{(1)}{P}_k = p_k(\xi,\eta),\ \ \xi > 0,\ \ \eta > 0, \qquad (1.13)$$

$$\overset{(1)}{P}_k(0,\eta) = -\overset{(1)}{\Pi}_k(0,\eta),\ \ \overset{(1)}{P}_k(\xi,0) = -\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi,0), \qquad (1.14)$$

$$\overset{(1)}{P}_k(\xi,\eta) \to 0 \ \text{ при } (\xi+\eta) \to \infty, \qquad (1.15)$$

де $p_k(\xi,\eta)$ рекурентно виражаються через функції $\overset{(1)}{P}_i(\xi,\eta)$ з номерами $i<k$, зокрема $p_0(\xi,\eta)=0$. Розв'язки задач (1.13)–(1.15) можна послідовно виразити в явному вигляді через функцію Гріна.

На основі методу Вішика–Люстерника у модифікації Бутузова в [17] розроблена методика побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених крайових задач, які характеризують процеси масоперенесення мігруючих у фільтраційному потоці розчинних речовин в криволінійних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії. Так, у праці [120] в області $G_z=\{z:\varphi(x,y)>0\}$, обмеженій деякою гладкою лінією рівного потенціалу: $L=\{z:\varphi(x,y)=0\}$, $z=\infty\in L$, $\varphi(\infty)=\infty$, для заданого ідеального фільтраційного поля (фону): $w=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ ($z_0\to 0+i\psi_0$, $z_*\to 0+i\psi_*$, $z_0,z_*\in L$, $\psi_0,\psi_*\in R$), $G_w=\{w:0<\varphi<\infty;$ $-\infty<\psi<\infty\}$ – область комплексного потенціалу) розглядалась задача процесу поширення забруднення:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right]-v_x(x,y)\frac{\partial C}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial C}{\partial t},\ (x,y,t)\in G_z\times(0,\infty),\quad (1.16)$$

$$C(x,y,t)=C_*^0(x,y,t),\ (x,y)\in L,\ t\in(0,\infty),\quad (1.17)$$

$$C(x,y,0)=C_0^*(x,y),\ (x,y)\in G_z,\quad (1.18)$$

де $C(x,y,t)$– концентрація розчинної речовини в точці (x,y) у момент часу t, $C_*^0(x,y,t)$, $C_0^*(x,y)$ – задані обмежені, достатньо гладкі та узгодженні між собою вздовж $\{(x,y,t):(x,y)\in L,t=0\}$ функції, $\overline{v}(z)=v_x-iv_y=\partial w/\partial z$, ε – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр, в силу припущення переваги конвективної складової течії над дифузійною). Як відомо [120], у відповідній області $G=G_w\times(0,t)$ дана задача має вигляд

$$\begin{cases}\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right]-v^2(\varphi,\psi)\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial U}{\partial t},\\ U\big|_{t=0,\ \varphi>0}=U_0^*(\varphi,\psi),\ U\big|_{\varphi=0,t\ge 0}=U_*^0(\psi,t),\end{cases}\quad (1.19)$$

де $U(\varphi,\psi,t)=C(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $U_0^*(\varphi,\psi)=C_0^*(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi))$, $U_*^0(\psi,t)=$ $=C_*^0(x(0,\psi),y(0,\psi),t)$, $v^2(\varphi,\psi)=\bar{\vec{v}}\cdot\vec{v}=\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^{-2}$. Розв'язок цієї задачі з точністю $|R_2|=O(\varepsilon^2)$ у припущенні достатньої гладкості та узгодженості граничної та початкової умов знайдено у вигляді асимптотичного ряду:

$$U(\varphi,\psi,t)=U_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon U_1(\varphi,\psi,t)+R_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{1.20}$$

де

$$U_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}U_0^*(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi),\ t<f(\varphi,\psi);\\ U_*^0(\varphi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\geq f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$U_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\int\limits_0^{\varphi}\frac{g(\tilde{\varphi},\psi,\ f^{-1}(f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi)))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}d\tilde{\varphi};\\ \int\limits_0^{t}g(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t}),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\end{cases}$$

$f(\varphi,\psi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}$, $f^{-1}-$ функція обернена до f за змінною φ.

Зауважимо, що якщо за умов узгодженості функцій $U_0^*(\varphi,\psi)$ та $U_*^0(\varphi,t)$ виконується лише умова неперервності: $U_0^*(0,\psi)=U_*^0(\psi,0)$; $-\infty<\psi<\infty$, то функція $U_0(\varphi,\psi,t)$ (не кажучи вже про $U_1(\varphi,\psi,t)$) не є достатньо гладкою вздовж характеристик $t=f(\varphi,\psi)$ $(\forall\varphi\in(-\infty,\infty))$, а тому функція (1.20) не задовольнятиме рівняння (1.19) в області G. З метою усунення проблеми негладкості вздовж характеристики $t=f(\varphi,\psi)$ запропонована така "процедура" згладження. Спочатку замість негладкої функції $U_0(\varphi,\psi,t)$ розглянемо

$$\tilde{U}_0(\varphi,\psi,t)=\frac{1}{2}(1-\Phi(\theta))U_0^*(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi)+$$
$$+\frac{1}{2}(1+\hat{O}(\theta))U_*^0(\varphi,t-f(\varphi,\psi)),$$

де

$$\hat{O}(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\theta}e^{-\tau^2}d\tau\,,\ \theta=\frac{t-f(\varphi,\psi)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Як неважко переконатись, функція

$$U\approx\tilde{U}_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon U_1(\varphi,\psi,t)=\tilde{U}(\varphi,\psi,t)$$

задовольняє рівняння (1.19) з вказаною точністю $O(\varepsilon^2)$, але порушує виконання початкової та граничних умов, які задовольнялись функцією $U_0(\varphi,\psi,t)$.

З метою усунення нев'язки у початкових та граничних умовах побудовано функцію $S(\varphi,\psi,t)=S_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon S_1(\varphi,\psi,t)$ таким чином, щоб функція $U=\tilde{U}_0+S$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла рівняння (1.19) та початковій і граничній умовам:

$$\left[\begin{array}{l}\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[\dfrac{\partial^2(\tilde{U}_0+S)}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2(\tilde{U}_0+S)}{\partial\psi^2}\right]-v^2(\varphi,\psi)\dfrac{\partial(\tilde{U}_0+S)}{\partial\varphi}=\\ =\dfrac{\partial(\tilde{U}_0+S)}{\partial t}+O(\varepsilon^2),\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\tilde{U}_0+S\big|_{t=0,\ \varphi>0}=U_0^*(\varphi,\psi)+O(\varepsilon^2),\\ \tilde{U}_0+S\big|_{\varphi=0,t\geq 0}=U_*^0(\varphi,t)+O(\varepsilon^2).\end{array}\right.$$

Перейшовши в даних співвідношеннях від змінних (φ,ψ,t) до змінних (ξ,ψ,t) за формулами $\xi=\dfrac{t-f(\varphi,\psi)}{\sqrt{\varepsilon}}$; $\varphi=f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\xi,\psi)$ та розклавши функцію $v^2(\varphi,\psi)=v^2(f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\xi,\psi),\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\xi=0$, отримаємо для знаходження функцій S_0 *і* S_1 такі задачі:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S_0}{\partial t}-a(\psi,t)\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial\xi^2}=0,\\ S_0\big|_{t=0,\ \xi\leq 0}=0,\quad S_0\big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\xi,\ \xi\leq 0}=0,\end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_1}{\partial t} = a(\psi,t)\left(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial \xi^2} + b(\psi)(1-\xi^2)e^{-\xi^2}\right), \\ S_1\big|_{t=0,\ \xi\le 0} = \xi\dfrac{b(\psi)}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} e^{-r^2}dr, \quad S_1\big|_{\substack{t=\sqrt{\varepsilon}\xi \\ \xi\le 0}} = \xi\dfrac{b(\psi)}{2}\displaystyle\int_{\xi}^{\infty} e^{-r^2}dr, \end{cases} \tag{1.21}$$

де

$$\begin{cases} b(\psi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(v^2(0,\psi)\dfrac{\partial^2 U_0^*(0,\psi)}{\partial\psi} + \dfrac{\partial U_*^0(\varphi,0)}{\partial t}\right), \\ a(\psi,t) = v^2(f^{-1}(t,\psi),\psi) + v^2(f^{-1}(t,\psi),\psi)(v'_\psi(f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\xi,\psi),\psi))^2. \end{cases}$$

Очевидно, що $S_0(\varphi,\psi,t)$=0. Замінивши в задачі (1.21) крайову умову на промені $\left\{t=\sqrt{\varepsilon}\xi,\ \xi>0\right\}$ на крайову умову на промені $\{t=0,\ \xi>0\}$ маємо з точністю $O(\varepsilon^2)$:

$$S_1(\xi,\psi,t) = \frac{b(\psi)}{2}\left(\xi\int_{\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}}^{\xi} e^{-s^2}ds - \sqrt{\tau}e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}}\right).$$

Зауважимо також, що аналогічно до цього, у випадку достатньої гладкості та узгодженості функцій $U_0^*(\varphi,\psi)$ та $U_*^0(\varphi,t)$ розв'язок задачі (1.19) з точністю $O(\varepsilon^N)$ можна знайти у вигляді асимптотичного ряду: $U = U_0 + \sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i U_i + R_N(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$.

Причому члени регулярної частини U_i $(i=\overline{1,N})$ матимуть вигляд

$$U_i(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{g_i(\tilde{\varphi},\psi,\ f^{-1}(t-f(\varphi,\psi)+f(\tilde{\varphi},\psi)))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}d\tilde{\varphi}; \\ \displaystyle\int_0^{t} g_i(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t}),\psi,\tilde{t})d\tilde{t}, \end{cases}$$

де

$$g_i(\varphi,\psi,t) = v^2(\varphi,\psi)\left[\frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial\psi^2}\right].$$

Якщо область фільтрації G_z обмежена двома еквіпотенціальними лініями $\varphi(x,y)=0$ і $\varphi(x,y)=\varphi^*$, то у відповідній області комплексного потенціалу – вертикальній смузі $G_w = \left\{w: -\infty < \psi < +\infty,\ 0 < \varphi < \varphi^*\right\}$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} \varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Delta U - v^2(\varphi,\psi)\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial U}{\partial t}; \\ U(0,\psi,t) = \tilde{U}_1(\psi,t), \\ U(\varphi^*,\psi,t) = \tilde{U}_2(\psi,t), \\ U(\varphi,\psi,0) = \tilde{U}_0(\varphi,\psi), \end{cases} \tag{1.22}$$

шукається у вигляді

$$U \approx U_0 + \varepsilon U_1 + \Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2 + R_2. \tag{1.23}$$

Тут розв'язок $U_0 + \varepsilon U_1$ задачі (1.19), очевидно, задовольняє з точністю до $O(\varepsilon^2)$ рівняння, початкову та першу з граничних умов (1.22). Щоб задовольнити другу із граничних умов, побудуємо зовнішню примежову функцію $\Pi = \Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2$ в околі $\varphi = \varphi^*$ таким чином, щоб функція $U(\varphi,\psi,t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього зробимо заміну (розтяг):

$$\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon},\ \varphi = \varphi^* - \varepsilon\xi.$$

Врахувавши (1.23), оператор $L\Pi = \varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Delta\Pi - v^2(\varphi,\psi)\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial\Pi}{\partial t}$ запишемо у вигляді (у змінних (ξ,ψ,t)):

$$L\Pi = v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\left[\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \varepsilon\frac{\partial^2\Pi}{\partial\psi^2}\right] + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right] - \frac{\partial\Pi}{\partial t}.$$

У результаті розкладу $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$ (за степенями $-\xi\varepsilon$), використання стандартної процедури "прирівнювання" та розв'язання отриманих при цьому граничних задач для звичайних

диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною одержимо

$$\Pi_0(\xi,\psi,t) = (\tilde{U}_2(\psi,t) - U_0(\varphi^*,\psi,t)e^{-\xi},$$

$$\Pi_1(\xi,\psi,t) = -U_1(\varphi^*,\psi,t)e^{-\xi} - v^{-2}(\varphi^*,\psi)\xi\Pi_{0t}(\xi,\psi,t),$$

$$\Pi_2(\xi,\psi,t) = -((M_1 + M_2)\xi - M_2\xi^2/2)e^{-\xi},$$

де

$$M_1 = -(v^{-2}(\varphi^*,\psi)U_{1t}(\varphi^*,\psi,t) + (\tilde{U}_{2\psi\psi}(\psi,t) - U_{0\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t))),$$

$$M_2 = v^{-4}(\varphi^*,\psi)\alpha(\tilde{U}_{2t}(\psi,t) - U_{0t}(\varphi^*,\psi,t)) - \\ -v^{-4}(\varphi^*,\psi)(\tilde{U}_{2tt}(\psi,t) - U_{0tt}(\varphi^*,\psi,t)),$$

$$\alpha = -2v(\varphi^*,\psi)v'(\varphi^*,\psi).$$

У випадку, коли область фільтрації обмежена двома еквіпотенціальними лініями $\varphi(x,y)=0$ і $\varphi(x,y)=\varphi^*$ та двома лініями току $\psi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=Q$, де, окрім наведених вище в області комплексного потенціалу $G_w = \left\{w: \quad 0<\psi<\theta,\ 0<\varphi<\varphi^*\right\}$ (див. рис. 1.2 а, б) додаються ще дві граничні умови:

$$U(\varphi,0,t) = \tilde{U}_3(\varphi,t), U(\varphi,Q,t) = \tilde{U}_4(\varphi,t), \tag{1.24}$$

що характеризують вплив бокових джерел забруднень вихідної області, розв'язок відповідної задачі (1.22), (1.24) має вигляд

$$U \approx (U_0 + \varepsilon U_1) + (\Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2) + (P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{\frac{1}{2}} + \varepsilon P_1 + \sqrt{\varepsilon^3}P_{\frac{3}{2}}) + \\ +(\overline{P}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{P}_{\frac{1}{2}} + \varepsilon\overline{P}_1 + \sqrt{\varepsilon^3}\overline{P}_{\frac{3}{2}}) + R_2,$$

де зовнішні примежові функції $P = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{\frac{1}{2}} + \varepsilon P_1 + \sqrt{\varepsilon^3}P_{\frac{3}{2}}$, $\overline{P} = \overline{P}_0 + \\ +\sqrt{\varepsilon}\overline{P}_{\frac{1}{2}} + \varepsilon\overline{P}_1 + \sqrt{\varepsilon^3}\overline{P}_{\frac{3}{2}}$ знаходяться внаслідок розв'язання мішаних задач для рівнянь вигляду

$$v^2(\varphi,0)(P_{\frac{1}{2}\eta\eta}+P_{\frac{1}{2}\varphi})=K(\varphi,\eta,t),\ v^2(\varphi,Q)(\overline{P}_{\frac{1}{2}\mu\mu}+\overline{P}_{\frac{1}{2}\varphi})=\overline{K}(\varphi,\mu,t).$$

Тут $\eta=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\dfrac{Q-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – розтяги в околах межових ліній відповідно $\psi=0$ та $\psi=Q$.

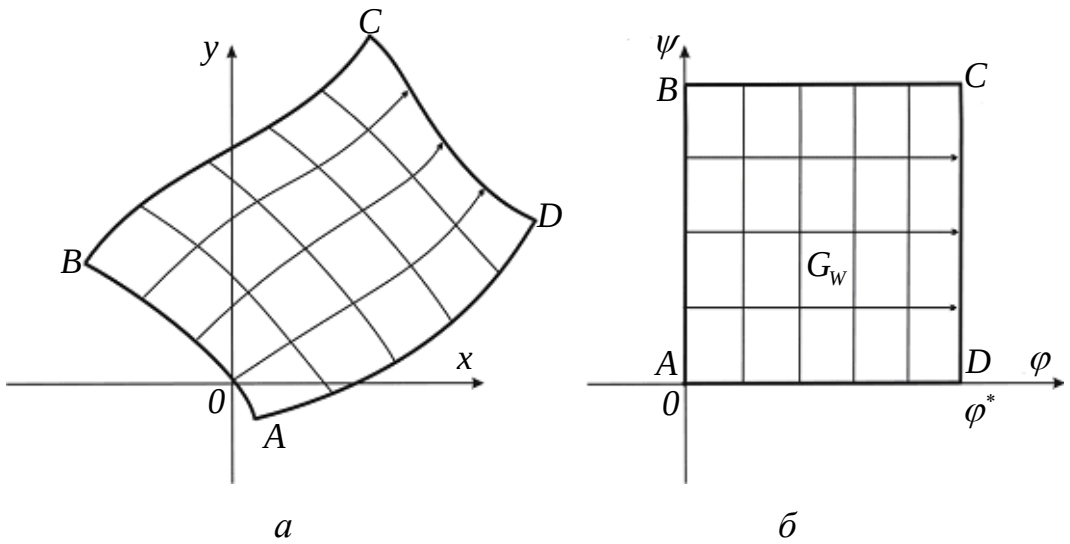


Рис. 1.2. Обмежена лініями течії та еквіпотенціальними лініями область фільтрації (*а*) та відповідна їй область комплексного потенціалу (*б*)

Запропоновані підходи використано [7,8] при побудові асимптотичних наближень розв'язків нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях з вільними межами, які виникають при математичному моделюванні та дослідженні процесів розмиву дна русел. В основу побудованої моделі покладено припущення, що процес деформації дна русла відбувається за рахунок відриву, перенесення і відкладання частинок і може бути описаний (враховуючи відому дифузійну модель процесу перенесення зважених частинок ґрунту турбулентним водним потоком Маккавеєва) за допомогою рівняння

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(D(V(u(x,y,l(x,y,c,t)),v(x,y,l(x,y,c,t))))\frac{\partial c}{\partial y}\right)-$$
$$-u(x,y,l(x,y,c,t))\frac{\partial c}{\partial x}-\left(v(x,y,l(x,y,c,t))-w_0\right)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t},\qquad(1.25)$$

де εD – "фіктивний" коефіцієнт дифузії, який зв'язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину, ε – малий параметр; $c(x,y,t)$ – концентрація зважених (змулених) частинок ґрунту у точці (x,y) в момент часу t; $l(x,y,c,t)$ – невідома функція, що характеризує розміщення поверхні

дна в даний момент часу, $l(x,y,c,t)>0$; $\vec{V}(u(x,y,l),v(x,y,l))$ – вектор осередненої швидкості водного потоку; w_0 – швидкість осідання частинок у стоячій воді. При цьому коефіцієнт D, в залежності від побудови моделей конкретних процесів, брався залежним як від швидкості потоку (наприклад, $D=\chi v^{\beta}$, $\chi,\beta>0$ – згідно з гіпотезою Маккавеєва про коефіцієнт турбулентного обміну), так і від прискорення. Врахування ж впливу зміни положення поверхні дна на розподіл осереднених компонент швидкості здійснюється на основі модельних співвідношень типу

$$u(x,z,t)=\frac{u_0}{(1+\alpha)^m}\left(\frac{l(x,t)-z}{l(x,t)}+\alpha\right)^m\frac{l_0}{l(x,t)},$$

$$w(x,z,t)=u(x,z,t)\frac{l'(x,t)z}{l(x,t)}, \tag{1.26}$$

де u_0 – швидкість рідини на її поверхні; l_0 – деяке осереднене значення глибини потоку; α – досить мале число, введення якого забезпечує ненульові значення швидкості потоку поблизу поверхні дна.

Для моделювання зміни у часі положення поверхні дна $l(x,y,c,t)$ (вільної ділянки межі вихідної області) можна використати умову, яка пов'язує потік донних частинок ґрунту через вільну ділянку межі та швидкість зміни положення поверхні дна:

$$\left[\varepsilon D\frac{\partial c}{\partial n}-v\cdot c\right]\Bigg|_{y=l(x,y,c,t)}=c_*\frac{\partial l(x,y,c,t)}{\partial t}, \tag{1.27}$$

де n – одиничний вектор нормалі до вільної ділянки границі області, орієнтований в її середину, c_* – концентрація "незчеплених одна з одною" частинок ґрунту поблизу поверхні дна.

Зокрема, розглядаючи процес обтікання незатопленої нормально розташованої півзагати водним потоком, у якому плановий розподіл швидкості поблизу її поверхні достатньо близький до випадку руху ідеальної рідини (і може бути ним замінений), переходячи від вихідної області $G=\{(x,y,z,t):\ -\infty<x<+\infty,\ 0<y<+\infty,\ 0<z<l(x,y,t),\ t>0\}\setminus\{(x,y,z,t):\ x=0,\ 0<y\le B,\ 0<z<l(x,y,t),\ t>0\}$ до відповідної області G_* змінних (φ,ψ,z,t), $G_*=\{(\varphi,\psi,z,t):\ -\infty<\varphi<+\infty,\ 0<\psi<+\infty,\ 0<z<l(\varphi,\psi,t)=$ $=l(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t),\ t>0\}$, обмеженої зверху горизонтальною площиною $z=0$ – поверхнею рідини, береговою стінкою з півзагатою $\{(\varphi,0,z,t):\ -\infty<\varphi<+\infty,\ 0<z<l(\varphi,0,t)\}$, вільною поверхнею $L=\{(\varphi,\psi,t):\ z=l(\varphi,\psi,t)\}$, для відповідної модельної задачі:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(D\left(V\left(\varphi,\psi,z,l\left(\varphi,\psi,t\right)\right)\right)\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\left(u_0^2\left(\varphi,\psi\right)+v_0^2\left(\varphi,\psi\right)\right)l_0}{\left(1+\alpha\right)^m l\left(\varphi,\psi,t\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{l\left(\varphi,\psi,t\right)-z}{l\left(\varphi,\psi,t\right)}+\alpha\right)^m\frac{\partial c}{\partial \varphi}-\left(w\left(\varphi,\psi,z,l\left(\varphi,\psi,t\right)\right)+w_0\right)\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial t};\quad (1.28)$$

$$c\left(\varphi,\psi,z,0\right)=\overline{c}\left(\varphi,\psi,z\right);\ l\left(\varphi,\psi,0\right)=l_0;\quad (1.29)$$

$$c\left(\varphi,\psi,z,t\right)\Big|_{z=0}=0,\ c\left(\varphi,\psi,z,t\right)\Big|_{z=l\left(\varphi,\psi,t\right)}=c_*,\ \frac{\partial c\left(\varphi,\psi,z,t\right)}{\partial \psi}\Bigg|_{\psi=0}=0;\quad (1.30)$$

$$\Bigg(\varepsilon D\left(V\left(\varphi,\psi,z,l\left(\varphi,\psi,t\right)\right)\right)\frac{\partial c}{\partial n}-$$

$$-\left(V_n\left(\varphi,\psi,z,l\left(\varphi,\psi,t\right)\right)+w_{0n}\right)c\Bigg)\Bigg|_{z=l\left(\varphi,\psi,t\right)}=c_*\frac{d\,l}{d\,t},\quad (1.31)$$

отримуємо формулу для визначення положення поверхні дна [7, 8]:

$$l(s,h,t_{k+1})=l(s,h,t_k)+\frac{\Delta t}{c_*\sqrt{1+(u_0^2(s,h)+v_0^2(s,h))(l_s'^2(s,h,t_k)+l_h'^2(s,h,t_k))}}\times$$

$$\times\Bigg[-\frac{\varepsilon l_0 D_k(s,h,l_0)}{l(s,h,t_k)}\left(\left(u_0^2(s,h)+v_0^2(s,h)\right)\left(l_s'^2(s,h,t_k)+l_h'^2(s,h,t_k)\right)+1\right)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial r}\left(c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})+\varepsilon c_{1,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})\right)-w_0\left(\left(u_0^2\left(s,h\right)+v_0^2\left(s,h\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(l_s'^2\left(s,h,t_k\right)+l_h'^2\left(s,h,t_k\right)\right)+1\right)\left(c_*-c_{0,k+1}\left(s,h,l_0,t_{k+1}\right)-\varepsilon c_{1,k+1}\left(s,h,l_0,t_{k+1}\right)\right)-$$

$$-w_0c_*+\frac{\varepsilon D_k\left(s,h,l_0\right)\left(l_s'^2\left(s,h,t_k\right)+l_h'^2\left(s,h,t_k\right)\right)}{l(s,h,t_k)w_0}\left(u_0^2\left(s,h\right)+v_0^2\left(s,h\right)\right)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{\left(u_0^2\left(s,h\right)+v_0^2\left(s,h\right)\right)l_0\alpha^m}{\left(1+\alpha\right)^m}\frac{l_s'\left(s,h,t_k\right)D_k\left(s,h,l_0\right)-l\left(s,h,t_k\right)D_{ks}'\left(s,h,l_0\right)}{D_k\left(s,h,l_0\right)}\times$$

$$\times\left(c_*-c_{0,k+1}\left(s,h,l_0,t_{k+1}\right)\right)+\frac{\left(u_0^2\left(s,h\right)+v_0^2\left(s,h\right)\right)l_0\alpha^m}{\left(1+\alpha\right)^m}\frac{\partial c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})}{\partial s}+$$

$$+l\left(s,h,t_k\right)\frac{\partial c_{0,k+1}(s,l_0,t_{k+1})}{\partial t}\Bigg)\Bigg],\quad (1.32)$$

де $s = \varphi$, $h = \psi$, $r = \dfrac{l_0 z}{l(\varphi, \psi, t)}$.

На рис. 1.3 схематично зображено розрахункову конфігурацію поверхні дна поблизу оголовка розташованої під прямим кутом до берегової лінії півзагати в деякий момент часу t =10с (розрахунок проводився при таких вихідних даних: u_∞=1м/с, B=1м, ґрунт – однорідний, з діаметром частинок 1мм).

Аналогічно будується математична модель та проводиться дослідження процесу деформації русла поблизу циліндричної мостової опори. На рис. 1.4 наведено приклад розрахункової конфігурації поверхні дна для такого випадку. Зауважимо, що описані математичні моделі процесів деформації русла стосуються випадків, коли руслоформувальні наноси переносяться потоком переважно у змуленому стані.

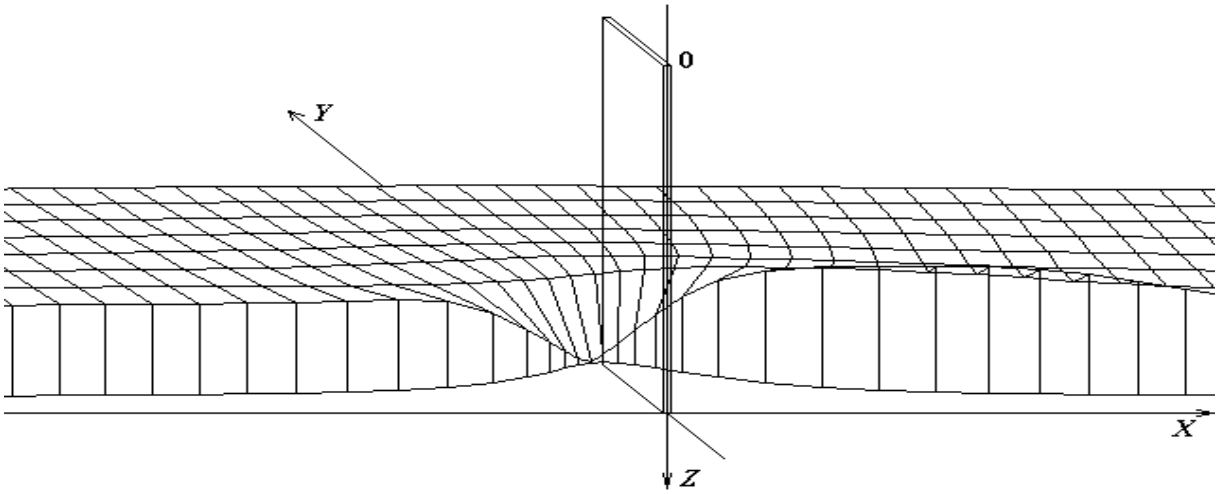


Рис. 1.3. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати

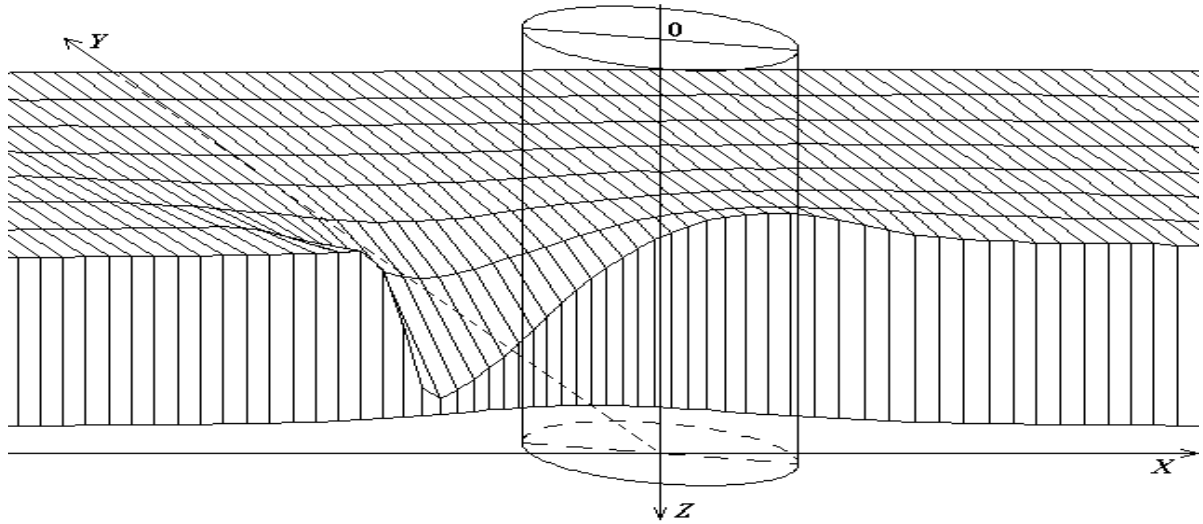


Рис. 1.4. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної перешкоди (мостової опори)

1.3. Підходи до моделювання нелінійних процесів типу "фільтрація–суфозія" в середовищах, схильних до деформації

В даному параграфі наведені приклади побудови нелінійних моделей процесів фільтрації (плоска течія в осесиметричному пласті, радіальна течія в кулі) в зернистих середовищах, де при великих градієнтах напору відбуваються суфозійні деформації. При врахуванні такого роду деформацій пропонується локально "збурювати" класичну просторово-часову лінійність закону Дарсі, при розв'язанні відповідних нелінійних задач пропонується процедура почергового "заморожування" коефіцієнта фільтрації (при розрахунках напору та його градієнта на кожному етапі) та градієнта напору при врахуванні зворотного впливу ("поправках" коефіцієнта фільтрації). Перевагами такого підходу є те, що при врахуванні зворотного впливу градієнта напору на коефіцієнт фільтрації (при переході від лінійної задачі до нелінійної) не потрібно починати "все спочатку", достатньо отримані раніше розв'язки доповнювати відповідними поправками.

В якості вихідної базової (як і раніше в п. 1.1), розглянемо модель стаціонарного процесу осесиметричної фільтрації в круговому недеформованому пласті $r_0 \le r \le R_0$ (див, напр., [25]) у вигляді такої задачі:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\kappa\frac{\partial h}{\partial r}\right)=0\,,\ h\left(r_0\right)=h_0\,,\ h\left(R_0\right)=H_0\,, \qquad (1.33)$$

де r_0 – радіус свердловини (дрени); R_0 – радіус області впливу; $\kappa=\kappa_0$ – коефіцієнт фільтрації $\left(\kappa_0=\mathrm{const}\right)$; $h_0<H_0$ (розглядається притік до свердловини); $h=h\left(r\right)$ – напір в точці r (на колі радіуса r), звідки

$$h(r)=h_0(r)=\frac{H_0-h_0}{\ln\frac{R_0}{r_0}}\ln\frac{r}{r_0}+h_0,\ I(r)=I_0(r)=\frac{\partial h_0}{\partial r}=\frac{dh_0}{dr}=\frac{H_0-h_0}{\ln\frac{R_0}{r_0}}\frac{1}{r}. \quad (1.34)$$

При великих градієнтах напору (більших за критичні значення, $I>I_{\hat{e}\eth}$) навколо свердловини відбуваються суфозійні деформації ґрунту (переміщення та зупинка дрібних частинок, переорієнтація у просторі частинок, які формують скелет, тощо), що приводить до зміни коефіцієнта фільтрації як у просторі, так і в часі, а, отже, дана модель (1.33), побудована за класичною (лінійною) формою закону Дарсі $v=-\kappa I$, стає неточною, а, в ряді випадків, і зовсім непридатною.

Збурення коефіцієнта фільтрації, отже, і градієнта напору, в найпростіших випадках отримуються таким чином. В результаті розв'язку рівняння $I_0(r)=I_{\hat{e}\eth}$ знаходимо r_{c0} – нульове наближення точки-радіуса розділення збуреної $(\kappa\neq\kappa_0)$ та незбуреної $(\kappa=\kappa_0)$ зон: $r_{c0}=(H_0-h_0)/I_{\text{кр}}\ln(R_0/r_0)$. В зоні збурення $r_0\le r\le r_{c0}$ певним чином змінюємо коефіцієнт фільтрації, поклавши $\kappa=\kappa_0 r_{c0}/r$.

Напір в даному випадку шукаємо у вигляді $h(r)=h_1(r)=h_{11}(r)$, якщо $r_0\le r\le r_{c0}$, або $h_1(r)=h_{12}(r)$, якщо $r_{c0}\le r\le R_0$, де $h_{11}(r)$ та $h_{12}(r)$ є розв'язками таких "неповних" задач:

$$d^2h_{11}(r)/dr^2=0,\ h_{11}(r_0)=h_0,\ r_0\le r\le r_{c0},$$
$$d(rdh_{12}(r))/dr=0,\ h_{12}(R_0)=H_0,\ r_{c0}\le r\le R_0$$

при умовах узгодженості (спряження) у точці поділу зон $h_{11}(r_{c0})=h_{12}(r_{c0})$, $dh_{11}(r_{c0})/dr=dh_{12}(r_{c0})/dr$. Внаслідок їх розв'язання матимемо

$$h_1(r)=\begin{cases}h_{11}(r)=h_0+\dfrac{H_0-h_0}{r_{c0}\Phi}(r-r_0),\\ h_{12}(r)=H_0-\dfrac{H_0-h_0}{\Phi}\ln\dfrac{R_0}{r},\end{cases} \quad (1.35)$$

звідки

$$I_1(r)=\begin{cases} I_{11}(r)=\dfrac{H_0-h_0}{r_{c0}\Phi}, & r_0\le r\le r_{c0}, \\ I_{12}(r)=\dfrac{H_0-h_0}{\Phi}\dfrac{1}{r}, & r_{c0}\le r\le R_0, \end{cases} \tag{1.36}$$

де $\Phi=1-r_0/r_{c0}+\ln\left(R_0/r_{c0}\right)$. Легко бачити, що для довільного $r\in\left[r_0,r_{c0}\right]$ виконується нерівність $I_1>I_{\hat{e}\eth}$, а єдиний корінь $r=r_{c1}$ (перше наближення точки поділу) рівняння $I=I_{\hat{e}\eth}$ задовольняє нерівність $r_{c0}\le r_{c1}\le R_0$, причому

$$r_{c1}=\frac{1}{I_{\hat{e}\eth}}\frac{H_0-h_0}{1-r_0/r_{c0}-\ln\left(R_0/r_{c0}\right)}.$$

Аналогічно знаходимо наступні наближення точки поділу:

$$r_{cn}=\frac{1}{I_{\text{кр}}}\frac{H_0-h_0}{1-r_0/r_{c(n-1)}+\ln\left(R_0/r_{c(n-1)}\right)},\qquad n=2,3,.... \tag{1.37}$$

Зазначимо, що для довільного n виконується нерівність $r_{cn}>r_{c(n-1)}$. Наприклад, для $n=1$ дане твердження випливає із нерівності

$$\frac{1}{1-r_0/r_{c0}-\ln\left(R_0/r_{c0}\right)}>\frac{1}{\ln\left(R_0/r_0\right)}.$$

Крім того, відображення (2.5) є стискаючим. Отже, існує єдина точка r_c поділу збуреної і незбуреної зон, яка може бути знайдена внаслідок розв'язку рівняння

$$r_c=\frac{1}{I_{\hat{e}\eth}}\frac{H_0-h_0-I_{\hat{e}\eth}r_0}{1+\ln\left(R_0/r_c\right)}\ (\text{або } r_c=\lim_{n\to\infty}r_{cn}). \tag{1.38}$$

Встановлено, що із зростанням радіуса дрени r_0 радіус r_c поділу зон збільшується, причому для $r_0=r_0\left(R_0\right)=R_0-\left(H_0-h_0\right)/I_{\hat{e}\eth}$ незбурена зона зникає $\left(r_c=R_0\right)$, а також встановлено монотонно спадну залежність зони збурення від критичного градієнта та значення $I_{\text{кр}}$, при якому вся область буде збуреною: $I_{\hat{e}\eth}\left(R_0\right)=\left(H_0-h_0\right)/\left(R_0-r_0\right)$, що є, в деякому розумінні, середнім значенням градієнта вихідної задачі.

На рис. 1.5, як приклад, зображені графіки зміни градієнтів напору

$$I_i(r)=\begin{cases} I_{i1}(r)=\dfrac{H_0-h_0}{r_{c(i-1)}\left(1-r_0/r_{c(i-1)}+\ln\left(R_0/r_{c(i-1)}\right)\right)}, & r_0\le r\le r_{c(i-1)},\\ I_{i2}(r)=\dfrac{H_0-h_0}{r\left(1-r_0/r_{c(i-1)}+\ln\left(R_0/r_{c(i-1)}\right)\right)}, & r_{c(i-1)}\le r\le R_0,\end{cases}$$

та коефіцієнта фільтрації ґрунту

$$\kappa_i(r)=\begin{cases}\kappa_0\, r_{c(i-1)}/r, & r_0\le r\le r_{c(i-1)},\\ \kappa_0, & r_{c(i-1)}\le r\le R_0,\end{cases}$$

у збурених та незбурених зонах для даної моделі. Як бачимо, зростання коефіцієнта фільтрації ґрунту завдяки вимиванню суфозійних частинок із зони $[r_0, r_{c0}]$ в порожнину дрени приводить до перерозподілу градієнтів: для $r_{m1}<r\le R_0$ вони стають більшими за початкові, $I_1\ge I_0$, а для $r_0<r\le r_{m1}$ – меншими, тобто область із градієнтами $I\ge I_{êð}$ поширюється від дрени в масив фільтрації. Таке явище, в даному випадку, відбувається до моменту, коли градієнти напору стають меншими або рівними за $I_{êð}$.

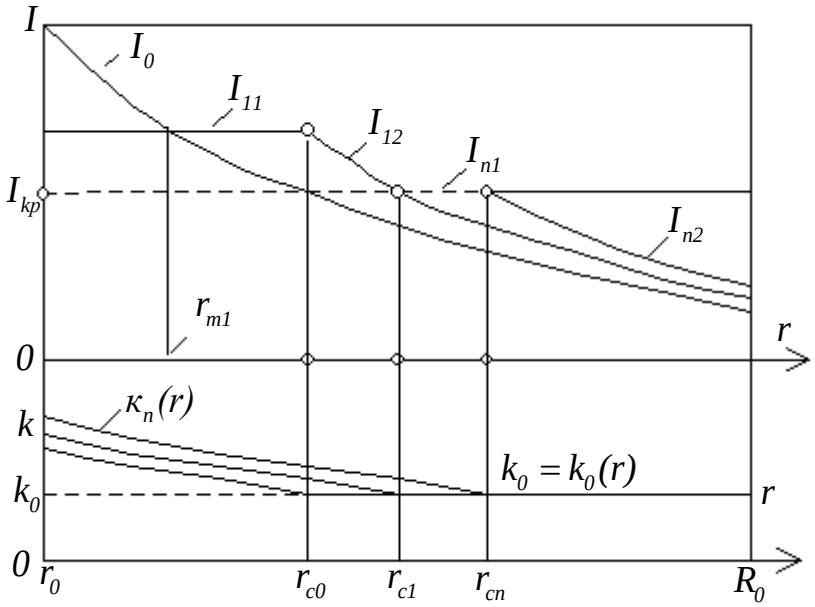


Рис. 1.5. Графіки залежностей $I=I_i(r)$, $\kappa=\kappa_i(r)$ при $i=\overline{0,n}$ для моделі $\kappa=\kappa_0 r_{ci}/r$

З метою врахування розвитку суфозійних процесів, а, отже, зміни коефіцієнта фільтрації в часі, доповнимо модельну задачу (1.33), (1.34) наступним чином. Розглядаючи елементарний об’єм пористого середовища,

яке містить у собі як рідину, так і суфозійні (тобто рухомі) частинки, приходимо до загального рівняння балансу маси для осесиметричної фільтрації:

$$\rho\left(\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rn\bar{U}\right)\right)+\rho_s\left(\frac{\partial m_c}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rm_cV_c\right)\right)=0, \qquad (1.39)$$

де ρ, ρ_s – відповідно густина води та частинок ґрунту; n – пористість ґрунту; m_c – кількість (за об'ємом) суфозійних частинок в одиниці об'єму ґрунту; $\bar{U}$ – дійсна (фактична) середня швидкість води в порах; V_c – швидкість руху суфозійних частинок. На відміну від процесів масообміну [173], в суфозійних процесах (діаметр суфозійних частинок d_c більший за 0,03 мм) перетворення маси однієї компоненти в масу іншої не відбувається, тому загальне рівняння балансу розкладається на два незалежні:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV)=0, \quad \frac{\partial m_c}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rm_cV_c\right)=0, \qquad (1.40)$$

а звідси приходимо до необхідності введення, крім рівняння руху рідини (закону Дарсі), ще і рівняння для швидкості руху суфозійних частинок. Аналіз дослідних даних та відповідних теоретичних розробок показує, що швидкість суфозійних частинок можна визначити за формулою

$$V_c=\bar{U}-\bar{U}_{\text{кр}}, \qquad (1.41)$$

де $\bar{U}_{êð}$ – дійсна середня швидкість води в порах, при якій починається рух частинки. Тепер, записуючи рівняння стану: $\kappa=a_kn$; $n+m_c+m_{ck}=1$ $(n+m_c=1-m_{ck}, \quad a_n=1-m_{ck}=const)$ і переходячи від дійсних середніх швидкостей до фіктивних за формулою $\bar{U}=nV$, отримуємо систему двох рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\kappa}{\partial t}-\dfrac{a_k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\kappa\dfrac{\partial h}{\partial r}\right)=0, \quad r_o\le r\le R_o,\\ \dfrac{\partial\kappa}{\partial t}+\dfrac{a_k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\left[a_ka_n-\kappa\right]\left[\dfrac{\partial h}{\partial r}-I_{kp}\right]\right)=0,\end{cases} \qquad (1.42)$$

з двома невідомими функціями: $h(r,t)$, $\kappa=\kappa(r,t)$, де $\left[a\right]=a$, якщо $a>0$, $\left[a\right]=0$, якщо $a\le 0$ (тобто друге рівняння вироджується до $\partial\kappa/\partial t=0$ при $\kappa(r,t)\ge a_ka_n$ або при $\partial h/\partial r\le I_{kp}$). При цьому $\kappa(r,t)=\kappa_o$, якщо

$r_c(t) \le r \le R_o$; $\kappa(r,t) = \kappa_в = a_k a_n$, якщо $r_o \le r \le r_в(t)$, де $r_{\hat{a}}(t)$, $r_c(t)$ – відповідно розв'язки рівнянь $\kappa(r,t) = a_k a_n$ ($\kappa_в$ – граничне значення коефіцієнта фільтрації, коли настає повний вимивання суфозійних частинок) і $I(r,t) = I_{kp}$.

Можливі різноманітні постановки задач для даної системи рівнянь. Розглянемо декілька з них.

1. Нехай при $t = 0$, $r_o \le r \le R_o$ миттєво встановлюється поле градієнтів напору $I(r) = (H_o - h_o)/(r \ln(R_o / r_o))$, а, отже, відоме значення $r_c(0)$, а саме $r_c(0) = r_{co} = (H_o - h_o)/(I_{kp} \ln(R_o / r_o))$. Тоді при $t > 0$ можна отримати розв'язок системи (1.42) при наступних умовах:

$$\begin{cases} h(r_o,t) = h_o, \quad h(R_o,t) = H_o, \quad \kappa(r,0) = \kappa_o (r_o \le r \le R_o), \\ \kappa(r_c(t),t) = \kappa_o, \quad \kappa(r_в(t),t) = \kappa_в. \end{cases}$$

2. З метою більш точного описування процесу на початковій стадії, коли відбувається інтенсивна зміна градієнтів напору не тільки в просторі, але й, особливо, в часі, приймемо наступні умови: $h(R_o,t) = H_o$, $h(r_o,t) = h_o(t) = h_{o*}(t)$, якщо $0 \le t \le t_*$ ($h_{o*}(t)$ – наперед задана достатньо гладка функція), $h_o(t) = h_o = const$, якщо $t > t_*$; $h_o(0) = H_o = h(r,0)$ $(r_o \le r \le R_o)$, $r_c(0) = r_o$, $\kappa(r,0) = \kappa_o$; $\kappa(r,t) = \kappa_в$, якщо $r_o \le r \le r_в(t)$, $\kappa(r,t) = \kappa_o$, якщо $r_c(t) \le r \le R_o$.

3. У випадках вивчення даного процесу на великих проміжках часу можлива постановка відповідних задач без початкових умов, а в ряді випадків може бути доцільним задавати швидкості зміни коефіцієнта фільтрації в початковий момент часу залежно від діючих градієнтів.

Розглянемо два підходи до розв'язання даного роду нелінійних задач з післядією. Основні моменти цих підходів полягають в наступному.

Точний розв'язок поставлених задач ґрунтується на методі послідовних наближень з циклічним почерговим заморожуванням двох складових даного процесу – фільтрації та суфозії на проміжку часу $0 \le t < \infty$, а саме, задаючи на початку $\kappa(r,t) = \kappa_o(r,t) = \kappa_o$, в результаті розв'язання першого з рівнянь (1.42) (тут і в подальшому з метою скорочення запису під терміном розв'язання рівняння розуміємо розв'язання відповідної задачі для даного рівняння) знаходимо нульове наближення напору $h = h_o(r,t) = h_o(r)$ та його градієнта $I = I_o(r,t) = I_o(r)$. Підставляючи ці значення в друге рівняння системи (1.42), як результат його розв'язання отримуємо перше наближення для коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_1(r,t)$ і так далі. При цьому не важко

обґрунтувати збіжність $h_n(r,t) \to h(r,t)$, $I_n(r,t) \to I(r,t)$, $\kappa_n(r,t) \to \kappa(r,t)$, при $n \to \infty$.

У низці випадків, а саме, для малозмінних у часі суфозійних процесів з метою отримання наближеного розв'язку поставлених задач доцільно замість почергового "заморожування" на всьому проміжку $0 \le t \le \infty$ провести дискретизацію часу: $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ....$ Далі, при початковому значенні коефіцієнта фільтрації $\kappa(r,t) = \kappa_0$ на часовому проміжку $t_0 \le t \le t_1$ внаслідок розв'язку першого рівняння системи (1.42) знаходимо наближення $h(r,\ t)$ та $I(r,\ t)$ на даному часовому проміжку. Тоді з використанням даних значень, зокрема, при $t = t_1$ як розв'язок другого рівняння системи знаходимо наближення $\kappa(r,\ t)$ для проміжку $t_1 \le t \le t_2$ і так далі. Можливі різні інші варіації даного підходу.

Розглянемо ще випадок практичного "завершення взаємовпливу" процесу суфозії–фільтрації, коли загальний процес стабілізується, а різниця напорів $H_0 - h_0$ є такою, що навколо свердловини (дрени) виникає область, в якій діючі градієнти перевищують критичні значення, проте не є настільки великими, щоб відбувся повний вимив суфозійних частинок. Тоді в рівняннях (1.42) покладемо $\partial\kappa / \partial t = 0$. В результаті розв'язку рівняння $\partial(r\kappa(r)\partial h / \partial r) / \partial r = 0$, де $\kappa(r) = \kappa_0$, якщо $r_c \le r \le R_0$, $\kappa(r) = f(r)$, якщо $r_0 \le r \le r_c$ ($f(r)$ – невідома функція, $f(r_c) = \kappa_0$), при граничних умовах $h(r_0) = h_0$, $h(R_0) = H_0$ та умовах спряження $h(r_c + 0) = h(r_c - 0)$, $h'(r_c + 0) = h'(r_c - 0)$ матимемо

$$\left[\begin{array}{lll} h(r) = h_1(r), & I(r) = I_1(r), & r_0 \le r \le r_c, \\ h(r) = h_2(r), & I(r) = I_2(r), & r_c \le r \le R_0, \end{array}\right. \tag{1.43}$$

де

$$\left[\begin{array}{l} h_1(r) = h_0 + \rho(r_c)\int\limits_{r_0}^{r} \dfrac{d\tilde{r}}{f(\tilde{r})r}\ ,\ I_1(r) = \dfrac{\rho(r_c)}{f(r)}\dfrac{1}{r}\ , \\ h_2(r) = H_0 + \dfrac{\rho(r_c)}{k_0}\ln\dfrac{R_0}{r}\ ,\ I_2(r) = \dfrac{\rho(r_c)}{k_0}\dfrac{1}{r}\ , \end{array}\right. \tag{1.44}$$

$$\rho(r_c) = \frac{H_0 - h_0}{\dfrac{1}{k_0}\ln\dfrac{R_0}{r_c} + f_*}\ ,\ f_* = \int\limits_{r_0}^{r_c} \frac{d\tilde{r}}{f(\tilde{r})r}. \tag{1.45}$$

Як результат розв'язку рівняння $I_2(r_c) = I_{kp}$ одержуємо

$$r_c = \frac{\rho(r_c)}{k_o I_{kp}}. \tag{1.46}$$

Невідому функцію *f(r)* шукаємо шляхом розв'язання наступної задачі:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\big(a_k a_n - f(r)\big) r \big(I_1(r) - I_{kp}\big)\Big) = 0, \quad f(r_c) = \kappa_o, \tag{1.47}$$

яка еквівалентна інтегральному рівнянню:

$$f(r) = \frac{1}{I_{kp}} \frac{\kappa_o (H_o - h_o)}{\ln \dfrac{R_o}{r_c} + \kappa_o \displaystyle\int_{r_o}^{r_c} \frac{d\tilde{r}}{f(\tilde{r}) r}}. \tag{1.48}$$

Підставивши (1.45) у вираз (1.46), отримуємо трансцендентне рівняння для знаходження невідомої величини r_c

$$r_c = \frac{1}{I_{kp}} \frac{(H_o - h_o) - I_{kp}(r_c - r_o)}{\ln \dfrac{R_o}{r_c}}. \tag{1.49}$$

Тоді матимемо

$$f(r) = \frac{\kappa_o r_c}{r}, \tag{1.50}$$

тобто

$$\kappa(r) = \left[\begin{array}{ll} \kappa_o r_c / r\ , & r_o \le r \le r_c, \\ \kappa_o\ , & r_c \le r \le R_o, \end{array}\right. \tag{1.51}$$

$$I(r) = \left[\begin{array}{ll} I_{kp}\ , & r_o \le r \le r_c, \\ r_c I_{kp} / r, & r_c \le r \le R_o. \end{array}\right. \tag{1.52}$$

Зауважимо, що при описуванні процесу суфозії приймалось $I_{kp} = \text{const}$ на всьому проміжку часу. Безумовно, модель буде точнішою, якщо враховувати залежність критичного градієнта від зміни коефіцієнта фільтрації в часі.

Особливо підкреслимо, що формули (1.51), (1.52) для знаходження $\kappa(r)$ та $I(r)$ (які дають змогу наближено описати процес на стадії його стабілізації) є аналогічними співвідношенням, які задаються апріорі при розв'язанні відповідних нелінійних стаціонарних задач.

Можна розглянути і низку інших варіантів збурення коефіцієнта фільтрації в зоні $r_0 \le r \le r_c$, а саме: $\kappa = \kappa_0 \left(ar_c/r + b\right)$; $\kappa = \kappa_*$, $\kappa_* \ne \kappa_0$; $\kappa = \kappa_0 \left(1 + \varepsilon\left(1 - r/r_c\right)\right)$; $\kappa = \kappa_0 \left(1 + \varepsilon\left(dh/dr - I_{\text{кр}}\right)\right)$ тощо, де вибір коефіцієнтів a, b, ε ґрунтується на дослідженні фізико-механічних характеристиках ґрунтів на етапі стабілізації суфозійних процесів.

Зокрема, нехай $\kappa = \kappa_0$ при $I < I_{кр}$ $(r > r_{кр})$ та $\kappa = \kappa_0 + \mu(I(r) - I_{êð})$ при $I \ge I_{кр}$ $(r \le r_{кр})$, де $r_{кр}$ – розв'язок рівняння $I(r) = I_{кр}$. Ця задача розв'язується ітераційно шляхом почергового "замороження" коефіцієнта фільтрації та градієнта напору. Графіки зміни $I(r) = I_j(r)$, $\kappa(r) = \kappa_j(r)$, $r_{кр,j}$ на різних кроках ітерації j ($j = \overline{0,n}$) схематично зображені на рис. 1.6, де як очікуваний результат моделювання процесу вимивання дрібних частинок ґрунту при переході від вихідного стану $j = 0$ до першого ($j = 1$) коефіцієнт фільтрації у придренній зоні зростає, а градієнт напору спадає.

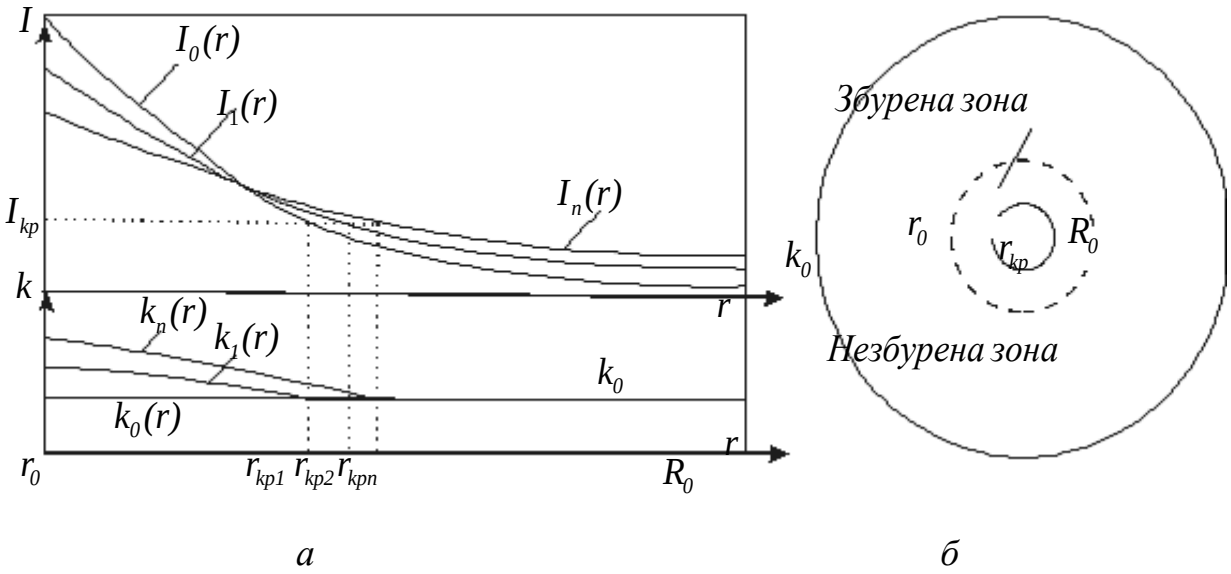


Рис. 1.6. Графіки взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта осесиметричної фільтрації до свердловини (*а*) та область фільтрації (*б*)

Зауважимо, що викладені вище підходи, які стосуються моделювання процесів осушення, не придатні для дослідження (прогнозування) явищ зволоження. Характерною особливістю процесів фільтрації із зволожувача в ґрунт є те, що на відміну від режиму осушення тут обов'язково виникають два типи різним чином збурених зон (ділянок). Безпосередньо навколо зволожувача формується зона вимивання суфозійних частинок (коефіцієнт фільтрації тут зростає), за нею – зона їх зупинки (ділянка кольматажу), де коефіцієнт фільтрації певним чином зменшується, а далі знаходиться незбурена зона.

Для врахування фільтраційних деформацій у ґрунті шляхом введення величин радіусів $r_в$ та $r_з$ $(r_0 < r_в < r_з < R_0)$ задаємо три зони: $r_0 < r < r_в$ – зона вимивання частинок ґрунту, де $k = k_в > k_0$, $r_в < r < r_з$ – зона "закупорення" пор частинками, $k = k_з < k_0$; $r_з < r < R_0$ – незбурена зона, $k = k_н = k_0$. Напір $h(r)$ шукаємо у вигляді

$$h(r) = h_1(r) = \begin{cases} h_в(r), & r_0 \le r \le r_в, \\ h_з(r), & r_в \le r \le r_з, \\ h_н(r), & r_з \le r \le R_0, \end{cases} \tag{1.53}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dh_в(r)}{dr}\right) = 0, \quad r_0 \le r \le r_в, \ \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dh_з(r)}{dr}\right) = 0, \quad r_в \le r \le r_з, \\ \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dh_н(r)}{dr}\right) = 0, \quad r_з \le r \le R_0, \\ h(r_0) = h_0, \ h(R_0) = H_0, \ h_в(r_в) = h_з(r_в), \ h_з(r_з) = h_н(r_з), \\ k_в\dfrac{dh_в(r_в)}{dr} = k_з\dfrac{dh_з(r_в)}{dr}, \ k_з\dfrac{dh_з(r_з)}{dr} = k_н\dfrac{dh_н(r_з)}{dr}. \end{cases} \tag{1.54}$$

де $\left(h_в(r),\ h_з(r),\ h_н(r)\right)$ є розв'язком такої задачі:

Розв'язавши задачу (1.54), одержимо

$$\begin{cases} h_в(r) = h_0 + \dfrac{k_в \Delta H}{k_в \Phi}\ln\dfrac{r}{r_0}, & r_0 \le r \le r_в, \\ h_з(r) = h_0 - \dfrac{\Delta H}{\Phi}\left(\dfrac{k_з}{k_в}\ln\dfrac{r_в}{r_0} + \dfrac{k_з}{k_з}\ln\dfrac{r}{r_в}\right), & r_в \le r \le r_з, \\ h_в(r) = H_0 + \dfrac{\Delta H}{\Phi}\ln\dfrac{R_0}{r}, & r_з \le r \le R_0. \end{cases} \tag{1.55}$$

Тепер

$$I=\left(\frac{dh(r)}{dr}\right)=\begin{cases} I_в(r)=\dfrac{\Delta H}{\Phi}\dfrac{k_н}{k_в}\dfrac{1}{r}, & r_0\le r\le r_в, \\ I_з(r)=\dfrac{\Delta H}{\Phi}\dfrac{k_н}{k_з}\dfrac{1}{r}, & r_в\le r\le r_з, \\ I_н(r)=\dfrac{\Delta H}{\Phi}\dfrac{1}{r}, & r_з\le r\le R_0, \end{cases} \tag{1.56}$$

де

$$\Phi=\frac{k_н}{k_в}\ln\frac{r_в}{r_0}+\frac{k_н}{k_з}\ln\frac{r_з}{r_в}+\ln\frac{R_0}{r_з}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що (рис.1.7):

$$\left[\begin{array}{l} I_в(r)<I_0(r),\ \text{при}\quad r_0\le r\le r_в, \\ I_з(r)>I_0(r),\ \text{при}\quad r_в\le r\le r_з, \\ I_н(r)>I_0(r),\ \text{при}\quad r_з\le r\le R_0. \end{array}\right. \tag{1.57}$$

Як бачимо, діючі градієнти в зоні кольматажу та незбуреній зоні, навіть при незначному вимиванні частинок із зони суфозії ($k_в>k_0$), зростуть, а в зоні вимивання ($r_0\le r\le r_в$) – стануть менші за початкові – $I_в(r)<I_0(r)$ (див. (1.57) та рис. 1.7).

При досить великих значеннях коефіцієнта фільтрації в зоні суфозії, тобто, коли $k_в\to\infty$, матимемо

$$\begin{cases} I_в(r)=0, & r_0\le r\le r_в, \\ I_з(r)=\dfrac{k_н\Delta H}{k_н\ln(r_з/r_в)+k_з\ln(R_0/r_з)}\dfrac{1}{r}, & r_в\le r\le r_з, \\ I_н(r)=\dfrac{k_з\Delta H}{k_н\ln(r_з/r_в)+k_з\ln(R_0/r_з)}\dfrac{1}{r}, & r_з\le r\le R_0, \end{cases} \tag{1.58}$$

а при $k_ç\to 0$, як і слід очікувати, матимемо $I_в=I_н=0$.

В праці [25] встановлені співвідношення між витратами дрени без та з урахуванням збурень залежно від вихідних параметрів. Можна запропонувати декілька варіантів формування збурених зон.

1. Розв’язавши рівняння $I_в(r)=I_{kp}$, де I_{kp} – критичне значення градієнта напору, знайдемо у неявному вигляді величину $r_в$ – зовнішній радіус зони вимивання дрібних частинок, а саме,

$$r_в = r_в(r_з) = \frac{1}{I_{kp}} \frac{h_o - H_o}{\Phi}. \qquad (1.59)$$

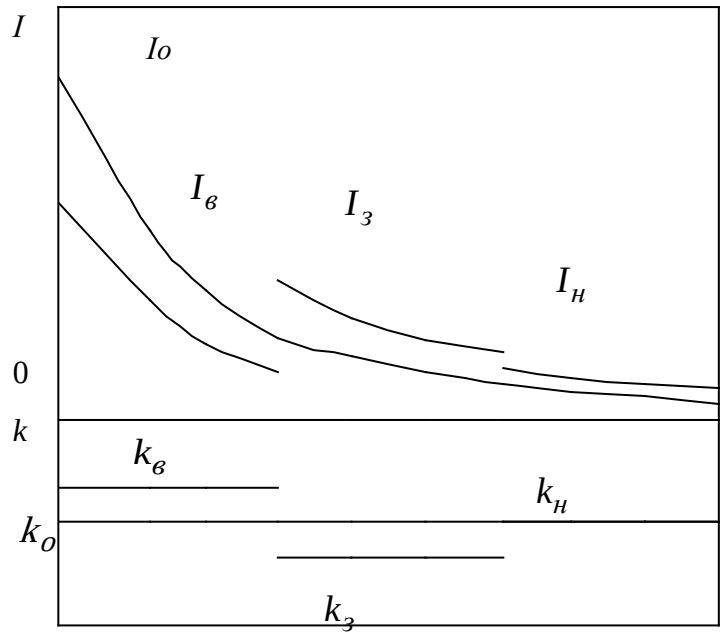


Рис. 1.7. Ілюстрація взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації

Нехай при пористості ґрунту n величини m_{ck} та m_c відповідно дорівнюють об'єму частинок, що утворюють скелет та об'єму суфозійних частинок, які містяться в одиниці об'єму ґрунту. Вважатимемо, що коефіцієнт фільтрації обчислюється за формулою $k = an$ (або $k = an^2$ тощо), де a – коефіцієнт пропорційності, і при $I_в > I_{kp}$ відбувається повне вимивання суфозійних частинок із ділянки $r_o \le r \le r_в$. Отже, коефіцієнт фільтрації на цій ділянці буде $k_в = a(n + m_c) = a(1 - m_{ck})$. Також, вважатимемо, що суфозійні частинки, які надходять із зони вимивання в зону кольматажу, рівномірно розподіляються на ділянці $r_в \le r \le r_з$, а саме, в кожну одиницю об'єму вихідного ґрунту вноситься $\alpha\, m_c$ дрібних частинок. Тоді у зоні кольматажу матимемо $k_з = a(n - \alpha\, m_c)$. Зовнішній радіус $r_з$ знайдемо у неявному вигляді із рівняння балансу суфозійних частинок:

$$\alpha\, m_c \pi\, (r_з^2 - r_в^2) = m_c \pi\, (r_в^2 - r_o^2), \qquad (1.60)$$

а саме,

$$r_з = r_з(r_в) = \sqrt{\frac{r_в^2(1+\alpha) - r_о^2}{\alpha}}. \qquad (1.61)$$

2. Значення радіусів точок поділу зон знаходимо як розв'язки рівнянь

$$\frac{dh_в(r_в)}{dr} = I_{крв}, \quad \frac{dh_з(r_з)}{dr} = I_{крз}, \qquad (1.62)$$

$$\left[\begin{array}{l} r_в = \dfrac{1}{I_{крв}} \dfrac{k_н}{k_в} \dfrac{h_о - H_о}{\Phi}, \\ r_з = \dfrac{1}{I_{крз}} \dfrac{k_н}{k_з} \dfrac{h_о - H_о}{\Phi}, \end{array}\right. \qquad (1.63)$$

де $I_{крв}$ – критичне значення градієнта напору стосовно границі вимивання суфозійних частинок; $I_{крз}$ – градієнт, що відповідає межі зупинки суфозійних частинок.

Враховуючи співвідношення

$$r_в / r_з = k_з I_{крз} / \left(I_{крв} k_в\right), \qquad (1.64)$$

із (1.63) отримуємо нелінійні трансцендентні рівняння для знаходження точок поділу $r_{â}$, $r_{ç}$

$$\left[\begin{array}{l} r_в = \dfrac{1}{I_{крв}} \dfrac{h_о - H_о}{\ln\dfrac{r_в}{r_о} + \dfrac{k_в}{k_н}\ln\dfrac{R_о}{r_в} + \left(\dfrac{k_в}{k_н} - \dfrac{k_в}{k_з}\right)\ln\dfrac{k_з I_{крз}}{k_в I_{крв}}}, \\ r_з = \dfrac{1}{I_{крз}} \dfrac{h_о - H_о}{\dfrac{k_з}{k_в}\ln\dfrac{r_з}{r_о} + \left(\dfrac{k_з}{k_в} - 1\right)\ln\dfrac{k_з I_{крз}}{k_в I_{крв}} + \dfrac{k_з}{k_н}\ln\dfrac{R_о}{r_з}}, \end{array}\right. \qquad (1.65)$$

з яких за відомими значеннями $h_о$, $H_о$, $R_о$, $r_о$, $k_{í}$, $k_{â}$, $k_{ç}$, $I_{крâ}$, $I_{крç}$ обчислюються величини $r_{â}$, $r_{ç}$. Параметри $k_{â}$, $k_{ç}$ та $I_{крз}$ входять у рівняння (1.63) в неявному вигляді. Методика їх знаходження детально описана у праці [25].

3. Розглянемо випадок, коли із зони $r_{\text{о}} \le r \le r_{в}$ вимиваються не всі частинки. Тоді значення величин $k_{\hat{a}}$, $k_{ç}$, $I_{kpç}$, що входять у рівняння (1.65), пропонується знаходити так:

$$k_{в} = an_{в} = a\left(1 - m_{ck} - m_{cв}\right) \; (k = an) \tag{1.66}$$

або

$$k_{в} = a\left(1 - m_{ck} - (1-\beta)\, m_{c}\right), \tag{1.67}$$

де $m_{cв}$ – кількість суфозійних частинок, що залишилась в одиниці об'єму зони суфозії; $m_{cв} = m_{c} - \beta m_{c}$; β – кількість суфозійних частинок на одиницю об'єму зони суфозії, що вийшли із даної зони відносно до кількості частинок, що там знаходились початково (при умові, що частинки, які залишились у зоні суфозії, рівномірно розподіляться в об'ємі ґрунту).
При цьому додаткова кількість суфозійних частинок, що надходить в одиницю об'єму даної зони, рівна

$$m_{cз} = W_{вc} \Big/ W_{з} = \beta m_{c}\left(r_{в}^{2} - r_{\text{о}}^{2}\right) \Big/ \left(r_{з}^{2} - r_{в}^{2}\right) = \alpha m_{c}\,, \tag{1.68}$$

де

$$\alpha = \beta\left(r_{в}^{2} - r_{\text{о}}^{2}\right) \Big/ \left(r_{з}^{2} - r_{в}^{2}\right);\; W_{вc} = \beta m_{c}\pi\left(r_{в}^{2} - r_{\text{о}}^{2}\right);$$

$$W_{з} = \pi\left(r_{з}^{2} - r_{в}^{2}\right).$$

Тоді

$$k_{з} = an_{з} = a\left(1 - m_{ck} - m_{c} - \alpha m_{c}\right). \tag{1.69}$$

З урахуванням співвідношення $r_{в} / r_{з} = k_{з} I_{kpз} / (k_{в} I_{kpв})$, отримаємо

$$\alpha = \frac{\beta\left(1 - \left(r_{\text{о}} / r_{в}\right)^{2}\right)}{\left(I_{kpв} / I_{kpз}\right)^{2} \left(k_{в} / k_{з}\right)^{2} - 1}. \tag{1.70}$$

Звідси

$$I_{крз} = I_{крв}\frac{k_в}{k_з}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta\left(1-\left(r_0/r_в\right)^2\right)}} \tag{1.71}$$

або при

$$\frac{k_в}{k_з} = \frac{n_0+\beta m_c}{n_0-\alpha m_c} = \frac{\alpha_k+\beta}{\alpha_k-\alpha}$$

матимемо

$$I_{крз} = I_{крв}\frac{\alpha_k+\beta}{\alpha_k-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta\left(1-\left(r_0/r_в\right)^2\right)}}. \tag{1.72}$$

Значення β знаходимо, наприклад, з умови $q_0 = q_н$:

$$\beta = 1+\frac{n}{m_c}-\frac{n\left(n-\alpha m_c\right)\ln\left(r_в/r_0\right)}{m_c\left(n-\alpha m_c\right)\ln\left(r_в/r_0\right)-m_c n\ln\left(r_з/r_в\right)}. \tag{1.73}$$

4. Величину $r_в$ знаходимо, як і у попередніх випадках, а α, β та $r_з$ із умов: балансу суфозійних частинок (див. випадок “б” в 1.1), рівності витрати $q_0 = q_н$ (q_0, $q_н$ – витрати дрени відповідно без та з врахуванням суфозії) та рівняння $I_в(r_0) = I_{кр}$.

5. Зауважимо, що описані вище підходи до формування збурених зон ґрунтуються на припущенні про рівномірний розподіл суфозійних частинок у межах кожної із зон. Зрозуміло, що природніше вважати коефіцієнт фільтрації змінною у просторі величиною ($k = k(r)$, $k = k(r, \partial h/\partial r)$ тощо), наприклад (рис. 1.8),

$$k(r) = k_0\left(1+ak_*(r)\right),\ k_*(r) = \begin{cases} \dfrac{\left(r-r_{\hat{a}}\right)\left(r-r_ç\right)}{r_0^2}, & r_0 \le r \le r_ç, \\ 0, & r_ç \le r \le R_0, \end{cases} \tag{1.74}$$

де a – параметр, що характеризує інтенсивність впливу суфозійно-кольматаційних явищ на зміну коефіцієнта фільтрації середовища.

Зокрема, розглянемо випадок, коли інтенсивність збурень коефіцієнта фільтрації є незначною, тобто $a/r_0^2 = \varepsilon$ – малий параметр. Тоді розв’язок задачі (1.33) з урахуванням (1.74) та умов спряження у точці $r_з$:

$$[h]\|_{r=r_з} = [dh/dr]\|_{r=r_з} \tag{1.75}$$

при фіксованих ε, $r_{\hat{a}}$, $r_з$ шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду

$$h(r) = h_o(r) + \varepsilon\, h_1(r) + \varepsilon^2 h_2(r) + \ldots, \tag{1.76}$$

де $h_o(r)$ – розв'язок відповідної лінійної задачі $\left(\varepsilon = 0,\ \ k(r) = k_{\text{o}} = \text{const}\right)$; $h_1(r)$, $h_2(r)$, … – поправки, що враховують збурення.

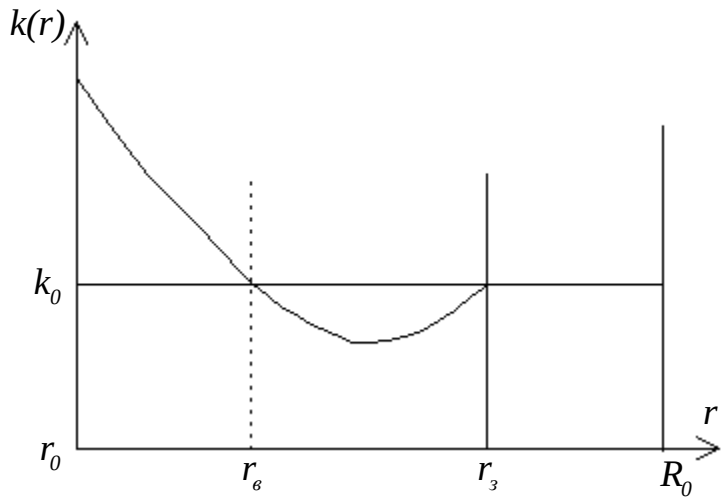


Рис. 1.8. Ілюстрація зміни коефіцієнта фільтрації $k(r)$ для моделі (1.74)

Внаслідок реалізації "стандартної процедури прирівнювання" (див., наприклад, [17]) та розв'язання відповідних задач, матимемо:

$$\begin{cases} h_{\text{o}}(r) = h_{\text{o}} + \dfrac{H_{\text{o}} - h_{\text{o}}}{\ln R_{\text{o}} / r_{\text{o}}} \ln r / r_{\text{o}}, \quad r_{\text{o}} \le r \le R_{\text{o}}, \\ h_{\hat{a}çi}(r) = F_i(r) + A_i \ln r / r_{\text{o}}, \qquad r_{\text{o}} \le r \le r_{çi} \\ h_{í\,i}(r) = C_i \ln r / R_{\text{o}}, \qquad r_{çi} \le r \le R_{\text{o}}, \\ F_i(r) = \displaystyle\int_{r_o}^{r} \frac{F_{*i}(\tilde{r})}{\tilde{r}}\, d\tilde{r}, \qquad F_{*i}(r) = \int_{r_{\text{o}}}^{r} f_{\hat{a}çi}(\tilde{r})\, d\tilde{r}, \\ h_{\hat{a}çi}(r_{\text{o}}) = 0, \qquad h_{\hat{a}çi}(R_{\text{o}}) = 0, \qquad h_{\hat{a}çi}(r_{çi}) = h_{í\,i}(r_{çi}), \\ h'_{\hat{a}çi}(r_{çi}) = h'_{í\,i}(r_{çi}), \qquad f_i(r) = -(k_*(r) r h'_{(i-1)}, \\ f_{\hat{a}çi}(r) = -((r - r_{\hat{a}i})(r - r_{çi}) r h'_{\hat{a}ç(i-1)})', \qquad f_{í\,i}(r) = 0, i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

де

$$A_i = \frac{F_i(r_{çi}) + F_{*i}(r_{çi})\ln R_o / r_{çi}}{\ln R_o / r_o},\ C_i = A_i + F_{*i}(r_{çi}).$$

На закінчення опишемо наведені вище моделі в дещо іншій формі, більш зручній для подальшого узагальнення на випадки областей складної конфігурації. Взаємовплив κ та I (у першому наближенні) у випадку фільтрації в осесиметричному пласті від дрени до зони впливу проілюстровано на рис. 1.9, *а*), де $[r_з, R_0]$ – незбурена зона ($\kappa = \kappa_0$), $[r_0, r_в]$ – зона відриву частинок ($\kappa = \kappa_в > \kappa_0$), $[r_в, r_з]$ – зона осідання частинок ($\kappa = \kappa_з < \kappa_0$), $r_в$ та $r_з$ є розв'язками рівнянь $I(r) = I_в$ та $I(r) = I_з$ відповідно. Причому значення $\kappa_в$ та $\kappa_з$ формуються, виходячи з наступних міркувань: при $I_{кр} > I_в$ відбувається повне вимивання дрібних частинок із даної зони. Тоді при їх рівномірному розподілі в об'ємі зони затримки матимемо

$$\kappa_в = a(1 - m_{ck}),\ \kappa_з = a(1 - m_{ck} - m_c(r_з^2 - r_0^2)(r_з^2 - r_в^2)^{-1}).$$

Зауважимо, що на цій основі можна отримати відповідні аналітичні вирази для знаходження фільтраційної витрати, напорів і їх градієнтів, встановити співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується залежно від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу.

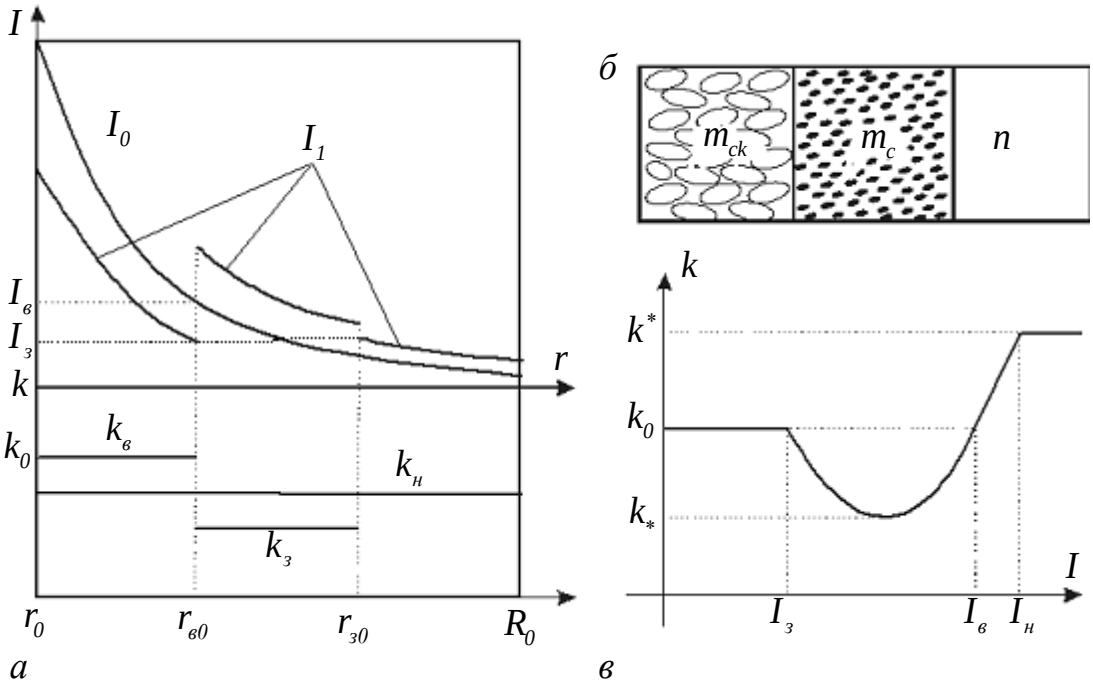


Рис. 1.9. Ілюстрація взаємовпливу градієнта напору (*а*) та коефіцієнта осесиметричної фільтрації (*в*) при наявності двох зон збурення (*б*)

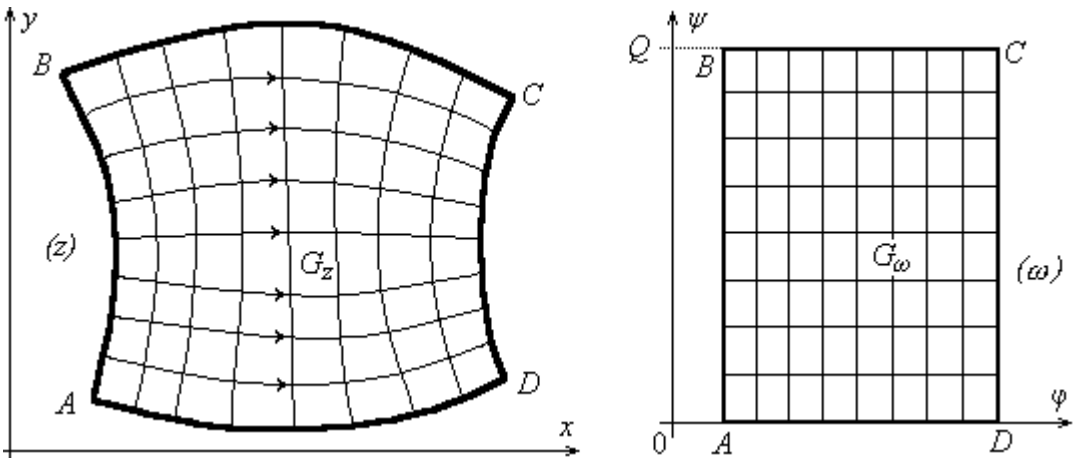
1.4. Нелінійні обернення крайових задач на конформні та квазіконформні відображення

При застосуванні описаних вище підходів до моделювання нелінійних збурень у випадках дослідження процесів в областях більш складної конфігурації, обмежених лініями течії та еквіквазіпотенціальними лініями, природно розглядати відповідні задачі як задачі на квазіконформні (зокрема, конформні у випадку однорідних ізотропних середовищ) відображення. Причому при дослідженні конвективно-дифузійних процесів на такого роду фільтраційних фонах за умов неповних вихідних даних доцільно від прямої задачі на квазіконформне відображення фізичної області на область комплексного потенціалу переходити до відповідної задачі на побудову оберненого відображення. З цією метою розроблено новий підхід до чисельного розв'язування обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення у деформівних середовищах. Основні ідеї його проілюструємо тут на прикладах розв'язання відповідних задач для криволінійних чотирикутних областей, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями.

1.4.1. Постановка обернених задач про конформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники та многочленні наближення їх розв'язків. Розглянемо на початку модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області $G_z = ABCD$ $(z = x + iy)$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, при умовах: $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC} = \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA} = 0$, де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої. Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії), комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ і замінивши останні дві граничні умови на умови: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$, де стала Q – повна витрата (невідомий параметр), яка визначається за формулою:

$$Q = \int_{EF} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int_{EF} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \ \ (E \in AD, F \in BC),$$

можемо дану задачу замінити більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_\omega = \{\omega: \ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ при відповідності чотирьох кутових точок (рис. 1.10).



а *б*

Рис. 1.10. Фізична область G_z (*а*) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (*б*)

Пряма задача. Виявляється, що при додатковій умові щодо шуканої функції $\omega = f(z)$ – можливості її аналітичного продовження на деякий круг K з центром в початку координат: $G_z \in K$, у випадку, коли функції $f_i(x, y) = 0$ можна записати у вигляді $y = g_i(x)$, де $g_i(x) = \sum_{l=0}^{l_i} P_l^i x^l$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$ – многочлени, цю функцію можна одержати у вигляді ряду

$$\omega = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k) z^k$$

або

$$\varphi + i\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j} x^{k-2j} y^{2j} + b_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j-1} x^{k-2j+1} y^{2j-1} \right) +$$

$$+i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j}x^{k-2j}y^{2j}+a_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{j+1}\,C_k^{2j-1}x^{k-2j+1}y^{2j-1}\right).$$

Тут невідомі коефіцієнти a_k, b_k знаходяться в результаті розв'язку нескінченної нелінійної системи алгебраїчних рівнянь з локалізованою нелінійністю та близькою до трикутної "матрицею", яка отримується шляхом урахування відповідних крайових умов:

$$\varphi_*=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j}x^{k-2j}\left(\sum_{l=0}^{l_1}P_l^1x^l\right)^{2j}+\right.$$

$$\left.+b_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j-1}x^{k-2j+1}\left(\sum_{l=0}^{l_1}P_l^1x^l\right)^{2j-1}\right),$$

$$Q=\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j}x^{k-2j}\left(\sum_{l=0}^{l_2}P_l^2x^l\right)^{2j}+\right.$$

$$\left.+a_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{j+1}\,C_k^{2j-1}x^{k-2j+1}\left(\sum_{l=0}^{l_2}P_l^2x^l\right)^{2j-1}\right),$$

$$\varphi^*=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j}x^{k-2j}\left(\sum_{l=0}^{l_3}P_l^3x^l\right)^{2j}+\right.$$

$$\left.+b_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j-1}x^{k-2j+1}\left(\sum_{l=0}^{l_3}P_l^3x^l\right)^{2j-1}\right),$$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\,C_k^{2j}x^{k-2j}\left(\sum_{l=0}^{l_4}P_l^4x^l\right)^{2j}+\right.$$

$$+a_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^{j+1} C_k^{2j-1} x^{k-2j+1} \left(\sum_{l=0}^{l_4} P_l^4 x^l \right)^{2j-1} \Bigg)$$

та алгебраїчної рівності многочленів. При цьому параметр Q знаходиться у явному вигляді.

Обернена задача. Аналогічно розв'язується і відповідна задача на обернене конформне відображення

$$z = g(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + id_k)\omega^k$$

або

$$x + iy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j} \varphi^{k-2j} \psi^{2j} + d_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j-1} \varphi^{k-2j+1} \psi^{2j-1} \right) +$$

$$+i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j} \varphi^{k-2j} \psi^{2j} + c_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^{j+1} C_k^{2j-1} \varphi^{k-2j+1} \psi^{2j-1} \right).$$

Тут невідомі коефіцієнти c_k, d_k також знаходяться з розв'язку нескінченної нелінійної системи алгебраїчних рівнянь з локалізованою нелінійністю та близькою до трикутної "матрицею", яка отримується шляхом урахування відповідних крайових умов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j} \varphi_*^{k-2j} \psi^{2j} + c_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^{j+1} C_k^{2j-1} \varphi_*^{k-2j+1} \psi^{2j-1} \right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{l_1} P_l^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j} \varphi_*^{k-2j} \psi^{2j} + d_k \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^j C_k^{2j-1} \varphi_*^{k-2j+1} \psi^{2j-1} \right) \right)^l,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(d_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j}\varphi^{k-2j}Q^{2j}+c_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{j+1}C_k^{2j-1}\varphi^{k-2j+1}Q^{2j-1}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{l_2}P_l^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j}\varphi^{k-2j}Q^{2j}+d_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j-1}\varphi^{k-2j+1}Q^{2j-1}\right)\right)^l,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(d_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j}\varphi^{*k-2j}\psi^{2j}+c_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{j+1}C_k^{2j-1}\varphi^{*k-2j+1}\psi^{2j-1}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{l_3}P_l^3\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j}\varphi^{*k-2j}\psi^{2j}+d_k\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^j C_k^{2j-1}\varphi^{*k-2j+1}\psi^{2j-1}\right)\right)^l,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}d_k\varphi^k=\sum_{l=0}^{l_4}P_l^4\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi^k\right)^l$$

та алгебраїчної рівності многочленів.

Зауважимо, що певним недоліком оберненої задачі порівняно з прямою є значне “нарощення нелінійності” у відповідній нескінченній системі рівнянь для знаходження невідомих c_k, d_k, а особливо – рівнянь, які містять у собі параметр Q. Проте обернена задача допускає перехід до більш ефективних конструкцій її розв'язку, пов'язаних, наприклад, з його представленням у вигляді многочлена та використанням варіаційних теорем для знаходження невідомих коефіцієнтів, або Р-представленням [134].

Зауважимо також, що дана методика переноситься і на задачі у багатозв’язних областях, а також – на задачі з вільними межами.

1.4.2. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення. Розглянемо модельну нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції $\varphi=\varphi(x,y)$ (потенціалу) в однозв’язній чотирикутній криволінійній області (пористому пласті) $G_z=ABCD$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB=\{z=x+iy:\ f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z:\ f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z:\ f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z:\ f_4(x,y)=0\}$, ортогональними між собою в точках їх перетину:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0;$$

$$\varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA}=0, \qquad (1.77)$$

де $-\infty<\varphi_*<\varphi^*<+\infty$, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\kappa(x,y,\varphi,\psi)$ – обмежена неперервно диференційовна функція, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій, $\psi=\psi(x,y)$ – відповідна функція течії. Замінивши останні дві із граничних умов (1.77) на відповідні умови для функції $\psi(x,y)$, квазікомплексно спряженої до функції $\varphi(x,y)$ (див., наприклад, [19–21, 103]), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне при $\kappa(x,y,\varphi,\psi)=\text{const}$) відображення $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ даної області G_z на відповідну область квазікомплексного (комплексного, якщо $\kappa(x,y,\varphi,\psi)=\text{const}$) потенціалу $G_\omega=\left\{\omega:\ \ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\,0<\psi<Q\right\}$ (див. рис. 1.10):

$$\kappa(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \kappa(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$\varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \psi\big|_{AD}=0,\ \psi\big|_{BC}=Q, \qquad (1.78)$$

де стала Q – повна витрата (невідомий параметр). Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+$ $+iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q запишеться у вигляді

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\kappa(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{1}{\kappa(x,y,\varphi,\psi)}\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega; \qquad (1.79)$$

$$\begin{cases} f_1\left(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\right)=0, & f_3\left(x\left(\varphi^*,\psi\right),y\left(\varphi^*,\psi\right)\right)=0, & 0\le\psi\le Q,\\ f_2\left(x(\varphi,Q),y(\varphi,Q)\right)=0, & f_4\left(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\right)=0, & \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*. \end{cases} \qquad (1.80)$$

Зауважимо, що тут, на відміну від випадку $\kappa(x,y,\varphi,\psi)=\kappa(\varphi,\psi)$, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x=x(\varphi,\psi)$ та $y=y(\varphi,\psi)$ є взаємнозалежними, а саме:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\kappa^2(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2}-$$

$$-\frac{\kappa'_x(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\kappa'_y(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\kappa'_\varphi(x,y,\varphi,\psi)}{\kappa(x,y,\varphi,\psi)}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+$$

$$+\kappa(x,y,\varphi,\psi)\left(\kappa'_x(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial x}{\partial \psi}+\kappa'_y(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial \psi}+\kappa'_\psi(x,y,\varphi,\psi)\right)\frac{\partial x}{\partial \psi}=0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}+\kappa^2(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2}-$$

$$-\frac{\kappa'_x(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\kappa'_y(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\kappa'_\varphi(x,y,\varphi,\psi)}{\kappa(x,y,\varphi,\psi)}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+$$

$$+\kappa(x,y,\varphi,\psi)\left(\kappa'_x(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial x}{\partial \psi}+\kappa'_y(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial \psi}+\kappa'_\psi(x,y,\varphi,\psi)\right)\frac{\partial y}{\partial \psi}=0.$$

Якщо $\kappa(x,y,\varphi,\psi)=\kappa(\varphi,\psi)$, то, замість одержаних вище рівнянь, матимемо

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\kappa^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2}-\frac{\kappa'_\varphi(\varphi,\psi)}{\kappa(\varphi,\psi)}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\kappa(\varphi,\psi)\kappa'_\psi(\varphi,\psi)\frac{\partial x}{\partial \psi}=0,\\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}+\kappa^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2}-\frac{\kappa'_\varphi(\varphi,\psi)}{\kappa(\varphi,\psi)}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\kappa(\varphi,\psi)\kappa'_\psi(\varphi,\psi)\frac{\partial y}{\partial \psi}=0.\end{cases} \tag{1.81}$$

Різницевий аналог рівнянь (1.81), крайових умов (1.80), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma=\Big\{\left(\varphi_i,\psi_j\right):\ \varphi_i=\varphi_*+\Delta\varphi\cdot i,\ \ i=\overline{0,m+1};\ \ \psi_j=\Delta\psi\cdot j,\ \ j=\overline{0,n+1};$$

$$\Delta\varphi=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{m+1},\ \ \Delta\psi=\frac{Q}{n+1},\ \ \gamma=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi},\quad m,n\in\mathbf{N}\Big\}$$

запишемо, наприклад, у вигляді [21]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}+x_{i-1,j}-2\left(1+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\right)x_{i,j}+\dfrac{\Delta\varphi}{2}\Bigg(\gamma\kappa_{i,j}(\kappa_{i,j})'_{\psi}\left(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}\right)- \\ -\dfrac{(\kappa_{i,j})'_{\varphi}}{\kappa_{i,j}}\left(x_{i+1,j}-x_{i-1,j}\right)\Bigg)+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\left(x_{i,j-1}+x_{i,j+1}\right)=0, \\ y_{i+1,j}+y_{i-1,j}-2\left(1+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\right)y_{i,j}+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\left(y_{i,j-1}+y_{i,j+1}\right)+\dfrac{\Delta\varphi}{2}\Bigg(\gamma\kappa_{i,j}\times \\ \times(\kappa_{i,j})'_{\psi}\left(y_{i,j+1}-y_{i,j-1}\right)-\dfrac{(\kappa_{i,j})'_{\varphi}}{\kappa_{i,j}}\left(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}\right)\Bigg)=0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}; \end{cases} \tag{1.82}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{0,j},y_{0,j}\right)=0, & f_3\left(x_{m+1,j},y_{m+1,j}\right)=0, \quad j=\overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)=0, & f_4\left(x_{i,0},y_{i,0}\right)=0, \quad i=\overline{0,m+1}; \end{cases} \tag{1.83}$$

$$\begin{cases} f_{1x}'\left(x_{0,j},y_{0,j}\right)\left(y_{1,j}-y_{0,j}\right)-f_{1y}'\left(x_{0,j},y_{0,j}\right)\left(x_{1,j}-x_{0,j}\right)=0, \\ f_{3x}'\left(x_{m+1,j},y_{m+1,j}\right)\left(y_{m,j}-y_{m+1,j}\right)-f_{3y}'\left(x_{m+1,j},y_{m+1,j}\right)\times \\ \times\left(x_{m,j}-x_{m+1,j}\right)=0, \ j=\overline{0,\ n+1}, \\ f_{4x}'\left(x_{i,0},y_{i,0}\right)\left(y_{i,1}-y_{i,0}\right)-f_{4y}'\left(x_{i,0},y_{i,0}\right)\left(x_{i,1}-x_{i,0}\right)=0, \\ f_{2x}'\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)\left(y_{i,n}-y_{i,n+1}\right)-f_{2y}'\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)\times \\ \times\left(x_{i,n}-x_{i,n+1}\right)=0, \ i=\overline{0,\ m+1}; \end{cases} \tag{1.84}$$

$$\gamma=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}, \tag{1.85}$$

де

$$\gamma_{i,j}=\frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}},$$

$$x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j), \ \ y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j), \ \ \kappa_{i,j}=\kappa(\varphi_i,\psi_j).$$

Тоді розв’язок відповідної до (1.79), (1.80) різницевої задачі у цьому випадку побудуємо за наступною методологією. Підготовчий етап полягає у заданні межі фізичної області $G_z=ABCD$: $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$,

$CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω, параметра точності проведення обчислень ε та значення граничних потенціалів φ_*, φ^*, використовуючи які визначаємо $\Delta\varphi$.

Початковий етап побудови розв'язку полягає у заданні початкових наближень шуканих величин. А саме: початкові наближення межових вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ задаємо так, щоб виконувалися умови (1.83), тобто $f_1\left(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}\right)=0$, $f_2\left(x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}\right)=0$, $f_3\left(x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}\right)=0$, $f_4\left(x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}\right)=0$, $i=\overline{0,m+1}$, $j=\overline{0,n+1}$. Далі задаємо початкові наближення внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$, наприклад, як середні арифметичні чотирьох координат відповідних межових вузлів: $x_{i,j}^{(0)}=\frac{1}{4}\left(x_{i,0}^{(0)}+x_{i,n+1}^{(0)}+x_{m+1,j}^{(0)}+x_{0,j}^{(0)}\right)$, $y_{i,j}^{(0)}=\frac{1}{4}\left(y_{i,0}^{(0)}+y_{i,n+1}^{(0)}+y_{m+1,j}^{(0)}+y_{0,j}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Обчислення початкового наближення $\gamma^{(0)}$ невідомої величини γ проведемо за формулою (1.85), в якій використаємо задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)}=\gamma\left(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}\right)$.

Наступний етап – це етап уточнення розв'язку шляхом ітераційного знаходження послідовних наближень відповідних значень, а саме:

– внутрішніх вузлів (наприклад, використовуючи різницеву схему типу "хрест" згідно з формулами (1.82) за методом Зейделя) –

$$x_{i,j}^{(k+1)}=\left(x_{i+1,j}^{(k)}+x_{i-1,j}^{(k+1)}+\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\left(x_{i,j-1}^{(k+1)}+x_{i,j+1}^{(k)}\right)+\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\gamma^{(k)}\kappa_{i,j}(\kappa_{i,j})'_\psi\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(x_{i,j+1}^{(k)}-x_{i,j-1}^{(k+1)}\right)-\frac{(\kappa_{i,j})'_\varphi}{\kappa_{i,j}}\left(x_{i+1,j}^{(k)}-x_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right)\right)\Big/2\left(1+\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\right),$$

$$y_{i,j}^{(k+1)}=\left(y_{i+1,j}^{(k)}+y_{i-1,j}^{(k+1)}+\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\left(y_{i,j-1}^{(k+1)}+y_{i,j+1}^{(k)}\right)+\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\gamma^{(k)}\kappa_{i,j}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\kappa_{i,j})'_\psi\left(y_{i,j+1}^{(k)}-y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)-\frac{(\kappa_{i,j})'_\varphi}{\kappa_{i,j}}\left(y_{i+1,j}^{(k)}-y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right)\right)\Big/2\left(1+\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\right),$$
$$i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n};$$

– величини γ за формулою (1.85), яка побудована на основі різницевого аналогу умови квазіконформної подібності в малому відповідних

чотирикутників – $\gamma^{(k+1)} = \gamma\left(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}\right)$, при цьому нове наближення витрати Q знаходимо за формулою

$$Q^{(k+1)} = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma^{(k+1)}}; \tag{1.86}$$

– межових вузлів, наприклад, шляхом розв'язання методом параметризації системи нелінійних рівнянь, утвореної поєднанням різницевих аналогів умов ортогональності у межових вузлах (1.84) та скінченно-різницевих рівнянь (1.83):

$$\begin{cases} f_{1x}'\left(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}\right)\left(y_{1,j}^{(k+1)} - y_{0,j}^{(k)}\right) - f_{1y}'\left(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}\right)\left(x_{1,j}^{(k+1)} - x_{0,j}^{(k+1)}\right) = 0, \\ f_{3x}'\left(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}\right)\left(y_{m,j}^{(k+1)} - y_{m+1,j}^{(k)}\right) - f_{3y}'\left(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}\right) \times \\ \times\left(x_{m,j}^{(k+1)} - x_{m+1,j}^{(k+1)}\right) = 0,\ j=\overline{0,\ n+1}, \\ f_{2x}'\left(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)}\right)\left(y_{i,n}^{(k+1)} - y_{i,n+1}^{(k)}\right) - f_{2y}'\left(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)}\right)\left(x_{i,n}^{(k+1)} - x_{i,n+1}^{(k+1)}\right) = 0, \\ f_{4x}'\left(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}\right)\left(y_{i,1}^{(k+1)} - y_{i,0}^{(k)}\right) - f_{4y}'\left(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}\right)\left(x_{i,1}^{(k+1)} - x_{i,0}^{(k+1)}\right) = 0, \\ i=\overline{0,\ m+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{0,j}^{(k+1)}, y_{0,j}^{(k+1)}\right) = 0, \quad f_3\left(x_{m+1,j}^{(k+1)}, y_{m+1,j}^{(k+1)}\right) = 0, \quad j=\overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}^{(k+1)}, y_{i,n+1}^{(k+1)}\right) = 0, \quad f_4\left(x_{i,0}^{(k+1)}, y_{i,0}^{(k+1)}\right) = 0, \quad i=\overline{0,m+1}, \end{cases}$$

де $k = 0,1,\ldots$ – номер кроку ітерації.

Етап визначення умов закінчення обчислювального процесу полягає у перевірці виконання, наприклад, нерівностей:

$$\left|D^{(k+1)} - 1\right| < \varepsilon_*,\ \left|D_{i,j}^{(k+1)} - D_{i,j}^{(k)}\right| < \varepsilon, \tag{1.87}$$

де $D_{i,j} = \dfrac{\sqrt{\left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1} - x_{i+1,j}\right)^2 + \left(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}\right)^2}}$ – відношення довжин діагоналей відповідного криволінійного чотирикутника,

$D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} D_{i,j}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_* > 0$. Умовами закінчення процесу, окрім (1.87), також можуть бути умови

$$\max_{x_{i,j},\, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}{}^{(k+1)} - x_{i,j}{}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}{}^{(k+1)} - y_{i,j}{}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon,$$

$$\left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon \tag{1.88}$$

та інші.

У випадку невиконання умов закінчення процесу (1.87), (1.88) знову переходимо до етапу уточнення розв'язку – внутрішніх вузлів і т.д. [138]. Якщо не виконується, наприклад, лише перша з умов (1.87), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх).

Особливістю такого підходу побудови алгоритму при $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(x, y)$ є те, що вихідна лінійна задача переходить у суттєво нелінійну обернену до неї задачу (у попередньому випадку ми мали перехід суттєвої нелінійності вихідної задачі до локалізованої нелінійності оберненої задачі). Дійсно, тут замість формул (1.81) матимемо

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} +$$
$$+ \kappa(x, y) \left(\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} +$$
$$+ \kappa(x, y) \left(\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0. \tag{1.89}$$

Збіжність процесу побудови наближень розв'язку відповідної задачі забезпечується шляхом внесення до описаного вище алгоритму наступних видозмін: 1) послідовні наближення коефіцієнта провідності $\kappa(x, y)$ на даному кроці у (i,j)-вузлах сітки G_ω^γ знаходимо тепер після наближень

відповідних значень $x_{i,j}, y_{i,j}$, а саме, $\kappa_{i,j}^{(k)} = \kappa\left(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}\right)$; 2) послідовні наближення внутрішніх вузлів отримуємо на основі різницевого аналогу формул (1.89), наприклад, у вигляді:

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \left(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2 \left(x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)}\right) + \frac{1}{4}\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}\left((\kappa_{i,j})'_x \times \right.\right.$$
$$\left.\times\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) + (\kappa_{i,j})'_y\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\right)\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) - \frac{1}{4\kappa_{i,j}}\left((\kappa_{i,j})'_x \times \right.$$
$$\left.\left.\times\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right) + (\kappa_{i,j})'_y\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right)\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right) \Big/ 2\left(1 + \gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\right),$$

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \left(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2 \left(y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)}\right) + \frac{1}{4}\gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}\left((\kappa_{i,j})'_x \times \right.\right.$$
$$\left.\times\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) + (\kappa_{i,j})'_y\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\right)\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right) - \frac{1}{4\kappa_{i,j}}\left((\kappa_{i,j})'_x \times \right.$$
$$\left.\left.\times\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right) + (\kappa_{i,j})'_y\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right)\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right) \Big/ 2\left(1 + \gamma^{(k)2}\kappa_{i,j}^2\right),$$
$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Аналогічно розв’язуються крайові задачі в неоднорідних анізотропних середовищах, де $\kappa = \left(\kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)\right)_{r,s=1,2}$ – тензор фільтрації [19, 21]. При цьому для забезпечення гладкості такого квазіконформного відображення в кутових точках $M = A,\ B,\ C,\ D$ на функції $f_i(x, y)$ $(i = \overline{1,4})$ накладаємо умови: $\Theta_M + \tilde{\Theta}_M = \frac{\pi}{2}$, де

$$\cos\Theta_M = \frac{f_{i-1x}'(M)\, f_{ix}'(M) + f_{i-1y}'(M)\, f_{iy}'(M)}{\sqrt{f_{i-1x}'^2(M) + f_{i-1y}'^2(M)}\sqrt{f_{ix}'^2(M) + f_{iy}'^2(M)}},$$

$$\cos\tilde{\Theta}_M =$$
$$= \frac{\kappa_{11} f_{jx}'^2(M) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})\, f_{jx}'(M)\, f_{jy}'(M) + \kappa_{22} f_{jy}'^2(M)}{\sqrt{f_{jx}'^2(M) + f_{jy}'^2(M)}\sqrt{\left(\kappa_{11} f_{jx}'(M) + \kappa_{12} f_{jy}'(M)\right)^2 + \left(\kappa_{21} f_{jx}'(M) + \kappa_{22} f_{jy}'(M)\right)^2}},$$

$f_0(M) \overset{df}{=} f_4(M)$, $j=1$ при $i=1,2$ та $j=3$ при $i=3,4$ (дотичні до граничних ліній течії повинні настільки відхилятись від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, наскільки анізотропія відхиляє вектор швидкості від даних нормалей). Цього, зокрема, легко досягти, якщо покласти $\angle M = 90°$, $\kappa_{12}(M) = \kappa_{21}(M) = 0$, $\kappa_{11}(M) = \kappa_{22}(M)$.

Врахувавши при цьому, що косинус кута $\tilde{\Theta}$ відхилення вектора швидкості $\vec{v}$ від градієнта потенціалу $\operatorname{grad}\varphi$ в довільній точці $z=x+iy$ обчислюється за формулою

$$\cos\tilde{\Theta} = \frac{\kappa_{11}\varphi_x'^2 + (\kappa_{12}+\kappa_{21})\varphi_x'\varphi_y' + \kappa_{22}\varphi_y'^2}{\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\sqrt{\left(\kappa_{11}\varphi_x' + \kappa_{12}\varphi_y'\right)^2 + \left(\kappa_{21}\varphi_x' + \kappa_{22}\varphi_y'\right)^2}}, \quad (1.90)$$

приходимо до відповідних аналогів умов квазіортогональності [19, 21, 103] в околах чотирикутних ділянок границі області G_z:

$$-f_{kx}'(x,y)\,y_\varphi + f_{ky}'(x,y)\,x_\varphi = \sqrt{f_{kx}'^2(x,y) + f_{ky}'^2(x,y)}\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_k},$$

де

$$\cos\Theta_k = \frac{\kappa_{11}f_{kx}'^2 + (\kappa_{12}+\kappa_{21})f_{kx}'f_{ky}' + \kappa_{22}f_{ky}'^2}{\sqrt{f_{kx}'^2+f_{ky}'^2}\sqrt{\left(\kappa_{11}f_{kx}' + \kappa_{12}f_{ky}'\right)^2 + \left(\kappa_{21}f_{kx}' + \kappa_{22}f_{ky}'\right)^2}}, \; k=1,3,$$

$$f_{lx}'(x,y)\,y_\psi - f_{ly}'(x,y)\,x_\psi = \sqrt{f_{lx}'^2(x,y) + f_{ly}'^2(x,y)}\sqrt{x_\psi^2 + y_\psi^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_l},$$

$$\cos\Theta_l = \frac{\kappa_{11}f_{lx}'^2 + (\kappa_{12}+\kappa_{21})f_{lx}'f_{ly}' + \kappa_{22}f_{ly}'^2}{\sqrt{f_{lx}'^2+f_{ly}'^2}\sqrt{\left(\kappa_{11}f_{lx}' + \kappa_{12}f_{ly}'\right)^2 + \left(\kappa_{21}f_{lx}' + \kappa_{22}f_{ly}'\right)^2}}, \; l=2,4.$$

Відповідну обернену задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q аналогічно до [19, 21, 103] отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} \kappa_{11}(x,y,\varphi,\psi)\dfrac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(x,y,\varphi,\psi)\dfrac{\partial x}{\partial \psi} = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21}(x,y,\varphi,\psi)\dfrac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(x,y,\varphi,\psi)\dfrac{\partial x}{\partial \psi} = \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \tag{1.91}$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)) = 0, \quad f_3\left(x\left(\varphi^*,\psi\right), y\left(\varphi^*,\psi\right)\right) = 0, \quad 0 \le \psi \le Q, \\ f_2(x(\varphi,Q), y(\varphi,Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi,0), y(\varphi,0)) = 0, \quad \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*. \end{cases} \tag{1.92}$$

Наближення розв'язку такої задачі в загальному випадку будуємо, як і раніше, шляхом поетапної параметризації (“почергового заморожування”) параметра γ (або витрати Q), межових та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації (див., наприклад, [158]). Отже, задавши кількість вузлів розбиття сітки m та n, параметр ε_1, що характеризує точність роботи алгоритму розв’язання відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат межових вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}$ $x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j}^{(0)}, \quad y_{i,j}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}$, знаходимо за формулою (1.85) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомої величини γ. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}\right)$ за допомогою, наприклад, такої ітераційної схеми:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k+1)} = \Big(& x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} B_{i,j}^{(k)} \left(x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)} \right) + \gamma^{(k)} A_{i,j}^{(k)} \Big(x_{i+1,j+1}^{(k)} + \\ & + x_{i-1,j-1}^{(k+1)} - x_{i+1,j-1}^{(k+1)} - x_{i-1,j+1}^{(k)} \Big) / 4 + C_{i,j}^{(k)} \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \\ & + \gamma^{(k)} D_{i,j}^{(k)} \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \Big) \Big/ 2\left(1 + \gamma^{(k)2} B_{i,j}^{(k)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{i,j}^{(k+1)} = \Big(& y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} B_{i,j}^{(k)} \left(y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)} \right) + \gamma^{(k)} A_{i,j}^{(k)} \Big(y_{i+1,j+1}^{(k)} + \\ & + y_{i-1,j-1}^{(k+1)} - y_{i+1,j-1}^{(k+1)} - y_{i-1,j+1}^{(k)} \Big) / 4 + E_{i,j}^{(k)} \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \\ & + \gamma^{(k)} F_{i,j}^{(k)} \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \Big) \Big/ 2\left(1 + \gamma^{(k)2} B_{i,j}^{(k)}\right), \end{aligned}$$

де

$$\kappa_{rs}^{ij\,(k)} = \kappa_{rs}\left(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}, \varphi_i, \psi_j\right),\ A_{i,j}^{(k)} = \kappa_{12}^{ij\,(k)} - \kappa_{21}^{ij\,(k)},$$

$$B_{i,j}^{(k)} = \kappa_{11}^{ij\,(k)}\kappa_{22}^{ij\,(k)} - \kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12}^{ij\,(k)},$$

$$C_{i,j}^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}}{4}\left(\left(\kappa_{21}^{ij\,(k)}\frac{\kappa_{11x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}} - \kappa_{21x}^{ij\,(k)}\right)\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) + \left(\kappa_{21}^{ij\,(k)}\frac{\kappa_{11y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \kappa_{21y}^{ij\,(k)}\right)\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\right) - \frac{1}{4\kappa_{11}^{ij\,(k)}}\left(\kappa_{11x}^{ij\,(k)}\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right) + \kappa_{11y}^{ij\,(k)} \times\right.$$

$$\left.\times\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right) + \frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{11\psi}^{ij\,(k)} - \kappa_{11\varphi}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}} - \kappa_{21\psi}^{ij\,(k)}\right),$$

$$E_{i,j}^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}}{4}\left(\left(\kappa_{12x}^{ij\,(k)} - \kappa_{12}^{ij\,(k)}\frac{\kappa_{22x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}\right)\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) + \left(\kappa_{12y}^{ij\,(k)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \kappa_{12}^{ij\,(k)}\frac{\kappa_{22y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}\right)\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\right) - \frac{1}{4\kappa_{22}^{ij\,(k)}}\left(\kappa_{22x}^{ij\,(k)}\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \kappa_{22y}^{ij\,(k)}\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right) - \frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{22\psi}^{ij\,(k)} - \kappa_{22\varphi}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}} - \kappa_{12\psi}^{ij\,(k)}\right),$$

$$D_{i,j}^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}}{4}\left(\left(\kappa_{11}^{ij\,(k)}\kappa_{22x}^{ij\,(k)} - \kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21x}^{ij\,(k)} - \kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12x}^{ij\,(k)} + \frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{11x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}}\right)\times\right.$$

$$\times\left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}\right) + \left(\kappa_{11}^{ij\,(k)}\kappa_{22y}^{ij\,(k)} - \kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21y}^{ij\,(k)} - \kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12y}^{ij\,(k)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{11y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}}\right)\times\left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\left(\kappa_{12x}^{ij\,(k)} - \frac{\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{11x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}\right) + \left(\kappa_{12y}^{ij\,(k)} - \frac{\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{11y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}}\right)\left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\right) + + \frac{\Delta\varphi}{2}\left(\kappa_{12}^{ij\,(k)} \times\right.$$

$$\times\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{11\psi}^{ij\,(k)}-\kappa_{11\varphi}^{ij\,(k)}}{\kappa_{11}^{ij\,(k)}}-\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21\psi}^{ij\,(k)}+\kappa_{11}^{ij\,(k)}\kappa_{22\psi}^{ij\,(k)}-\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12\psi}^{ij\,(k)}+\kappa_{12\varphi}^{ij\,(k)}\Bigg),$$

$$F_{i,j}^{(k)}=\frac{\gamma^{(k)}}{4}\Bigg(\Bigg(\kappa_{22}^{ij\,(k)}\kappa_{11x}^{ij\,(k)}-\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21x}^{ij\,(k)}-\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12x}^{ij\,(k)}+\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{22x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}\Bigg)\times$$

$$\times\left(x_{i,j+1}^{(k)}-x_{i,j-1}^{(k+1)}\right)+\Bigg(\kappa_{22}^{ij\,(k)}\kappa_{11y}^{ij\,(k)}-\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21y}^{ij\,(k)}-\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12y}^{ij\,(k)}+$$

$$+\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{22y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}\Bigg)\left(y_{i,j+1}^{(k)}-y_{i,j-1}^{(k+1)}\right)\Bigg)+\frac{1}{4}\Bigg(\Bigg(\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{22x}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}-\kappa_{21x}^{ij\,(k)}\Bigg)\times$$

$$\times\left(x_{i+1,j}^{(k)}-x_{i-1,j}^{(k+1)}\right)+\left(\frac{\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{22y}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}-\kappa_{21y}^{ij\,(k)}\right)\left(y_{i+1,j}^{(k)}-y_{i-1,j}^{(k+1)}\right)\Bigg)+\frac{\Delta\varphi}{2}\Bigg(\kappa_{21}^{ij\,(k)}\times$$

$$\times\frac{\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{22\psi}^{ij\,(k)}+\kappa_{22\varphi}^{ij\,(k)}}{\kappa_{22}^{ij\,(k)}}-\kappa_{12}^{ij\,(k)}\kappa_{21\psi}^{ij\,(k)}+\kappa_{22}^{ij\,(k)}\kappa_{11\psi}^{ij\,(k)}-\kappa_{21}^{ij\,(k)}\kappa_{12\psi}^{ij\,(k)}-\kappa_{21\varphi}^{ij\,(k)}\Bigg).$$

Після цього знаходимо нові наближення $\gamma^{(k+1)}$ та $Q^{(k+1)}$ величин γ та Q за формулами (1.85) та (1.86). Далі “підправляємо” координати межових вузлів, розв’язавши систему нелінійних рівнянь, утворену із відповідних аналогів умов квазіортогональності та граничних кривих (наприклад, шляхом почергової фіксації положення «навколишніх вузлів») та перевіряємо виконання умов

$$\max_{x_{i,j},\,y_{i,j}\in\partial G_z}\left(\left|x_{i,j}{}^{(k+1)}-x_{i,j}{}^{(k)}\right|,\left|y_{i,j}{}^{(k+1)}-y_{i,j}{}^{(k)}\right|\right)<\varepsilon,$$

$$\left|Q^{(k+1)}-Q^{(k)}\right|<\varepsilon,\ \left|D^{(k+1)}-D^{(k)}\right|<\varepsilon. \qquad (1.93)$$

Якщо умови (1.93) не виконуються, то повертаємось до уточнення координат внутрішніх вузлів. У протилежному випадку обчислюємо нев’язку “квазіконформності” отриманої сітки $\varepsilon_*=\sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}$, де ε_x, ε_y – нев’язки апроксимацій рівнянь (1.91):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \max\limits_{i,j=1}^{m,n} \left| x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - \gamma \left(\kappa_{11}^{ij} \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1} \right) + \kappa_{12}^{ij} \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1} \right) \right) \right|, \\ \varepsilon_y = \max\limits_{i,j=1}^{m,n} \left| y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - \gamma \left(\kappa_{21}^{ij} \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1} \right) + \kappa_{22}^{ij} \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1} \right) \right) \right|. \end{cases}$$

Якщо потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо m і n та розв'язуємо різницеву задачу знову (оптимальність співвідношення між m та n досягається аналогічно до [70, 79, 80] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Зауважимо, що відомо і інші варіанти числової реалізації ідеї конформного та квазіконформного обернення конкретних типів крайових задач. Так у працях [70, 71] у випадку $\kappa = 1$ кроки розбиття $\Delta\varphi$ та $\Delta\psi$ задавалися однаковими, а в процесі розв'язання задачі уточнювались параметри n та m.

Описані вище алгоритми числового розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення є досить ефективними і зручними для реалізації у вигляді пакетів програм для ПК IBM PC/AT.

На рис 1.11 та 1.12 подані результати розрахунків у випадку $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-8}$ (зокрема, на рис. 1.11 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху в області G_z, обмеженій кривими $f_1 = \frac{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$, $f_2 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$, $f_3 = \frac{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$, $f_4 = \ = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$, а на рис. 1.12 – кривими $f_1 = x$, $f_2 = y - x^2 - 1$, $f_3 = x - 1$, $f_4 = y$). У відповідних табл. 1.1, 1.2, окрім заданих параметрів розбиття $m \times n$ та шуканої витрати Q фігурує необхідна кількість кроків ітерації для виконання умов закінчення процесу (1.92) *kM, kQ, kD* (відповідно). На графіках зображені залежності стабілізації витрати (Q), відношення діагоналей (D) та максимальної похибки наближень граничних вузлів (mX) від кроку ітерації.

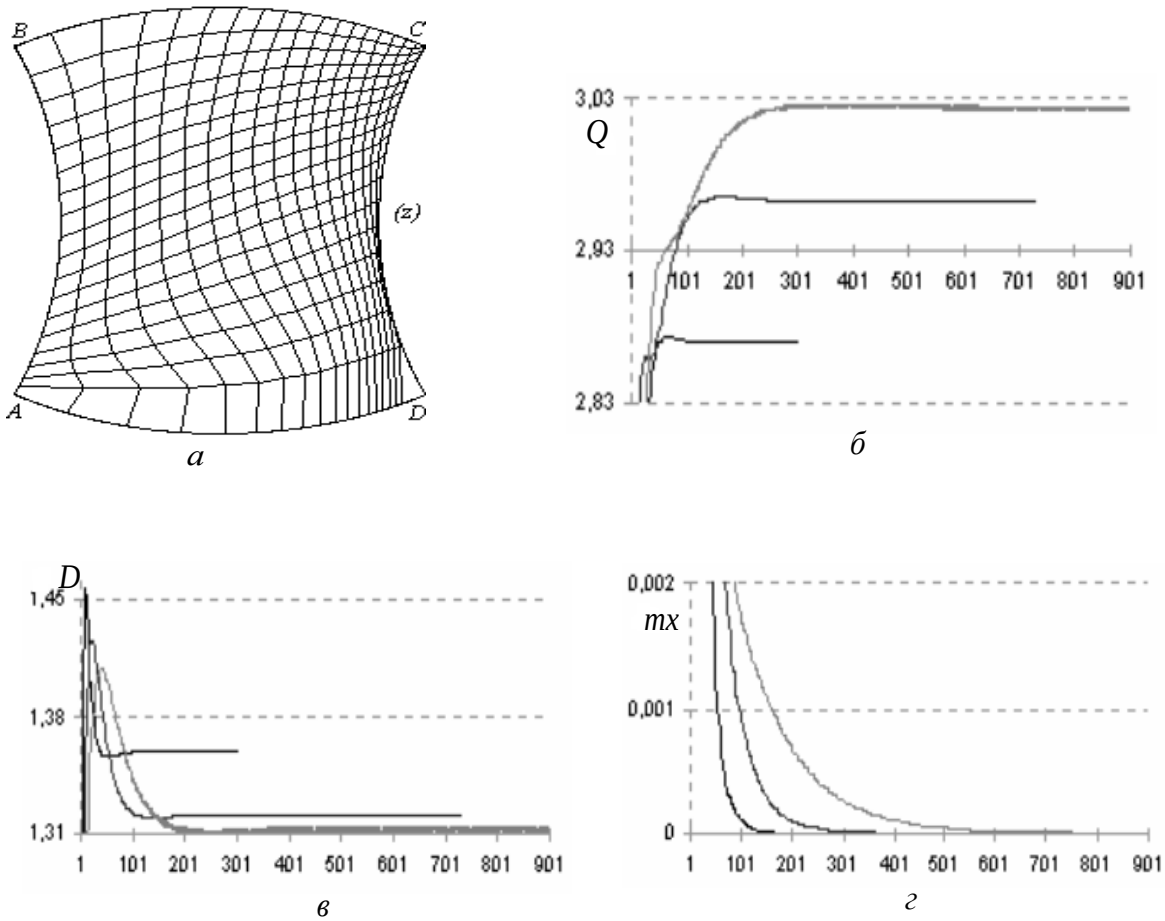


Рис. 1.11. Динамічна сітка (*а*) та відповідні табл. 1.1 результати розрахунків Q (*б*), D (*в*) і mX (*г*) при $\kappa = \begin{pmatrix} y & 0,25y \\ x & e^{0,5x} \end{pmatrix}$

Таблиця. 1.1. Результати розрахунків kM, kQ, kD, $Q^{(k)}$ в залежності від розбиття

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	$Q^{(k)}$
1	10×10	304	226	241	2,8698
2	17×17	732	529	558	2,9623
3	24×24	2109	1564	1677	3,0233

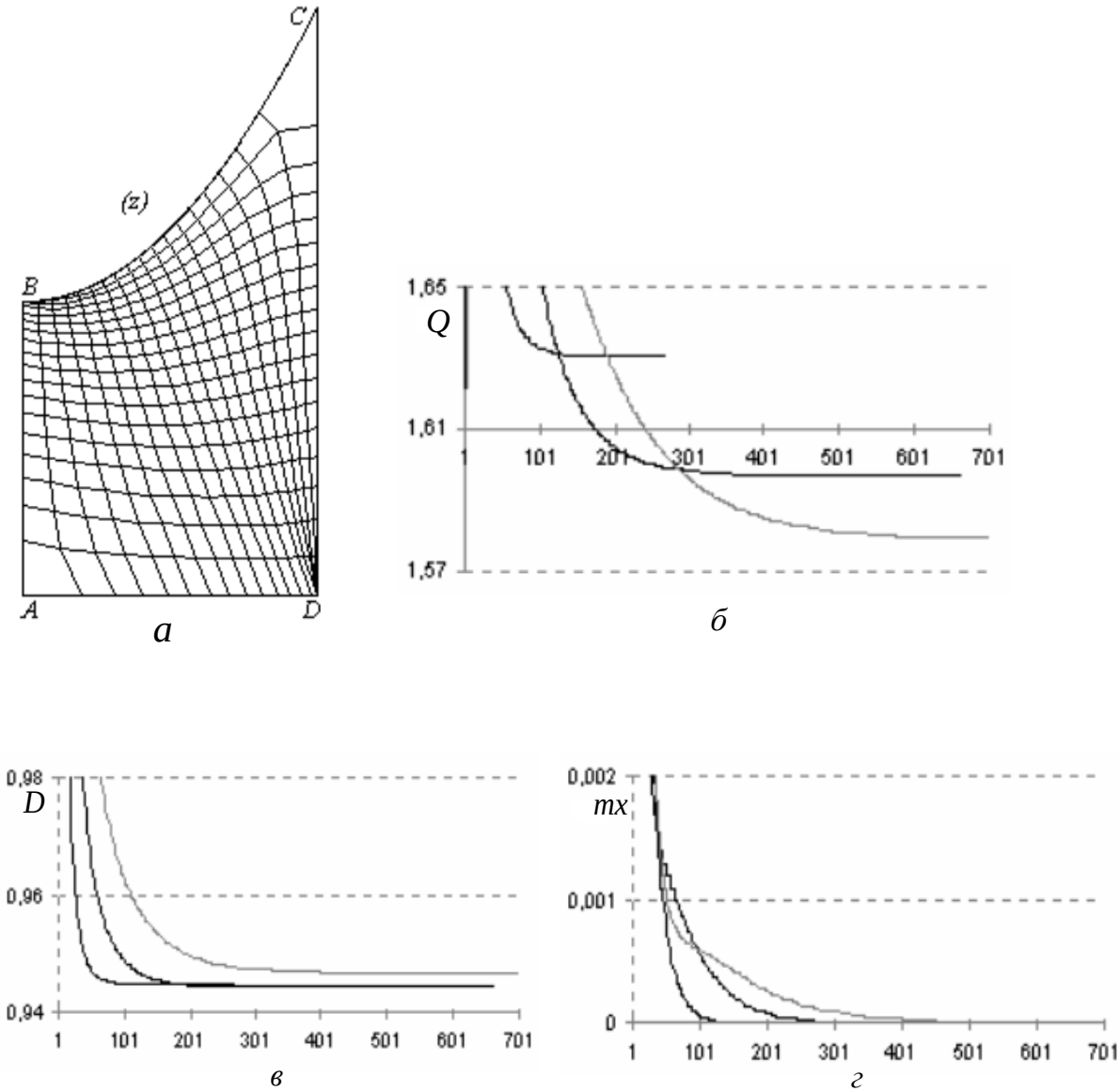


Рис. 1.12. Динамічна сітка (*а*) та ілюстрація процесу стабілізації параметрів Q (*б*), D (*в*) і mX (*г*) при $\kappa = \begin{pmatrix} y+1 & 0,5\sqrt{x+1} \\ 0,25\sqrt{x+1} & x+1 \end{pmatrix}$ згідно табл. 1.2

Табл. 1.2. Результати розрахунків відповідні рис. 1.12

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q
1	10×10	270	224	239	1,6308
2	17×17	666	487	574	1,5971
3	24×24	1213	839	1055	1,5789

1.4.3. Метод сумарних зображень при розв'язанні нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення. Розглянемо крайову задачу на обернене конформне відображення (задачу (1.79), (1.80) при $\kappa = 1$) області G_ω на G_z при невідомому Q:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial \psi}, & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \le \psi \le Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*. \end{cases} \quad (1.94)$$

Як відомо, ця задача зводиться до розв'язання в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих крайових умовах та умовах Коші–Рімана на границі ∂G_ω області G_ω [19–21].

Різницевий аналог задачі (1.94) у відповідній рівномірній сітковій області G_ω^γ запишемо, наприклад, у такому вигляді:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right) x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2 \left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right) = 0, & i = \overline{1,m}, \\ y_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right) y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2 \left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right) = 0, & j = \overline{1,n}, \end{cases} \quad (1.95)$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{0,j}, y_{0,j}\right) = 0, & f_3\left(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}\right) = 0, & j = \overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}\right) = 0, & f_4\left(x_{i,0}, y_{i,0}\right) = 0, & i = \overline{0,m+1}, \end{cases} \quad (1.96)$$

$$\begin{cases} x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma\left(y_{i,1} - y_{i,0}\right), & y_{i,0} - y_{i+1,0} = \gamma\left(x_{i,1} - x_{i,0}\right), & i = \overline{1,m}, \\ x_{1,j} - x_{0,j} = \gamma\left(y_{0,j+1} - y_{0,j}\right), & y_{0,j} - y_{1,j} = \gamma\left(x_{0,j+1} - x_{0,j}\right), & j = \overline{1,n}, \end{cases} \quad (1.97)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}\,. \quad (1.98)$$

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1.95) у внутрішніх і граничних по горизонталі вузлах сіткового прямокутника G_ω^γ через значення в межових вузлах по вертикалі згідно з формулами сумарних зображень Г. Положого [132, 165] має вигляд

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t} + p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right),$$
$$y_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t} + p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right), \quad (1.99)$$
$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{0,n+1},$$

де

$$p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\sin\frac{ik\pi}{m+1}, \ \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2\cos\frac{k\pi}{m+1}, \ \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1},$$
$$\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі A_k, B_k, C_k, D_k $x_{0,t}$, $y_{0,t}$, $x_{m+1,t}$ $y_{m+1,t}$ визначаються з розв’язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_1\left(x_{0,j}, y_{0,j}\right) = 0;$$

$$f_2\left(\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^{n+1} A_k + \nu_k^{n+1} B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{n+1-t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t} + p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right),\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^{n+1} C_k + \nu_k^{n+1} D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{n+1-t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t} + p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right)\right) = 0;$$

$$f_3\left(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}\right) = 0;$$

$$f_4\left(\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(A_k + B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t} + p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right),\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t} + p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right)\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(p_{i,k} - p_{i+1,k}\right)\left(C_k + D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\nu_k^{t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t} + p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right) =$$
$$= \gamma \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\left(\mu_k - 1\right)A_k + \left(\nu_k - 1\right)B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{(\mu_k - 1)\nu_k^{t}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t} + p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right);$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(p_{i+1,k}-p_{i,k}\right)\left(A_k+B_k+\gamma^2\sum_{t=1}^{n}\frac{\nu_k^t}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t}+p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right)=$$

$$=\gamma\sum_{k=1}^{m}p_{i,k}\left(\left(\mu_k-1\right)C_k+\left(\nu_k-1\right)D_k+\gamma^2\sum_{t=1}^{n}\frac{(\mu_k-1)\nu_k^t}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t}+p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right);$$

$$\sum_{k=1}^{m}p_{1,k}\left(\mu_k^jA_k+\nu_k^jB_k+\gamma^2\sum_{t=1}^{n}\frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{0,t}+p_{m,k}x_{m+1,t}\right)\right)-x_{0,j}=$$

$$=\gamma\left(y_{0,j+1}-y_{0,j}\right);$$

$$y_{0,j}-\sum_{k=1}^{m}p_{1,k}\left(\mu_k^jC_k+\nu_k^jD_k+\gamma^2\sum_{t=1}^{n}\frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{0,t}+p_{m,k}y_{m+1,t}\right)\right)=$$

$$=\gamma\left(x_{0,j+1}-x_{0,j}\right);$$

$$i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n},\tag{1.100}$$

де невідома γ обчислюється за формулою (1.98).

Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб число $\alpha=\Delta\varphi\cdot\frac{n+1}{\gamma}$ не перевищувало шуканої витрати Q). Розв'язуємо систему (1.100) при заданому значенні γ та перевіряємо виконання рівності (1.98). Залежно від одержаної нев'язки вибираємо наступне наближення невідомої величини γ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність: $\left|\gamma^{(k+1)}-\gamma^{(k)}\right|<\varepsilon$.

Ефективність запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти для таких формул знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків (1.100) за умови (1.98), породжених лише граничними умовами (1.96) та умовами Коші–Рімана (1.97).

У випадку, якщо, наприклад, крива BC (з фіксованою точкою B), на якій задається додаткова умова $\varphi_i=g(y)$, де $g(y)$ – достатньо гладка функція, є вільною кривою, то розв'язок відповідної задачі також може бути отриманий за формулами (1.99), де невідомі параметри знаходяться з розв'язку системи, яка отримується із (1.96)–(1.98), шляхом заміни рівнянь $f_2(x_{i,n+1},y_{i,n+1})=0$ на рівняння $\varphi_i=g(y_{i,n+1}),\quad i=\overline{0,m+1}.$

1.5. Асимптотичний метод розв'язку сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція–дифузія" в неоднорідному анізотропному середовищі

Як показали проведені в працях [153, 173] дослідження, ефективною методикою розв'язку двовимірних задач конвективної дифузії при фільтрації підземних вод в однорідному анізотропному пористому середовищі є перетворення рівнянь конвективної дифузії до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу, а, також усереднення швидкості фільтрації у вказаній області. Використовуючи цю методику разом з аналітичними і чисельно-аналітичними методами, були отримані точні або наближенні аналітичні розв'язки найбільш типових двовимірних крайових стаціонарних та нестаціонарних задач конвективної дифузії, і зокрема задач конвективного масоперенесення, які виникають при дослідженні процесів забруднення або засолення підземних вод і плодоносних земель [124, 125, 173]. У праці [17] ця методика використовувалась разом з асимптотичним методом Вішика–Люстерника [64] при побудові мажорант розв'язків деякого класу задач масоперенесення при фільтрації в однорідному анізотропному середовищі. Нижче покажемо, що застосовувати методику переходу до області узагальненого потенціалу і разом з нею – асимптотичний метод Вішика–Люстерника варто і при розв'язуванні задач масоперенесення при фільтрації в неоднорідному анізотропному середовищі у випадку переваги процесів конвективного масоперенесення над дифузійним. При цьому рівняння конвективної дифузії після переходу до змінних області комплексного потенціалу набуває більш громіздкого вигляду, і на перший погляд може скластись враження, що дану методику застосовувати недоцільно. Проте ця громіздкість суттєво не впливає на алгоритм розв'язку. Отримані формули дають можливість ефективно провести наближений розрахунок концентрації розчинної речовини по області і вздовж окремих ділянок межі, а також визначити масу дифундуючої речовини.

Як відомо, процес конвективної дифузії при плановій напірній фільтрації в неоднорідному анізотропному середовищі без урахування процесів поглинання чи розчинення можна описати такою системою рівнянь [124, 125, 173]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)-v_x\frac{\partial C}{\partial x}-v_y\frac{\partial C}{\partial y}=\sigma(t)\frac{\partial C}{\partial t} \tag{1.101}$$

$$\vec{v}=K\cdot\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{div}\vec{v}=0, \tag{1.102}$$

де $C(x,y,t)$ – концентрація розчинної речовини в фільтраційному потоці в точці $z = x + iy$ в момент часу t, ε – коефіцієнт конвективної дифузії, σ – пористість середовища, $\vec{v} = v_x + v_y$ – вектор швидкості фільтрації, $\varphi = -k_0 Th$ – узагальнений потенціал, h – п'єзометричний напір, T – потужність водопроникного пласта, K_0 – характерний розмір, $K = k_0 T^{-1}\chi$, $\chi = (\chi_{i,j}(x,y))_{2\times 2}$ – симетричний тензор фільтрації: $k_{1,2} = k_{2,1}$, $\left|k_{i,j}(x,y)\right| \le M < \infty$, $K_*(x,y) = k_{1,1}(x,y)k_{2,2}(x,y) - k_{1,2}^2(x,y) \ge K_{**} > 0$.

Припустимо, що фільтраційна задача розв'язана, тобто відомий узагальнений комплексний потенціал $w = F(z)$ ($w = \varphi + i\psi$, ψ – функція течії) або характеристична функція течії

$$z = F^{-1}(w), \tag{1.103}$$

яка здійснює квазіконформне відображення області узагальненого комплексного потенціалу G_w на область фільтрації G_z. Тоді, внаслідок заміни змінних за допомогою співвідношення (1.103) і врахування формул (1.102), рівняння (1.101) набуває наступного вигляду:

$$Lc = 0, \tag{1.104}$$

де

$$Lc \equiv \varepsilon\left(\alpha(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2} + 2\beta(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi\partial\psi} + \gamma(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2} + \delta_1(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi} + \right.$$
$$\left. + \delta_2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right) - \delta(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi} - \sigma(t)\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{1.105}$$

$$\alpha(\varphi,\psi) = K_*^{-2}((k_{2,2}v_x - k_{1,2}v_y)^2 + (k_{2,1}v_x - k_{1,1}v_y)^2),$$
$$\beta(\varphi,\psi) = K_*^{-2}(v_y(k_{1,2}v_y - k_{2,2}v_x) + v_x(k_{1,1}v_y - k_{2,1}v_x)),$$
$$\gamma(\varphi,\psi) = v_x^2 + v_y^2 = v^2(\varphi,\psi),$$
$$\delta_1(\varphi,\psi) = K_*^{-1}k_{12}v_y^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{12}}{K_*}\right) + K_*^{-2}k_{12}^2 v_y\frac{\partial v_y}{\partial\varphi} - K_*^{-1}k_{12}v_x v_y\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{22}}{K_*}\right) -$$
$$-K_*^{-2}k_{12}k_{22}v_y\frac{\partial v_x}{\partial\varphi} - K_*^{-1}k_{22}v_x v_y\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{12}}{K_*}\right) - K_*^{-2}k_{12}k_{22}v_x\frac{\partial v_y}{\partial\varphi} +$$

$$+K_*^{-1}k_{22}v_x^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{12}}{K_*}\right)+K_*^{-2}k_{22}^2v_x\frac{\partial v_x}{\partial\varphi}+v_y^2\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{k_{12}}{K_*}\right)+K_*^{-1}k_{12}v_y\frac{\partial v_y}{\partial\psi}-$$

$$-v_xv_y\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{k_{22}}{K_*}\right)+K_*^{-2}k_{11}^2v_y\frac{\partial v_y}{\partial\varphi}-K_*^{-1}k_{11}v_xv_y\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{21}}{K_*}\right)-K_*^{-2}k_{21}k_{11}v_y\frac{\partial v_x}{\partial\varphi}-$$

$$-K_*^{-1}k_{21}v_xv_y\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{11}}{K_*}\right)-K_*^{-1}k_{22}v_y\frac{\partial v_x}{\partial\psi}+K_*^{-1}k_{11}v_y^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{11}}{K_*}\right)-$$

$$-K_*^{-2}k_{11}k_{21}v_x\frac{\partial v_y}{\partial\varphi}+K_*^{-1}k_{21}v_x^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{k_{21}}{K_*}\right)+K_*^{-2}k_{21}^2v_x\frac{\partial v_x}{\partial\varphi}+v_xv_y\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{k_{11}}{K_*}\right)+$$

$$+K_*^{-1}k_{11}v_x\frac{\partial v_y}{\partial\psi}-v_x^2\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{k_{21}}{K_*}\right)-K_*^{-1}k_{21}v_x\frac{\partial v_x}{\partial\psi},$$

$$\delta_2(\varphi,\psi)=K_*^{-1}k_{12}v_x\frac{\partial v_y}{\partial\varphi}-K_*^{-1}k_{22}v_x\frac{\partial v_y}{\partial\varphi}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial\psi}+K_*^{-1}k_{11}v_y\frac{\partial v_y}{\partial\varphi}-$$

$$-K_*^{-1}k_{21}v_x\frac{\partial v_x}{\partial\varphi}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial\psi},\ \delta(\varphi,\psi)=K_*^{-1}(2k_{12}v_xv_y-k_{22}v_x^2-k_{11}v_y^2).$$

Розглянемо випадок, коли область фільтрації обмежена двома еквіпотенціальними лініями Γ_1 і Γ_2, $\varphi\big|_{\Gamma_1}=\varphi_*$ $(\varphi_*=0)$, $\varphi\big|_{\Gamma_2}=\varphi^*$, і двома лініями течії Γ_3 і Γ_4, $\psi\big|_{\Gamma_3}=0$, $\psi\big|_{\Gamma 4}=Q$, де $\varphi=-k_0TH$, H – діючий напір, Q – повна фільтраційна витрата, Γ_3 – джерело поперечної дифузії $\left(c\big|_{\Gamma_3}=\tilde{c}_2(\varphi,\psi)\right)$, Γ_4 – непроникна стінка; на виході фільтраційного потоку Γ_2 спостерігається швидкий відтік забруднених вод. Виходячи з цього початкові й граничні умови для рівняння (1.104) запишемо у вигляді

$$c\big|_{t=0}=\tilde{c}_0(\varphi,\psi),\quad c\big|_{\varphi=\varphi_*}=\tilde{c}_1(\psi,t),\tag{1.106}$$

$$\frac{\partial c}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi^*}=0,\quad \frac{\partial c}{\partial\psi}\bigg|_{\psi=Q}=0,\quad c\big|_{\psi=0}=\tilde{c}_2(\varphi,t),\tag{1.107}$$

де $\tilde{c}_0(\varphi,\psi)$ – початковий розподіл концентрації розчинної речовини по області, $\tilde{c}_1(\psi,t)$ – розподіл концентрації на вході фільтраційного потоку, функції $\tilde{c}_0(\varphi,\psi)$, $\tilde{c}_1(\psi,t)$, $\tilde{c}_2(\varphi,t)$ – досить гладкі і задовольняють наступні умови узгодженості:

$$\tilde{c}_1(\psi,0)=\tilde{c}_0(0,\psi),\quad \tilde{c}_0(\varphi,0)=\tilde{c}_2(\varphi,0),\quad \tilde{c}_1(0,t)=\tilde{c}_2(0,t),$$
$$\frac{\partial\tilde{c}_0(0,\psi)}{\partial\psi}=\frac{\partial\tilde{c}_0(\varphi^*,\psi)}{\partial\psi}=\frac{\partial\tilde{c}_1(0,t)}{\partial\psi}=\frac{\partial\tilde{c}_2(\varphi^*,t)}{\partial\varphi}=0\,. \qquad (1.108)$$

Припущення про перевагу процесів конвективного масоперенесення над дифузійним призводить до появи в рівнянні (1.104), записаного в безрозмірних змінних $(\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{t})$, малого параметра $\overline{\varepsilon}=\varepsilon T^{-1}\left(\varphi^*\right)^{-1}$ при старших похідних [17]. Для побудови наближеного розв'язку задачі (1.104)–(1.107) застосуємо асимптотичний метод Вішика–Люстерника [64]. А саме, користуючись методикою праці [9], розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді

$$c=\widehat{c}+S+\ddot{I}\ +\ddot{I}^{\ 0}+\ddot{I}^{\ *}+R. \qquad (1.109)$$

Тут $\widehat{c}(\varphi,\psi,t,\Theta)$ – згладжений вздовж характеристики $t=f(\varphi,\psi)\equiv$ $\equiv f_2^{-1}(f_1(\varphi,\psi))$ $\left(f_1(\varphi,\psi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\delta(\tilde{\varphi},\psi)},\quad f_2(t)=\int\limits_0^{t}\frac{\partial\tilde{t}}{\sigma(\tilde{t})},\quad f_2^{-1}\right.$ – функція обернена до f_2) розв'язок виродженого рівняння (1.104), яке задовольняє умовам (1.106), тобто є $\widehat{c}(\varphi,\psi,t,\Theta)$ – розв'язок відповідної задачі конвективного масоперенесення з врахуванням випередження розмазування фронту конвективного перенесення за рахунок дифузійних процесів, а саме,

$$\widehat{c}=g_1(\Theta,\psi)c_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi)+g_2(\Theta,\psi)c_1(\psi,t-f(\varphi,\psi)), \qquad (1.110)$$

де $g_1(\Theta)=0.5(1+\Phi(\Theta))$, $g_2(\Theta)=0.5(1-\Phi(\Theta))$, $\Theta=(f(\varphi,\psi)-t)D^{-1/2}$, $\Phi(\Theta)$ – інтеграл помилок, f^{-1} – функція обернена до функції f.

Дифузійну поправку $S=S(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ по області G_W знаходимо аналогічно, до роботи [120], вимагаючи, щоб вона задовольняла рівняння $LS=(-L\widehat{c})$ і граничні умови:

$$S\Big|_{t=0,\Theta>0}=c_0-\widehat{c}\Big|_{t=0,\Theta>0},\ S\Big|_{\varphi=0,\Theta<0}=c_1-\widehat{c}\Big|_{\varphi=0,\Theta<0}$$

з точністю $O(\varepsilon)$.

Функція типу примежового шару $\Pi(\xi,\psi,t)$ в околі $\varphi=\varphi^*$ призначена для врахування дифузійних процесів вздовж границі виходу фільтраційного потоку Γ_2 і визначається за формулою

$$\Pi(\xi,\psi,t) = A(\psi,t)e^{-\delta(\varphi^*,\psi)\xi}, \tag{1.111}$$

де

$$A(\psi,t) = \varepsilon\left(\frac{\partial\hat{c}}{\partial\varphi} + \frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)\Bigg|_{\varphi=\varphi^*}, \quad \xi = \frac{\varphi-\varphi^*}{\varepsilon}.$$

Функції типу примежового шару

$$\Pi^0 = \Pi_0^0(\varphi,\eta,t) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1^0(\varphi,\eta,t) \text{ і } \Pi^*(\varphi,\mu,t) = \Pi_0^*(\varphi,\mu,t) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1^*(\varphi,\mu,t),$$

де $\eta = \varepsilon^{-1/2}\psi, \quad \mu = \varepsilon^{-1/2}(Q-\psi),$ призначені для врахування перерозподілу концентрації розчинної речовини в околі граничних ліній течії $\psi = 0$ і $\psi = Q$ за рахунок впливу відповідних джерел забруднень, інших умов. Вони визначаються із розв'язку рівнянь вигляду

$$\alpha(\varphi)\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2} - \delta(\varphi)\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \sigma(t)\frac{\partial\Pi}{\partial t} + g(\varphi,\eta,t), \tag{1.112}$$

які за допомогою заміни $s = f_1(\varphi) - f_2(t)$ зводяться до рівнянь виду:

$$a(s)\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\Pi}{\partial t} + g_0(s,t). \tag{1.113}$$

Використовуючи принцип максимуму для параболічних рівнянь, легко встановити оцінку для залишкового члена $|R| = O(\varepsilon)$ [120].

У випадку конвективного масоперенесення ($\varepsilon = 0$) рівняння (1.104) у безрозмірних змінних запишеться у вигляді:

$$\delta(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0. \tag{1.114}$$

При цьому формула для визначення безрозмірного часу руху фронту забруднень набуде вигляду

$$t = f(\varphi,\psi) \equiv \int_0^{\varphi}\frac{d\tilde{\varphi}}{\delta(\tilde{\varphi},\psi)} \equiv \int_0^{\varphi}\frac{K_* d\tilde{\varphi}}{k_{22}v_x^2 - 2k_{12}v_x v_y + k_{11}v_y^2}. \tag{1.115}$$

Зокрема, для однорідного середовища з прямолінійною анізотропією ($K_* \equiv 1$) отримаємо

$$t = f(\varphi,\psi) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{k_{22}v_x^2 - 2k_{12}v_x v_y + k_{11}v_y^2}. \qquad (1.116)$$

Якщо ж, крім цього, головні напрямки анізотропії збігаються з осями координат, то маємо

$$t = f(\varphi,\psi) \equiv k_{11}\int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v_x^2 + k_{11}^2 v_y^2}. \qquad (1.117)$$

Представлення безрозмірних компонент $k_{i,j}$ тензора фільтрації в (1.116), (1.117) через максимальну k_1 і мінімальну k_2 провідності вздовж головних напрямків анізотропії при довільному фіксованому куті α нахилу до осей координат, наведені в [120].
У випадку однорідного ізотропного середовища маємо

$$t = f(\varphi,\psi) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v_x^2 + v_y^2} = \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}. \qquad (1.118)$$

Розв’язок кутової задачі для рівняння (2.83) при умовах

$$c\Big|_{\substack{t=0\\ \varphi>0}} = \tilde{c}_0(\varphi,\psi), \quad c\Big|_{\substack{\varphi=0\\ t>0}} = \tilde{c}_1(\psi,t), \qquad (1.119)$$

як відомо [17, 120], записується у вигляді

$$c(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} \tilde{c}_1(t - f(\varphi,\psi)), & t \ge f(\varphi,\psi), \\ c_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t)), & t < f(\varphi,\psi). \end{cases} \qquad (1.120)$$

Для обчислень значень виразу $f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t)$, що входить у (1.120), нами пропонується наступна методика (алгоритм). Спочатку виберемо точки розрахунку концентрації $\varphi_k = k\Delta\varphi, \quad k = 0,1,2...,$ $\Delta\varphi$ – крок розбиття, і

обчислимо в них значення функції $\frac{1}{\delta(\varphi_k,\psi)}$. Використовуючи рекурентні формули:

$$t_{i+1} \approx t_i + \left(\frac{1}{\delta(\varphi_i,\psi)} + \frac{1}{\delta(\varphi_{i+1},\psi)} \right) \frac{\Delta\varphi}{2},\ i = 0,1,..., \qquad (1.121)$$

знаходимо час $t_i = f(\varphi_i,\psi)$ (точки розбиття осі $(0,t)$) перебування "поміченої" частинки в точках φ_i. Значення концентрації тепер будемо обчислювати в точках (φ_i, t_j). Можливі два випадки.

Нехай $f(\varphi_i,\psi) - t_j = t_i - t_j$ збігається з деяким відомим значенням t_k. Тоді $f^{-1}(f(\varphi_i,\psi) - t_j) = \varphi_k$.

Нехай $t_k < f(\varphi_i,\psi) - t_j < t_{k+i}$. Тоді, замінивши на відрізку $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ частину монотонно зростаючої кривої $t = f(\varphi,\psi)$ на відповідну хорду (рис. 1.13), маємо

$$f^{-1}(f(\varphi_i,\psi) - t_j) = \varphi_k^* \approx \varphi_k^0 = \varphi_k + (\varphi_{k+1} - \varphi_k)\frac{t_k^* - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \qquad (1.122)$$

де $t_k^* = f(\varphi_i,\psi) - t_j$.

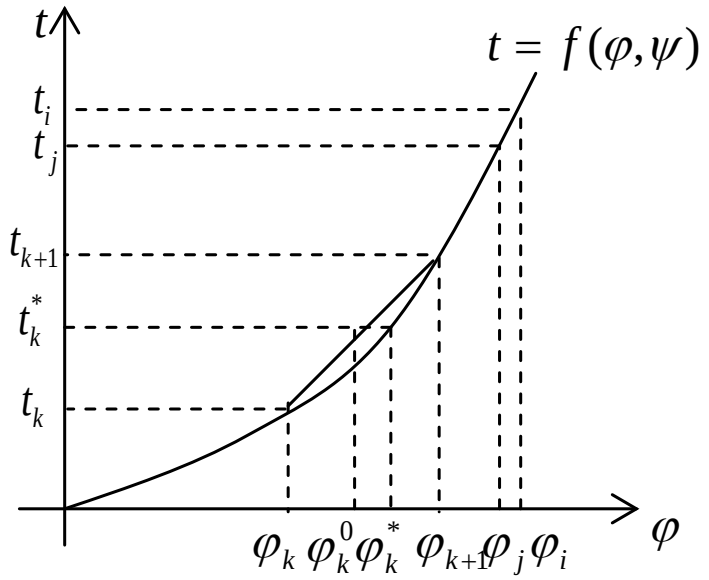


Рис. 1.13. Апроксимація функції часу

На основі наведених вище міркувань і (1.120) отримуємо формулу для наближеного обчислення концентрації розчинної речовини:

$$c(\varphi_i,\psi,t_j)=\left[\begin{array}{ll}\tilde{c}_1(\psi,t_j-t_i), & t_j\ge t_i,\\ c_0\left(\varphi_k+(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\dfrac{t_k^*-t_k}{t_{k+1}-t_k},\psi\right), & t_j<t_i.\end{array}\right. \qquad (1.123)$$

Кількість винесеної із області фільтрації G_z речовини або тієї що проходить через окремі її ділянки є однією з найважливіших інтегральних характеристик процесу, що досліджується. Ця величина використовується, наприклад, для прогнозу осідання ґрунту під гідротехнічними спорудами, прогнозу ступеня забруднення підземних вод і родючих земель та ін. Тому зупинимось більш детально на питанні визначення кількості розчинної речовини при фільтрації в пористому середовищі, яка проникає через циліндричну поверхню одиничної висоти з деякою твірною кривою Γ області фільтрації.

Формула для визначення кількості перенесення розчинної речовини q_c через ділянку Γ за одиницю часу, як відомо, має вигляд

$$q_c=\int_\Gamma u_n ds=\int_\Gamma\left(v_n c-\varepsilon\frac{\partial c}{\partial n}\right)ds, \qquad (1.124)$$

де v_n – проекція вектора швидкості фільтрації $\vec{v}=\{v_x,v_y\}$ на зовнішню нормаль $\vec{n}$, компоненти v_x, v_y якої, як випливає із закону Дарсі, зв'язані співвідношеннями

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial y}=k_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (1.125)$$

u_n – проекція на цю ж нормаль вектора масової швидкості розчинної речовини $\vec{u}=\{u_x,u_y\}$, компоненти якої u_x,u_y згідно з законом Фіка мають вигляд

$$u_x=v_x c-\varepsilon\frac{\partial c}{\partial x},\ u_y=v_y c-\varepsilon\frac{\partial c}{\partial y}. \qquad (1.126)$$

Враховуючи формули переходу від змінних області фільтрації (x,y) до змінних області узагальненого комплексного потенціалу (φ,ψ), зокрема:

$$dx = \frac{1}{I_{w/z}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}d\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}d\psi\right),\ dy = \frac{1}{I_{w/z}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}d\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}d\varphi\right) \qquad (1.127)$$

де

$$I_{w/z} = \frac{1}{I_{z/w}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = K_*^{-1}(k_{22}v_x^2 - 2k_{12}v_xv_y + k_{11}v_y^2) -$$

якобіан квазіконформного відображення (1.103), (1.125), (1.126), а також вирази (див. рис. 1.14):

$$dx = -ds\cos(\vec{n}, y),\ dy = -ds\cos(\vec{n}, x), \qquad (1.128)$$

формулу (1.124) зводимо до вигляду

$$q_c = \int_\Gamma c d\psi + \varepsilon\int_\Gamma \frac{1}{I_{w/z}}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial c}{\partial\psi}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)\right)d\varphi - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\partial c}{\partial\varphi}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial c}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right)d\psi\right] \qquad (1.129)$$

або

$$q_c = \int_\Gamma c d\psi + \varepsilon\int_\Gamma I_{w/z}^{-1}\left[\left(Z_1(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi} + v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)d\varphi - \right.$$
$$\left. -\left(Z_2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi} + Z_1(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)d\psi\right]. \qquad (1.130)$$

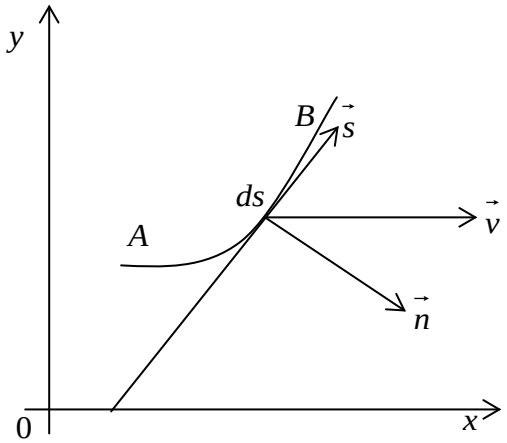


Рис. 1.14. Потік через криву

Тут використані наступні позначення:

$$I_1(\varphi,\psi) = K_*^{-1}(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_x v_y), \tag{1.131}$$

$$I_2(\varphi,\psi) = K_*^{-2}((k_{22}^2 + k_{12}^2)v_x^2 + (k_{12}^2 + k_{11}^2)v_y^2 - 2k_{12}(k_{11} + k_{22})v_x v_y). \tag{1.132}$$

Зокрема, якщо крива Γ збігається з лінією течії ($\psi = \text{const}$), то формули (1.129), (1.130) набувають відповідно вигляду

$$q_c = \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{I_{w/z}} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial c}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right] d\varphi \tag{1.133}$$

або

$$q_c = \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{I_{w/z}} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi} \left((k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_x v_y) K_*^{-1} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + v^2(\varphi,\psi) \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) \right] d\varphi. \tag{1.134}$$

Якщо крива Γ збігається з еквіпотенціальною лінією ($\varphi = \text{const}$), то відповідно маємо

$$q_c = \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\,d\psi - \varepsilon \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{1}{I_{w/z}} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial c}{\partial \psi} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right] d\psi \tag{1.135}$$

або

$$q_c = \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\,d\psi - \varepsilon \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{1}{I_{w/z}} \Big[K_*^{-2}((k_{22}^2 + k_{12}^2)v_x^2 + (k_{12}^2 + k_{11}^2)v_y^2 -$$
$$-2k_{12}(k_{11} + k_{22})v_x v_y) + K_*^{-1}(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_x v_y) +$$
$$+ K_*^{-1}(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_x v_y) \frac{\partial c}{\partial \psi} \Big] d\psi. \tag{1.136}$$

Розглянемо тепер часткові випадки формул (1.130)–(1.136) у залежності від типу фільтраційного середовища.

1. Якщо середовище є однорідним та ізотропним, то

$$k_{11} = k_{22} \equiv 1,\ k_{12} = k_{21} \equiv 0,\ I_{w/z} = v^2(\varphi,\psi),$$

$$I_1(\varphi,\psi) \equiv 0,\ I_2(\varphi,\psi) = v^2(\varphi,\psi).$$

Отже,

$$q_c = \int_{\Gamma} c d\psi + \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial c}{\partial \psi} d\varphi - \frac{\partial c}{\partial \varphi} d\psi \ \text{(у загальному)}; \tag{1.137}$$

$$q_c = \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial c}{\partial \psi} d\varphi \quad (\text{при} \ \ \psi = \text{const}); \tag{1.138}$$

$$q_c = \int_{\psi_1}^{\psi_2} c d\psi - \varepsilon \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\partial c}{\partial \varphi} d\psi \quad (\text{при} \ \ \varphi = \text{const}). \tag{1.139}$$

2. У випадку неоднорідного ізотропного середовища, де

$$k_{11} = k_{12} = \chi(x,y),\ k_{12} = k_{21} \equiv 0,$$

$$I_{w/z} = \frac{v^2(\varphi,\psi)}{\chi},\ I_1(\varphi,\psi) \equiv 0,\ I_1(\varphi,\psi) = \frac{v^2(\varphi,\psi)}{\chi},$$

аналогічно отримуємо

$$q_c = \int_{\Gamma} c d\psi + \varepsilon \int_{\Gamma} \chi \frac{\partial c}{\partial \psi} d\varphi - \chi^{-1} \frac{\partial c}{\partial \varphi} d\psi, \tag{1.140}$$

$$q_c = \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi^{-1} \frac{\partial c}{\partial \psi} d\varphi \quad (\psi = \text{const}) \ , \tag{1.141}$$

$$q_c = \int_{\psi_1}^{\psi_2} c d\psi - \varepsilon \int_{\psi_1}^{\psi_2} \chi \frac{\partial c}{\partial \varphi} d\psi \quad (\varphi = \text{const}). \tag{1.142}$$

3. У випадку однорідного середовища з лінійною анізотропією, коли

$$k_{i,j} = \text{const}, \quad k_{12} = k_{21}, \quad k_{11}k_{12} - k_{12}^2 \equiv 1,$$

$$I_{w/z} = k_{12}v_x^2 - 2k_{12}v_xv_y + k_{11}v_y^2, \quad I_1(\varphi,\psi) = k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_xv_y,$$

$$I_2(\varphi,\psi) = (k_{22}^2 + k_{12}^2)v_x^2 + (k_{12}^2 + k_{11}^2)v_y^2 - 2k_{12}(k_{11} + k_{22})v_xv_y \ ,$$

маємо відповідно

$$q_c = \int\limits_{\Gamma} c d\psi + \varepsilon \int\limits_{\Gamma} (k_{12}v_x^2 - 2k_{12}v_xv_y + k_{11}v_y^2)^2 \Bigg[\Bigg((k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_xv_y) \times$$
$$\times \frac{\partial c}{\partial \varphi} + v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial \psi}\Bigg) d\varphi - \Bigg(\Big((k_{22}^2 + k_{12}^2)v_x^2 + (k_{12}^2 + k_{11}^2)v_y^2 -$$
$$-2k_{12}(k_{11} + k_{22})v_xv_y\Big)\frac{\partial c}{\partial \varphi} + \Big(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_xv_y\Big)\frac{\partial c}{\partial \psi}\Bigg) d\psi\Bigg], \quad (1.143)$$

$$q_c = \varepsilon \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big(k_{12}v_x^2 - 2k_{12}v_xv_y + k_{11}v_y^2\Big)^{-1} \Bigg[\Big(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_xv_y\Big)\frac{\partial c}{\partial \varphi} +$$
$$+ v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial \psi}\Bigg] d\varphi \ \ (\psi = \text{const}), \quad (1.144)$$

$$q_c = \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} c d\psi - \varepsilon \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} \Big(k_{12}v_x^2 - 2k_{12}v_xv_y + k_{11}v_y^2\Big)^{-1} \Bigg[\Big((k_{22}^2 + k_{12}^2)v_x^2 +$$
$$+ (k_{12}^2 + k_{11}^2)v_y^2 - 2k_{12}(k_{11} + k_{22})v_xv_y\Big)\frac{\partial c}{\partial \varphi} d\varphi +$$
$$+ \Big(k_{12}(v_y^2 - v_x^2) + (k_{11} - k_{12})v_xv_y\Big)\frac{\partial c}{\partial \psi}\Bigg] d\psi \ \ (\varphi = \text{const}). \quad (1.145)$$

Зокрема, якщо головні напрямки анізотропії середовища збігаються з напрямками осей координат, то:

$$k_{11} \neq k_{12}, \ k_{12} = k_{21} = 0, \ K_* \equiv 1,$$

$$I_{w/z} = \frac{1}{k_{11}}(v_x^2 + k_{11}^2 v_y^2), \ I_1(\varphi,\psi) = \frac{k_{11}^2 - 1}{k_{11}} v_xv_y,$$

$$I_2(\varphi,\psi)=\frac{1}{k_{11}^2}(v_x^2+k_{11}^4v_y^2);$$

$$q_c=\int\limits_{\Gamma}cd\psi+\varepsilon\int\limits_{\Gamma}(v_x^2+k_{11}^2v_y^2)^{-1}\left[\left((k_{11}^2-1)v_xv_y\frac{\partial c}{\partial\varphi}+v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)d\varphi-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{k_{11}^2}\left(v_x^2+k_{11}^4v_y^2\right)\frac{\partial c}{\partial\varphi}+(k_{11}^2-1)v_xv_y\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)d\psi\right], \qquad (1.146)$$

$$q_c=\varepsilon\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(v_x^2+k_{11}^2v_y^2)^{-1}\left[(k_{11}^2-1)v_xv_y\frac{\partial c}{\partial\varphi}+v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right]d\varphi$$

$$(\psi=\text{const}), \qquad (1.147)$$

$$q_c=\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}cd\psi-\varepsilon\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}(v_x^2+k_{11}^2v_y^2)^{-1}\left[k_{11}^{-1}\left(v_x^2+k_{11}^4v_y^2\right)\frac{\partial c}{\partial\varphi}+(k_{11}^2-1)v_xv_y\frac{\partial c}{\partial\psi}\right]d\psi$$

$$(\varphi=\text{const}). \qquad (1.148)$$

Поклавши у формулах (1.125) або (1.129), (1.130) $D=0$, отримаємо витрату розчинної у фільтраційному потоці речовини

$$q_c=\int\limits_{\Gamma_z}v_ncds=\int\limits_{\Gamma_w}c(\varphi,\psi,t)d\psi, \qquad (1.149)$$

що переноситься лише вздовж ліній течії.
Кількість речовини Q_c, яка переноситься через дану криву (поверхню) Γ за проміжок часу $[0,t_0]$ визначається за формулою

$$Q_c=\int\limits_0^{t_0}q_cdt. \qquad (1.150)$$

Приклад. У випадку кутової задачі кількості речовин q_c, Q_c, що проходять через ділянку кривої $\Gamma=\left\{(\varphi,\psi):\ \varphi=\varphi^*,\ 0<\psi<Q\right\}$ згідно (1.120), (1.149), (1.150) в момент часу t та на проміжку часу $[0,t_0]$ відповідно дорівнюють

$$q_c(\varphi^*,t) = \int\limits_{G_1^t} \tilde{c}_1(t - f(\varphi^*,\psi))d\psi + \int\limits_{G_2^t} \tilde{c}_0(f^{-1}(f(\varphi^*,\psi) - t))d\psi\ ,$$

$$G_1^t = \left\{(\psi,t) : t \geq f(\varphi^*,\psi)\right\},\ G_2^t = \left\{(\psi,t) : t < f(\varphi^*,\psi)\right\}, \qquad (1.151)$$

$$Q_c(\varphi^*) = \int\limits_0^{t_0} q_c(\varphi^*,t)dt. \qquad (1.152)$$

Зауважимо, що якщо момент t, в який обчислюється потік Q_c через задану криву Γ, є досить малим, а саме, таким, що за відповідний проміжок часу $[0,t]$ жодна з частинок, яка в початковий момент часу "перебувала" на еквіпотенціальній лінії $\varphi = \varphi_*$ $(\varphi_* = 0)$, не встигає "пройти" вздовж відповідної лінії течії шлях до еквіпотенціальної лінії $\varphi = \varphi^*$ (тобто, коли для довільного ψ виконується нерівність $f(\varphi^*,\psi) \leq t$), то $G_1^t = \varnothing$, $G_2^t = [0,Q]$, отже,

$$q_c(\varphi^*,t) = \int\limits_0^Q \tilde{c}_0(f^{-1}(f(\varphi^*,\psi) - t))d\psi.$$

Якщо момент часу t є настільки великим, що за відповідний проміжок часу $[0,t]$ "початковий" фронт "встигає повністю пройти" через еквіпотенціаль $\varphi = \varphi^*$ (тобто, коли для довільного ψ виконується нерівність $f(\varphi^*,\psi) > t$, $G_2^t = \varnothing$, $G_1^t = [0,Q]$), то маємо

$$q_c(\varphi^*,t) = \int\limits_0^Q \tilde{c}_1(t - f(\varphi^*,\psi))d\psi\ .$$

РОЗДІЛ 2 _____

Методи квазіконформних відображень У задачах теорії збурень квазіідеальних полів

У попередньому розділі одержано розв'язки модельних нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в криволінійних областях, обмежених лініями течії та еквіквазіпотенціальними лініями (математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок тощо в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах), зокрема, і для випадків, коли компоненти тензора провідності (фільтрації) залежать як від координат біжучої точки області, так і від шуканих функцій течії і потенціалу. Як уже зазначалось, досить важливими є задачі моделювання впливу градієнтів (зокрема, великих, які перевищують їх критичні значення) на вихідні характеристики середовища (в першу чергу, на коефіцієнт провідності), що виникають при моделюванні нелінійних процесів фільтрації з урахуванням суфозійних явищ.
Нижче запропоновані раніше підходи до моделювання процесів, описаних у попередньому розділі використано для середовищ більш складної геометрії.

2.1. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації

Для однозв'язної криволінійної області (пласт, що піддається деформації) $G_z = ABCD$ $(z = x + iy)$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z : f_1(x,y) = 0\}$, $BC = \{z : f_2(x,y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x,y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x,y) = 0\}$, розглянемо крайову задачу [20]:

$$\kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$\varphi\Big|_{AB} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CD} = \varphi^*,\ \psi\Big|_{DA} = 0,\ \psi\Big|_{BC} = Q, \qquad (2.1)$$

де $\varphi = \varphi(x,y)$ – квазіпотенціал поля; $\psi = \psi(x,y)$ – відповідна функція течії; Q – повна витрата (невідомий параметр); рівняння (2.1) є наслідком закону Дарсі (рівняння руху) [167, 173, 200]:

$$\vec{v} = -\chi \operatorname{grad} h = \kappa(\operatorname{grad}\varphi)\operatorname{grad}\varphi$$

і рівняння нерозривності:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

де $h = h(x, y)$ – напір; $\kappa = \chi_*^{-1}\chi$; $\kappa = \kappa(\operatorname{grad}\varphi)$ – обмежена неперервно диференційовна в області G_z функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації; χ – коефіцієнт фільтрації; χ_* – зведений коефіцієнт фільтрації; $\vec{v} = (v_x(x, y),\ v_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, а $\varphi = -\chi_* h$ – її потенціал. Дана задача зводиться до квазіконформного (конформного – у випадку $\kappa = 1$) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну область квазікомплексного потенціалу G_ω (див. рис. 1.10).

Не конкретизуючи фізичний зміст, розглянемо випадок, коли $\kappa(\operatorname{grad}\varphi) = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$. Відповідну обернену задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомій витраті Q аналогічно до [19, 20] запишемо у вигляді

$$\kappa\left(\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)\frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi},\ \kappa\left(\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)\frac{\partial x}{\partial\psi} = -\frac{\partial y}{\partial\varphi}, \tag{2.2}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi},$$

$$f_1(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)) = 0,\ f_3(x(\varphi^*,\psi), y(\varphi^*,\psi)) = 0,\ 0 \le \psi \le Q,$$

$$f_2(x(\varphi,Q), y(\varphi,Q)) = 0,\ f_4(x(\varphi,0), y(\varphi,0)) = 0,\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*. \tag{2.3}$$

При цьому відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $u = x(\varphi,\psi)$ та $u = y(\varphi,\psi)$ (аналоги рівнянь Лапласа для випадку, коли $\kappa = 1$) з огляду на залежності коефіцієнта κ від кожної із них є взаємозв'язаними:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{J^2}\kappa^{-1}\left(\frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)\left\{\left[\kappa_I'\left(\frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)y_\varphi - \kappa_{II}''\left(\frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)x_\varphi\right](x_{\varphi\psi}y_\psi -\right.$$

$$\left. - y_{\varphi\psi}x_\psi) - \left[\kappa_I'\left(\frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)y_\psi - \kappa_{II}''\left(\frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J}\right)x_\psi\right](x_{\varphi\varphi}y_\psi - y_{\varphi\varphi}x_\psi)\right\}\frac{\partial u}{\partial\varphi} +$$

$$+\kappa^2\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}+\frac{1}{J^2}\kappa\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)\left\{\left[\kappa'_I\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)y_\varphi-\right.\right.$$

$$\left.-\kappa'_{II}\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)x_\varphi\right](x_{\psi\psi}y_\psi-y_{\psi\psi}x_\psi)-\left[\kappa'_I\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)y_\psi-\right.$$

$$\left.\left.-\kappa'_{II}\left(\frac{y_\psi}{J},-\frac{x_\psi}{J}\right)x_\psi\right](x_{\varphi\psi}y_\psi-y_{\varphi\psi}x_\psi)\right\}\frac{\partial u}{\partial\psi}=0. \qquad (2.4)$$

Різницеві аналоги рівнянь (2.4) і крайових умов (2.3) у відповідній рівномірній сітковій області G_ω^γ згідно з [177] запишемо у вигляді

$$x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j}+\gamma^2\kappa_{i,j}^2(x_{i,j-1}-2x_{i,j}+x_{i,j+1})+$$

$$+\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\gamma\kappa_{i,j}\kappa'_{\psi_{i,j}}(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})-\frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}}(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})\right]=0,$$

$$y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j}+\gamma^2\kappa_{i,j}^2(y_{i,j-1}-2y_{i,j}+y_{i,j+1})+$$

$$+\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\gamma\kappa_{i,j}\kappa'_{\psi_{i,j}}(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-\frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}}(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})\right]=0,$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \qquad (2.5)$$

$$f_1(x_{0,j},y_{0,j})=0,\ f_3(x_{m+1,j},y_{m+1,j})=0,\ j=\overline{0,n+1},$$

$$f_2(x_{i,n+1},y_{i,n+1})=0,\ f_4(x_{i,0},y_{i,0})=0,\ i=\overline{0,m+1}. \qquad (2.6)$$

Примежові умови ортогональності у сітковій області G_ω^γ запишемо так [19–21]:

$$f'_{1x}(x_{0,j},y_{0,j})(y_{1,j}-y_{0,j})-f'_{1y}(x_{0,j},y_{0,j})(x_{1,j}-x_{0,j})=0,$$

$$f'_{3x}(x_{m+1,j},y_{m+1,j})(y_{m,j}-y_{m+1,j})-f'_{3y}(x_{m+1,j},y_{m+1,j})(x_{m,j}-x_{m+1,j})=0,$$

$$j=\overline{0,n+1},$$

$$f'_{2x}(x_{i,n+1},y_{i,n+1})(y_{i,n}-y_{i,n+1})-f'_{2y}(x_{i,n+1},y_{i,n+1})(x_{i,n}-x_{i,n+1})=0,$$

$$f'_{4x}(x_{i,0},y_{i,0})(y_{i,1}-y_{i,0})-f'_{4y}(x_{i,0},y_{i,0})(x_{i,1}-x_{i,0})=0,\ i=\overline{0,m+1}. \qquad (2.7)$$

Формулу для знаходження величини γ одержимо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,\, j+1/2}}. \tag{2.8}$$

Тут

$$\kappa_{i,j} = \kappa\left(\frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}}, \frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right),$$

$$\begin{gathered}
\kappa'_{\psi_{i,j}} = \{4[\kappa'_I(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa'_{II}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})]\times \\
\times[(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + \\
+ y_{i,j-1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})] - [\kappa'_I(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \kappa'_{II}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})]\times \\
\times[(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \\
- (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})]\}\, \gamma / J_{i,j}^2,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\kappa'_{\varphi_{i,j}} = \{[\kappa'_I(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa'_{II}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})]\times \\
\times[(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \\
- (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})] - \\
- 4[\kappa'_I(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \kappa'_{II}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})][(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + \\
+ x_{i,j-1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})]\} / J_{i,j}^2,
\end{gathered}$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j});$$

κ'_I, κ'_{II} – похідні від функції κ за першим та другим аргументом відповідно.

Метод наближення розв’язку цієї задачі в загальному випадку будуємо аналогічно до вищевикладеного шляхом «почергового заморожування» параметра γ (або витрати Q), межових і внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації (див., наприклад, [158]) для аналітичного обґрунтування його збіжності [19–21]. А саме, задавши кількість m і n вузлів розбиття сіткової області G_ω, параметр ε, що характеризує точність наближення розв’язку відповідної різницевої задачі (2.2), (2.3), початкові наближення координат межових вузлів і початкові

наближення координат внутрішніх вузлів, знаходимо початкове наближення невідомої величини γ за формулою (2.8). Уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо за допомогою ітераційних схем типу «хрест» (у загальному випадку можна використати, наприклад, схеми типу «ящик» з масовими операторами) шляхом розв'язку (2.5) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні значення градієнта напору та коефіцієнта провідності у вузлах сітки G_{ω}^{γ} обчислюємо через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації. Нові наближення величин γ та Q знаходимо за формулами (2.8) та (1.86). Далі підправляємо координати межових вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь (2.6), (2.7), наприклад, методом Ньютона [13, 137], та перевіряємо виконання умов (1.93).

Уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо доти, поки не виконаються умови (1.93), після чого обчислюємо нев'язку «квазіконформності» отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = \left|1 - D\right|$. Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо m і n та розв'язуємо різницеву задачу заново (оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [70, 79, 80], шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

З огляду на практичне застосування методики особливий інтерес становить випадок, коли $\kappa(\operatorname{grad}\varphi) = \kappa\left|\operatorname{grad}\varphi\right|$) (у змінних (φ,ψ): $\kappa = \kappa\left(\sqrt{x_\psi^2 + y_\psi^2}\Big/J\right)$),

де кожна із функцій $x(\varphi,\psi)$ та $y(\varphi,\psi)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \kappa^2\frac{\sqrt{x_\psi^2+y_\psi^2}}{J}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} - \frac{\sqrt{x_\psi^2+y_\psi^2}}{J^2}\kappa'\frac{\sqrt{x_\psi^2+y_\psi^2}}{J}\left[\kappa^{-1}\frac{\sqrt{x_\psi^2+y_\psi^2}}{J}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x_\psi x_{\psi\varphi} + y_\psi y_{\psi\varphi}}{x_\psi^2+y_\psi^2}J - x_{\varphi\varphi}y_\psi - x_\varphi y_{\psi\varphi} + x_{\psi\varphi}y_\varphi + x_\psi y_{\varphi\varphi}\right)\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \kappa\frac{\sqrt{x_\psi^2+y_\psi^2}}{J}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{x_\psi x_{\psi\psi} + y_\psi y_{\psi\psi}}{x_\psi^2+y_\psi^2}J - x_{\varphi\psi}y_\psi - x_\varphi y_{\psi\psi} + x_{\psi\psi}y_\varphi + x_\psi y_{\varphi\psi}\right)\frac{\partial u}{\partial\psi}\right] = 0.$$

Відповідно до пропонованої методології, алгоритм числового розв'язання такої задачі будується аналогічно до попереднього випадку з урахуванням рівностей

$$\kappa'_{\psi_{i,j}} = \kappa'\gamma\Big\langle 4\{[(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) +$$

$$+(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})(y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1})]J_{i,j}/K_{i,j}^2-$$
$$-(y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1})(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})+(x_{i,j+1}-2x_{i,j}+x_{i,j-1})\times$$
$$\times(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})\}-(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})(x_{i+1,j+1}+x_{i-1,j-1}-x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j+1})+$$
$$+(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j+1}+y_{i-1,j-1}-y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j+1})\Big\rangle K_{i,j}/J_{i,j}^2,$$

$$\kappa'_{\varphi_{i,j}}=\kappa'\{[(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(x_{i+1,j+1}+x_{i-1,j-1}-x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j+1})+$$
$$+(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})(y_{i+1,j+1}+y_{i-1,j-1}-y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j+1})]J_{i,j}/K_{i,j}^2+$$
$$+(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})(x_{i+1,j+1}+x_{i-1,j-1}-x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j+1})-(x_{i+1,j}-$$
$$-x_{i-1,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i-1,j-1}-y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j+1})+4[(y_{i+1,j}-2y_{i,j}+$$
$$+y_{i-1,j})(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})-(x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})]\}\,J_{i,j}^2/K_{i,j},$$

$$\kappa_{i,j}=\kappa(2\Delta\varphi\cdot K_{i,j}/J_{i,j}),\ K_{i,j}=\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})^2+(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})^2}\ .$$

Значення швидкості у кожному вузлі сіткової області G_ω^γ знаходимо за такою різницевою формулою (див. (2.1)):

$$v_{i,j}=\frac{\Delta\psi}{J_{i,j}}\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})^2}\ .$$

На рис. 2.1 наведена динамічна сітка, отримана як наслідок розв’язання задачі фільтрації (для $\kappa=1+\mu I(x,y)$, де $I(x,y)=\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}$, при $\mu=0.01$) у фізичній області G_z у випадку $\varphi_*=0,\ \varphi^*=1,\ \ \varepsilon=10^{-8}$ при розбитті $m\times n=42\times48$. Область G_z задана кривими $f_1(x,y)=x$, $f_2(x,y)=$ $=y-25+7\cos\frac{x}{5}$, $f_3(x,y)=x-10\pi$, $f_4(x,y)=y-3-3\cos\frac{x}{5}$.

У табл. 2.1 наведено результати розрахунків в області G_z при $\kappa=1+\mu\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}$ для різних значень μ. Крім заданих параметрів розбиття $m\times n$ і шуканої витрати Q, у табл. 2.1 наведено значення кількості кроків ітерацій k_M, k_Q, k_D, за які досягнуто виконання умов (1.93) закінчення процесу, а також нев’язка ε_* «квазіконформності» отриманої динамічної сітки.

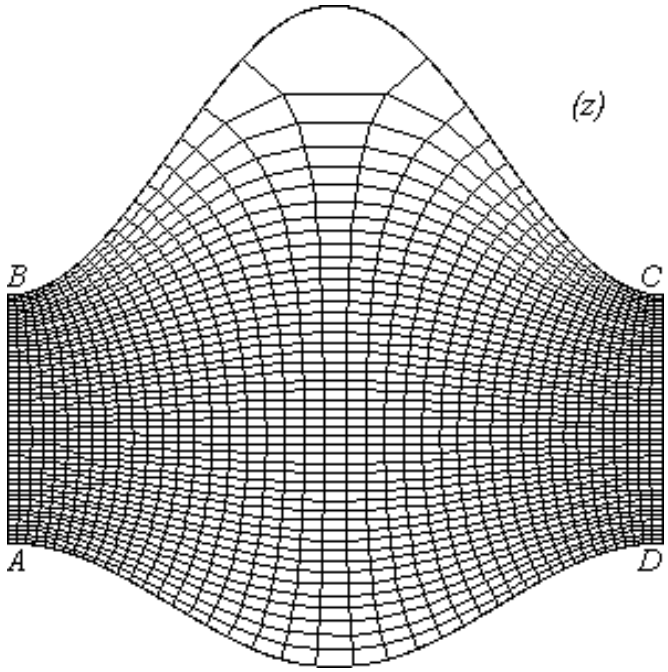


Рис. 2.1. Динамічна сітка середовища, що піддається деформації під впливом градієнтів напору при $\mu = 0,01$

Таблиця 2.1. Результати розрахунку при $\kappa = 1 + \mu\sqrt{\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2}$.

№	$m \times n$	μ	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*
1	24×30	0,1	4081	1049	1738	0,5561	$1,1 \cdot 10^{-3}$
2	36×36		4237	1430	310	0,5565	$9,0 \cdot 10^{-4}$
3	36×42		5128	1746	396	0,5567	$6,2 \cdot 10^{-4}$
4	42×42	0,01	5342	1787	411	0,5550	$6,6 \cdot 10^{-4}$
5	42×48		7084	2128	132	0,5551	$4,6 \cdot 10^{-4}$
6	24×24	0,0	2082	767	1380	0,5538	$1,8 \cdot 10^{-3}$
7		0,05	730	13	100	0,5548	$1,8 \cdot 10^{-3}$
8		0,1	690	14	100	0,5557	$1,8 \cdot 10^{-3}$
9		0,2	768	14	99	0,5576	$1,8 \cdot 10^{-3}$
10		0,5	954	18	112	0,5633	$1,8 \cdot 10^{-3}$
11		1,0	818	18	110	0,5728	$1,8 \cdot 10^{-3}$
12		2,0	878	23	121	0,5916	$1,9 \cdot 10^{-3}$
13		5,0	997	40	125	0,6473	$2,1 \cdot 10^{-3}$
14		10,0	1083	51	120	0,7387	$2,3 \cdot 10^{-3}$

Для випадку $m \times n = 24 \times 24$ у табл. 2.1 проілюстровано залежність шуканої повної витрати Q від параметра деформівності μ пласта G_z.

Зазначимо, що різке зменшення кількості ітерацій k (від 2082 до 730) зумовлене тим, що за початкове наближення шуканого квазіконформного відображення $G_\omega \to G_z$ взято наближений розв'язок відповідної задачі на квазіконформне відображення при попередньому значенні параметра деформівності μ.

При цьому за $k = 7084$ ітерації при розбитті $m \times n = 42 \times 48$ знайдено значення повної витрата $Q = 0{,}5551$ при максимальній нев'язці $\varepsilon_* = 4{,}6 \cdot 10^{-4}$, що має місце в околі деякого межового вузла, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників. Нев'язка ε_*, як це й очікувалось, зменшується при збільшенні параметрів розбиття m і n (див. рядки 1–5 табл. 2.1) області G_ω за умови збереження певного співвідношення між ними.

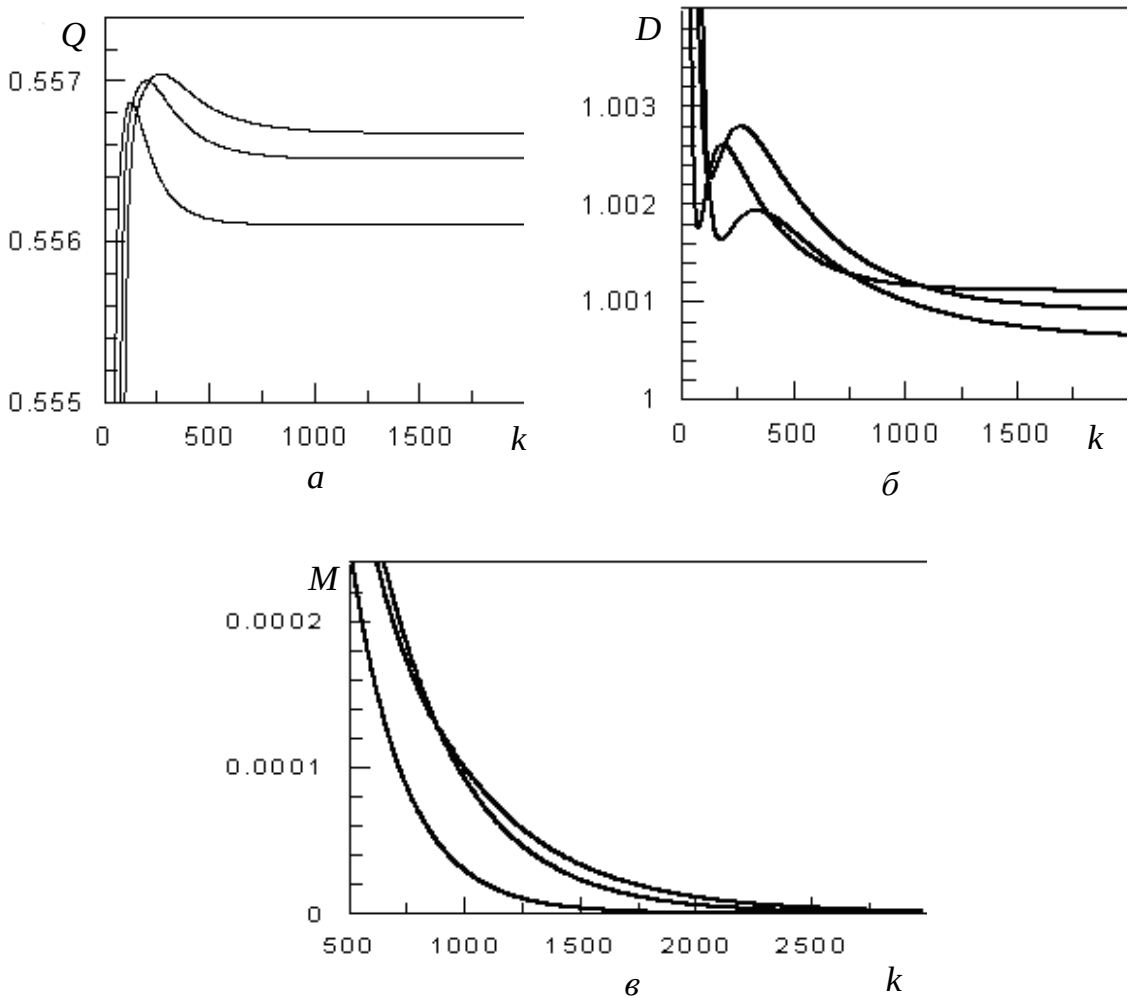
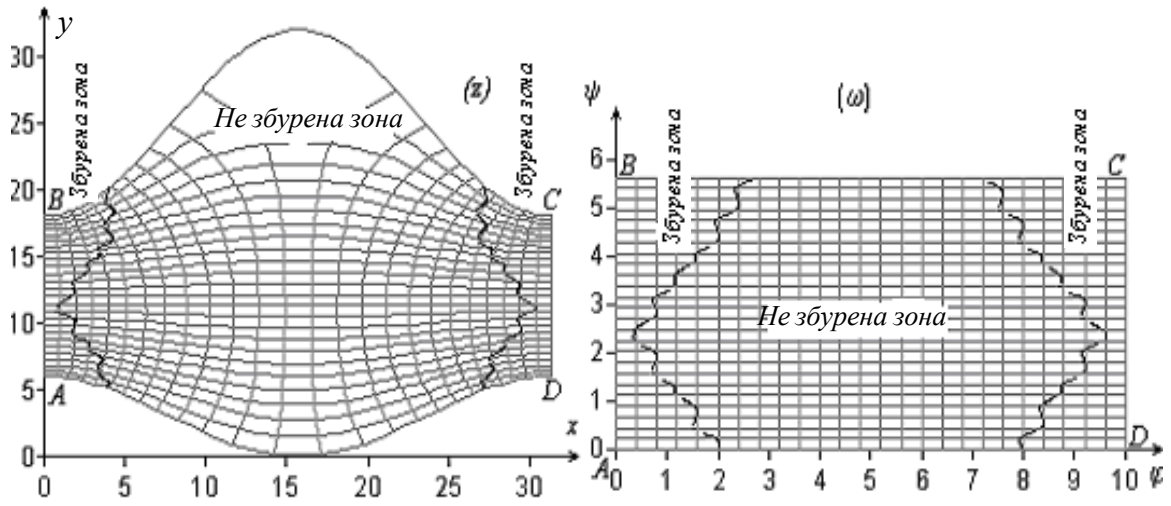


Рис. 2.2. Стабілізація параметрів збіжності Q (*а*), D (*б*) та M (*в*) при $\kappa = 1 + \mu\sqrt{\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2}$, $\mu = 0{,}1$



а *б*

Рис. 2.3. Збурена та незбурена зони у фізичній області (*а*) та області комплексного потенціалу (*б*)

Таблиця 2.2. Ілюстрація процесу стабілізації витрати Q.

k	k_M	k_Q	k_D	Q
0	2082	767	1380	5,5384
1	756	261	6	5,6648
2	537	128	2	5,6364
3	314	1	1	5,6437
4	186	1	1	5,6416
5	123	1	1	5,6422
6	67	1	1	5,6421
7	13	1	1	5,6421
8	1	1	1	5,6421
9	2	1	1	5,6421
10	1	1	1	5,6421

Зауважимо що навіть при порівняно малих значеннях m і n побудований програмний комплекс дозволяє виділити ділянки припустимих нев'язок ε_*.

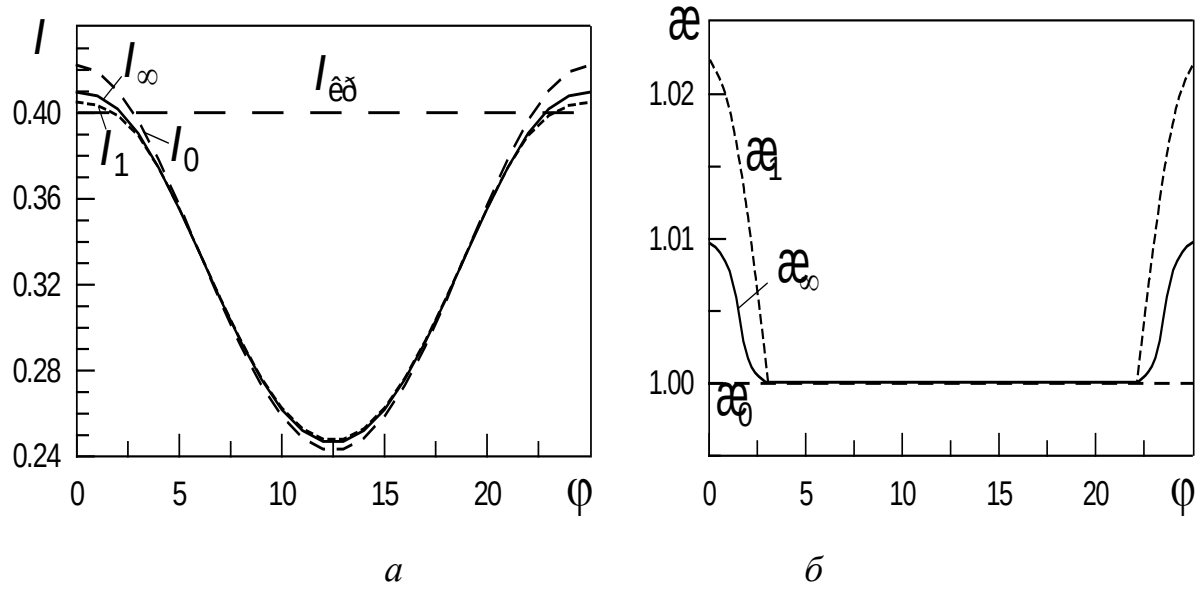
Для ілюстрації збіжності числового алгоритму на рис. 2.2 наведено графіки зміни значень витрати Q (*а*) (табл. 2.1), відношення діагоналей D (*б*) та максимальної похибки наближень граничних вузлів M (*в*) відносно кроку ітерації при $\mu = 0{,}1$.

За результатами числового експерименту для даної області G_z без врахування явищ суфозії ($\mu = 0$) при $m \times n = 24 \times 24$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 10$, $\varepsilon = 10^{-6}$ отримано розрахункове значення повної витрати $Q = 5{,}5384$ (табл. 2.2). Врахування ж взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом при $\mu = 1$, $I_{êð} = 0{,}4$ викликало збільшення шуканої витрати до $Q = 5{,}6421$ (табл. 2.2).

На рис. 2.4 пунктирними, штриховими та суцільними лініями зображено залежності градієнта напору $I = I_k(x, y)$ та коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_k(x, y)$ (на лінії течії $\psi(x, y) = Q/2 = 2{,}821$) відповідно при початкових ($k = 0$ та $k = 1$) ітераціях та на стадії стабілізації процесу ($I_\infty \approx I_{10}$, $\kappa_\infty = \kappa_{10}$).

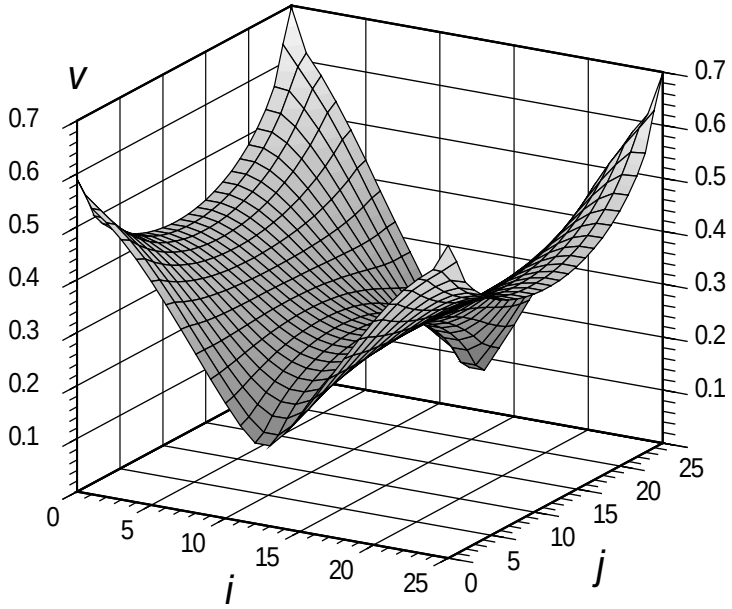
На рис. 2.5 зображено значення швидкості даного поля при початковій ($k = 0$) ітерації та на стадії практичної стабілізації процесу ($k = 10$).

Зауважимо, що у випадку, коли ділянки *AB* та *CD* границі фізичної області G_z не є еквіпотенціальними лініями (наприклад, коли $\varphi = \varphi(M)$, де M – біжуча точка відповідного контуру, $\varphi(M)$ – неперервно диференційована функція), не можна безпосередньо скористатись перевагами запропонованого підходу. У цьому випадку можливим є комбінований підхід із використанням методу скінчених елементів [176, 180] і методу мажорант-них областей Г.М. Положого [133].

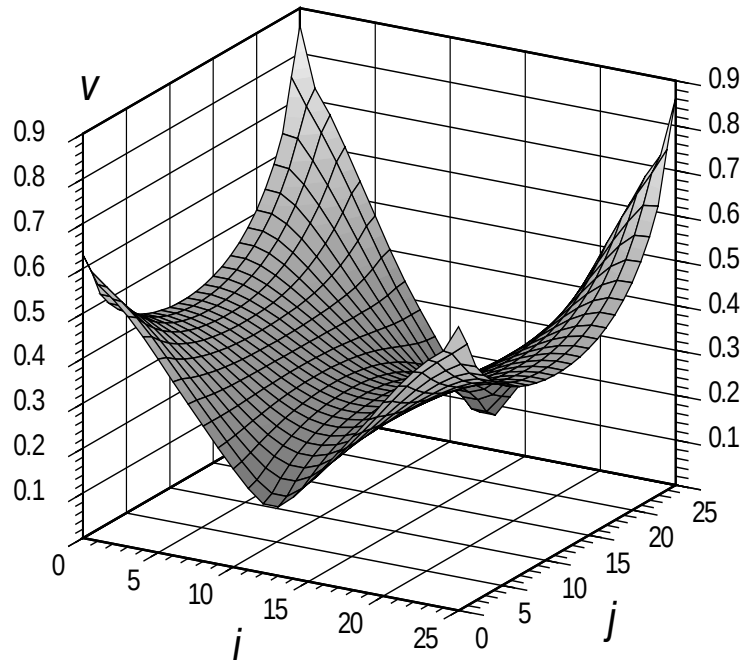


а *б*

Рис. 2.4. Розподіл градієнта напору (*а*) та коефіцієнта фільтрації (*б*) вздовж лінії $\psi(x, y) = Q/2$ у фізичній області G_z



а



б

Рис. 2.5. Значення швидкості на початковій стадії (*а*) та на стадії стабілізації процесу (*б*)

2.2. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу

На основі представленого вище підходу проведемо дослідження (числовий розрахунок повної витрати та побудову гідродинамічної сітки) процесу фільтрації в системі горизонтального дренажу за умов суфозійно-фільтраційного взаємовпливу [18]. Завдяки симетрії картини руху розглядатимемо лише один фрагмент такої системи – фізична область G_z $\left(z = x + \mathrm{i}\, y\right)$ (див. рис. 2.6), де $AB=\left\{z{:}0 \le x \le l, y = m\right\}$, $BC=\left\{z{:}\, f\left(x,y\right)=0\right\} = \left\{z : x = l, 0 \le y \le m\right\} \bigcup \left\{z : 0 \le x \le l, y = 0\right\} \bigcup \left\{z : x = 0, 0 \le y \le m - b - r\right\}$, $CD=\left\{z{:}\ x > 0, x^2 + \left(y - (m-b)\right)^2 = r^2\right\}$, $DA=\left\{z{:}\ x{=}0, m - b + r \le y \le m\right\}$, CD – зовнішній контур довершеної за характером розкриття пласта дрени радіусом r, b та m – відповідно глибина закладання дренажу та до водоупору, $2l$ – відстань між дренами.

Процес фільтрації рідини описуємо рівнянням руху $\vec{\upsilon} = \kappa \cdot \mathrm{grad}\ \varphi$ та рівнянням нерозривності $\mathrm{div}\vec{\upsilon} = 0$ [4, 176], де $\vec{\upsilon} = (\upsilon_x(x,y), \upsilon_y(x,y))$ – швидкість руху рідини, $\kappa = \kappa\left(\mathrm{grad}\varphi\right)$ – обмежена в області G_z функція, що характеризує провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформації, $\varphi = \varphi\left(x, y\right)$ – квазіпотенціал поля, такий, що $\varphi\big|_{AB}{=}0$, $\varphi\big|_{CD} = 1$, $\left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{BC} = \left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{DA} = 0$, n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

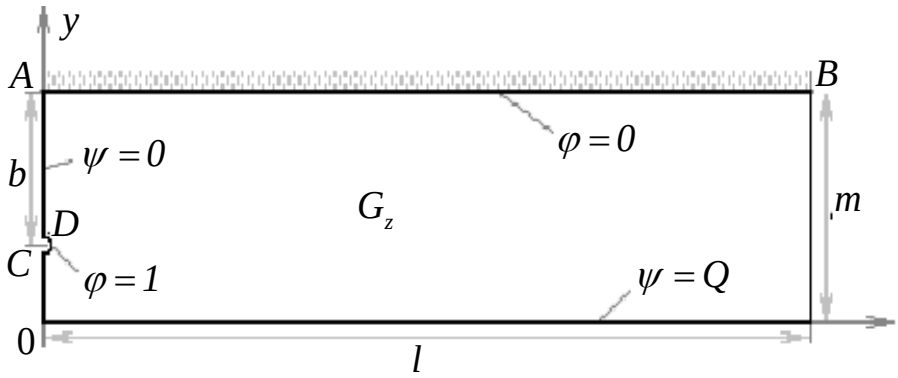


Рис. 2.6. Схема області фільтрації

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, перейдемо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\psi(x, y)$ даної області G_z на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega:\ 0 < \varphi < 1,\ 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром – повною витратою $Q = \int\limits_{M \in AD}^{N \in BC} -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy$:

$$\kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.9}$$

$$\varphi\big|_{AB} = 0,\ \varphi\big|_{CD} = 1,\ \psi\big|_{DA} = 0,\ \psi\big|_{BC} = Q. \tag{2.10}$$

Обернена до (2.9), (2.10) задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q має вигляд

$$\begin{cases} \kappa\left(\dfrac{1}{J}\sqrt{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \dfrac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial\psi} = \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}, \\ \kappa\left(\dfrac{1}{J}\sqrt{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \dfrac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} y(0, \psi) = m, & x^2(1, \psi) + \big(y(1, \psi) - (m - b)\big)^2 = r^2, & 0 \le \psi \le Q, \\ x(\varphi, 0) = 0, & f\big(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)\big) = 0, & 0 \le \varphi \le 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі запишемо так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\psi}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\psi}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Відповідний різницевий аналог рівнянь (2.13), крайових умов (2.12) у рівномірній сітковій області

$$G_{\omega}^{\gamma}=\Big\{(\varphi_i,\psi_j):\ \varphi_i=\Delta\varphi\cdot i,\ \ i=\overline{0,k+1};\ \ \psi_j=\Delta\psi\cdot j,\ \ j=\overline{0,n+1};$$
$$\Delta\varphi=\tfrac{1}{k+1},\ \ \Delta\psi=\tfrac{Q}{n+1},\ \ \gamma=\tfrac{\Delta\varphi}{\Delta\psi},\quad k,n\in\mathbf{N}\Big\}$$

запишемо у вигляді

$$\begin{cases}\Big(a_{i+1,j}x_{i+1,j}-\big(a_{i+1,j}+a_{i,j}\big)x_{i,j}+a_{i,j}x_{i-1,j}\Big)+\\ +\gamma^2\Big(b_{i,j+1}x_{i,j+1}-\big(b_{i,j+1}+b_{i,j}\big)x_{i,j}+b_{i,j}x_{i,j-1}\Big)=0,\\ \Big(a_{i+1,j}y_{i+1,j}-\big(a_{i+1,j}+a_{i,j}\big)y_{i,j}+a_{i,j}y_{i-1,j}\Big)+\\ +\gamma^2\Big(b_{i,j+1}y_{i,j+1}-\big(b_{i,j+1}+b_{i,j}\big)y_{i,j}+b_{i,j}y_{i,j-1}\Big)=0,\\ \qquad i=\overline{1,k},\quad j=\overline{1,n};\end{cases}\tag{2.14}$$

$$\begin{cases}y_{0,j}=m,\quad x_{k+1,j}^2+\Big(y_{k+1,j}-(m-b)\Big)^2=r^2,\quad j=\overline{0,n+1},\\ x_{i,0}=0,\qquad f\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)=0,\qquad\qquad i=\overline{0,k+1};\end{cases}\tag{2.15}$$

$$\begin{cases}f_x'\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)\left(y_{i,n}-y_{i,n+1}\right)-f_y'\left(x_{i,n+1},y_{i,n+1}\right)\left(x_{i,n}-x_{i,n+1}\right)=0,\\ y_{i,1}-y_{i,0}=0,\quad i=\overline{0,k+1};\\ x_{k+1,j}\left(y_{k,j}-y_{k+1,j}\right)-\Big(y_{k+1,j}-(m-b)\Big)\left(x_{k,j}-x_{k+1,j}\right)=0,\\ x_{1,j}-x_{0,j}=0,\quad j=\overline{0,n+1};\end{cases}\tag{2.16}$$

$$\gamma=\frac{1}{(k+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{k,n}\frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\gamma_{i,j},\tag{2.17}$$

де

$$\kappa_{i,j}=\kappa\left(\frac{2\Delta\varphi}{J_{i,j}}\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j-1}\right)^2}\right),$$

$$J_{i,j}=(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}),$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{\kappa_{i-\frac{1}{2},j}},\ b_{i,j} = \kappa_{i,j-\frac{1}{2}},\ x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j),\ y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j).$$

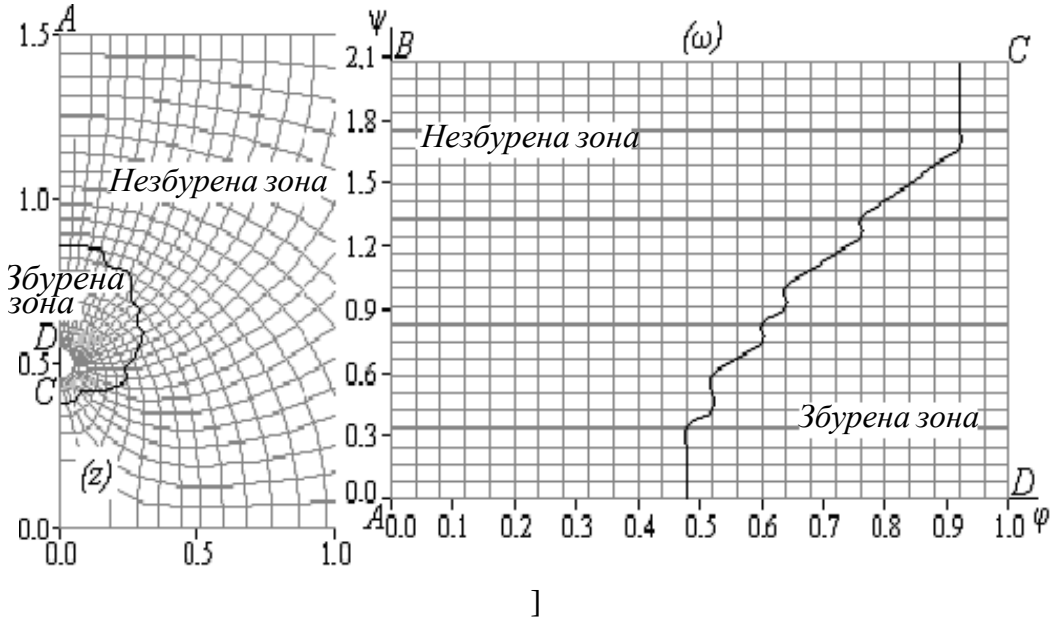
На основі описаного методу проведено числовий експеримент для декількох модельних залежностей коефіцієнта фільтрації від градієнта потенціалу [20, 103]. У праці [20] детально висвітлено відповідний числовий алгоритм у випадку

$$\kappa = \kappa\left(\left|\mathrm{grad}\varphi\right|\right) = \begin{cases} \kappa_\circ + \mu(I - I_{kp}), & \text{при } I > I_{kp}, \\ \kappa_\circ, & \text{при } I \le I_{kp}, \end{cases} \tag{2.18}$$

особливістю якого є специфіка задання ліній течії BC (наявності на ній точок порушення конформності – “зламів”).

Вибір форми залежності коефіцієнта провідності (2.18) зручний тим, що вибором відповідного знака коефіцієнта μ за його допомогою можна моделювати як процеси вимиву частинок із середовища у дрену ($\mu > 0$), так і їх затримку поблизу дрени, наприклад, при невдало вибраному фільтрі ($\mu < 0$).

Внаслідок проведених розрахунків при розбитті області фільтрації $k \times n = 24 \times 24$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-6}$, $\kappa_0 = 2{,}5$ м/добу, $\mu = 2$, $I_{кр} = 1$, $r = 0{,}05$ м, $b = 1$ м, $m = 1{,}5$ м, $l = 5$ м отримано динамічну сітку та зони збурення, які зображені на рис. 2.7.



]

а *б*

Рис. 2.7. Збурена та незбурена зони у фізичній області (*а*) та області комплексного потенціалу (*б*) при $\mu > 0$

При цьому за $k = 1435$ ітерацій знайдено значення повної витрата $Q = 1{,}7679$ без врахування суфозії ($\mu = 0$) за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 0{,}11$, що має місце в околах деяких межових вузлів, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників. Врахування ж взаємовпливу градієнта потенціалу та коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом викликало збільшення шуканої витрати Q на $17{,}8\%$, тобто, від $1{,}7679$ до $2{,}0814$.

Графіки розподілу градієнта потенціалу та коефіцієнта фільтрації на стадії стабілізації процесу зображено відповідно на рис 2.8 та 2.9.

На рис. 2.10 зображено динамічну сітку та зони збурення при врахуванні явища осідання (кольматажу) частинок, отриману при виборі $\mu = -0{,}5$, розбитті $k \times n = 24 \times 24$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-6}$, $\kappa_0 = 2{,}5$ м/добу, $I_{кр} = 1$. Врахування взаємовпливу градієнта потенціалу та коефіцієнта фільтрації за вказаним законом викликало зменшення значення розрахункової витрати Q на $8{,}9\%$ (від $1{,}7679$ до $1{,}6110$).

Графіки розподілу градієнта потенціалу та коефіцієнта фільтрації на стадії стабілізації процесу зображено відповідно на рис. 2.11 та 2.12.

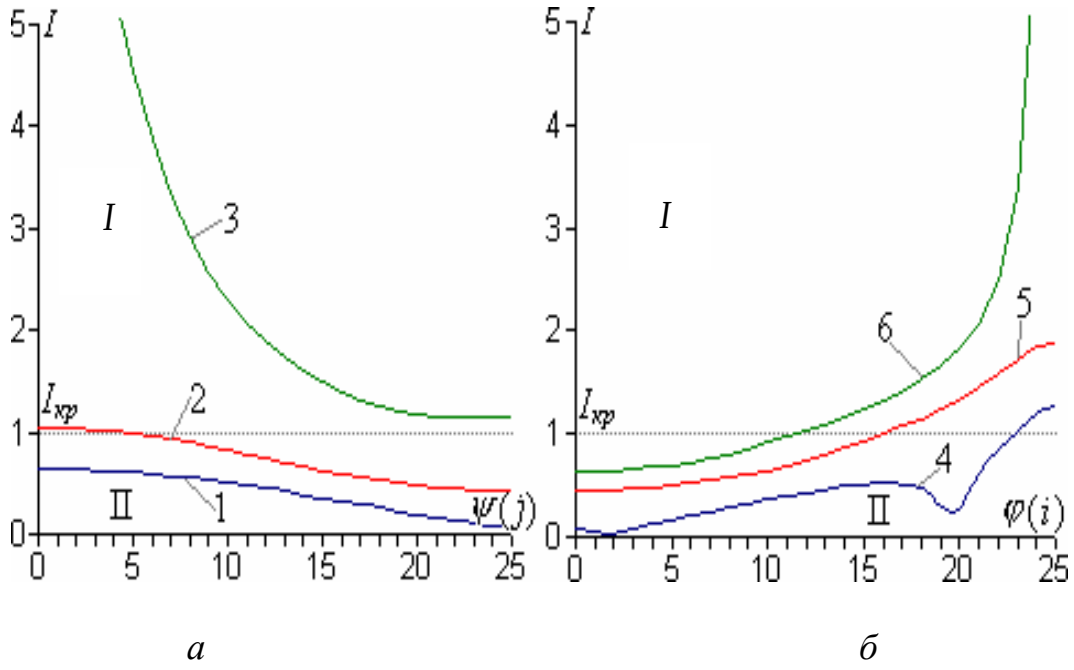
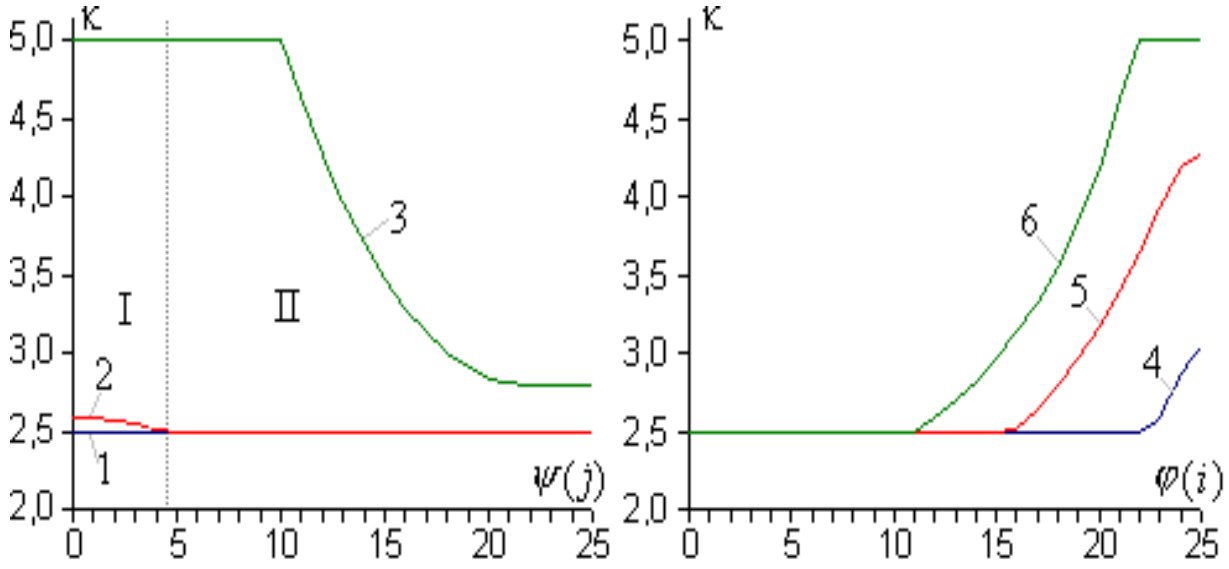
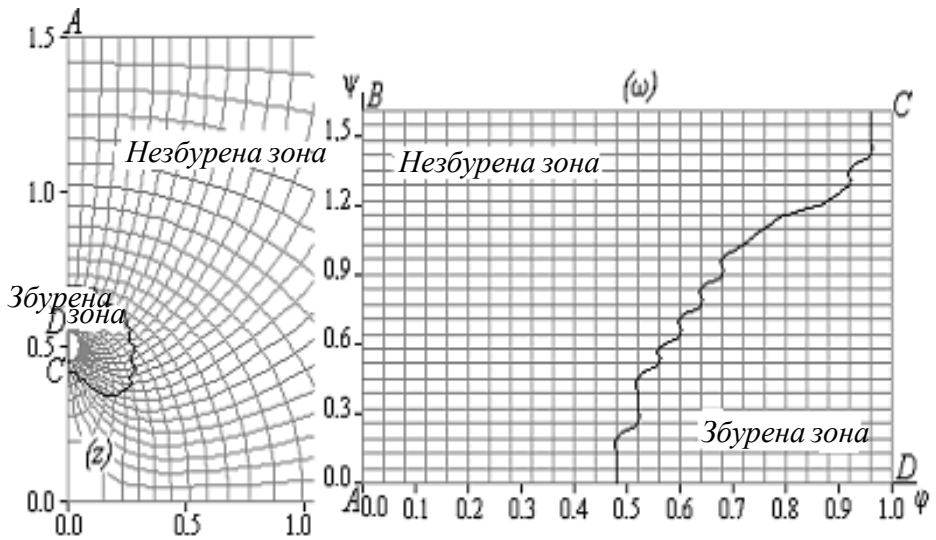


Рис. 2.8. Розподіл градієнта потенціалу залежно від ψ (*а*) та φ (*б*) при $\mu > 0$, $1 - \varphi = 0$, $2 - \varphi = 0.5$, $3 - \varphi = 1$, $4 - \psi = 0$, $5 - \psi = Q/2$, $6 - \psi = Q$, I – $I > I_{кр}$, II – $I < I_{кр}$



а *б*

Рис. 2.9. Розподіл коефіцієнта фільтрації залежно від ψ (*а*) та φ (*б*)при $\mu > 0$, $1 - \varphi = 0$, $2 - \varphi = 0.5$, $3 - \varphi = 1$, $4 - \psi = 0$, $5 - \psi = Q/2$, $6 - \psi = Q$, I – $I > I_{кр}$, II – $I < I_{кр}$



а *б*

Рис. 2.10. Збурена та незбурена зони у фізичній області (*а*) та області комплексного потенціалу (*б*) при $\mu < 0$

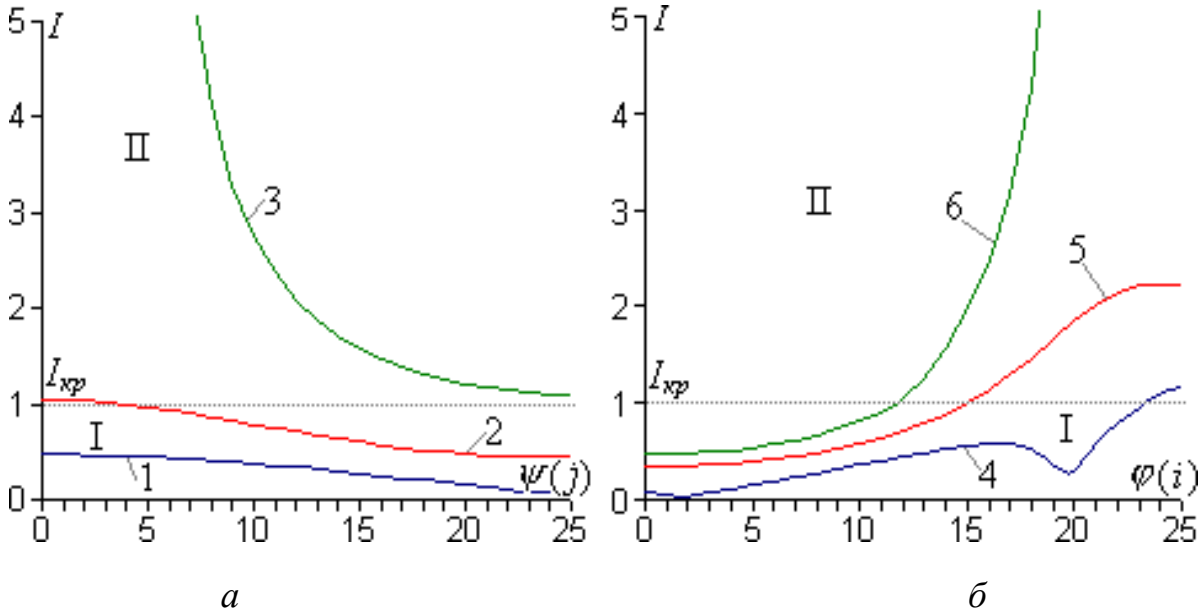


Рис. 2.11. Розподіл градієнта потенціалу залежно від ψ (а) та φ (б) при $\mu < 0$, 1 – $\varphi = 0$, 2 – $\varphi = 0.5$, 3 – $\varphi = 1$, 4 – $\psi = 0$, 5 – $\psi = Q/2$, 6 – $\psi = Q$, I – $I > I_{кр}$, II – $I < I_{кр}$

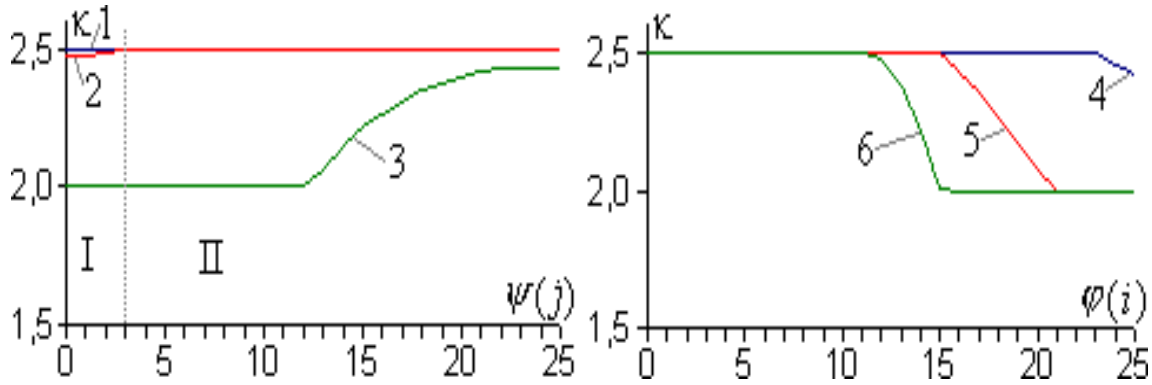


Рис. 2.12. Розподіл коефіцієнта фільтрації залежно від ψ (а) та φ (б) при $\mu < 0$, 1 – $\varphi = 0$, 2 – $\varphi = 0.5$, 3 – $\varphi = 1$, 4 – $\psi = 0$, 5 – $\psi = Q/2$, 6 – $\psi = Q$, I – $I > I_{кр}$, II – $I < I_{кр}$

Перевагою запропонованого методу розв’язання задач з післядією є те, що врахування зворотнього впливу градієнтів потенціалу на характеристики середовища не вимагає розв’язання вихідної (традиційної) задачі “з нуля”. Розв’язок такої задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу.

На основі проведених числових експериментів підтверджено експериментально виявлений факт суттєвої зміни фільтраційної витрати при наявності суфозійних явищ. Одержані результати досліджень вказують на

необхідність перегляду методик, пов'язаних з фільтраційними розрахунками, з метою уточнення останніх (що особливо важливо при проектуванні дренажних споруд та оптимізації інших гідросистем).

2.3. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів у ґрунтових греблях

Викладена вище методологія разом з методом "фіктивних областей" дозволяє ефективно вирішувати не менш актуальну проблему врахування суфозійних явищ при розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з вільними межами (кривими депресії). Як приклад проведемо розрахунки на побудову гідродинамічної сітки, знаходження повної витрати, положення кривої депресії та інших характеристик ґрунтової греблі на непроникній основі (розглядаються випадки відсутності шару води у нижньому б'єфі, тобто, коли вихід фільтраційного потоку відбувається лише через проміжок височування) з врахуванням взаємовпливу градієнтів напору та характеристик середовища.

Відповідну фізичну область фільтрації G_z $\left(z = x + iy\right)$ (аналогічно до праць [77, 112]) зображено на рис. 2.13, де $AB=\left\{z\colon\ m_1 y - x = 0,\ 0 \le x \le l_1\right\}$, $C_\circ D=\left\{z\colon\ m_2 y + x - l_1 - b - l_2 = 0\right\}$, $CD=\left\{z\colon\ y=0,\ l_1 + b + l_2 \le x \le x_*\right\}$, $DA=\left\{z\colon\ y=0,\ 0 \le x \le l_1 + b + l_2\right\}$, $BC_\circ$ – вільна (невідома) поверхня (крива депресії), $C_\circ D$ – проміжок височування, AD – непроникна основа греблі, H_Γ та H – відповідно висота греблі та напір на неї, b – ширина гребеня, $m_1 = \dfrac{l_1}{H_\Gamma}$ та $m_2 = \dfrac{l_2}{H_\Gamma}$ – коефіцієнти закладання верхового та низового укосів, $CDC_\circ$ – фіктивна (допоміжна) ділянка даної області фільтрації, x_* – шукана абсциса точки C.

Як і раніше, процес фільтрації рідини описуватимемо рівнянням руху $\vec{\upsilon} = \kappa \cdot \mathrm{grad}\ h$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\mathrm{div}\vec{\upsilon} = 0$, де $\kappa = \kappa\left(\mathrm{grad}\, h\right)$, $h = h\left(x, y\right)$ – напір в точці $\left(x, y\right)$, $h\big|_{BC_\circ D} = y$ (у першому наближенні розв'язку перенесемо дану умову на фіктивну ділянку границі розширеної фізичної області BC_0C), $\varphi = 1 - \dfrac{h}{H}$ – квазіпотенціал поля, такий, що $\varphi\big|_{AB}=0$, $\varphi\big|_{CD} = 1$, $\left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{BC} = \left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{DA} = 0$.

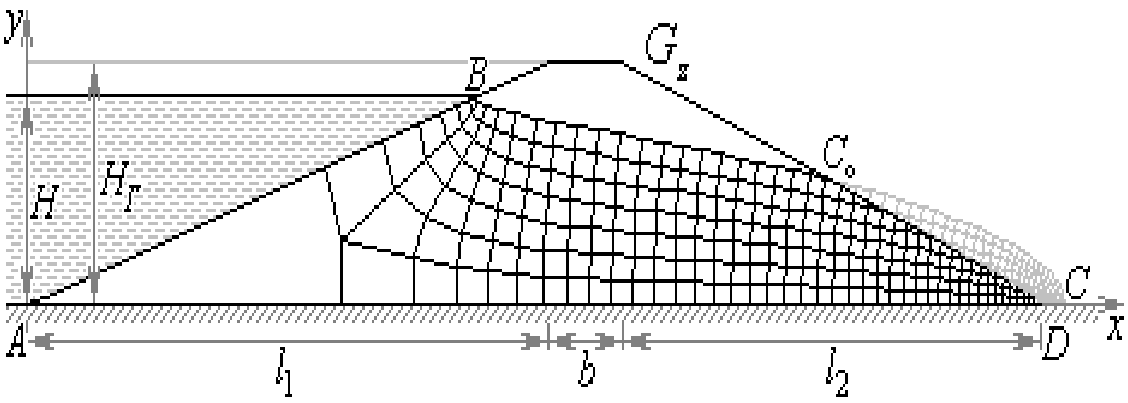


Рис. 2.13. Схема області фільтрації

Задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ даної області G_z на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega:\ 0 < \varphi < 1,\ 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром – повною питомою витратою $Q = \int\limits_{AB} -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy$ ($Q = Q_* / l$, де Q_* – повна витрата (l – довжина греблі), матиме вигляд

$$\kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \kappa(\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.19}$$

$$\varphi\big|_{AB} = 0,\ \varphi\big|_{CD} = 1,\ \psi\big|_{DA} = 0,\ \psi\big|_{BC} = Q. \tag{2.20}$$

Запишемо обернену до (2.19),(2.20) задачу на квазіконформне відображення

$$z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$$

області G_ω на G_z при невідомому Q

$$\begin{cases} \kappa\left(\dfrac{1}{J}\sqrt{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \dfrac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial\psi} = \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}, \\ \kappa\left(\dfrac{1}{J}\sqrt{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \dfrac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} m_1 y(0,\psi) - x(0,\psi) = 0, & y(1,\psi) = 0, \quad 0 \le \psi \le Q, \\ y(\varphi,Q) = H(1-\varphi), & y(\varphi,0) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi,\psi)$ та $y = y(\varphi,\psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\psi}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa\left(\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\psi}^2 + \frac{\partial y}{\partial\psi}^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\psi}\right) = 0. \tag{2.23}$$

Різницевий аналог рівнянь (2.23), крайових умов (2.22), примежових умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma = \Big\{(\varphi_i,\psi_j):\ \varphi_i = \Delta\varphi\cdot i,\ \ i=\overline{0,m+1};\ \ \psi_j = \Delta\psi\cdot j,\ \ j=\overline{0,n+1};$$
$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{m+1},\ \ \Delta\psi = \tfrac{Q}{n+1},\ \ \gamma = \tfrac{\Delta\varphi}{\Delta\psi},\quad m,n\in\mathbf{N}\Big\}$$

запишемо, наприклад, у вигляді [177]:

$$\begin{cases} \left(a_{i+1,j}x_{i+1,j} - \left(a_{i+1,j} + a_{i,j}\right)x_{i,j} + a_{i,j}x_{i-1,j}\right) + \\ +\gamma^2\left(b_{i,j+1}x_{i,j+1} - \left(b_{i,j+1} + b_{i,j}\right)x_{i,j} + b_{i,j}x_{i,j-1}\right) = 0, \\ \left(a_{i+1,j}y_{i+1,j} - \left(a_{i+1,j} + a_{i,j}\right)y_{i,j} + a_{i,j}y_{i-1,j}\right) + \\ +\gamma^2\left(b_{i,j+1}y_{i,j+1} - \left(b_{i,j+1} + b_{i,j}\right)y_{i,j} + b_{i,j}y_{i,j-1}\right) = 0, \\ \qquad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}; \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} m_1 y_{0,j} - x_{0,j} = 0, & y_{m+1,j} = 0, \quad j=\overline{0,n+1}, \\ y_{i,n+1} = H(1-\varphi_i), & y_{i,0} = 0, \quad i=\overline{0,m+1}; \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \left(x_{i,n}-x_{i,n+1}\right)\left(x_{i-1,n+1}-x_{i,n+1}\right)+\left(y_{i,n}-y_{i,n+1}\right)\left(y_{i-1,n+1}-y_{i,n+1}\right)=0, \\ x_{i,1}-x_{i,0}=0, \qquad i=\overline{0,m+1}; \\ y_{1,j}-y_{0,j}+m_1\left(x_{1,j}-x_{0,j}\right)=0, \quad x_{m,j}-x_{m+1,j}=0, \qquad j=\overline{0,n+1}; \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\gamma=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\gamma_{i,j}, \tag{2.27}$$

де

$$\kappa_{i,j}=\kappa\left(\frac{2\Delta\varphi}{J_{i,j}}\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j-1}\right)^2}\right),$$

$$J_{i,j}=(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}),$$

$$a_{i,j}=\frac{1}{\kappa_{i-\frac{1}{2},j}},\ b_{i,j}=\kappa_{i,j-\frac{1}{2}},\ x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j),\ y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j).$$

Розв’язок різницевої задачі (2.24)–(2.27) у цьому випадку побудуємо так. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω, параметр точності проведення обчислень ε та значення граничних потенціалів φ_*, φ^*, використовуючи які, визначаємо $\Delta\varphi$. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення межових вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ та внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$). Задаємо початкове наближення $\gamma^{(0)}$ невідомої величини γ за формулою (2.27), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)}=\gamma\left(x_{i,j}^{(0)},y_{i,j}^{(0)}\right)$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів згідно з формулами (2.24); величини γ за формулою (2.27) та витрати Q за формулою (1.86); межових вузлів, наприклад, шляхом розв’язку системи нелінійних рівнянь (2.25), (2.26). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами (1.87) та (1.88). У випадку невиконання цих умов закінчення процесу переходимо до уточнення внутрішніх вузлів і т.д. Якщо не виконується, наприклад, лише перша із умов (1.87), то узгоджуємо

співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх).

Аналогічно до вищевикладеного числова реалізація методу здійснювалась з використанням декількох модельних залежностей коефіцієнта фільтрації від градієнта потенціалу (напору), зокрема

$$\kappa = \kappa\left(\left|\operatorname{grad}\varphi\right|\right) = \begin{cases} \kappa_\circ + \mu(I - I_{kp}), & \text{при } I > I_{kp}, \\ \kappa_\circ, & \text{при } I \le I_{kp}. \end{cases} \tag{2.28}$$

де $\mu > 0$ – параметр, що характеризує ступінь впливу градієнта напору на коефіцієнт фільтрації.

На рис. 2.13 зображена відповідна динамічна сітка на початковій стадії процесу, тобто при $\mu = 0$. На рис. 2.14 наведено розрахункову гідродинамічну сітку руху та зони збурення при розбитті області фільтрації $m \times n = 50 \times 6$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, діапазоні значень діючих градієнтів потенціалу $[0{,}0013; 1{,}8723]$, $\kappa_0 = 2{,}5$ м/добу, $\mu = 200$, $I_{кр} = 0{,}0175$, $H = 12$ м, $H_Г = 14$ м, $l_1 = 42$ м, $b = 6$ м, $l_2 = 35$ м.

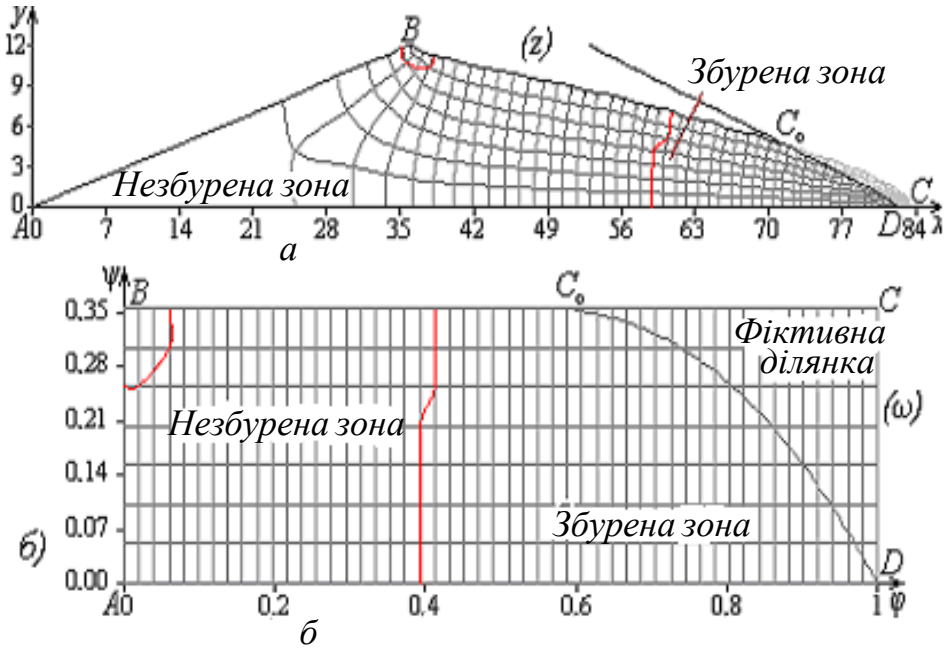
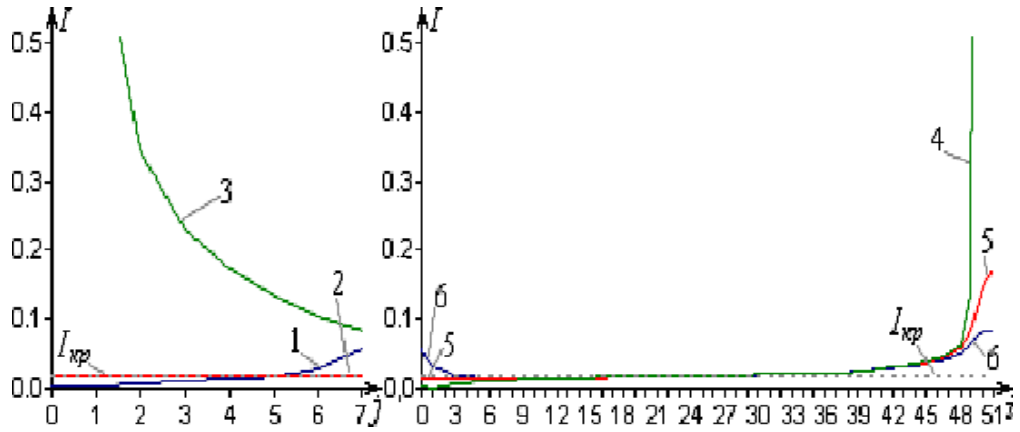


Рис. 2.14. Збурена та незбурена зони у фізичній області (*а*) та область комплексного потенціалу (*б*)

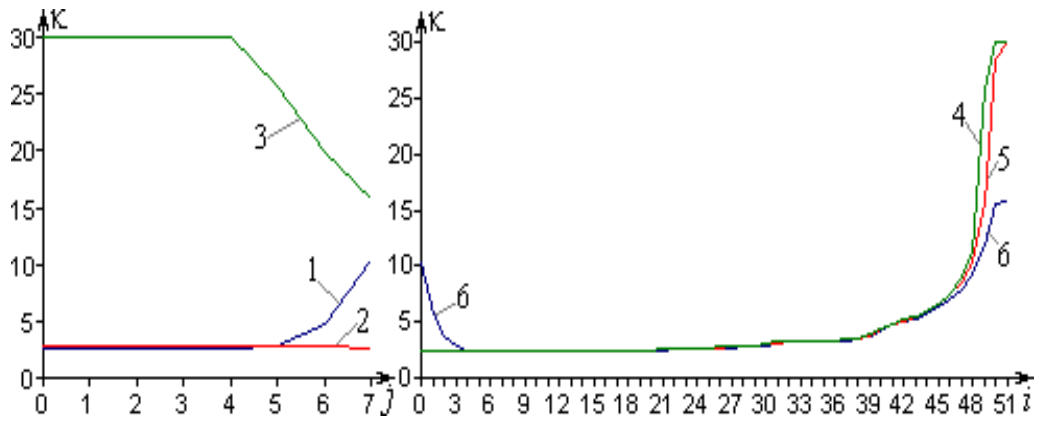
За $k = 1355$ ітерацій на початковій стадії знайдена повна фільтраційна витрата $Q = 0{,}2948$ м^3/добу за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 0{,}002$, що має місце в околах деяких межових вузлів, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників. Внаслідок врахування взаємовпливу градієнта потенціалу та коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом одержано збільшення шуканої витрати Q на $20{,}9\%$, тобто, від 0,2948 на початковій стадії до 0,3564 м^3/добу на стадії стабілізації.

Графіки розподілу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації на стадії стабілізації процесу наведено відповідно на рис. 2.15 та 2.16. Графіки розподілу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації вздовж вільної кривої BC зображено відповідно на рис. 2.17 та 2.18.



а *б*

Рис. 2.15. Розподіл градієнта напору вздовж кривих :
1 – $\varphi = 0$; *2* – $\varphi = 0.5$; *3* – $\varphi = 1$; *4* – $\psi = 0$; *5* – $\psi = Q/2$; *6* – $\psi = Q$



а *б*

Рис. 2.16. Розподіл коефіцієнта фільтрації вздовж кривих:
1 – $\varphi = 0$; *2* – $\varphi = 0.5$; *3* – $\varphi = 1$; *4* – $\psi = 0$; *5* – $\psi = Q/2$; *6* – $\psi = Q$

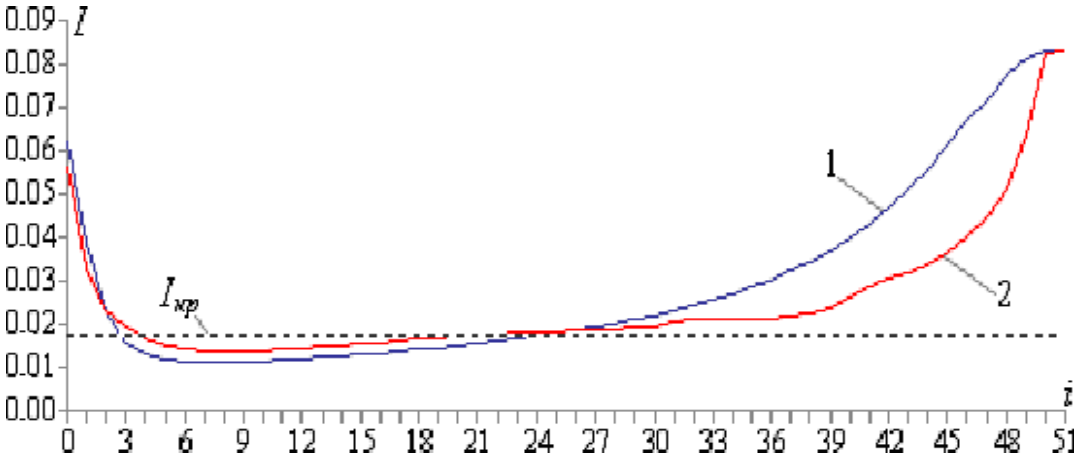


Рис. 2.17. Розподіл градієнта напору на вільній кривій *BC*,
1 – початкова стадія (деформації відсутні), *2* – стадія стабілізації

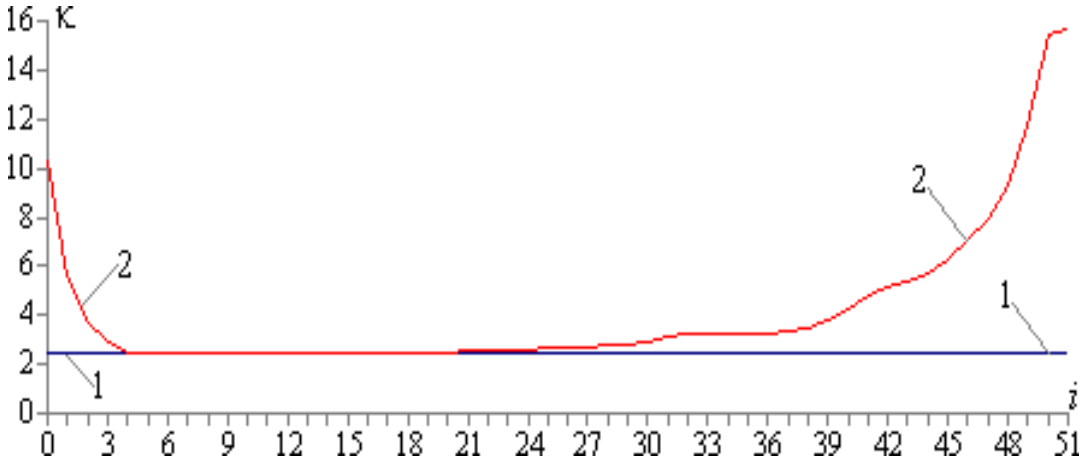


Рис. 2.18. Розподіл коефіцієнта фільтрації потенціалу на вільній кривій *BC*,
1 – початкова стадія (деформації відсутні), *2* – стадія стабілізації

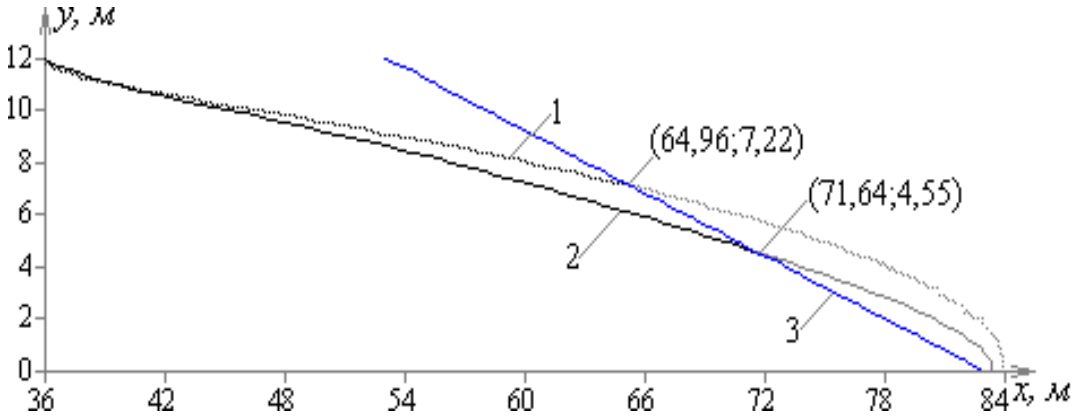


Рис. 2.19. Положення вільної кривої *BC*,
1 – початкова стадія, *2* – стадія стабілізації, *3* – низовий укіс

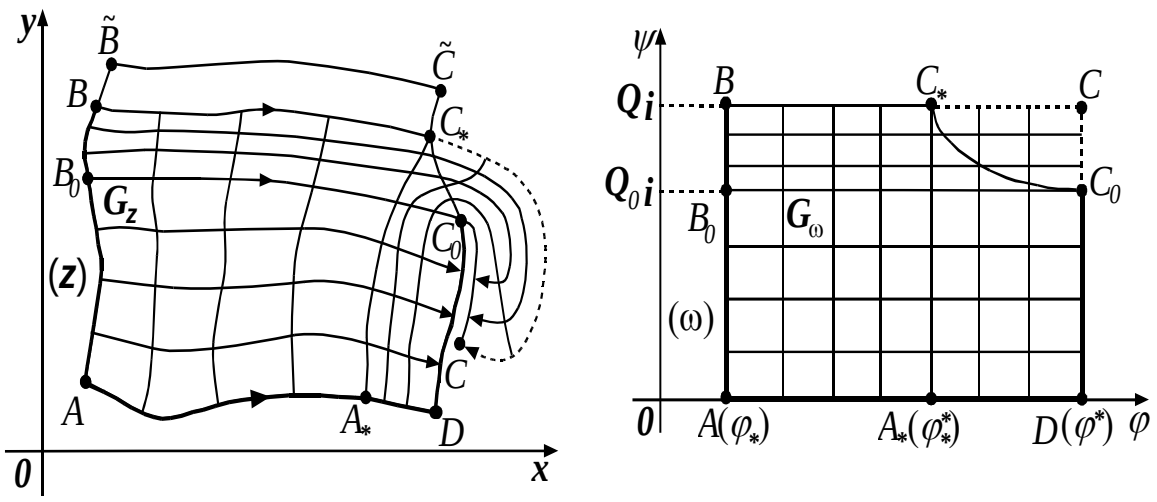
Положення вільної кривої BC на початковій стадії та на стадії стабілізації наведено на рис. 2.19. При цьому зауважимо, що абсциса точки C на початковій стадії рівна $83{,}94$, а на стадії стабілізації – $83{,}36$.

Уточнення розв'язку поставленої задачі можна отримати шляхом нелінійного збурення «перенесеної» із C_0D у C_0C умови, а саме представленням $h\big|_{C_0C} = y + \mu F(y, a_0, ..., a_n)$, де μ – малий параметр, $F(y, a_0, ..., a_n)$ – задана функція (наприклад, многочлен), параметри $a_0, ..., a_n$ якої знаходяться в процесі ітерацій за умови $h\big|_{C_0D} = y$.

Таким чином, встановлення динаміки зміни положення кривої депресії дозволяє визначити ступінь деформаційних процесів в масиві низової призми та прогнозувати їх наслідки для роботи греблі.

У випадку, коли розглядається такого роду процес у деякій криволінійній області $G_z = ABC_*D$ ($ABC_*D \in A\tilde{B}\tilde{C}D$) з вільною кривою BC_* та проміжком типу височування C_*C_0 (рис. 2.20, *а*), наприклад, за умов $\varphi\big|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi\big|_{DC_0} = \varphi^*$, $\psi\big|_{AD} = 0$, $\psi\big|_{BC_*} = Q$, $\varphi\big|_{BC_*C_0} = y$, $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$, де параметри φ_* і φ^*, рівняння кривих AD, $A\tilde{B}$, $D\tilde{C}$ та координати точок B та C_0 є заданими [3, 4, 6, 166, 176]. Особливість постановки такої задачі (з точки зору конформних відображень) полягає в тому, що відповідна область комплексного потенціалу G_ω не є прямокутник. Однією із ділянок її межі є деяка (невідома) крива C_*C_0, що відповідає проміжку височування (рис. 2.20 б)). Доповнивши дану область G_ω до відповідного прямокутника G_ω^* (із невідомими параметрами Q, Q_0, φ_*^*) та умовно відобразивши даний прямокутник за допомогою аналітичної функції $z = z(\omega)$ – характеристичної функції течії, в результаті в площині (z) матимемо деяку область G_z^* як аналітичне продовження області G_z (шляхом приєднання до останньої деякої фіктивної області C_*CC_0).

Тепер комплексний потенціал $\omega = \omega(z)$ (характеристичну функцію $z = z(\omega)$) одержуємо шляхом конформного відображення $G_z^* \to G_\omega^*$ ($G_\omega^* \to G_z^*$). При знаходженні початкового наближення такого відображення вільна крива BC_*C певним чином задається, а розв'язок знаходиться на основі описаного вище алгоритму. Уточнення (на кожному ітераційному кроці) координат вільної кривої здійснюється традиційно [77, 112]. Отже матимемо динамічну сітку в розширеній області G_z^*. Здійснивши відповідні інтерполяційні та екстраполяційні операції, знайдемо значення потенціалу φ та функції течії ψ у деяких вузлових точках ділянки височування і відповідну їй криву C_*C_0 області G_ω^*.



а *б*

Рис. 2.20. Область фільтрації G_z з вільною кривою і проміжком височування (*а*) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (*б*)

Зауважимо, що даний підхід дозволяє пояснити парадокс Герсеванова [73, 167, 198].

Аналогічно до вище викладеного будуються алгоритми розв'язків відповідних нелінійних задач з післядією.

2.4.Застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями

Моделювання описаних вище збурень та методи конформних і квазіконформних відображень розв'язання відповідних крайових задач розвивались переважно для чотирикутних областей, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями. Розроблену методологію можна поширити на різноманітні класи задач для довільних одно- та багатозв'язних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Нижче розглянуто деякі спеціальні приклади розширення сфери застосування запропонованої методології, які пов'язані з розв'язанням відповідних задач з різного роду особливостями, причому обмежимось випадками однорідних ізотропних середовищ.

2.4.1. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у трикутних областях (обмежених однією еквіпотенціальною лінією та двома лініями течії). Розглянемо задачу про знаходження гармонічної

функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в скінченній однозв'язній області $G_z = A_1A_2A_3$ (рис. 2.21), обмеженій трьома гладкими кривими:

$$A_3A_2 = \{z : f_1(x, y) = 0\},\ A_1A_3 = \{z : f_2(x, y) = 0\},\ A_1A_2 = \{z : f_3(x, y) = 0\}$$
$$\left(\angle A_1 = \angle A_2 = 90^0, \angle A_3 = 0^0\right)$$

при умовах

$$\varphi\big|_{A_1A_2} = 0,\ \varphi\big|_{A_3} = +\infty,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{A_1A_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{A_2A_3} = 0,\ \int\limits_{A_1A_2} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy = Q,$$

де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, Q – повна витрата (потік) через довільну криву MN $\left(M \in A_1A_2,\ N \in A_2A_3\right)$. Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функція течії), комплексно спряжену з $\varphi = \varphi(x, y)$ і замінивши останні три граничні умови на умови

$$\psi\big|_{A_1A_3} = 0,\ \psi\big|_{A_2A_3} = Q$$

зведемо дану задачу до задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z)$ вихідної області G_z на півсмугу (область комплексного потенціалу) $G_z = \{\omega = \varphi + i\psi :\ 0 < \varphi < +\infty,\ 0 < \psi < Q\}$ при відповідності кутових точок.

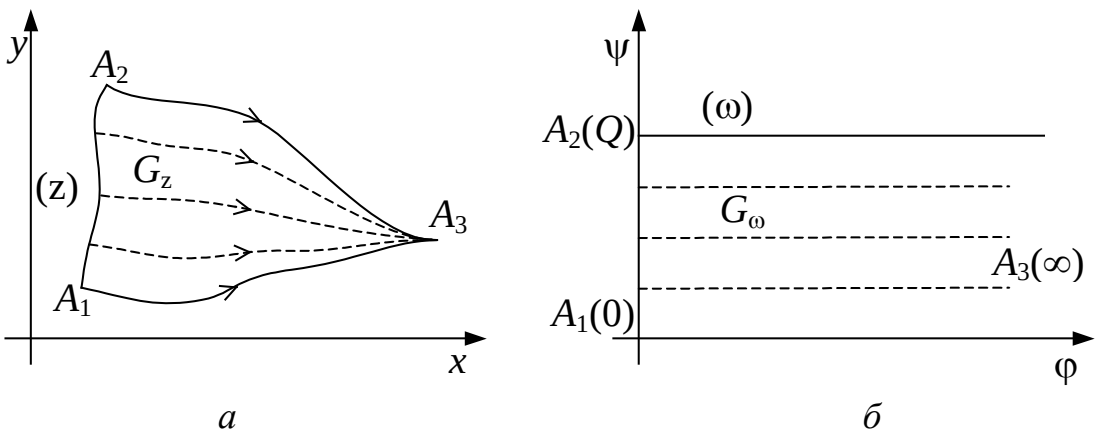


Рис. 2.21. Трикутна область G_z (*а*) та відповідна їй область G_ω (*б*)

Обернена до неї крайова задача (на конформне відображення G_z на G_ω), що має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial \psi}, \dfrac{\partial x}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1\big(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)\big) = 0, 0 \le \varphi < \infty, \\ f_2\big(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)\big) = 0, 0 \le \varphi < \infty, \\ f_3\big(x(0, \psi), y(0, \psi)\big) = 0, 0 \le \psi \le Q \end{cases} \tag{2.29}$$

зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих крайових умовах та умовах Коші–Рімана на границі цієї області.
Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковий області

$$G_\omega^\nu = \left\{ (\varphi_i, \psi_j): \quad \varphi_i = h_0 i, \ i = \overline{0, \infty}; \ \psi_i = h_* j, \ \ j = \overline{0, n+1}; \ h_* = \frac{Q}{n+1}, \ \gamma = \frac{h_0}{h_*} \right\}$$

запишемо, наприклад, у такому вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right) x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2 \left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right) y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma_2 \left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right) = 0; \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\begin{cases} f_3\left(x_{0j}, y_{0j}\right) = 0, \\ j = \overline{0, n+1}; \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} f_2\left(x_{i0}, y_{i0}\right) = 0, \\ f_1\left(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}\right) = 0, \\ i = \overline{0, \infty}; \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma\left(y_{i,1} - y_{i,0}\right), \\ y_{i,0} - y_{i+1,0} = \gamma\left(x_{i,1} - x_{i,0}\right), i = \overline{1, \infty}; \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} x_{1,j} - x_{0,j} = \gamma\left(y_{0,j+1} - y_{0,j}\right), \\ y_{0,j} - y_{1,j} = \gamma\left(x_{0,j+1} - x_{0,j}\right), \ j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Загальний розв'язок цих систем рівнянь згідно з [132, 165] має вигляд

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{k,j}\left(\upsilon_k^i \mathrm{B}_k - \gamma^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{i-t} - \upsilon_k^{i-t}}{\mu_k - \upsilon_k} \left(p_{1k} x_{t,0} + p_{nk} x_{t,n+1} \right) \right),$$

$$y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \upsilon_k^i D_k - \gamma^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{i-t} - \upsilon_k^{i-t}}{\mu_k - \upsilon_k} \left(p_{1k} y_{t,0} + p_{nk} y_{t,n+1} \right) \ (i = \overline{0,\infty},\ j = \overline{1,\infty}), \quad (2.35)$$

де

$$p_{ik} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ik\pi}{n+1},\ \ \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1},$$

$$\gamma_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1},\ \ \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі B_k, D_k, $x_{t,0}$, $y_{t,0}$, $x_{t,n+1}$, $y_{t,n+1}$, γ визначаються з розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.31)–(2.34), де x_{0j}, y_{0j}, $x_{m+1,j}$, $y_{m+1,j}$, $x_{i,1}$, $y_{i,1}$, $x_{1,j}$, $y_{1,j}$ визначені формулами (2.35).

Ефективність такої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язок локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти у цих формулах знаходять шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків, породжених лише граничними умовами та умовами (2.33)–(2.34). Коректність отриманої нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (2.30)–(2.34) забезпечується її специфікою (див., наприклад, [101]).

У випадку, якщо, наприклад, крива $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ (з фіксованою точкою A_2), на якій задається додаткова умова $\varphi = g(y)$, де $g(y)$ – достатньо гладка функція, є вільною кривою, то розв'язок відповідної задачі також може бути отриманий за формулами (2.35), де невідомі параметри визначаються в результаті розв'язку системи, яка отримується із (2.31)–(2.35) шляхом заміни рівнянь $f_1(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0$ на рівняння $\varphi_i = g(x_{i,n+1})$.

На цій основі неважко перейти до знаходження розв'язків іншого типу задач. Наприклад, розглянемо задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi(x, y)$ в області G_z (рис. 2.22) із однією виколотою точкою A, обмеженої замкненим гладким контуром $L = \{z : f(x, y) = 0\}$, при умовах

$$\varphi\big|_L = 0,\ \ \varphi\big|_A = +\infty,\ \ \int_L -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = Q.$$

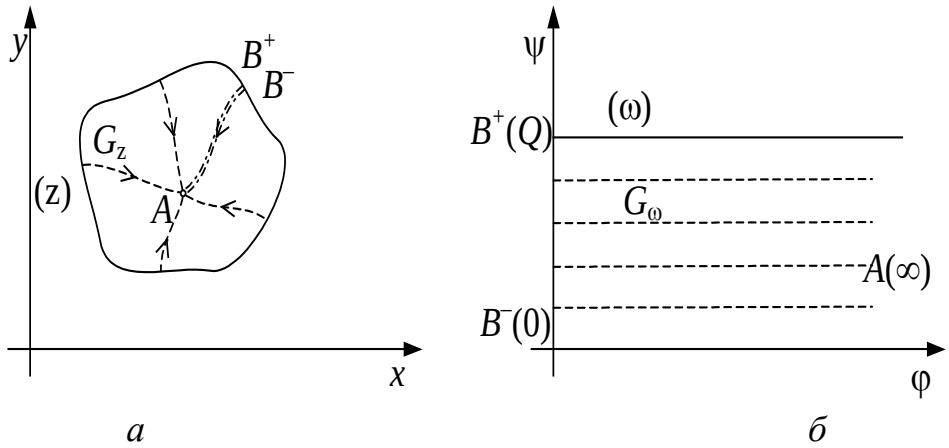


Рис. 2.22. Область G_z з виколотою точкою A (*а*) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (*б*)

Виберемо довільну точку $B \in L$ і проведемо умовно розріз вздовж лінії течії BA (невідомої) та зведемо вихідну задачу до конформного відображення однозв'язної області $G_z^* = G_z \setminus BA$, обмеженої контуром $B^+AB^-B^+$ ($B^+, B^- \in L$, B^+ належить до верхнього берега розрізу BA, а B^- – до нижнього) на відповідну область комплексного потенціалу G_ω при відповідності кутових точок.

Обернена крайова задача запишеться при цьому у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial \psi}, \dfrac{\partial x}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f\left(x(0,\psi), y(0,\psi)\right) = 0, 0 \le \psi \le Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), 0 \le \varphi < \infty. \end{cases} \tag{2.36}$$

Розв'язок відповідної різницевої задачі отримаємо аналогічно до попереднього.

Також аналогічно отримаємо розв'язок зовнішньої задачі про знаходження потенціалу $\varphi(x, y)$ зовні даного контура L (рис. 2.23), коли замість другої з умов відповідної внутрішньої задачі задаємо умову в особливій точці $z = \infty : \varphi\big|_\infty = +\infty$, а розріз здійснюємо вздовж лінії течії від довільної точки $B \in L$ до ∞. Проте в даному випадку залишається відкритою проблема його збіжності, оскільки вихідна область є необмеженою.

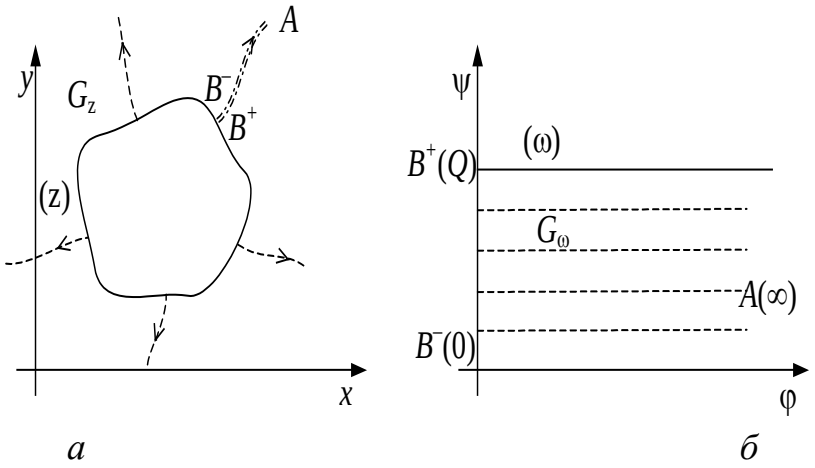
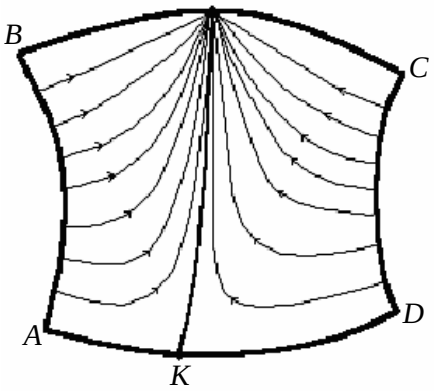


Рис. 2.23. Фізична область G_z (a) для зовнішньої задачі та відповідна їй область G_ω ($б$)

2.4.2. Приклад моделювання збурення ідеального поля точковим джерелом на граничній лінії течії. Розглянемо задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi=\varphi(x,y)$ (потенціалу) в скінченній однозв'язній шестикутній криволінійній області G_z=$ABMCDK$ $(z=x+iy)$ (див. рис. 2.24), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BMC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DKA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, при умовах

$$\varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \varphi\big|_{M}=+\infty,\ \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BM}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{AD}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{CM}=0,$$

$$\int\limits_{AB\cup CD} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy=Q.$$



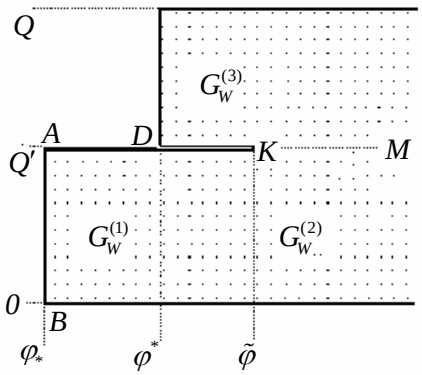


Рис. 2.24. Вихідна область G_z Рис. 2.25. Область комплексного потенціалу G_ω

Як і раніше, увівши гармонічну функцію $\psi=\psi(x,y)$ (функцію течії), комплексно спряжену з $\varphi=\varphi(x,y)$ і замінивши останні три граничні умови на умови: $\psi\big|_{BM}=0$, $\psi\big|_{AD}=Q'$, $\psi\big|_{CM}=Q''$, замінимо [19, 20] дану задачу більш загальною задачею на конформне відображення $\omega=\omega(z)$ вихідної області G_z на область комплексного потенціалу (рис. 2.25):

$$G_\omega=\{\omega:\ \varphi_*<\varphi<+\infty,\ 0<\psi<Q'\}\cup\{\omega:\ \tilde{\varphi}<\varphi<+\infty,\psi=Q'\}\cup$$
$$\left\{\omega:\ \varphi^*<\varphi<+\infty,\ \ Q'<\psi<Q''\right\}$$

при відповідності шести кутових точок [116], де $\tilde{\varphi}$ – значення потенціалу в межовій точці поділу потоків, $Q'=\int\limits_A^B\frac{\partial\psi}{\partial s}ds$ та $Q''=\int\limits_D^C\frac{\partial\psi}{\partial s}ds$ – величини фільтраційних потоків через “ділянки входу” ($Q'+Q''=Q$). Обернена до неї крайова задача на конформне відображення $z=z(\omega)$ області G_ω на G_z при невідомих $\tilde{\varphi}$, Q', Q'', що має вигляд

$$\begin{cases}
f_1\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\big)=0, \quad 0\le\psi\le Q',\\
f_2\big(x(\varphi,Q''),y(\varphi,Q'')\big)=0, \quad \varphi^*\le\varphi<+\infty,\\
f_2\big(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\big)=0, \quad \varphi_*\le\varphi<+\infty,\\
f_3\Big(x\big(\varphi^*,\psi\big),y\big(\varphi^*,\psi\big)\Big)=0, \quad Q'\le\psi\le Q'',\\
f_4\big(x(\varphi,Q'),y(\varphi,Q')\big)=0, \quad \varphi^*\le\varphi\le\tilde{\varphi},\\
f_4\big(x(\varphi,Q'),y(\varphi,Q')\big)=0, \quad \tilde{\varphi}\ge\varphi\ge\varphi_*,\\
\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial y}{\partial\psi}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial\psi}=-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, \quad (\varphi,\psi)\in G_\omega
\end{cases} \tag{2.37}$$

зводиться до розв’язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ при заданих крайових умовах, умовах Коші–Рімана на границі ∂G_ω області G_ω та умовах склеювання вздовж променя $\{\omega:\ \varphi>\tilde{\varphi},\psi=Q'\}$ та відрізка $\{\omega:\ \varphi=\tilde{\varphi},$ $0<\psi<Q'\}$.

Різницевий аналог цієї крайової задачі у сітковій області $G_\omega^\gamma=\bigcup\limits_{l=1}^{3}G_\omega^{(l)}$,

$$G_{\omega}^{(1)}=\left\{\left(\varphi_i,\psi_j\right):\ \varphi_i=\varphi_*+h_{\varphi}i,\ \ i=\overline{0,m};\ \ \psi_j=h_{\psi}j,\ \ j=\overline{0,n_0};\ \ h_{\varphi}=\frac{\tilde{\varphi}-\varphi_*}{m},\ \ h_{\psi}=\frac{Q'}{n_0}\right\},$$

$$G_{\omega}^{(2)}=\left\{\left(\varphi_i,\psi_j\right):\ \ \varphi_i=\tilde{\varphi}+h_{\varphi}\left(i-m\right),\ \ \ i=\overline{m,+\infty};\ \ \psi_j=h_{\psi}j,\ \ \ j=\overline{0,n_0};\ \ h_{\varphi}=\frac{\tilde{\varphi}-\varphi^*}{m-m_0},\right.$$
$$\left.h_{\psi}=\frac{Q'}{n_0}\right\},\quad G_{\omega}^{(3)}=\left\{\left(\varphi_i,\psi_j\right):\quad \varphi_i=\varphi^*+h_{\varphi}\left(i-m_0\right),\quad i=\overline{m_0,+\infty};\quad \psi_j=Q'+h_{\psi}\times$$
$$\times\left(j-n_0\right),\ j=\overline{n_0,n+1};\ \ h_{\varphi}=\frac{\tilde{\varphi}-\varphi^*}{m-m_0},\ \ h_{\psi}=\frac{Q''}{n_0}\Bigg\},\ \gamma^{(l)}=\frac{h_{\varphi}}{h_{\psi}},$$

запишемо, наприклад, у вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^{(l)2}\right)x_{i,j}^{(l)}+x_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^{(l)2}\left(x_{i,j-1}^{(l)}+x_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ y_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^{(l)2}\right)y_{i,j}^{(l)}+y_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^{(l)2}\left(y_{i,j-1}^{(l)}+y_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ l=1,\ \begin{cases} i=\overline{1,m-1}, \\ j=\overline{1,n_0-1}, \end{cases}\ l=2,\ \begin{cases} i=\overline{m+1,+\infty}, \\ j=\overline{1,n_0-1}, \end{cases}\ l=3,\ \begin{cases} i=\overline{m_0+1,+\infty}, \\ j=\overline{n_0+1,n}; \end{cases} \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{0,j}^{(1)},y_{0,j}^{(1)}\right)=0, & & j=\overline{0,n_0}, \\ f_4\left(x_{i,n_0}^{(1)},y_{i,n_0}^{(1)}\right)=0, & f_2\left(x_{i,0}^{(1)},y_{i,0}^{(1)}\right)=0, & i=\overline{0,m}, \\ f_2\left(x_{i,0}^{(2)},y_{i,0}^{(2)}\right)=0, & f_2\left(x_{i,n+1}^{(3)},y_{i,n+1}^{(3)}\right)=0, & i=\overline{m,+\infty}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}^{(3)},y_{i,n+1}^{(3)}\right)=0, & f_4\left(x_{i,n_0}^{(3)},y_{i,n_0}^{(3)}\right)=0, & i=\overline{m_0,m}, \\ f_3\left(x_{m_0,j}^{(3)},y_{m_0,j}^{(3)}\right)=0, & & j=\overline{n_0,n+1}; \end{cases} \tag{2.39}$$

$$
\begin{cases}
x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)} = \gamma^{(1)}\left(y_{0,j+1}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}\right), \quad j = \overline{1, n_0 - 1}, \\
y_{0,j}^{(1)} - y_{1,j}^{(1)} = \gamma^{(1)}\left(x_{0,j+1}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}\right), \quad j = \overline{1, n_0 - 1}, \\
x_{i+1,0}^{(l)} - x_{i,0}^{(l)} = \gamma^{(l)}\left(y_{i,1}^{(l)} - y_{i,0}^{(l)}\right), \quad (l = 1, i = \overline{1, m-1}) \cup (l = 2, i = \overline{m+1, +\infty}), \\
y_{i,0}^{(l)} - y_{i+1,0}^{(l)} = \gamma^{(l)}\left(x_{i,1}^{(l)} - x_{i,0}^{(l)}\right), \quad (l = 1, i = \overline{1, m-1}) \cup (l = 2, i = \overline{m+1, +\infty}), \\
x_{m_0+1,j}^{(3)} - x_{m_0,j}^{(3)} = \gamma^{(3)}\left(y_{m_0,j+1}^{(3)} - y_{m_0,j}^{(3)}\right), \quad j = \overline{n_0 + 1, n}, \\
y_{m_0,j}^{(3)} - y_{m_0+1,j}^{(3)} = \gamma^{(3)}\left(x_{m_0,j+1}^{(3)} - x_{m_0,j}^{(3)}\right), \quad j = \overline{n_0 + 1, n}, \\
x_{i+1,n_0}^{(3)} - x_{i,n_0}^{(3)} = \gamma^{(3)}\left(y_{i,n_0+1}^{(3)} - y_{i,n_0}^{(3)}\right), \quad i = \overline{m_0 + 1, m-1}, \\
y_{i,n_0}^{(3)} - y_{i+1,n_0}^{(3)} = \gamma^{(3)}\left(x_{i,n_0+1}^{(3)} - x_{i,n_0}^{(3)}\right), \quad i = \overline{m_0 + 1, m-1};
\end{cases}
\tag{2.40}
$$

$$
\begin{cases}
x_{m,j}^{(1)} = x_{m,j}^{(2)}, \qquad y_{m,j}^{(1)} = y_{m,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, n_0 - 1}, \\
\gamma^{(2)}\left(x_{m,j}^{(1)} - x_{m-1,j}^{(1)}\right) = \gamma^{(1)}\left(x_{m+1,j}^{(2)} - x_{m,j}^{(2)}\right), \quad j = \overline{0, n_0}, \\
\gamma^{(2)}\left(y_{m,j}^{(1)} - y_{m-1,j}^{(1)}\right) = \gamma^{(1)}\left(y_{m+1,j}^{(2)} - y_{m,j}^{(2)}\right), \quad j = \overline{0, n_0}, \\
x_{i,n_0}^{(3)} = x_{i,n_0}^{(2)}, \qquad y_{i,n_0}^{(3)} = y_{i,n_0}^{(2)}, \quad i = \overline{m+1, +\infty}, \\
\gamma^{(2)}\left(x_{i,n_0}^{(2)} - x_{i,n_0-1}^{(2)}\right) = \gamma^{(3)}\left(x_{i,n_0+1}^{(3)} - x_{i,n_0}^{(3)}\right), \quad i = \overline{m, +\infty}, \\
\gamma^{(2)}\left(y_{i,n_0}^{(2)} - y_{i,n_0-1}^{(2)}\right) = \gamma^{(3)}\left(y_{i,n_0+1}^{(3)} - y_{i,n_0}^{(3)}\right), \quad i = \overline{m, +\infty};
\end{cases}
\tag{2.41}
$$

$$
\gamma^{(l)} = \frac{1}{Kl} \sum_{i,j} \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}},
$$

$$
l = 1, \ Kl = mn_0, \quad l = 2, \quad Kl = \left(N + m - m_0\right) n_0, \quad l = 3, \quad Kl = N\left(n + 1 - n_0\right), \tag{2.42}
$$

де N – скінчене число, $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ – вузли області G_z.

Загальний розв’язок скінчено-різницевих рівнянь (2.38) згідно з формулами сумарних зображень Положого [132, 165] має вигляд

$$x_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k}\left(\mu_k^i A_k + \nu_k^i B_k^{(1)} + \gamma^{(1)2}\sum_{t=1}^{m-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(1)} + p_{n_0-1,k}x_{t,n_0}^{(1)}\right)\right),$$

$$y_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k}\left(\mu_k^i C_k + \nu_k^i D_k^{(1)} + \gamma^{(1)2}\sum_{t=1}^{m-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(1)} + p_{n_0-1,k}y_{t,n_0}^{(1)}\right)\right), \tag{2.43}$$

$$i=\overline{0,m},\ \ j=\overline{1,n_0-1},\ \text{де}\ \ p_{j,k}=\sqrt{\frac{2}{n_0}}\sin\frac{jk\pi}{n_0},\ \ \eta_k=1+\gamma^{(1)2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n_0}\right),$$

$$x_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k}\left(\nu_k^i B_k^{(2)} + \gamma^{(2)2}\sum_{t=m+1}^{+\infty}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(2)} + p_{n_0-1,k}x_{t,n_0}^{(2)}\right)\right),$$

$$y_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k}\left(\nu_k^i D_k^{(2)} + \gamma^{(2)2}\sum_{t=m+1}^{+\infty}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(2)} + p_{n_0-1,k}y_{t,n_0}^{(2)}\right)\right), \tag{2.44}$$

$$i=\overline{m,+\infty},\ \ j=\overline{1,n_0-1},\ \text{де}\ \ p_{j,k}=\sqrt{\frac{2}{n_0}}\sin\frac{jk\pi}{n_0},\ \ \eta_k=1+\gamma^{(2)2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n_0}\right),$$

$$x_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=n_0+1}^{n} p_{j,k}\left(\nu_k^i B_k^{(3)} + \gamma^{(3)2}\sum_{t=m_0+1}^{+\infty}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{n_0+1,k}x_{t,n_0}^{(3)} + p_{n,k}x_{t,n+1}^{(3)}\right)\right),$$

$$y_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=n_0+1}^{n} p_{j,k}\left(\nu_k^i D_k^{(3)} + \gamma^{(3)2}\sum_{t=m_0+1}^{+\infty}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{n_0+1,k}y_{t,n_0}^{(3)} + p_{n,k}y_{t,n+1}^{(3)}\right)\right), \tag{2.45}$$

$$i=\overline{m_0,+\infty},\ \ j=\overline{n_0+1,n},$$

де

$$p_{j,k}=\sqrt{\frac{2}{n+1-n_0}}\sin\frac{(j-n_0)(k-n_0)\pi}{n+1-n_0},$$

$$\eta_k=1+\gamma^{(3)2}\left(1-\cos\frac{(k-n_0)\pi}{n+1-n_0}\right),\ \ \mu_k=\eta_k+\sqrt{\eta_k^2-1},\ \ \nu_k=\eta_k-\sqrt{\eta_k^2-1}.$$

Невідомі $\gamma^{(l)}$, A_k, C_k, $B_k^{(l)}$, $D_k^{(l)}$, $x_{t,0}^{(1)}$, $y_{t,0}^{(1)}$, $x_{t,0}^{(2)}$, $y_{t,0}^{(2)}$, $x_{t,n_0}^{(l)}$, $y_{t,n_0}^{(l)}$, $x_{t,n+1}^{(3)}$, $y_{t,n+1}^{(3)}$ ($l=\overline{1,3}$), визначаються з розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.39)–(2.42), де $x_{0,j}^{(1)}$, $y_{0,j}^{(1)}$, $x_{m_0,j}^{(3)}$, $y_{m_0,j}^{(3)}$, $x_{m_0+1,j}^{(3)}$, $y_{m_0+1,j}^{(3)}$, $x_{1,j}^{(1)}$, $y_{1,j}^{(1)}$, $x_{i,1}^{(l)}$, $y_{i,1}^{(l)}$, $x_{m,j}^{(1)}$, $y_{m,j}^{(1)}$, $x_{m,j}^{(2)}$, $y_{m,j}^{(2)}$, $x_{m-1,j}^{(1)}$, $y_{m-1,j}^{(1)}$, $x_{m+1,j}^{(2)}$, $y_{m+1,j}^{(2)}$, $x_{i,n_0-1}^{(2)}$, $y_{i,n_0-1}^{(2)}$, $x_{i,n_0+1}^{(3)}$, $y_{i,n_0+1}^{(3)}$ ($l=\overline{1,3}$), представлені формулами (2.43)–(2.45). Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин $\gamma^{(l)}$. Розв'язуємо систему (2.39)–(2.41) при заданих значеннях $\gamma^{(l)}$, наприклад, за методом Ньютона [111, 138] та перевіряємо виконання умови (2.42). Залежно від одержаної нев'язки вибираємо наступні наближення невідомих величин $\gamma^{(l)}$ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність $\sum_{l=1}^{3}\left|\overset{(k+1)}{\gamma^{(l)}}-\overset{(k)}{\gamma^{(l)}}\right|<\varepsilon$.

Розглянемо тепер випадок, коли область G_ω є заданою, тобто величини φ_*, φ^*, $\tilde{\varphi}$, Q', Q'' відомі $\left(\varphi_*<\varphi^*<\tilde{\varphi},\ 0<Q'<Q''\right)$ та можливе її покриття рівномірною сіткою, а G_z є вільною, а саме: $BC=\{z\colon f_2(x,y)=\rho\}$, $K(x_K,y_K)$, $M(x_M,y_M)$ – плаваючі точки на відповідних вільних кривих AD, BC, де $f_2(x,y)$ задана гладка функція, ρ, x_K, x_M – невідомі параметри. Тоді обернена крайова задача на конформне відображення даної області G_ω на відповідну область G_z знову зводиться до розв'язку в G_ω рівнянь Лапласа:

$$\Delta x=0,\ \Delta y=0$$

при нелінійних крайових умовах:

$$\begin{gathered}
f_1\left(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\right)=0,\\
f_2\left(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\right)=\rho,\\
f_2\left(x(\varphi,Q''),y(\varphi,Q'')\right)=\rho,\\
f_3\left(x\left(\varphi^*,\psi\right),y\left(\varphi^*,\psi\right)\right)=0,\\
f_4\left(x(\varphi,Q'),y(\varphi,Q')\right)=0,
\end{gathered}$$

умовах Коші–Рімана на границі ∂G_ω області G_ω та умовах склеювання на лінії поділу течії KM (рис. 2.24).

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma = G'_\omega \cup G''_\omega = \left\{ \left(\varphi_i, \psi_j\right):\ \varphi_i = \varphi_* + h_\varphi i,\ \ i=\overline{0,+\infty},\ \ \psi_j = h_\psi j,\ \ j=\overline{0,n_0} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ \left(\varphi_i, \psi_j\right):\ \varphi_i = \varphi^* + h_\varphi \left(i - m_0\right),\ \ i=\overline{m_0,+\infty},\ \ \psi_j = Q' + h_\psi \left(j - n_0\right),\ \ j=\overline{n_0, n+1} \right\}$$

$$h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m_0} = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi_*}{m} = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi^*}{m - m_0},\ h_\psi = \frac{Q''}{n+1} = \frac{Q'}{n_0} = \frac{Q'' - Q'}{n+1-n_0}\ \left(\gamma = \frac{h_\varphi}{h_\psi}\right)$$

запишемо, наприклад, у вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2\left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2\left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right) = 0, \\ \text{якщо}\ \ \omega \in G'_\omega, \text{то}\ \ \ i=\overline{1,+\infty},\ \ \ j=\overline{1, n_0 - 1}, \\ \text{якщо}\ \ \ \omega \in G''_\omega, \text{то}\ \ i=\overline{m_0+1,+\infty},\ \ \ j=\overline{n_0+1, n}; \end{cases} \tag{2.46}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x'_{0,j}, y'_{0,j}\right) = 0, & j = \overline{0, n_0}, & f_2\left(x'_{i,0}, y'_{i,0}\right) = \rho, & i = \overline{0,+\infty}, \\ f_2\left(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}\right) = \rho, & i = \overline{m_0,+\infty}, & f_3\left(x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}\right) = 0, & j = \overline{n_0, n+1}, \\ f_4\left(x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}\right) = 0, & i = \overline{m_0, m}, & f_4\left(x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}\right) = 0, & i = \overline{0, m}; \end{cases} \tag{2.47}$$

$$\begin{cases} x'_{1,j} - x'_{0,j} = \gamma\left(y'_{0,j+1} - y'_{0,j}\right), & j = \overline{1, n_0 - 1}, \\ y'_{0,j} - y'_{1,j} = \gamma\left(x'_{0,j+1} - x'_{0,j}\right), & j = \overline{1, n_0 - 1}, \\ x'_{i+1,0} - x'_{i,0} = \gamma\left(y'_{i,1} - y'_{i,0}\right), & i = \overline{1,+\infty}, \\ y'_{i,0} - y'_{i+1,0} = \gamma\left(x'_{i,1} - x'_{i,0}\right), & i = \overline{1,+\infty}, \\ x''_{m_0+1,j} - x''_{m_0,j} = \gamma\left(y''_{m_0,j+1} - y''_{m_0,j}\right), & j = \overline{n_0+1, n}, \\ y''_{m_0,j} - y''_{m_0+1,j} = \gamma\left(x''_{m_0,j+1} - x''_{m_0,j}\right), & j = \overline{n_0+1, n}, \\ x''_{i+1,n_0} - x''_{i,n_0} = \gamma\left(y''_{i,n_0+1} - y''_{i,n_0}\right), & i = \overline{m_0+1, m-1}, \\ y''_{i,n_0} - y''_{i+1,n_0} = \gamma\left(x''_{i,n_0+1} - x''_{i,n_0}\right), & i = \overline{m_0+1, m-1}; \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} x'_{i,n_0} = x''_{i,n_0}, & y'_{i,n_0} = y''_{i,n_0}, \quad i = \overline{m+1,+\infty}, \\ x'_{i,n_0} - x'_{i,n_0-1} = x''_{i,n_0+1} - x''_{i,n_0}, & i = \overline{m,+\infty}, \\ y'_{i,n_0} - y'_{i,n_0-1} = y''_{i,n_0+1} - y''_{i,n_0}, & i = \overline{m,+\infty}. \end{cases} \tag{2.49}$$

Розв'язок рівнянь Лапласа (2.46) знаходимо згідно з формулами сумарних зображень Положого [132, 165]:

$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k} \left(\nu_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x'_{t,0} + p_{n_0-1,k} x'_{t,n_0} \right) \right),$$

$$y'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_0-1} p_{j,k} \left(\nu_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y'_{t,0} + p_{n_0-1,k} y'_{t,n_0} \right) \right),$$

$$i = \overline{0,+\infty}, \quad j = \overline{1,n_0-1}, \tag{2.50}$$

де

$$p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n_0}} \sin \frac{jk\pi}{n_0}, \ \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n_0} \right).$$

$$x''_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^{n} p_{j,k} \left(\nu_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=m_0+1}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_0+1,k} x''_{t,n_0} + p_{n,k} x''_{t,n+1} \right) \right),$$

$$y''_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^{n} p_{j,k} \left(\nu_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=m_0+1}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_0+1,k} y''_{t,n_0} + p_{n,k} y''_{t,n+1} \right) \right),$$

$$i = \overline{m_0,+\infty}, \quad j = \overline{n_0+1,n}, \tag{2.51}$$

де

$$p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1-n_0}} \sin \frac{(j-n_0)(k-n_0)\pi}{n+1-n_0}, \ \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{(k-n_0)\pi}{n+1-n_0} \right).$$

Тут $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$.

Невідомі B_k, D_k, $x'_{t,0}$, $y'_{t,0}$, x'_{t,n_0}, y'_{t,n_0}, x''_{t,n_0}, y''_{t,n_0}, $x''_{t,n+1}$, $y''_{t,n+1}$ визначаються з розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.47)–(2.49), де $x'_{0,j}$, $y'_{0,j}$, $x'_{1,j}$, $y'_{1,j}$, $x''_{m_0,j}$, $y''_{m_0,j}$, $x''_{m_0+1,j}$, $y''_{m_0+1,j}$, $x'_{i,1}$, $y'_{i,1}$,

x'_{i,n_0-1}, y'_{i,n_0-1}, x''_{i,n_0+1}, y''_{i,n_0+1} представлені формулами (2.50), (2.51). Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин ρ, $x_K = x_{m,n_0}$, $x_M = x_{N,j}$. Розв'язуємо систему, наприклад, за методом Ньютона [111, 138] та перевіряємо виконання умов:

$$x_M = \frac{1}{n_0+1}\sum_{j=0}^{n_0} x'_{N,j} + \frac{1}{n+2-n_0}\sum_{j=n_0}^{n+1} x''_{N,j},$$

$$x_K = \frac{\left(x'_{m,n_0-1} - x''_{m,n_0+1}\right)\gamma + x'_{m+1,n_0} + x''_{m+1,n_0}}{2}, \qquad (2.52)$$

$$\rho = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} f_2\left(x'_{i,0}, y'_{i,0}\right) + \frac{1}{N-m_0+1}\sum_{i=m_0}^{N} f_2\left(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}\right) + f_2\left(x_M, y_M\right)\right),$$

де

$$y_M = \frac{1}{n_0+1}\sum_{j=0}^{n_0} y'_{N,j} + \frac{1}{n+2-n_0}\sum_{j=n_0}^{n+1} y''_{N,j}.$$

Залежно від отриманих нев'язок вибираємо наступні наближення невідомих параметрів і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність

$$\left|\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}\right| + \left|x_K{}^{(k+1)} - x_K{}^{(k)}\right| + \left|x_M{}^{(k+1)} - x_M{}^{(k)}\right| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що залежно від інтенсивності джерела збурення розташованого в точці $M \in BC$,можливі різноманітні випадки формування структури течії, а отже, і форми області комплексного потенціалу. В даному випадку маємо «сильне» джерело збурень, яке в принципі змінює вихідну течію від AB до CD (таке збурення природно назвати сингулярним, особливим).

2.4.3. Приклад моделювання збурення ідеального поля еквіпотенціальною ділянкою на граничній лінії течії. Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в криволінійній області $G_z = ABMNCD$ $(z = x + iy)$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x,y) = 0\}$, $BMNC = \{z: f_2(x,y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x,y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x,y) = 0\}$ (див. рис. 2.26), які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, при умовах:

$$\varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \varphi\big|_{MN}=\varphi^\circ,\ \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BM}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{NC}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA}=0,$$

де M та N деякі точки кривої BC такі, що $\varphi_M=\varphi(M)$, $\varphi_N=\varphi(N)$, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої [23]. Знову, ввівши гармонічну функцію течії $\psi=\psi(x,y)$ і замінивши останні три граничні умови на умови:

$$\psi\big|_{BM}=Q',\ \psi\big|_{NC}=Q'',\ \psi\big|_{AD}=0,$$

перейдемо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega=\omega(z)$ області G_z на область комплексного потенціалу G_ω при відповідності кутових точок. Очевидно, що залежно від значення потенціалу φ° можливі різні випадки формування течії в області G_z. Розглянемо той з них, коли межова точка K $\left(K\in\partial G_z\right)$ поділу течії належить до ділянки BM (див. рис. 2.26) та $\varphi_*<\varphi^\circ<\varphi_M$, тобто значення цього потенціалу мало відрізняється від вихідного усередненого потенціалу на ділянці MN, що не призводить до суттєвої зміни вихідної течії (випадок неособливого, регулярного, звичайного збурення). При цьому область комплексного потенціалу G_ω буде такою (рис. 2.27):

$$G_\omega=\left\{\ \omega:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q'\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\ \omega:\ \ \tilde{\varphi}<\varphi<\varphi^*,\ \psi=Q'\right\}\cup\left\{\ \omega:\ \ \varphi^\circ<\varphi<\varphi^*,\ Q'<\psi<Q''\right\}.$$

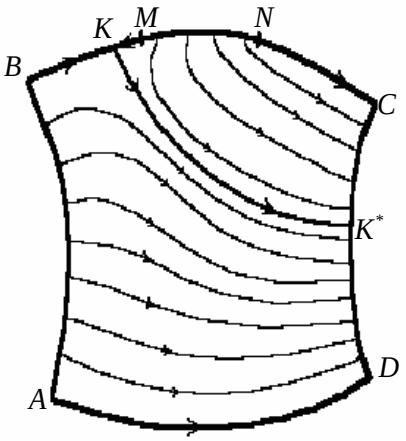


Рис. 2.26. Вихідна область G_z

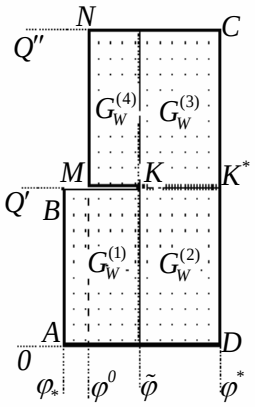


Рис. 2.27. Область комплексного потенціалу G_ω

Обернена крайова задача на конформне відображення області G_ω на область G_z при невідомих Q', Q'', φ°, $\tilde{\varphi}$ запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1\big(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)\big) = 0, \quad 0 \le \psi \le Q', \\ f_2\big(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')\big) = 0, \quad \varphi_* \le \varphi \le \tilde{\varphi}, \\ f_2\big(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')\big) = 0, \quad \varphi^\circ \le \varphi \le \tilde{\varphi}, \\ f_2\Big(x\big(\varphi^\circ, \psi\big), y\big(\varphi^\circ, \psi\big)\Big) = 0, \quad Q' \le \psi \le Q'', \\ f_2\big(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')\big) = 0, \quad \varphi^\circ \le \varphi \le \varphi^*, \\ f_3\Big(x\big(\varphi^*, \psi\big), y\big(\varphi^*, \psi\big)\Big) = 0, \quad 0 \le \psi \le Q'', \\ f_4\big(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)\big) = 0, \quad \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \end{cases} \tag{2.53}$$

де $\tilde{\varphi} = \varphi\big|_K$; $Q' = \int\limits_A^B \dfrac{\partial \psi}{\partial s} ds$ – потік, що входить в область G_z через ділянку AB, $Q'' = \int\limits_D^C \dfrac{\partial \psi}{\partial s} ds$ – сумарний потік, що виходить із неї через ділянку CD ($Q'' - Q'$ – потік, що входить в область G_z через ділянку MN).

Різницевий аналог цієї крайової задачі у сітковій області

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{4} G_\omega^{(l)},$$

де

$$G_\omega^{(l)} = \Big\{\big(\varphi_i, \psi_j\big):\ \varphi_i = \Phi_p + h_\varphi\big(i - a_1\big),\ i = \overline{a_1, a_2};$$

$$\psi_j = \Psi_p + h_\psi\big(j - b_1\big),\ j = \overline{b_1, b_2};\ h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1},\ h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1},\ \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi}\Big\},$$

а параметри Φ_p, Φ_k, a_1, a_2, Ψ_p, Ψ_k, b_1, b_2 залежно від значення l визначаються згідно з табл. 2.3, запишемо, наприклад, у вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2\left(1+\gamma^{(l)2}\right)x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}\left(x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}\right) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2\left(1+\gamma^{(l)2}\right)y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}\left(y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}\right) = 0, \\ \qquad i=\overline{a_1+1,a_2-1},\ j=\overline{b_1+1,b_2-1},\ l=\overline{1,4}; \end{cases} \tag{2.54}$$

$$\begin{cases} f_2\left(x_{i,n_0}^{(1)}, y_{i,n_0}^{(1)}\right) = 0, & f_4\left(x_{i,0}^{(1)}, y_{i,0}^{(1)}\right) = 0, & i=\overline{0,m_1}, \\ f_1\left(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}\right) = 0, & f_3\left(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}\right) = 0, & j=\overline{0,n_0}, \\ f_4\left(x_{i,0}^{(2)}, y_{i,0}^{(2)}\right) = 0, & f_2\left(x_{i,n+1}^{(3)}, y_{i,n+1}^{(3)}\right) = 0, & i=\overline{m_1,m+1}, \\ f_3\left(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}\right) = 0, & f_2\left(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}\right) = 0, & j=\overline{n_0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}^{(4)}, y_{i,n+1}^{(4)}\right) = 0, & f_2\left(x_{i,n_0}^{(4)}, y_{i,n_0}^{(4)}\right) = 0, & i=\overline{m_0,m_1}; \end{cases} \tag{2.55}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_{i,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)} &= \gamma^{(l)}\left(y_{i,1}^{(l)} - y_{i,0}^{(l)}\right), \\ y_{i-1,0}^{(l)} - y_{i,0}^{(l)} &= \gamma^{(l)}\left(x_{i,1}^{(l)} - x_{i,0}^{(l)}\right), \end{aligned}\right\} & i=\overline{a_1+1,a_2-1}, \\ & l=1,2, \\ \left.\begin{aligned} x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)}\left(y_{m+1,j+1}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)}\right), \\ y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)}\left(x_{m+1,j+1}^{(l)} - x_{m+1,j}^{(l)}\right), \end{aligned}\right\} & j=\overline{b_1+1,b_2-1}, \\ & l=2,3, \\ \left.\begin{aligned} x_{i,n_0}^{(4)} - x_{i-1,n_0}^{(4)} &= \gamma^{(4)}\left(y_{i,n_0+1}^{(4)} - y_{i,n_0}^{(4)}\right), \\ y_{i-1,n_0}^{(4)} - y_{i,n_0}^{(4)} &= \gamma^{(4)}\left(x_{i,n_0+1}^{(4)} - x_{i,n_0}^{(4)}\right), \end{aligned}\right\} & i=\overline{m_0+1,m_1-1}; \end{cases} \tag{2.56}$$

Таблиця 2.3

L	Φ_p	Φ_k	a_1	A_2	Ψ_p	Ψ_k	B_1	B_2
1	φ_*	$\tilde{\varphi}$	0	M_1	0	Q'	0	n_0
2	$\tilde{\varphi}$	φ^*	m_1	$m+1$	0	Q'	0	n_0
3	$\tilde{\varphi}$	φ^*	m_1	$m+1$	Q'	Q''	N_0	$n+1$
4	φ°	$\tilde{\varphi}$	m_0	M_1	Q'	Q''	N_0	$n+1$

$$
\begin{cases}
x_{i,n_0}^{(2)} = x_{i,n_0}^{(3)}, \qquad y_{i,n_0}^{(2)} = y_{i,n_0}^{(3)}, & i=\overline{m_1+1,m}, \\
\left.\begin{aligned}
&\gamma^{(2)}\left(x_{i,n_0}^{(2)} - x_{i,n_0-1}^{(2)}\right) = \gamma^{(3)}\left(x_{i,n_0+1}^{(3)} - x_{i,n_0}^{(3)}\right), \\
&\gamma^{(2)}\left(y_{i,n_0}^{(2)} - y_{i,n_0-1}^{(2)}\right) = \gamma^{(3)}\left(y_{i,n_0+1}^{(3)} - y_{i,n_0}^{(3)}\right),
\end{aligned}\right\} & i=\overline{m_1,m+1}, \\
x_{m_1,j}^{(l_1)} = x_{m_1,j}^{(l_2)}, \qquad y_{m_1,j}^{(l_1)} = y_{m_1,j}^{(l_2)}, & j=\overline{b_1+1,b_2-1}, \\
\left.\begin{aligned}
&\gamma^{(l_2)}\left(x_{m_1,j}^{(l_1)} - x_{m_1-1,j}^{(l_1)}\right) = \gamma^{(l_1)}\left(x_{m_1+1,j}^{(l_2)} - x_{m_1,j}^{(l_2)}\right), \\
&\gamma^{(l_2)}\left(y_{m_1,j}^{(l_1)} - y_{m_1-1,j}^{(l_1)}\right) = \gamma^{(l_1)}\left(y_{m_1+1,j}^{(l_2)} - y_{m_1,j}^{(l_2)}\right),
\end{aligned}\right\} & \begin{aligned} &l_1=1,4,\ l_2=2,3, \\ &j=\overline{b_1,b_2}, \end{aligned}
\end{cases}
\tag{2.57}
$$

$$
\gamma^{(l)} = \frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)} \times
$$

$$
\times \sum_{i,j=a_1,b_1}^{a_2-1,b_2-1} \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}}, \tag{2.58}
$$

де $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i,\psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i,\psi_j)$, $\left(\varphi_i,\psi_j\right) \in G_\omega^{(l)}$, $l=\overline{1,4}$.

Загальний розв’язок системи скінчено-різницевих рівнянь (2.54) згідно з формулами (1.99) запишемо у вигляді

$$
x_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k}\left(\mu_k^j A_k^{(l)} + \nu_k^j B_k^{(l)} + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{a_1+1,k} x_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} x_{a_2,t}^{(l)}\right)\right),
$$

$$
y_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k}\left(\mu_k^j C_k^{(l)} + \nu_k^j D_k^{(l)} + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{a_1+1,k} y_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} y_{a_2,t}^{(l)}\right)\right),
$$

$$
i=\overline{a_1+1,a_2-1}, \quad j=\overline{b_1,b_2}, \quad l=\overline{1,4}, \tag{2.59}
$$

де

$$
p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{a_2-a_1}} \sin\frac{(i-a_1)(k-a_1)\pi}{a_2-a_1}, \quad \eta_k = 1+\gamma^{(l)2} - \gamma^{(l)2}\cos\frac{(k-a_1)\pi}{a_2-a_1},
$$

$$
\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2-1}, \ \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2-1}.
$$

Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих параметрів $A_k^{(l)}$, $B_k^{(l)}$, $C_k^{(l)}$, $D_k^{(l)}$, $x_{a_1,t}^{(l)}$, $x_{a_2,t}^{(l)}$, $y_{a_1,t}^{(l)}$, $y_{a_2,t}^{(l)}$ $\left(l=\overline{1,4}\right)$ формується аналогічно до системи (1.100) на основі рівнянь (2.55), (2.56) з використанням умов склеювання (2.57), формул сумарних зображень (2.59) і умов (2.58). При її розв'язанні умовою закінчення процесу може бути нерівність: $\sum_{l=1}^{4}\left|\overset{(k+1)}{\gamma^{(l)}}-\overset{(k)}{\gamma^{(l)}}\right|<\varepsilon$.

Розглянемо тепер випадок, коли область G_ω (див. рис. 2.27) є заданою, тобто величини φ_*, φ°, $\tilde{\varphi}$, φ^*, Q', Q'' відомі ($\varphi_*<\varphi^\circ<\tilde{\varphi}<\varphi^*$, $0<Q'<Q''$), та можливе її покриття рівномірною сіткою, а G_z є вільною, а саме, $BC=\left\{z\colon f_2\left(x,y\right)=\rho\right\}$, $K\left(x_K,y_K\right)$, $M\left(x_M,y_M\right)$, $N\left(x_N,y_N\right)$ – плаваючі точки на вільній кривій $BKMNC$, де $f_2\left(x,y\right)$ задана гладка функція, ρ, x_K, x_M, x_N – невідомі параметри. Тоді обернена крайова задача на конформне відображення даної області G_ω на відповідну G_z знову зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ при нелінійних крайових умовах $f_1\left(x\left(\varphi_*,\psi\right),y\left(\varphi_*,\psi\right)\right)=0$, $f_2\left(x\left(\varphi,Q'\right),y\left(\varphi,Q'\right)\right)=\rho$, $f_2\left(x\left(\varphi^\circ,\psi\right),y\left(\varphi^\circ,\psi\right)\right)=\rho$, $f_2\left(x\left(\varphi,Q''\right),y\left(\varphi,Q''\right)\right)=\rho$, $f_3\left(x\left(\varphi^*,\psi\right),y\left(\varphi^*,\psi\right)\right)=0$, $f_4\left(x\left(\varphi,0\right),y\left(\varphi,0\right)\right)=0$, умовах Коші–Рімана на границі ∂G_ω області G_ω та умов склеювання на лінії поділу течії KK^* (див. рис. 2.26).

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma=G_\omega'\cup G_\omega''=\left\{\left(\varphi_i,\psi_j\right)\colon\ \varphi_i=\varphi_*+h_\varphi i,\ \ i=\overline{0,m+1},\ \psi_j=h_\psi j,\ \ j=\overline{0,n_0}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\left(\varphi_i,\psi_j\right)\colon\ \varphi_i=\varphi^\circ+h_\varphi\left(i-m_0\right),\ i=\overline{m_0,m+1},\ \psi_j=Q'+h_\psi\left(j-n_0\right),\ j=\overline{n_0,n+1}\right\},$$

де

$$h_\varphi=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{m+1}=\frac{\tilde{\varphi}-\varphi_*}{m_1}=\frac{\varphi^\circ-\varphi_*}{m_0}=\frac{\varphi^*-\varphi^\circ}{m+1-m_0}=\frac{\varphi^*-\tilde{\varphi}}{m+1-m_1}=\frac{\tilde{\varphi}-\varphi^\circ}{m_1-m_0},$$
$$h_\psi=\frac{Q''}{n+1}=\frac{Q'}{n_0}=\frac{Q''-Q'}{n+1-n_0}\ \left(\gamma=\frac{h_\varphi}{h_\psi}\right)$$

запишемо у вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2\left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2\left(1+\gamma^2\right)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2\left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right) = 0, \\ \text{якщо} \quad \omega \in G'_\omega, \quad \text{то} \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n_0-1}, \\ \text{якщо} \quad \omega \in G''_\omega, \quad \text{то} \quad i=\overline{m_0+1,m}, \quad j=\overline{n_0+1,n}, \end{cases} \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x'_{0,j}, y'_{0,j}\right) = 0, & j=\overline{0,n_0}, & f_2\left(x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}\right) = \rho, & i=\overline{0,m_1}, \\ f_2\left(x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}\right) = \rho, & i=\overline{m_0,m_1}, & f_2\left(x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}\right) = \rho, & j=\overline{n_0,n+1}, \\ f_2\left(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}\right) = \rho, & i=\overline{m_0,m+1}, & f_3\left(x''_{m+1,j}, y''_{m+1,j}\right) = 0, & j=\overline{n_0,n+1}, \\ f_3\left(x'_{m+1,j}, y'_{m+1,j}\right) = 0, & j=\overline{0,n_0}, & f_4\left(x'_{i,0}, y'_{i,0}\right) = 0, & i=\overline{0,m+1}, \end{cases} \tag{2.61}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x'_{i,0} - x'_{i-1,0} &= \gamma\left(y'_{i,1} - y'_{i,0}\right), \\ y'_{i-1,0} - y'_{i,0} &= \gamma\left(x'_{i,1} - x'_{i,0}\right), \end{aligned}\right\} & i=\overline{1,m}, \\ \left.\begin{aligned} x'_{m+1,j} - x'_{m,j} &= \gamma\left(y'_{m+1,j+1} - y'_{m+1,j}\right), \\ y'_{m,j} - y'_{m+1,j} &= \gamma\left(x'_{m+1,j+1} - x'_{m+1,j}\right), \end{aligned}\right\} & j=\overline{1,n_0-1}, \\ \left.\begin{aligned} x''_{i,n_0} - x''_{i-1,n_0} &= \gamma\left(y''_{i,n_0+1} - y''_{i,m_0}\right), \\ y''_{i-1,n_0} - y''_{i,n_0} &= \gamma\left(x''_{i,n_0+1} - x''_{i,n_0}\right), \end{aligned}\right\} & i=\overline{m_0+1,m_1-1}, \\ \left.\begin{aligned} x''_{m+1,j} - x''_{m,j} &= \gamma\left(y''_{m+1,j+1} - y''_{m+1,j}\right), \\ y''_{m,j} - y''_{m+1,j} &= \gamma\left(x''_{m+1,j+1} - x''_{m+1,j}\right), \end{aligned}\right\} & j=\overline{n_0+1,n}, \end{cases} \tag{2.62}$$

$$\begin{cases} x'_{i,n_0} = x''_{i,n_0}, \qquad y'_{i,n_0} = y''_{i,n_0}, & i=\overline{m_1+1,m}, \\ \left.\begin{aligned} x'_{i,n_0} - x'_{i,n_0-1} &= x''_{i,n_0+1} - x''_{i,n_0}, \\ y'_{i,n_0} - y'_{i,n_0-1} &= y''_{i,n_0+1} - y''_{i,n_0}, \end{aligned}\right\} & i=\overline{m_1,m+1}, \end{cases} \tag{2.63}$$

де

$$x'_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \qquad y'_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \qquad \left(\varphi_i, \psi_j\right) \in G'_\omega,$$

$$x''_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \qquad y''_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \qquad \left(\varphi_i, \psi_j\right) \in G''_\omega.$$

Розв’язок рівнянь Лапласа знаходимо згідно з формулами (1.100)

$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n_0-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k} x'_{0,t} + p_{m,k} x'_{m+1,t}\right)\right),$$

$$y'_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n_0-1} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k} y'_{0,t} + p_{m,k} y'_{m+1,t}\right)\right),$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{0,n_0}, \tag{2.64}$$

де

$$p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin\frac{ik\pi}{m+1},\ \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos\frac{k\pi}{m+1}.$$

$$x''_{i,j} = \sum_{k=m_0+1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=n_0+1}^{n} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{m_0+1,k} x''_{m_0,t} + p_{m,k} x''_{m+1,t}\right)\right),$$

$$y''_{i,j} = \sum_{k=m_0+1}^{m} p_{i,k}\left(\mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=n_0+1}^{n} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{m_0+1,k} y''_{m_0,t} + p_{m,k} y''_{m+1,t}\right)\right),$$

$$i = \overline{m_0+1,m},\ j = \overline{n_0,n+1}. \tag{2.65}$$

Тут

$$p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1-m_0}} \sin\frac{(i-m_0)(k-m_0)\pi}{m+1-m_0},\ \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos\frac{(k-m_0)\pi}{m+1-m_0},$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1},\ \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі A_k, B_k, C_k, D_k, $x'_{0,j}$, $y'_{0,j}$, $x'_{m+1,j}$, $y'_{m+1,j}$, $x''_{m_0,j}$, $y''_{m_0,j}$, $x''_{m+1,j}$, $y''_{m+1,j}$ визначаються з розв’язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.61)–(2.63), де $x'_{i,0}$, $y'_{i,0}$, $x'_{i,1}$, $y'_{i,1}$, x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}, x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}, x''_{i,n_0+1}, y''_{i,n_0+1}, $x''_{i,n+1}$, $y''_{i,n+1}$, $x'_{m,j}$, $y'_{m,j}$, $x''_{m,j}$, $y''_{m,j}$ представлені за формулами (2.64), (2.65). Розв’язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин ρ, $x_K = x_{m_1,n_0}$, $x_M = x_{m_0,n_0}$, $x_N = x_{m_0,n+1}$. Розв’язуємо систему та перевіряємо виконання умов

$$\rho=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_1+1}\sum_{i=0}^{m_1} f_2\left(x'_{i,n_0},y'_{i,n_0}\right)+\frac{1}{m_1-m_0+1}\sum_{i=m_0}^{m_1} f_2\left(x''_{i,n_0},y''_{i,n_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-n_0+2}\sum_{j=n_0}^{n+1} f_2\left(x''_{m_0,j},y''_{m_0,j}\right)+\frac{1}{m-m_0+2}\sum_{i=m_0}^{m+1} f_2\left(x''_{i,n+1},y''_{i,n+1}\right)\right),$$

$$x_K=\frac{\left(x'_{m_1,n_0-1}-x''_{m_1,n_0+1}\right)\gamma+x'_{m_1+1,n_0}+x''_{m_1+1,n_0}}{2},$$

$$x_M=\frac{x''_{m_0+1,n_0}+x''_{m_0,n_0+1}}{1+\gamma},\ x_N=\frac{x''_{m_0+1,n+1}+x''_{m_0,n}}{1+\gamma}.$$

Залежно від отриманих нев'язок вибираємо наступні наближення невідомих параметрів і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність

$$\left|\rho^{(k+1)}-\rho^{(k)}\right|+\left|x_K{}^{(k+1)}-x_K{}^{(k)}\right|+\left|x_M{}^{(k+1)}-x_M{}^{(k)}\right|+\left|x_N{}^{(k+1)}-x_N{}^{(k)}\right|<\varepsilon.$$

2.5. Нелінійні крайові задачі в шаруватих середовищах

Як відомо [132, 165], метод сумарних зображень Положого дає можливість чисельно-аналітично записати розв'язок крайових задач для рівнянь дивергентного типу з кусково сталими коефіцієнтами в L-подібних областях (областях, складених з прямокутників, що не перетинаються). Використовуючи ідею "конформних обернень" можна поширити можливості і переваги цього методу для розв'язання описаного класу задач у довільних криволінійних кусково-однорідних середовищах (областях) за умов, що його "однорідні складові" є криволінійними чотирикутниками, утвореними лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

Для ілюстрації підходу, розглянемо модельну задачу про знаходження функції (напору) $h=h(x,y)$ в однозв'язній чотирикутній криволінійній області $G_z=ABCD=\bigcup_{l=0}^{m}G_z^{(l)}\bigcup_{l=1}^{m}L_z^{(l)}$ $(z=x+iy)$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими

кутами, $G_z^{(l)} = \left\{ z \in G_z : \quad h^{(l)} < h(x,y) < h^{(l+1)} \right\}$, $L_z^{(l)} = \left\{ z \in G_z : \quad h(x,y) = h^{(l)} \right\}$, що в кожній із областей $G_z^{(l)}$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}\left(\chi(h) \operatorname{grad} h \right) = 0$$

при таких крайових умовах

$$h\big|_{CD} = h^* = h^{(m+1)},\ h\big|_{AB} = h_* = h^{(0)},\ \left.\frac{dh}{dn}\right|_{BC} = \left.\frac{dh}{dn}\right|_{DA} = 0$$

та умовах спряження вздовж ліній розриву $L_z^{(l)}$ функції $\chi\left(h(x,y)\right)$:

$$\left[h\right]\big|_{L_z^{(l)}} = 0,\ \left.\left[\chi \frac{\partial h}{\partial n} \right]\right|_{L_z^{(l)}} = 0,$$

де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\chi\left(h(x,y)\right) = \chi_l$ при $\left(x,y\right) \in G_z^{(l)}$ (χ_l – дійсні додатні числа), $\left[f \right]$ – стрибок функції f при переході через відповідну лінію (по нормалі) (див. рис. 2.28). Ввівши функцію течії $\psi = \psi\left(x,y\right)$, комплексно спряжену (в узагальненому розумінні) з $h = h\left(x,y\right)$, і замінивши останні дві граничні умови на умови

$$\psi\big|_{BC} = Q,\ \psi\big|_{AD} = 0,$$

де стала $Q = \int\limits_{EF} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int\limits_{EF} -\frac{\partial h}{\partial y} dx + \frac{\partial h}{\partial x} dy$ $\left(E \in AD,\ F \in BC\right)$ – повна витрата (невідомий параметр), дану задачу замінимо [23] більш загальною задачею на узагальнене конформне відображення $\omega = \omega\left(z\right) = h(x,y) + i\psi(x,y)$ області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу)

$$G_\omega = \left\{ \omega : h_* < h < h^*,\ 0 < \psi < Q \right\} = \bigcup_{l=0}^{m} G_\omega^{(l)} \bigcup_{l=1}^{m} L_\omega^{(l)},\ L_\omega^{(l)} = \left\{ \omega \in G_\omega : h = h^{(l)} \right\},$$
$$G_\omega^{(l)} = \left\{ \omega \in G_\omega : h^{(l)} < h < h^{(l+1)},\ 0 < \psi < Q \right\}$$

при відповідності чотирьох кутових точок [116] (див. рис. 2.29).

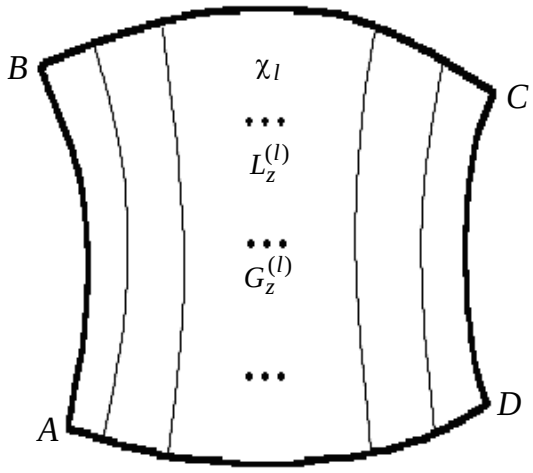


Рис. 2.28. Фізична область G_z

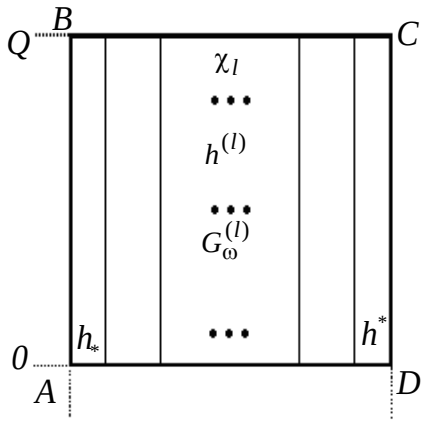


Рис. 2.29. Область комплексного потенціалу G_ω

Обернена до неї крайова задача на узагальнене конформне відображення $z=z(\omega)=x(h,\psi)+iy(h,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q, що має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial h}=\chi\dfrac{\partial y}{\partial \psi}, & \chi\dfrac{\partial x}{\partial \psi}=-\dfrac{\partial y}{\partial h}, & (h,\psi)\in G_\omega, \\ [x]\big|_{L_\omega^{(l)}}=[y]\big|_{L_\omega^{(l)}}=0, & \left[\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial x}{\partial h}\right]\Bigg|_{L_\omega^{(l)}}=\left[\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial y}{\partial h}\right]\Bigg|_{L_\omega^{(l)}}=0, & l=\overline{1,m}, \\ f_1\big(x(h_*,\psi),y(h_*,\psi)\big)=0, & f_3\Big(x(h^*,\psi),y(h^*,\psi)\Big)=0, & 0\le\psi\le Q, \\ f_2\big(x(h,Q),y(h,Q)\big)=0, & f_4\big(x(h,0),y(h,0)\big)=0, & h_*\le h\le h^*, \end{cases}$$

зводиться до розв'язку в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x=0,\ \Delta y=0$ при заданих крайових умовах, умовах Коші–Рімана на нижній та лівій ділянках границі ∂G_ω області G_ω та умовах склеювання вздовж ліній $h=h^{(l)},\quad l=\overline{1,m}$ [23]. Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma=\bigcup_{l=0}^{m}G_\omega^{\gamma(l)},$$

де

$$G_\omega^{\gamma(l)}=\Big\{\big(h_i,\psi_j\big):\ h_i=h^{(l)}+\Delta_h\big(i-i_l\big),\ i=\overline{i_l,i_{l+1}};\ \psi_j=\Delta_\psi j,\ \ j=\overline{0,n+1};$$

$$\left.\Delta_h=\frac{h^{(l+1)}-h^{(l)}}{i_{l+1}-i_l},\ \Delta_\psi=\frac{Q}{n+1},\ \gamma=\frac{\Delta_h}{\Delta_\psi}\right\}$$

запишемо, наприклад, у вигляді [177]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^2\right)x_{i,j}^{(l)}+x_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^2\left(x_{i,j-1}^{(l)}+x_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ y_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^2\right)y_{i,j}^{(l)}+y_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^2\left(y_{i,j-1}^{(l)}+y_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ \quad i=\overline{i_l+1,i_{l+1}-1},\ \ j=\overline{1,n},\qquad l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{2.66}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{i_0,j}^{(0)},y_{i_0,j}^{(0)}\right)=0, \qquad f_3\left(x_{i_{m+1},j}^{(m)},y_{i_{m+1},j}^{(m)}\right)=0, \quad j=\overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}^{(l)},y_{i,n+1}^{(l)}\right)=0, \quad f_4\left(x_{i,0}^{(l)},y_{i,0}^{(l)}\right)=0, \qquad i=\overline{i_l,i_{l+1}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{2.67}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_{i_0+1,j}^{(0)}-x_{i_0,j}^{(0)}&=\gamma\chi_0\left(y_{i_0,j+1}^{(0)}-y_{i_0,j}^{(0)}\right), \\ y_{i_0,j}^{(0)}-y_{i_0+1,j}^{(0)}&=\gamma\chi_0\left(x_{i_0,j+1}^{(0)}-x_{i_0,j}^{(0)}\right), \end{aligned}\right\} \qquad j=\overline{1,n}, \\ \left.\begin{aligned} x_{i+1,0}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}&=\gamma\chi_l\left(y_{i,1}^{(l)}-y_{i,0}^{(l)}\right), \\ y_{i,0}^{(l)}-y_{i+1,0}^{(l)}&=\gamma\chi_l\left(x_{i,1}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}\right), \end{aligned}\right\} \qquad i=\overline{i_l+1,i_{l+1}-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{2.68}$$

$$\begin{cases} x_{i_l,j}^{(l-1)}=x_{i_l,j}^{(l)}, \qquad y_{i_l,j}^{(l-1)}=y_{i_l,j}^{(l)}, \qquad j=\overline{1,n}, \\ \left.\begin{aligned} \chi_l\left(x_{i_l,j}^{(l-1)}-x_{i_l-1,j}^{(l-1)}\right)&=\chi_{l-1}\left(x_{i_l+1,j}^{(l)}-x_{i_l,j}^{(l)}\right), \\ \chi_l\left(y_{i_l,j}^{(l-1)}-y_{i_l-1,j}^{(l-1)}\right)&=\chi_{l-1}\left(y_{i_l+1,j}^{(l)}-y_{i_l,j}^{(l)}\right), \end{aligned}\right\} \quad j=\overline{0,n+1}, \quad l=\overline{1,m}; \end{cases} \tag{2.69}$$

$$\gamma=\frac{1}{\left(i_{m+1}-i_0\right)\left(n+1\right)}\times$$

$$\times\sum_{i,j=i_0,0}^{i_{m+1}-1,n}\frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)}-x_{i,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j}^{(l)}-y_{i,j}^{(l)}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)}-x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}^{(l)}-y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)}-x_{i,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i,j+1}^{(l)}-y_{i,j}^{(l)}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)}-x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}^{(l)}-y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}}, \tag{2.70}$$

де $l=\overline{0,m},\ \ x_{i,j}^{(l)}=x(h_i,\psi_j),\ \ y_{i,j}^{(l)}=y(h_i,\psi_j),\ \ \left(h_i,\psi_j\right)\in G_\omega^{(l)}$.

Загальний розв'язок скінчено-різницевих рівнянь (2.66), згідно з формулами сумарних зображень Положого [132, 165], має вигляд

$$\begin{cases} x_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k + \nu_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x_{t,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(l)} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k + \nu_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y_{t,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(l)} \right) \right), \end{cases} \tag{2.71}$$

$$l = \overline{0,m}, \qquad i = \overline{i_l, i_{l+1}}, \qquad j = \overline{1,n},$$

де

$$p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \; \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1},$$
$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \; \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі γ, A_k, B_k, C_k, D_k, $x_{i,0}^{(l)}$, $y_{i,0}^{(l)}$, $x_{i,n+1}^{(l)}$, $y_{i,n+1}^{(l)}$ $\left(l = \overline{0,m}\right)$ визначаються з розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_1 \left(\sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_0} A_k + \nu_k^{i_0} B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_0+1}^{i_1-1} \frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x_{t,0}^{(0)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(0)} \right) \right), \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_0} C_k + \nu_k^{i_0} D_k + \gamma^2 \sum_{t=i_0+1}^{i_1-1} \frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y_{t,0}^{(0)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(0)} \right) \right) \right) = 0;$$

$$f_2 \left(x_{i,n+1}^{(l)}, y_{i,n+1}^{(l)} \right) = 0; \quad f_4 \left(x_{i,0}^{(l)}, y_{i,0}^{(l)} \right) = 0;$$

$$f_3 \left(\sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_{m+1}} A_k + \nu_k^{i_{m+1}} B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_m+1}^{i_{m+1}-1} \frac{\nu_k^{i_{m+1}-t}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x_{t,0}^{(m)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(m)} \right) \right), \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_{m+1}} C_k + \nu_k^{i_{m+1}} D_k + \gamma^2 \sum_{t=i_m+1}^{i_{m+1}-1} \frac{\nu_k^{i_{m+1}-t}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y_{t,0}^{(m)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(m)} \right) \right) \right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_0} \left(\mu_k - 1 \right) A_k + \nu_k^{i_0} \left(\nu_k - 1 \right) B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_0+1}^{i_1-1} \frac{\nu_k^{t-i_0} \left(\mu_k - 1 \right)}{\mu_k - \nu_k} \times \right.$$

$$\times\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(0)}\right)\Bigg)=\gamma\chi_0\sum_{k=1}^{n}\left(p_{j+1,k}-p_{j,k}\right)\times$$

$$\times\left(\mu_k^{i_0}C_k+\nu_k^{i_0}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(0)}\right)\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\Bigg(\mu_k^{i_0}\left(1-\mu_k\right)C_k+\nu_k^{i_0}\left(1-\nu_k\right)D_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}\left(1-\mu_k\right)}{\mu_k-\nu_k}\times$$

$$\times\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(0)}\right)\Bigg)=\gamma\chi_0\sum_{k=1}^{n}\left(p_{j+1,k}-p_{j,k}\right)\times$$

$$\times\left(\mu_k^{i_0}A_k+\nu_k^{i_0}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(0)}\right)\right);$$

$$x_{i+1,0}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}=\gamma\chi_l\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}p_{1,k}\left(\mu_k^{i}C_k+\nu_k^{i}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)\right)-y_{i,0}^{(l)}\right);$$

$$y_{i,0}^{(l)}-y_{i+1,0}^{(l)}=\gamma\chi_l\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}p_{1,k}\left(\mu_k^{i}A_k+\nu_k^{i}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)\right)-x_{i,0}^{(l)}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{j,k}}{\mu_k-\nu_k}\Bigg(\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\nu_k^{t-i_l}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)-$$

$$-\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\nu_k^{i_l-t}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\Bigg)=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{j,k}}{\mu_k-\nu_k}\Bigg(\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\nu_k^{t-i_l}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)-$$

$$-\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\nu_k^{i_l-t}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\Bigg)=0;$$

$$\chi_l \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_l} (1-\nu_k) A_k + \nu_k^{i_l} (1-\mu_k) B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1} \frac{\nu_k^{i_l-t}(1-\mu_k)}{\mu_k-\nu_k} \times \right.$$

$$\left. \times \left(p_{1,k} x_{t,0}^{(l-1)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(l-1)} \right) \right) = \chi_{l-1} \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_l} (\mu_k - 1) A_k + \right.$$

$$\left. + \nu_k^{i_l} (\nu_k - 1) B_k + \gamma^2 \sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1} \frac{\nu_k^{t-i_l}(\mu_k-1)}{\mu_k-\nu_k} \left(p_{1,k} x_{t,0}^{(l)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(l)} \right) \right);$$

$$\chi_l \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_l} (1-\nu_k) C_k + \nu_k^{i_l} (1-\mu_k) D_k + \gamma^2 \sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1} \frac{\nu_k^{i_l-t}(1-\mu_k)}{\mu_k-\nu_k} \times \right.$$

$$\left. \times \left(p_{1,k} y_{t,0}^{(l-1)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(l-1)} \right) \right) = \chi_{l-1} \sum_{k=1}^{n} p_{j,k} \left(\mu_k^{i_l} (\mu_k - 1) C_k + \right.$$

$$\left. + \nu_k^{i_l} (\nu_k - 1) D_k + \gamma^2 \sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1} \frac{\nu_k^{t-i_l}(\mu_k-1)}{\mu_k-\nu_k} \left(p_{1,k} y_{t,0}^{(l)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(l)} \right) \right);$$

$$l=\overline{0,m}, \qquad i=\overline{i_l+1, i_{l+1}-1}, \quad j=\overline{1,n},$$

де невідома функція γ визначається за формулою (2.70).

Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб число $\alpha = \Delta_h \cdot \frac{n+1}{\gamma}$ не перевищувало шуканої витрати Q). Розв'язуємо дану систему при заданому значенні γ, наприклад, за методом Ньютона [111, 138] та перевіряємо виконання умови (2.70). Залежно від одержаної нев'язки вибираємо наступне наближення невідомої величини γ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність $\left| \gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)} \right| < \varepsilon$.

2.6. Дослідження нелінійних процесів з післядією типу "фільтрація–суфозія" у двозв'язних деформівних середовищах, обмежених еквіпотенціальними поверхнями

Узагальнення підходів до моделювання і дослідження нелінійних осесиметричних процесів типу "фільтрація–суфозія" приводить до необхідності розв'язку відповідних задач для многозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями.

Використання методології спеціальних апроксимацій вихідних нелінійних рівнянь навколо умовного розрізу вздовж деякої (вибраної) лінії течії, інших підходів дозволяють створювати ефективні чисельні алгоритми розв'язків такого роду задач.

Розглянемо спочатку модельну нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (квазіпотенціалу) в деякій двозв'язній криволінійній області (пористому пласті, що піддається деформації) G_z ($z = x + iy$), обмеженій двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z:\ f_*(x, y) = 0\}$ (або $L_* = \{x + iy:\ \ x = x_*(t),\ \ y = y_*(t),\ \ 0 \le t < 2\pi\}$) – внутрішній, $L^* = \{z:\ \ f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy:\ x = x^*(t),\ \ y = y^*(t),$ $0 \le t < 2\pi\}$) – зовнішній (рис. 2.30):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(\varphi_x, \varphi_y)\varphi_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa(\varphi_x, \varphi_y)\varphi_y\right) = 0,$$

$$\varphi\big|_{L_*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*, \tag{2.72}$$

де $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $\kappa = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$ – обмежена неперервно диференційована функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації.

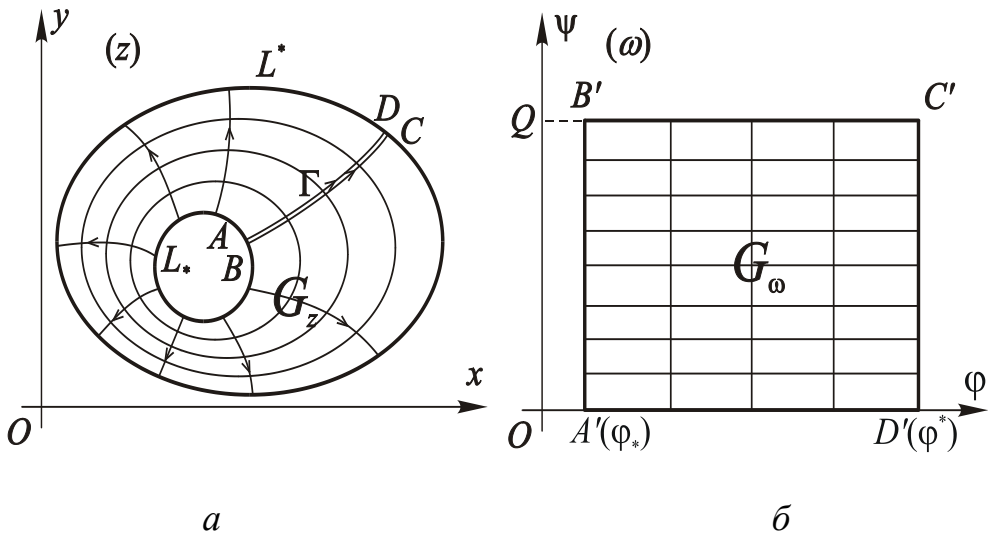


Рис. 2.30. Фізична область(*а*) та відповідна їй область квазікомплексного потенціалу (*б*)

Ввівши квазікомплексно спряжену з $\varphi = \varphi(x, y)$ функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa^{-1}(\varphi_x,\varphi_y)\cdot\psi_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa^{-1}(\varphi_x,\varphi_y)\cdot\psi_y\right)=0, \qquad (2.73)$$

зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії (через AD та BC на рис. 2.30 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega=\omega(z)$ [21] утвореної при цьому однозв'язної області $G_Z^0=G_Z/\Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega=\{\omega=\varphi+i\psi:\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q\}$ з невідомим параметром Q (повною витратою):

$$\begin{cases} \kappa(\varphi_x,\varphi_y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \kappa(\varphi_x,\varphi_y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*, \quad \varphi\big|_{CD}=\varphi^*, \quad \psi\big|_{AD}=0, \\ \psi\big|_{BC}=Q=\int\limits_{L_*}\kappa(\varphi_x,\varphi_y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy-\kappa(\varphi_x,\varphi_y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx. \end{cases} \qquad (2.74)$$

Відповідна до неї обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_Z^0, аналогічно до попереднього, запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \kappa\left(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\psi}=-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, \\ \kappa\left(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right)\dfrac{\partial y}{\partial\psi}=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}, \end{cases} \qquad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \qquad (2.75)$$

$$\begin{cases} f_*\,(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi))=0, \quad f^*(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi))=0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ x(\varphi,0)=x(\varphi,Q), \quad y(\varphi,0)=y(\varphi,Q), \quad \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \end{cases} \qquad (2.76)$$

де $J=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\psi}-\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}$. При цьому, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x=x(\varphi,\psi)$ та $y=y(\varphi,\psi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi})\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi})\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\kappa^{-1}(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi})\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa(\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi},-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi})\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\right)=0, \end{cases} \tag{2.77}$$

як і (2.72) та (2.73), через залежність $\kappa=\kappa(\varphi_x,\varphi_y)$ є взаємозв'язаними.

Різницеві аналоги рівнянь (2.77) та крайових умов (2.76) у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma=\Big\{(\varphi_i\,,\psi_j):\ \varphi_i\ =\varphi_*+i\cdot\Delta\varphi,\ i=\overline{0,n};\ \psi_j=j\cdot\Delta\psi,\ j=\overline{0,m};$$
$$\Delta\varphi=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{n},\ \Delta\psi=\frac{Q}{m},\ \gamma=\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\Big\}$$

запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \gamma^2(\kappa_{i+1/2,j}^{-1}(x_{i+1,j}-x_{i,j})-\kappa_{i-1/2,j}^{-1}(x_{i,j}-x_{i-1,j}))+\kappa_{i,j+1/2}(x_{i,j+1}- \\ -x_{i,j})-\kappa_{i,j-1/2}(x_{i,j}-x_{i,j-1})=0,\quad \gamma^2(\kappa_{i+1/2,j}^{-1}(y_{i+1,j}-y_{i,j})- \\ -\kappa_{i-1/2,j}^{-1}(y_{i,j}-y_{i-1,j}))+\kappa_{i,j+1/2}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\kappa_{i,j-1/2}(y_{i,j}-y_{i,j-1})=0, \end{cases} \tag{2.78}$$

де позначено

$$\kappa_{i+1/2,j}=\kappa\left(\frac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}},\ \frac{x_{i+1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}}\right),$$

$$\kappa_{i-1/2,j}=\kappa\left(\frac{y_{i-1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i-1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}},\ \frac{x_{i-1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i-1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}}\right),$$

$$\kappa_{i,j+1/2}=\kappa\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}},\frac{x_{i,j}-x_{i,j+1}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}}\right),$$

$$\kappa_{i,j-1/2} = \kappa\left(\frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}}\right),$$

$$J_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) -$$
$$-(y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1})),$$

$$J_{i-1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} -$$
$$-y_{i,j-1}) - (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1})),$$

$$J_{i,j+1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) -$$
$$-(x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1})),$$

$$J_{i,j-1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j}) -$$
$$-(x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1})),$$

та відповідно

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0,m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0,n}. \end{cases} \tag{2.79}$$

Додаткові умови для межових та примежових вузлів (умови ортогональності) у сітковій області G_ω^γ записуються у вигляді [21, 70]:

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{1,m-1}; \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - \\ -4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0,m}. \end{cases} \tag{2.80}$$

Величину γ знаходимо за формулою

$$\gamma = \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{\kappa^*_{i,j}}{nm} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}}, \quad (2.81)$$

де

$$\kappa^*_{i,j} = \kappa\left(\frac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j}}{2\Delta\psi\cdot J^*_{i,j}}, \frac{x_{i+1,j}+x_{i,j}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot J^*_{i,j}}\right),$$

$$J^*_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i+1,j}+x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j}) -$$
$$-(x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i,j+1}-y_{i,j})).$$

Числовий розв’язок різницевої задачі (2.75)–(2.76) шукаємо так: задаємо кількість вузлів розбиття області G_ω n та m, параметри ε_1, ε_2, ε_3, що характеризують точність роботи алгоритму, початкові наближення координат межових вузлів $x^{(0)}_{0,j}$, $y^{(0)}_{0,j}$, $x^{(0)}_{n,j}$, $y^{(0)}_{n,j}$ (такі, щоб виконувались умови (2.79)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x^{(0)}_{i,j}, y^{(0)}_{i,j})$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x^{(0)}_{0,j}, y^{(0)}_{0,j})$, $(x^{(0)}_{n,j}, y^{(0)}_{n,j})$), знаходимо за формулою (2.81) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x^{(0)}_{i,j}, y^{(0)}_{i,j})$ величини γ. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x^{(k)}_{i,j}, y^{(k)}_{i,j})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв’язку (2.78) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні значення градієнта напору та коефіцієнта провідності у вузлах сітки G^γ_ω обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації.

Після цього уточнюємо межові вузли, розв’язуючи наближено систему рівнянь (2.80). Якщо величина зміщення вузлів на межі за проведену k-ту загальну ітерацію $S = \max\limits_{i,j}\sqrt{\left(x^{(k)}_{i,j}-x^{(k-1)}_{i,j}\right)^2+\left(y^{(k)}_{i,j}-y^{(k-1)}_{i,j}\right)^2}$ ((i,j) – індекси координат межових вузлів) більша за ε_2, то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. У протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (2.81) та умовою зв’язку між ними:

$Q = m\Delta\varphi \cdot \gamma$. Якщо зміна невідомої витрати $\left|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}\right|$ більша за ε_3, то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку "квазіконформності" отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.75):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left|\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})\right|, \\ \delta_2 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left|\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \kappa_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})\right|, \end{cases}$$

де

$$\kappa_{i,j} = \kappa\left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}\right),$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - \\ -y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Підвищення ступеня точності наближеного розв'язку (зменшення нев'язки δ), досягається збільшенням n і m (оптимальне ж співвідношення між ними визначається аналогічно до [70, 79] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

На рис. 2.31 зображена динамічна сітка, отримана в результаті розв'язку відповідної задачі, що описує процес фільтрації із свердловини (L_*: $x_*(t) = 4 + \cos t$, $y_*(t) = 2 + \sin t$) в еліптичний пласт (L^*: $x^*(t) = 15\cos t$, $y^*(t) = 10\sin t$) при $\kappa = \kappa_* + \mu\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ ($\kappa_* = 1$, $\mu = 0{,}01$), $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, n=40, m=120, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4}$. При цьому за $k = 4589$ ітерацій (див. рядок №1 табл. 2.4) знайдена повна витрата Q=2,7053 при максимальній нев'язці δ=0,5674, що спостерігається в деякому околі точки (–15,0), де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від квадратів. Дана нев'язка, як це і очікувалось, зменшується при збільшенні параметрів розбиття n та m області G_ω при умові збереження певного співвідношення між ними (див. рядки №1–4 табл. 2.4). Зауважимо при цьому, що, навіть, і при порівняно малих значеннях n, m побудований програмний комплекс дозволяє виділити ділянки припустимих нев'язок (на рис. 2.31 схематично штриховою лінією поділені ділянки великих та малих нев'язок відносно деякого значення $\delta = \delta_*$).

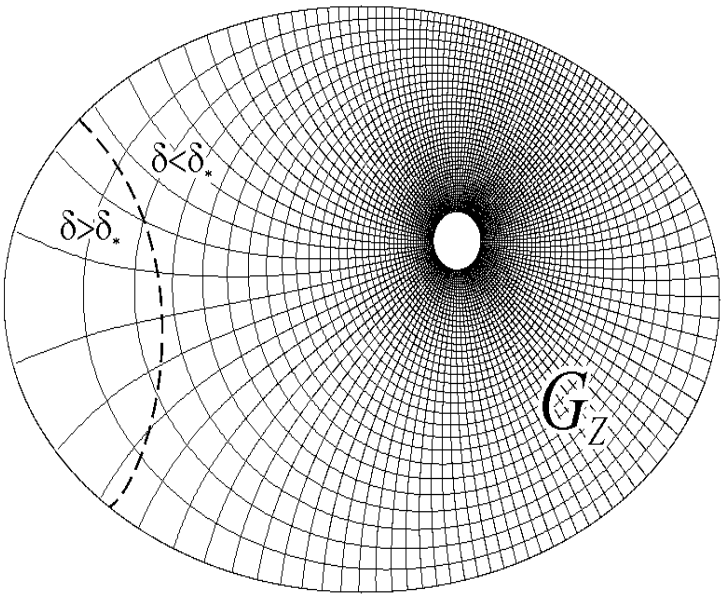


Рис. 2.31. Динамічна сітка для свердловини в еліптичному пласті

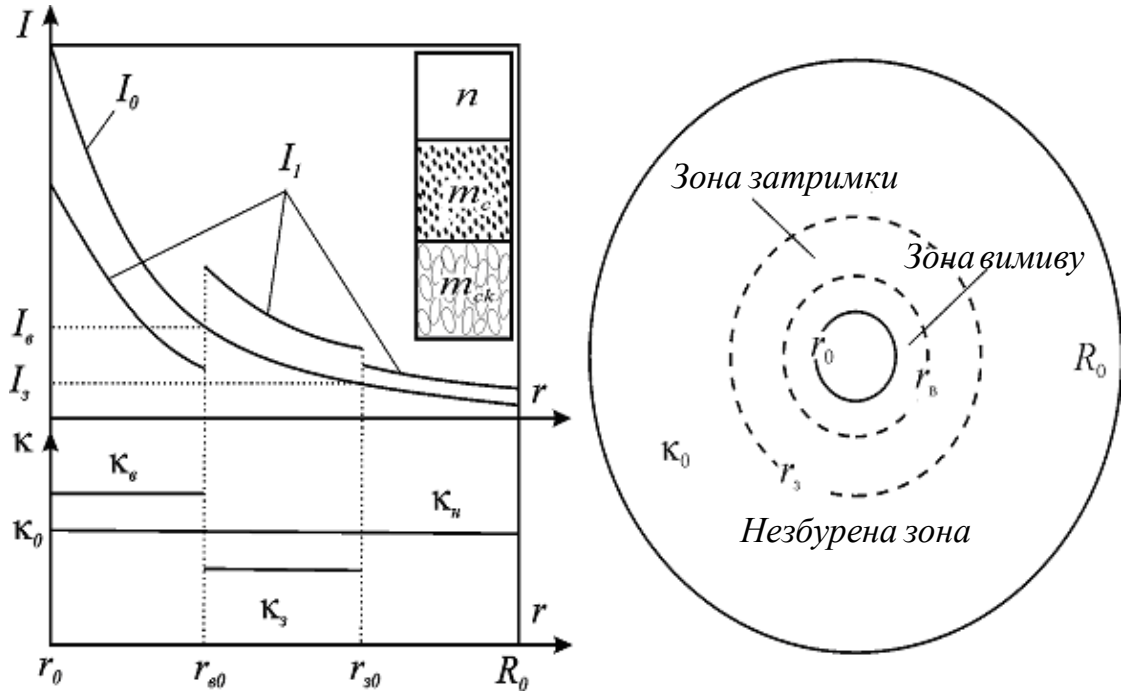
Таблиця 2.4. Результати розрахунків в еліптичному пласті

№ п/п	μ	N	m	K	Q	δ
1	0,01	40	120	4589	2,7053	0,56744
2	0,01	60	180	5510	2,6935	0,17044
3	0,01	80	240	6392	2,6980	0,07598
4	0,01	120	360	4524	2,7212	0,03054
5	0,00	120	360	75	2,7165	0,03045
6	0,01	120	360	75	2,7212	0,03054
7	0,03	120	360	88	2,7300	0,03026
8	0,07	120	360	123	2,7477	0,03017
9	0,10	120	360	150	2,7608	0,03012
10	0,20	120	360	211	2,8037	0,03057
11	0,30	120	360	241	2,8459	0,03160
12	0,50	120	360	277	2,9285	0,03428
13	0,70	120	360	306	3,0093	0,03717
14	1,00	120	360	357	3,1274	0,04133

Збіжність та точність алгоритму перевірялися за допомогою тестових прикладів.

У другій частині табл. 2.4 (рядки №5–14) відображена залежність повної витрати Q від параметра деформівності μ даного пласта. Зазначимо, що різке зменшення кількості ітерацій k порівняно з №1–4 забезпечується тим, за початкове наближення шуканого квазіконформного відображення $G_\omega \to G_Z$ взято наближений розв'язок відповідної задачі на конформне відображення.

Вище наведено один з варіантів моделювання взаємовпливу коефіцієнта фільтрації κ та градієнта $I = \partial h / \partial r$ напору $h = h(r)$ $(r_0 < r < R_0)$ при осесиметричній фільтрації від свердловини радіуса r_0 в круговому пласті радіуса R_0, який зображено на рис. 2.32, де $[r_ç, R_0]$ – незбурена зона ($\kappa = \kappa_0$), $[r_0, r_{â}]$ – зона відриву частинок ($\kappa = \kappa_{â} > \kappa_0$), $[r_{â}, r_ç]$ – зона осідання частинок ($\kappa = \kappa_ç < \kappa_0$), $r_{â}$ і $r_ç$ є розв'язками рівнянь $I(r) = I_{â}$ та $I(r) = I_ç$ відповідно ($I_{â}, I_ç$ – критичні значення градієнта напору стосовно відриву та затримки частинок). Зазначимо, що значення $\kappa_{â}$ та $\kappa_ç$ визначаються за формулами: $\kappa_{â} = a(1 - m_{ck})$, $\kappa_ç = a(1 - m_{ck} - m_c(r_ç^2 - r_0^2)(r_ç^2 - r_{â}^2)^{-1})$.



а *б*

Рис 2.32. Взаємовплив градієнта напору та коефіцієнта осесиметричної фільтрації (*а*) при наявності двох зон збурення (*б*)

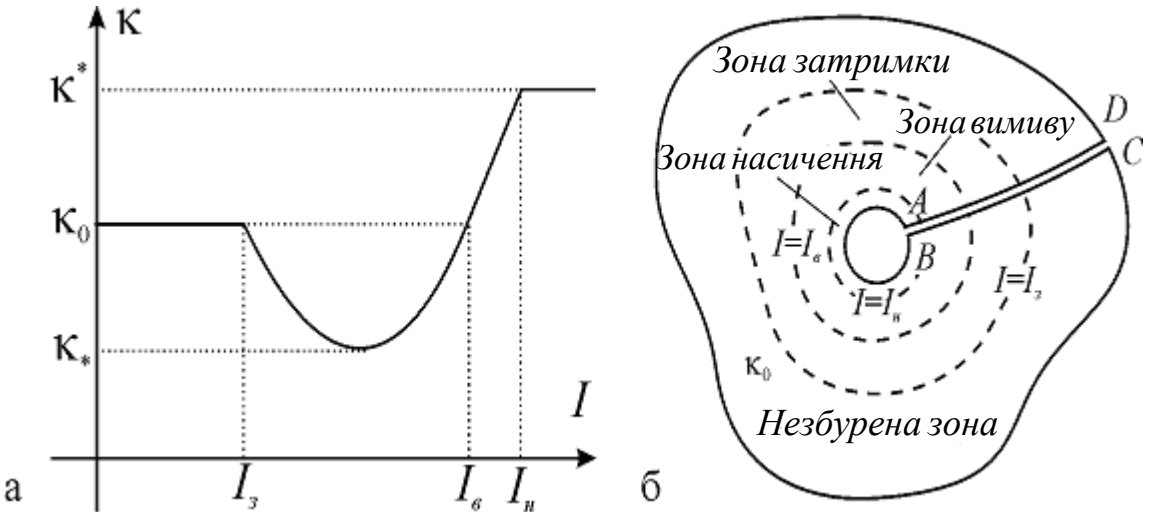


Рис 2.33. Взаємовплив градієнта напору та коефіцієнта фільтрації (*а*) при наявності трьох зон збурення (*б*)

Моделювання в умовах неповних даних зон відриву та затримки частинок, а також ділянки насичення при збереженні неперервності коефіцієнта фільтрації κ та градієнта напору I проведемо наступним способом: $\kappa = \kappa^*$ при $I \geq I_{\acute{\imath}}$; $\kappa = \kappa_0 + \mu \sum_{i=1}^{M} a_i (I - I_{\varsigma})^i (I - I_{\hat{a}})^i$ при $I_{\varsigma} < I < I_{\acute{\imath}}$; $\kappa = \kappa_0$ при $I < I_{\varsigma}$ (див. рис. 2.33), де $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_M$ – малі (порівняно з одиницею) параметри, що підбираються виходячи з умов гладкості κ при $I = I_{\acute{\imath}}, I_{\varsigma}$ та з фізичного експерименту, коефіцієнт μ є розв'язком рівняння $\kappa(I_{\acute{\imath}}, \mu) = \kappa^*, I_{\acute{\imath}}$ – значення градієнта напору, при якому відбувається максимальний вимив суфозійних частинок з ґрунту, κ^* – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок. Очевидно, що даною формулою також визначається і мінімальне значення коефіцієнта фільтрації $\kappa = \kappa_*$ (в зоні затримки частинок), яке відповідає максимально можливому заповненню пор суфозійними частинками.

Алгоритм чисельного розв'язання такого роду задач для довільних двозв'язних областей будується аналогічно вище викладеному (див., також [23]), зокрема, у випадку, коли $\kappa = \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$, $\kappa = \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y, \varphi, \psi)$. При цьому особливістю розв'язання обернених задач

$$\begin{cases} \kappa(x,y,\dfrac{y_\psi}{J},-\dfrac{x_\psi}{J})y_\psi = x_\varphi, & (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ \kappa(x,y,\dfrac{y_\psi}{J},-\dfrac{x_\psi}{J})x_\psi = -y_\varphi, & J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{cases} \tag{2.82}$$

$$\begin{cases} f_*\,(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi))=0, \quad f^*(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi))=0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ x(\varphi,0)=x(\varphi,Q), \quad y(\varphi,0)=y(\varphi,Q), \quad \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \end{cases} \tag{2.83}$$

$$\begin{cases} \left(\kappa^{-1}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\cdot x_\varphi\right)_\varphi + \left(\kappa(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\cdot x_\psi\right)_\psi = 0, \\ \left(\kappa^{-1}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\cdot y_\varphi\right)_\varphi + \left(\kappa(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\cdot y_\psi\right)_\psi = 0 \end{cases} \tag{2.84}$$

є поява нової нелінійності у відповідних рівняннях, якої не було у прямій постановці задачі. На основі загальної методології побудови чисельних алгоритмів Д.О. Пригодницьким розроблений пакет програм для реалізації на ПК такого роду задач. Тестування проводилося на одному з частинних випадків ($M=1$) описаної вище моделі процесу фільтрації з врахуванням суфозійних явищ. Причому, з метою порівняння результатів числового розрахунку з результатами експериментальних досліджень, в якості області фільтрації була обрана область, близька до осесиметричної (див. рис. 2.34):

$$L_* = \left\{(x,y):\ x = a_*\cos t - x_*^0,\ y = b_*\sin t\right\},$$
$$L^* = \left\{(x,y):\ x = a^*\cos t,\ y = b^*\sin t\right\};$$

$$\kappa = \left[\begin{array}{c} \kappa_0, \quad I < I_ç, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_ç)(I - I_{\hat{a}}), \quad I_ç \le I \le I_{í}, \\ \kappa^*, \quad I > I_{í}; \end{array}\right.$$

$$x_*^0 = 2, \quad a_* = 1, \quad b_* = 1, \quad a^* = 8, \quad b^* = 8;$$
$$I_ç = 0{,}2,\ I_{\hat{a}} = 0{,}3,\ I_{í} = 0{,}3618,$$
$$\kappa_0 = 1,\ \kappa^* = 1{,}2,\ \mu = 20.$$

У випадку $\kappa = 1$ отримано повну витрату $Q_0 = 3.120$. Врахування ж явища типу суфозії за вище вказаним законом викликало збільшення шуканої витрати Q до 3.188.

На рис. 2.35 штриховими та суцільними лініями зображені залежності $I = I(x)$, $\kappa = \kappa(x)$ ($x \in \Gamma$) відповідно на початковій ($k = 0$) ітерації і на стадії стабілізації процесу (I_∞, κ_∞).

Зауважимо, що у граничному випадку при $x_*^0 \to 0$ одержані результати числового експерименту збіглися з відповідними аналітичними розв'язками.

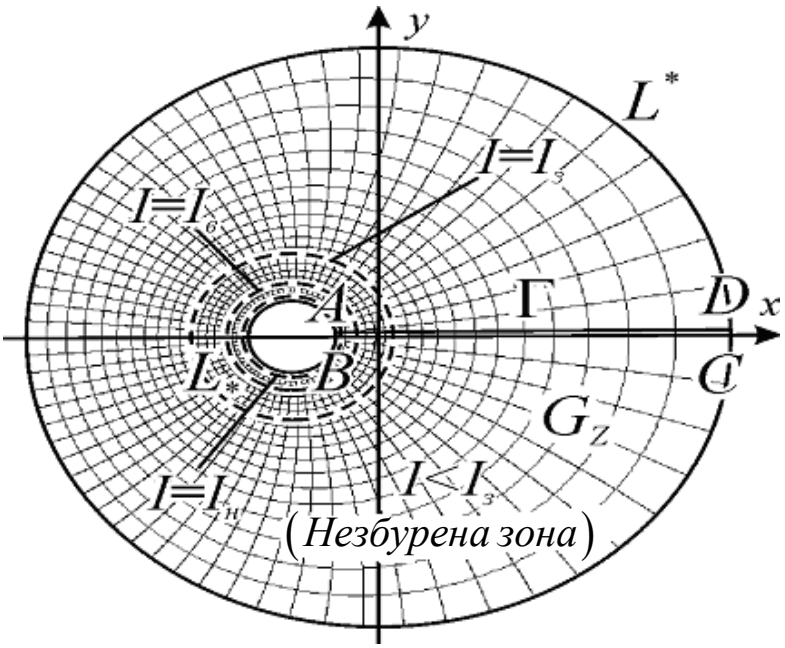


Рис 2.34. Свердловина в еліптичному деформівному пористому пласті

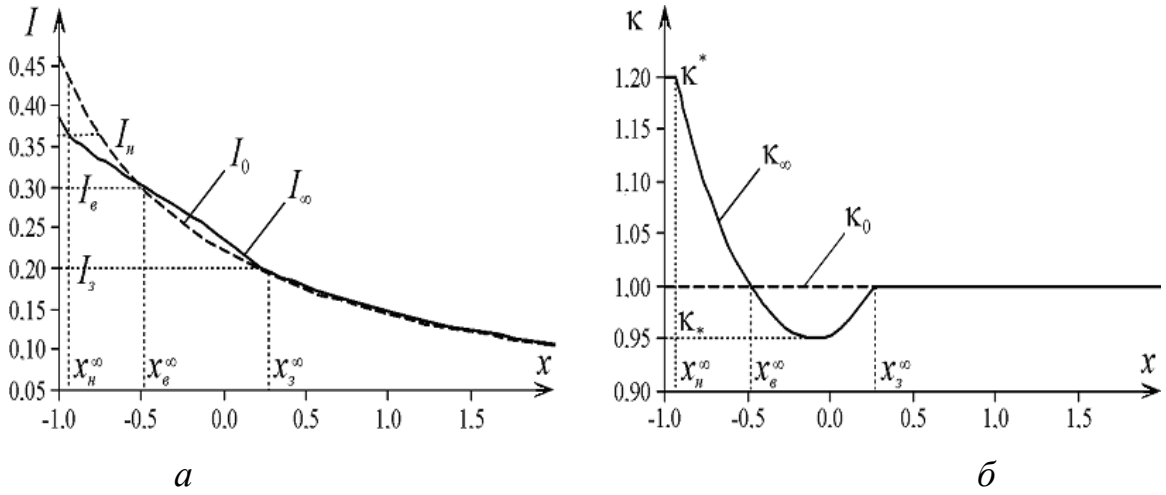


Рис. 2.35. Розподіл градієнта напору (*а*) та коефіцієнта фільтрації (*б*) вздовж розрізу Γ в еліптичному деформівному пласті

Якщо контури L_* та L^* не є еквіпотенціальними лініями (наприклад, коли $\varphi_*^* = \varphi_*^*(M)$, де M – біжуча точка відповідного контура, $\varphi_*^*(M)$ – мало змінна неперервно-диференційована та періодична функція), безпосередньо скористатись перевагами запропонованого вище підходу не можна. У цьому випадку можливим є комбінований підхід з використанням методу скінчених елементів [176, 180] та методу мажорантних областей Г.М. Положого [133].

2.7.Нелінійні крайові задачі на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища в двозв'язних деформівних анізотропних середовищах

Розглянемо модельну нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в двозв'язній криволінійній області G_z (рис. 2.30):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_{11}\varphi_x + \kappa_{12}\varphi_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa_{21}\varphi_x + \kappa_{22}\varphi_y\right) = 0,$$

$$\varphi\big|_{L_*} = \varphi_*, \ \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*, \tag{2.85}$$

де $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $(\kappa_{rs})_{2\times 2}$ – симетричний тензор другого рангу, $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)$ – обмежені неперервно диференційовані функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій. Аналогічно до п. 2.6, ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\kappa_{11}\psi_x + \kappa_{12}\psi_y}{\kappa}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\kappa_{21}\psi_x + \kappa_{22}\psi_y}{\kappa}\right) = 0, \tag{2.86}$$

де $\kappa = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}$, зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії, приходимо до задачі на квазіконформне (конформне у випадку $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$) відображення $\omega = \omega(z)$ утвореної при цьому однозв'язної області $G_Z^0 = G_Z / \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу G_ω:

$$\begin{cases} \kappa_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \kappa_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*, \quad \varphi\big|_{CD}=\varphi^*, \quad \psi\big|_{AD}=0, \quad \psi\big|_{BC}=Q. \end{cases} \tag{2.87}$$

Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z^0 запишеться у вигляді [21]:

$$\begin{cases} \kappa_{11}\dfrac{\partial y}{\partial\psi}-\kappa_{12}\dfrac{\partial x}{\partial\psi}=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}, \\ \kappa_{21}\dfrac{\partial y}{\partial\psi}-\kappa_{22}\dfrac{\partial x}{\partial\psi}=\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, \end{cases} \qquad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \tag{2.88}$$

$$\begin{cases} f_*\,(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi))=0, \quad f^*(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi))=0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ x(\varphi,0)=x(\varphi,Q), \quad y(\varphi,0)=y(\varphi,Q), \quad \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*. \end{cases} \tag{2.89}$$

При цьому, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x=x(\varphi,\psi)$ та $y=y(\varphi,\psi)$ (аналоги рівнянь Лапласа для випадку, коли $\kappa_{11}=\kappa_{22}=1,\ \kappa_{12}=\kappa_{21}=0$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\kappa_{11}^{-1}(x_\varphi+\kappa_{12}x_\psi)\Big)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\Big(\kappa_{11}^{-1}((\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})x_\psi-\kappa_{21}x_\varphi)\Big)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\kappa_{22}^{-1}(y_\varphi-\kappa_{21}y_\psi)\Big)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\Big(\kappa_{22}^{-1}((\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})y_\psi+\kappa_{12}y_\varphi)\Big)=0, \end{cases} \tag{2.90}$$

як і (2.85) та (2.86) в силу залежності $\kappa_{rs}=\kappa_{rs}(x,y,\varphi,\psi)$ є взаємозв'язаними. Різницеві аналоги рівнянь (2.90) та крайових умов (2.89) у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma=\Big\{(\varphi_i,\psi_j):\quad \varphi_i=\varphi_*+i\cdot\Delta\varphi,\quad i=\overline{0,n};$ $\psi_j=j\cdot\Delta\psi,\quad j=\overline{0,m};\ \Delta\varphi=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{n},\ \Delta\psi=\dfrac{Q}{m},\ \gamma=\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\Big\}$ в цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\gamma^2(x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j})+\kappa^{i,j}(x_{i,j+1}-2x_{i,j}+x_{i,j-1})+\frac{\gamma}{4}(\kappa_{12}^{i,j}-\kappa_{21}^{i,j})\times$$
$$\times(x_{i+1,j+1}+x_{i-1,j-1}-x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j+1})+\frac{\kappa_{11}^{i,j}}{4}\times$$

$$\times\left(\left(x_{i+1,j}-x_{i-1,j}\right)\left(\gamma^2\left(\frac{1}{\kappa_{11}^{i+1,j}}-\frac{1}{\kappa_{11}^{i-1,j}}\right)-\gamma\left(\frac{\kappa_{21}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}}-\frac{\kappa_{21}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}\right)\left(\left(\frac{\kappa^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}}-\frac{\kappa^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}}\right)+\gamma\left(\frac{\kappa_{12}^{i+1,j}}{\kappa_{11}^{i+1,j}}-\frac{\kappa_{12}^{i-1,j}}{\kappa_{11}^{i-1,j}}\right)\right)\right)=0,$$

$$\kappa_{rs}^{i,j}=\kappa_{rs}(x_{i,j},y_{i,j},\varphi_i,\psi_j),$$

$$\gamma^2(y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j})+\kappa^{i,j}(y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1})+\frac{\gamma}{4}(\kappa_{12}^{i,j}-\kappa_{21}^{i,j})\times$$

$$\times(y_{i+1,j+1}+y_{i-1,j-1}-y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j+1})+\frac{\kappa_{22}^{i,j}}{4}\times$$

$$\times\left(\left(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}\right)\left(\gamma^2\left(\frac{1}{\kappa_{22}^{i+1,j}}-\frac{1}{\kappa_{22}^{i-1,j}}\right)-\gamma\left(\frac{\kappa_{12}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}}-\frac{\kappa_{12}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j-1}\right)\left(\left(\frac{\kappa^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}}-\frac{\kappa^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}}\right)-\gamma\left(\frac{\kappa_{21}^{i+1,j}}{\kappa_{22}^{i+1,j}}-\frac{\kappa_{21}^{i-1,j}}{\kappa_{22}^{i-1,j}}\right)\right)\right)=0, \qquad (2.91)$$

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j},y_{0,j})=0, \quad f^*(x_{n,j},y_{n,j})=0, \quad j=\overline{0,m}, \\ x_{i,0}=x_{i,m}, \quad y_{i,0}=y_{i,m}, \quad i=\overline{0,n}. \end{cases} \qquad (2.92)$$

Додаткові умови для межових та примежових вузлів (аналоги умов ортогональності для випадку $\kappa_{11}=\kappa_{22}$, $\kappa_{12}=\kappa_{21}=0$) виводяться аналогічно до п. 1.4.2 і у сітковій області G_ω^γ записуються у вигляді

$$(4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(\kappa_{22}^{0,j}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})-\kappa_{21}^{0,j}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1}))+(4y_{1,j}-$$

$$-3y_{0,j}-y_{2,j})(\kappa_{11}^{0,j}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-\kappa_{12}^{0,j}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1}))=0, \quad j=\overline{1,m-1},$$

$$(3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(\kappa_{22}^{n,j}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})-\kappa_{21}^{n,j}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1}))+(3y_{n,j}+$$

$$+y_{n-2,j}-4y_{n-1,j})(\kappa_{11}^{n,j}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})-\kappa_{12}^{n,j}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1}))=0, \; j=\overline{0,m}. \qquad (2.93)$$

Величину γ у випадку анізотропного середовища знаходимо за формулою

$$\gamma = \frac{1}{nm} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j}}{\sqrt{\left(x_{i+1,j} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y_{i,j}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}\right)^2}},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{\left(\kappa_{11}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right) - \kappa_{12}\left(x_{i,j+1} - x_{i,j}\right)\right)^2 + \left(\kappa_{21}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right) - \kappa_{22}\left(x_{i,j+1} - x_{i,j}\right)\right)^2}. \quad (2.94)$$

Алгоритм числової реалізації розв'язку різницевої задачі (3.91)–(3.94) будуємо аналогічно до параграфа 2.6. При цьому уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) проводимо за допомогою ітераційної схеми:

$$\gamma^2 (x_{i+1,j}^{(k-1)} - 2x_{i,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k-1)}) + \kappa^{i,j} (x_{i,j+1}^{(k-1)} - 2x_{i,j}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k-1)}) + \frac{\gamma}{4} (\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j}) \times$$
$$\times (x_{i+1,j+1}^{(k-1)} + x_{i-1,j-1}^{(k-1)} - x_{i+1,j-1}^{(k-1)} - x_{i-1,j+1}^{(k-1)}) + \frac{\kappa_{11}^{i,j}}{4} \times$$
$$\times \left(\left(x_{i+1,j}^{(k-1)} - x_{i-1,j}^{(k-1)} \right) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{21}^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}} \right) \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x_{i,j+1}^{(k-1)} - x_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \left(\left(\frac{\kappa^{i,j+1}}{\kappa_{11}^{i,j+1}} - \frac{\kappa^{i,j-1}}{\kappa_{11}^{i,j-1}} \right) + \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i+1,j}}{\kappa_{11}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{12}^{i-1,j}}{\kappa_{11}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0,$$

$$\gamma^2 (y_{i+1,j}^{(k-1)} - 2y_{i,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k-1)}) + \kappa^{i,j} (y_{i,j+1}^{(k-1)} - 2y_{i,j}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k-1)}) + \frac{\gamma}{4} (\kappa_{12}^{i,j} - \kappa_{21}^{i,j}) \times$$
$$\times (y_{i+1,j+1}^{(k-1)} + y_{i-1,j-1}^{(k-1)} - y_{i+1,j-1}^{(k-1)} - y_{i-1,j+1}^{(k-1)}) + \frac{\kappa_{22}^{i,j}}{4} \times$$
$$\times \left(\left(y_{i+1,j}^{(k-1)} - y_{i-1,j}^{(k-1)} \right) \left(\gamma^2 \left(\frac{1}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{1}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{12}^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}} - \frac{\kappa_{12}^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}} \right) \right) + \right.$$
$$\left. + \left(y_{i,j+1}^{(k-1)} - y_{i,j-1}^{(k-1)} \right) \left(\left(\frac{\kappa^{i,j+1}}{\kappa_{22}^{i,j+1}} - \frac{\kappa^{i,j-1}}{\kappa_{22}^{i,j-1}} \right) - \gamma \left(\frac{\kappa_{21}^{i+1,j}}{\kappa_{22}^{i+1,j}} - \frac{\kappa_{21}^{i-1,j}}{\kappa_{22}^{i-1,j}} \right) \right) \right) = 0.$$

Для забезпечення точності розрахунку за параметрами ε_2, ε_3 використовується аналогічна до параграфа 2.6 процедура уточнення межових вузлів на основі системи (2.93) та знаходження нових наближень $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (2.94).

Нев'язку "квазіконформності" отриманої сітки знаходимо за формулою $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.88):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{11}^{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{12}^{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|, \\ \delta_2 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa_{21}^{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{22}^{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|. \end{cases}$$

Зауважимо, що на даний час є деякі інші варіанти чисельної реалізації ідеї конформного та квазіконформного обернення конкретних типів крайових задач (див., наприклад, [70, 71, 78–80]). Так, в працях [70, 71] у випадку $\kappa = 1$ кроки розбиття $\Delta\varphi$ та $\Delta\psi$ задавалися однаковими, а в процесі розв'язування задачі уточнювались параметри n та m. Збіжність та точність описаного вище алгоритму перевірялись за допомогою тестових прикладів з наперед відомими розв'язками. Так, в табл. 2.5 наведені результати розв'язку задачі на конформне відображення ($\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$) кільця $1 \le |z| \le 2$ з розрізом вздовж осі Ox на відповідну йому область комплексного потенціалу $G_\omega = \{(\varphi, \psi):\ 0 = \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* = \ln 2,\ 0 \le \psi \le Q = 2\pi\}$ (тут і надалі в таблицях: N_{iter} – кількість проведених ітерацій, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ – параметри точності, eQ – абсолютна похибка величини Q, eX – максимальне відхилення вузлів знайденої динамічної сітки від своїх точних положень за евклідовою нормою).

Результати розв'язку поставленої задачі для фізичної області складнішої геометрії ($\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $x_*(t) = 5\cos(t) - 2$, $y_*(t) = \sin(t) + 1$, $x^*(t) = 10\cos(t)$, $y^*(t) = 20\sin(t)$) подані на рис. 2.36 та у таблиці 2.6. Коефіцієнт фільтрації при цьому брався таким: $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$.

На рис. 2.37 та у відповідній таблиці відображені результати розв'язку задачі фільтрації в анізотропному середовищі:

$$\begin{cases} \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = \ln 2, \\ x_*(t) = \cos(t), \quad y_*(t) = \sin(t), \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \\ x^*(t) = 2\cos(t), \quad y^*(t) = 2\sin(t), \end{cases}$$

Таблиця 2.5. Результати розв’язання задачі для однорідного кільця

n	m	ε	N_{iter}	Q	eQ	eX	δ
5	45	10^{-5}	236	6,28813	0,004949	0,0099	0,00483
7	63	10^{-5}	236	6,28571	0,002527	0,00505	0,00184
10	91	10^{-5}	183	6,28445	0,001267	0,00253	0,00066
15	134	10^{-5}	187	6,28373	0,000542	0,00108	0,00023
20	181	10^{-5}	182	6,2835	0,000313	0,00095	0,00013
30	272	10^{-5}	173	6,28333	0,00014	0,00129	0,0000959

Таблиця 2.6. Результати розв’язання задачі в асиметричній області

n	M	ε	N_{iter}	Q	δ
5	25	0,00001	29188	4,932979	5,1603
7	35	0,00001	44045	4,933791	3,2081
10	49	0,00001	10741	4,932266	2,6237

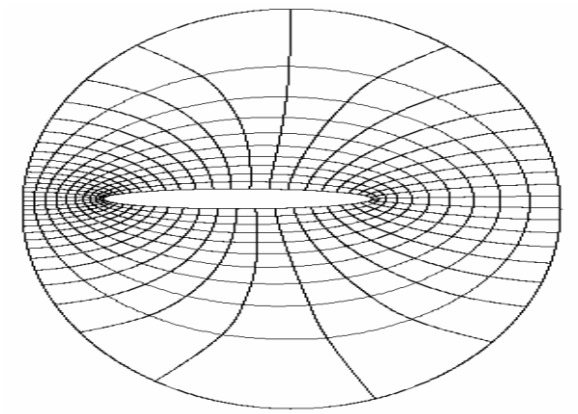


Рис. 2.36. Динамічна сітка, побудована в асиметричній області

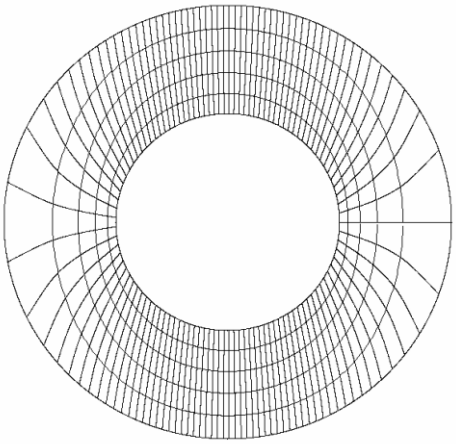


Рис. 2.37. Динамічна сітка для випадку анізотропного середовища

У табл. 2.8 та на рис. 2.38 наведені результати розв’язання суттєво нелінійної задачі у неоднорідному середовищі:

$$\begin{cases} \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \\ x_*(t) = 0,2\cos(t), \quad y_*(t) = 0,2\sin(t), \\ x^*(t) = \cos(t) + 0,1\cos(3t), \\ y^*(t) = \sin(t) - 0,1\sin(3t), \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa_{11} = \kappa_{22} = 1 + 8\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1,5\right)^2, \\ \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0. \end{cases}$$

Таблиця 2.7. Результати розв’язання задачі в анізотропному середовищі

n	m	ε	Q	δ
5	109	0,00001	15,12538762	0,150418206
7	152	0,00001	15,15567393	0,094118353
10	218	0,00001	15,18639923	0,052520183
12	261	0,00001	15,19937984	0,037183302
15	327	0,00001	15,21231227	0,023420691

Таблиця 2.8. Результати числових розрахунків для суто нелінійного випадку

n	m	ε	Q	δ
5	25	0,0001	10,77752169	0,320320703
7	35	0,0001	10,74609428	0,245874774
10	50	0,0001	10,72966959	0,133183247
15	75	0,0001	10,72090360	0,120490995

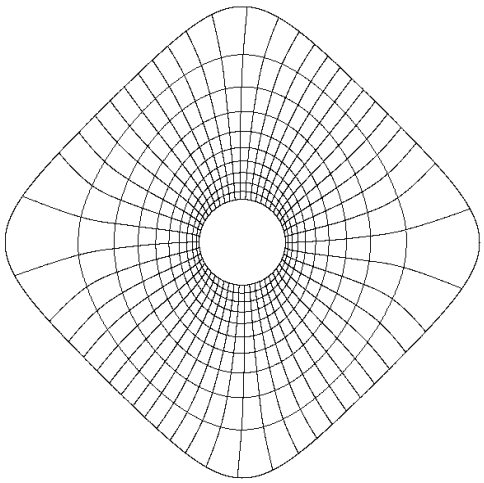


Рис. 2.38. Динамічна сітка для суто нелінійного випадку

Обґрунтування побудованого вище алгоритму “почергового замороження шуканих параметрів квазіконформності, внутрішніх та межових вузлів криволінійної області” базується на ідеї методу блочної ітерації (див., напр., [158]).

У випадку дослідження процесів типу “фільтрація–суфозія” в анізотропних середовищах (коли коефіцієнт провідності (фільтрації) залежить додатково від градієнта напору) алгоритм розв’язання відповідних задач будується аналогічно.

Вище розглянуто задачу на знаходження потенціалу у двозв’язній області, обмеженій двома еквіпотенціальними лініями. При цьому граничні потенціали вважалися відомими, а невідомою була повна витрата Q. Не менш важливими для практичного застосування є задачі на знаходження одного з граничних потенціалів при відомій витраті. До них зводяться, наприклад, задачі на розрахунки процесів фільтрації в пластах при відомих заборах із свердловини чи подачах рідини у пласт. Саме в таких задачах якнайяскравіше виявляються всі переваги переходу до обернених задач на конформні відображення. Звичайно, їх чисельний розв’язок може бути одержаний шляхом розв’язання низки задач на знаходження Q за заданими φ_* та φ^* описаним вище алгоритмом. Більш економним (з огляду на можливі витрати машинного часу), звичайно, є підхід із застосуванням спеціально адаптованого до розв’язку алгоритму.

Розглянемо в деякій двозв’язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій двома замкненими гладкими контурами (або $L_* = \{x + iy:$ $x = x_*(t)$, $y = y_*(t)$, $0 \le t < 2\pi\}$) – внутрішній, $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy:$ $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$, $0 \le t < 2\pi\}$) – зовнішній, процес руху частинок (зокрема, фільтрації в пористому пласті), який описується за допомогою рівняння руху $\vec{\upsilon} = \kappa \cdot \mathrm{grad}\,\varphi$ (закон Дарсі) та рівняння нерозривності

$$\mathrm{div}\,\vec{\upsilon} = 0,$$

де $\vec{\upsilon} = (\upsilon_x(x, y) + i \cdot \upsilon_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, $\kappa = \left(\kappa^{rs}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\right)_{2\times 2}$ – тензор провідності, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$) при відомій кількісній мірі речовини, що виходить із фізичної області за одиницю часу (повній витраті $Q = \int\limits_L -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy$).

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазікомплексно спряжену з $\varphi = \varphi(x, y)$), зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії, приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z / \Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi: \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$ з невідомим потенціалом φ^*:

$$\begin{cases} \kappa^{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_x + \kappa^{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_y = \psi_y, \quad \varphi\big|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi\big|_{CD} = \varphi^*, \\ \kappa^{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_x + \kappa^{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_y = -\psi_x, \quad \psi\big|_{AD} = 0, \quad \psi\big|_{BC} = Q. \end{cases} \tag{2.95}$$

Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \kappa^{11}(x, y, \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \psi})\frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa^{12}(x, y, \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \psi})\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa^{21}(x, y, \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \psi})\frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa^{22}(x, y, \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \psi})\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad \begin{matrix} (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{matrix} \tag{2.96}$$

$$\begin{cases} f_*\,(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \le \psi \le Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \end{cases} \tag{2.97}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\kappa^{11}}(x_\varphi + \kappa^{12}x_\psi)\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\kappa^{11}}(\kappa \cdot x_\psi - \kappa^{21}x_\varphi)\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\kappa^{22}}(y_\varphi - \kappa^{21}y_\psi)\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\kappa^{22}}(\kappa \cdot_\psi + \kappa^{12}y_\varphi)\right) = 0. \end{cases} \tag{2.98}$$

Методика чисельного розв'язання поставленої задачі може бути сформульована наступним чином. Різницеві аналоги рівнянь (2.98) та крайових умов (2.97) у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \Big\{(\varphi_i, \psi_j): \ \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \ i = \overline{0, n}; \ \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \ j = \overline{0, m}; \ \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, \ \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \ \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\Big\}$ записуються у вигляді

$$\gamma^2\left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{\kappa^{11}_{i+1/2,j}}-\frac{x_{i,j}-x_{i-1,j}}{\kappa^{11}_{i-1/2,j}}\right)+\frac{\gamma}{4}\left(\frac{\kappa^{12}_{i+1/2,j}}{\kappa^{11}_{i+1/2,j}}(x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}-x_{i,j-1}-x_{i+1,j-1})-\right.$$

$$-\frac{\kappa^{12}_{i-1/2,j}}{\kappa^{11}_{i-1/2,j}}(x_{i,j+1}+x_{i-1,j+1}-x_{i,j-1}-x_{i-1,j-1})+\frac{\kappa^{21}_{i,j-1/2}}{\kappa^{11}_{i,j-1/2}}(x_{i+1,j}+x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j}-$$

$$\left.-x_{i-1,j-1})-\frac{\kappa^{21}_{i,j+1/2}}{\kappa^{11}_{i,j+1/2}}(x_{i+1,j}+x_{i+1,j+1}-x_{i-1,j}-x_{i-1,j+1})\right)+\frac{\kappa_{i,j+1/2}}{\kappa^{11}_{i,j+1/2}}(x_{i,j+1}-x_{i,j})-$$

$$-\frac{\kappa_{i,j-1/2}}{\kappa^{11}_{i,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})=0,\ \ \gamma^2\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{\kappa^{22}_{i+1/2,j}}-\frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{\kappa^{22}_{i-1/2,j}}\right)+\frac{\gamma}{4}\left(\frac{\kappa^{21}_{i-1/2,j}}{\kappa^{22}_{i-1/2,j}}\times\right.$$

$$\times(y_{i,j+1}+y_{i-1,j+1}-y_{i,j-1}-y_{i-1,j-1})-\frac{\kappa^{21}_{i+1/2,j}}{\kappa^{22}_{i+1/2,j}}(y_{i,j+1}+y_{i+1,j+1}-y_{i,j-1}-$$

$$-y_{i+1,j-1})+\frac{\kappa^{12}_{i,j+1/2}}{\kappa^{22}_{i,j+1/2}}(y_{i+1,j}+y_{i+1,j+1}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1})-\frac{\kappa^{12}_{i,j-1/2}}{\kappa^{22}_{i,j-1/2}}(y_{i+1,j}+$$

$$\left.+y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j-1})\right)+\frac{\kappa_{i,j+1/2}}{\kappa^{22}_{i,j+1/2}}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\frac{\kappa_{i,j-1/2}}{\kappa^{22}_{i,j-1/2}}(y_{i,j}-y_{i,j-1})=0,\quad (2.99)$$

де позначено

$$\kappa^{rs}_{i+1/2,j}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i+1,j}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i+1,j}+y_{i,j}}{2},\frac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}},\right.$$

$$\left.\frac{x_{i+1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}}\right),$$

$$\kappa^{rs}_{i-1/2,j}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i-1,j}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i-1,j}+y_{i,j}}{2},\right.$$

$$\left.\frac{y_{i-1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i-1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}},\frac{x_{i-1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i-1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}}\right),$$

$$\kappa^{rs}_{i,j+1/2}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i,j+1}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j+1}+y_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}},\frac{x_{i,j}-x_{i,j+1}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}}\right),$$

$$\kappa_{i,j-1/2}^{rs} = \kappa^{rs}\left(\frac{x_{i,j-1}+x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j-1}+y_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j}-y_{i,j-1}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j-1/2}}, \frac{x_{i,j-1}-x_{i,j}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j-1/2}}\right),$$

$$J_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j-1}-y_{i,j-1})-(y_{i+1,j}-y_{i,j})\times$$
$$\times(x_{i+1,j+1}+x_{i,j+1}-x_{i+1,j-1}-x_{i,j-1})),$$

$$J_{i-1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i,j}-x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1}+$$
$$+y_{i,j+1}-y_{i-1,j-1}-y_{i,j-1})-(y_{i,j}-y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1}+x_{i,j+1}-x_{i-1,j-1}-x_{i,j-1})),$$

$$J_{i,j+1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((y_{i,j+1}-y_{i,j})(x_{i+1,j+1}+x_{i+1,j}-x_{i-1,j+1}-x_{i-1,j})-(x_{i,j+1}-$$
$$-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1}),$$

$$J_{i,j-1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((y_{i,j}-y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1}+$$
$$+x_{i+1,j}-x_{i-1,j-1}-x_{i-1,j})-(x_{i,j}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1}+y_{i+1,j}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1}))$$

та відповідно

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j},y_{0,j})=0, \quad f^*(x_{n,j},y_{n,j})=0, \quad j=\overline{0,m}, \\ x_{i,0}=x_{i,m}, \quad y_{i,0}=y_{i,m}, \quad i=\overline{0,n}. \end{cases} \tag{2.100}$$

Додаткові умови для межових та примежових вузлів (умови ортогональності у випадку конформного відображення) у сітковій області G_ω^γ записуються у вигляді:

$$(4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(\kappa_{0,j}^{22}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})-\kappa_{0,j}^{21}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1}))+(4y_{1,j}-3y_{0,j}-$$
$$-y_{2,j})(\kappa_{0,j}^{11}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-\kappa_{0,j}^{12}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1}))=0,\ j=\overline{1,m-1},$$

$$(3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{22}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})-\kappa_{n,j}^{21}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1}))+(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-$$
$$-4y_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{11}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})-\kappa_{n,j}^{12}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1}))=0, \quad j=\overline{0,m}, \tag{2.101}$$

де

$$\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa^{rs}\left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}}\right),$$

$$J_{0,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-$$
$$-(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})(4y_{1,j}-3y_{0,j}-y_{2,j})),$$

$$J_{n,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})-$$
$$-(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-4y_{n-1,j})).$$

Формула для знаходження величини γ отримується на підставі умови “квазіконформної подібності” елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma=\frac{1}{nm}\sum_{i,j=0}^{n-1,m-1}\frac{a_{i,j}+a_{i+1,j}}{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}},$$

$$a_{i,j}=$$
$$=\sqrt{\left(\overline{\kappa}_{i,j}^{11}\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)-\overline{\kappa}_{i,j}^{12}\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)\right)^2+\left(\overline{\kappa}_{i,j}^{21}\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)-\overline{\kappa}_{i,j}^{22}\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)\right)^2},\quad (2.102)$$

де

$$\overline{\kappa}_{i,j}^{rs}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i,j}+x_{i+1,j}+x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}}{4},\frac{y_{i,j}+y_{i+1,j}+y_{i,j+1}+y_{i+1,j+1}}{4},\right.$$
$$\left.\frac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j}}{2\Delta\psi\cdot\overline{J}_{i,j}},\frac{x_{i+1,j}+x_{i,j}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot\overline{J}_{i,j}}\right),$$

$$\overline{J}_{i,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i+1,j}+x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j})-$$
$$-(x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i,j+1}-y_{i,j})).$$

Відповідний алгоритм представимо так: задаємо кількість вузлів розбиття області G_ω n та m, параметри ε_1, ε_2, ε_3, що характеризують точність наближеного розв’язку відповідної (2.96), (2.97) різницевої задачі, початкові наближення координат межових вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{n,j}^{(0)}$, $y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (2.100)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)},y_{i,j}^{(0)})$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)},y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)},y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за

формулою (2.102) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ та $\varphi_*^{(0)} = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma^{(0)}$. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв’язання (2.99) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому, необхідні значення градієнта напору та функцій κ^{rs} у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації.

Після цього уточнюємо межові вузли, розв’язуючи наближено систему рівнянь (2.101). Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену k-ту загальну ітерацію $S = \max\limits_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)}\right)^2}$ ((i, j) – індекси координат межових вузлів) більша за ε_2, то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення $\varphi_*^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин φ_* і γ за формулою (2.102) та умовою зв’язку між ними: $\varphi_* = \varphi^* - n \cdot \Delta\psi / \gamma$. Якщо зміна невідомого потенціалу $\left|\varphi_*^{(L)} - \varphi_*^{(L-1)}\right|$ більша за ε_3, то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев’язку “квазіконформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.96):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left|\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{i,j}^{11} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{i,j}^{12} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})\right|, \\ \delta_2 = \max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left|\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \kappa_{i,j}^{21} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{i,j}^{22} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})\right|, \end{cases}$$

де

$$\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa^{rs}\left(x_{i,j}, y_{i,j}, \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}\right),$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi}((x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \times$$
$$\times (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку δ), збільшуємо n і m та розв’язуємо задачу повторно

(оптимальність співвідношення між n та m досягається аналогічно до [24] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Описаний вище алгоритм реалізований у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT. Перевірка його збіжності та точності проводилась за наступною схемою. Спочатку чисельно розв'язувалися задачі на знаходження повної витрати Q за потенціалами $\varphi_* = 0$ та $\varphi^* = 1$, заданими на внутрішньому та зовнішньому контурах даної області, при різних параметрах розбиття області n та m. Отримані наближені значення повної витрати Q разом із заданим значенням $\varphi^* = 1$ приймались як вхідні параметри при розв'язанні поставлених задач на знаходження φ_* за відомими φ^* та Q. На рис.2.39 та у таблиці 2.9 наведені результати чисельного розв'язання задачі фільтрації в ізотропному деформівному пласті ($\kappa^{12} = \kappa^{21} = 0$, $\kappa^{11} = \kappa^{22} = 1 + 0,5\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0,25 \cdot \cos 2t)$, $y^*(t) = 10(\sin t - -0,25 \sin 2t)$, $x_*(t) = \cos t$, $y_*(t) = \sin t$). Результати чисельного розв'язання задачі у випадку анізотропії деформівного середовища ($\kappa^{12} = \kappa^{21} = 0$, $\kappa^{rr} = 1 + 0,25r\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$, $r = \overline{1,2}$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0,2 \cdot \sin 5t)$, $y^*(t) = 10(\sin t + +0,1 \cdot \cos 2t)$, $x_*(t) = \cos t$, $y_*(t) = \sin t$) відображені на рис. 2.40 та у таблиці 2.10. Як видно з таблиць 2.9 та 2.10, зі збільшенням параметрів розбиття сітки n і m знайдені наближення потенціалу внутрішнього контура $\tilde{\varphi}_*$ наближаються до свого точного значення $\varphi_* = 0$, а нев'язка "квазіконформності" δ отриманої динамічної сітки зменшується, що підтверджує комп'ютерну збіжність побудованого алгоритму. Штриховими лініями на рис. 2.39 та рис. 2.40 відокремлені зони найбільших за абсолютною величиною нев'язок $\delta_{i,j}$ (так звані застійні зони).

Запропонований алгоритм із незначними змінами може бути застосований для розв'язку задач на знаходження невідомого потенціалу φ^* за відомою повною витратою Q та заданим на внутрішньому контурі потенціалом φ_* та ряду інших квазістаціонарних задач.

Таблиця 2.9. Результати розрахунків задачі про свердловину в ізотропному трикутному пласті

n	m	Q	$\tilde{\varphi}_*$	δ
30	87	3,2279	0,0041	3,161
40	116	3,2222	0,0030	2,716
60	174	3,2159	0,0011	2,067

80	232	3,2134	0,0004	1,611

Таблиця 2. 10. Результати розрахунків задачі про свердловину в криволінійному анізотропному деформівному пласті

n	m	Q	$\tilde{\varphi}_*$	δ
30	84	2,9904	0,0017	2,221
40	112	2,9857	0,0002	1,936
60	168	2,9848	0,0001	1,478
80	224	2,9853	0,0001	1,307

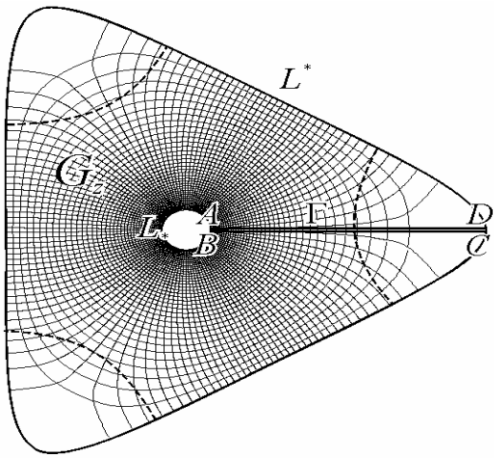


Рис. 2.39. Свердловина в ізотропному деформівному трикутному пласті із заокругленими кутами

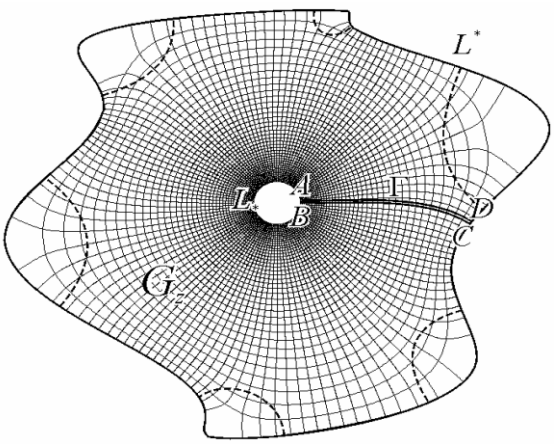


Рис. 2.40. Свердловина в криволінійному анізотропному деформівному пласті

2.8. Комп’ютерне моделювання фільтраційних процесів в ґрунтових масивах

У цьому підрозділі наведено результати виконаного разом з Пригорницьким Д.О. [23, 24] комп’ютерного моделювання фільтраційних процесів у ґрунтах без та з урахуванням суфозійних явищ, а також вказано особливості програмної реалізації розроблених у попередніх розділах числових алгоритмів.

2.8.1. Особливості програмної реалізації числових алгоритмів моделювання фільтраційних процесів у пористих середовищах для багатозв’язних областей. Задачі, що розглядалися вище, зводяться до розв’язування неоднорідних за структурою та великих за об’ємом систем нелінійних та квазілінійних рівнянь, обсяг яких вимагає якнайбільшої оптимізації алгоритмів та програм. З метою підвищення обчислювальної

ефективності запропонованих вище алгоритмів і процедур дослідження проводилося, зокрема, у таких напрямах: 1) вибір схем опису меж модельних областей (явної, неявної, параметричної тощо); 2) вибір методів розв'язування великих за обсягом систем алгебраїчних рівнянь – різницевих аналогів вихідних крайових задач на конформні (квазіконформні) відображення для систем еліптичних рівнянь; 3) вибір програмних засобів та спеціальних методик організації обчислень для досягнення максимально можливого використання потенціалу сучасних mainstream процесорів.

У результаті проведених досліджень виявлено, що використання параметричного задання межових ліній у вигляді $L=\{(x,y): x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[0,2\pi)\}$ замість їх неявного задання $L=\{(x,y): f(x,y)=0\}$ (зручнішого для опису теоретичних викладок) дозволяє зменшити кількість невідомих у системі: замість знаходження двох координат $(x_{i,j}, y_{i,j})$ кожної з межових точок необхідно знайти лише один параметр $t_{i,j}$. При цьому рівняння належності вузла межі області вигляду $L_k(x_{i_k^0,j}, y_{i_k^0,j})=0$, $R_k(x_{i_k^0+n_k,j}, y_{i_k^0+n_k,j})=0$, $j=\overline{j_k^0+1, j_k^0+m_k-1}$, виключаються зі складу системи, а рівняння ортогональності

$$\frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}, y_{i_k^0,j})}{\partial y}(4x_{i_k^0+1,j}-3x_{i_k^0,j}-x_{i_k^0+2,j})-\frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}, y_{i_k^0,j})}{\partial x}\times$$
$$\times(4y_{i_k^0+1,j}-3y_{i_k^0,j}-y_{i_k^0+2,j})=0,$$

$$\frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}, y_{i_k^0+n_k,j})}{\partial y}(3x_{i_k^0+n_k,j}+x_{i_k^0+n_k-2,j}-4x_{i_k^0+n_k-1,j})-$$
$$-\frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}, y_{i_k^0+n_k,j})}{\partial x}(3y_{i_k^0+n_k,j}+y_{i_k^0+n_k-2,j}-4y_{i_k^0+n_k-1,j})=0,$$
$$j=\overline{j_k^0+1, j_k^0+m_k-1}$$

замінюються на рівняння

$$\frac{\partial\tilde{x}(t_{i_k^0,j})}{\partial t}(x_{i_k^0+1,j}-\tilde{x}(t_{i_k^0,j}))+\frac{\partial\tilde{y}(t_{i_k^0,j})}{\partial t}(y_{i_k^0+1,j}-\tilde{y}(t_{i_k^0,j}))=0$$

(для вузлів, що знаходяться на лівих межових лініях області комплексного потенціалу) та

$$\frac{\partial \tilde{x}(t_{i_k^0+n_k,j})}{\partial t}(\tilde{x}(t_{i_k^0+n_k,j})-x_{i_k^0+n_k-1,j})+\frac{\partial \tilde{y}(t_{i_k^0+n_k,j})}{\partial t}(\tilde{y}(t_{i_k^0+n_k,j})-y_{i_k^0+n_k-1,j})=0$$

(для вузлів, що знаходяться на правих межових лініях області комплексного потенціалу), де $\tilde{x}(t)$ та $\tilde{y}(t)$ – функції, що визначають відповідну граничну лінію.

На етапі уточнення координат внутрішніх вузлів для розв'язання відповідних систем алгебраїчних рівнянь доцільніше використовувати багатосітковий ітераційний метод, запропонований у 1961 році Р.П. Федоренком (який і на сьогоднішній день залишається чи не найбільш "швидким" при розв'язанні великих розріджених систем алгебраїчних рівнянь, що виникають при дискретизації різноманітних задач математичної фізики). Зокрема, використання навіть звичайного V-багатосіткового кроку дає змогу значно підвищити швидкість збіжності порівняно з використанням звичайних ітераційних методів таких як, наприклад, метод Зейделя чи метод Якобі. Крім того, зменшити час роботи загального алгоритму вдається проведенням лише декількох ітерацій етапу уточнення внутрішніх вузлів.

Суттєво прискорюється виконання програм розрахунку фільтраційних полів за рахунок якнайповнішого використання обчислювального потенціалу сучасних mainstream процесорів на основі залучення технологій паралельних обчислень MMX, SSE, SSE-II та SSE-III. Використання сучасних векторизуючих компіляторів дозволяє підвищити продуктивність роботи процесорів без ускладнення програмної реалізації алгоритму різного роду вставками машинно-орієнтованого коду, які, як відомо, значно звужують можливості перенесення такого коду на інші обчислювальні платформи. Для 32х-бітної платформи PC більш пріоритетним, на наш погляд, є вибір в якості базового компілятора Intel ® C++ Compiler for 32-bit applications, v 8.1, який дозволяє вибирати тип процесора з-поміж усіх моделей однойменної компанії та використовувати алгоритм автоматичної векторизації вихідного коду програми. Відзначимо, що використання згаданого вище компілятора при комп'ютерному моделюванні дало можливість пришвидшити виконання алгоритму у 5–10 разів в порівняно з використанням традиційних компіляторів.

2.8.2. Результати розрахунків фільтраційних процесів у пористих середовищах без урахування деформаційних явищ та з їх урахуванням, їх аналіз та порівняльна характеристика. З метою перевірки адекватності запропонованих моделей, достовірності отриманих на їх основі результатів дослідження відповідних процесів здійснювалося порівняння результатів численних числових експериментів за розробленими алгоритмами з результатами відомих аналітичних та експериментальних досліджень, а також натурних спостережень для серій тестових прикладів.

Зокрема, розглядався випадок ідеального поля, породженого двома особливими точками – витоком ($z=-1$) та втоком ($z=1$) однакових інтенсивностей Q, комплексний потенціал якого має вигляд

$$\omega = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z+1) - \frac{Q}{2\pi}\ln(z-1) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z+1}{z-1},$$

де $\varphi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$ – потенціал швидкості, $\psi(x,y)$ – функція течії.

Легко бачити, що еквіпотенціальними лініями $\varphi(x,y) = \varphi_0$ є кола з центрами у точках $(x_0, 0)$ та радіусами $r_0 = \frac{2\sqrt{c_0}}{c_0 - 1} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{Q}\varphi_0}}{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0} - 1}$, де

$$x_0 = \frac{c_0+1}{c_0-1} = \frac{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0}+1}{e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0}-1},\ c_0 = e^{\frac{4\pi}{Q}\varphi_0}.$$

Результати розв'язку тестового прикладу при $Q = 100$; $x_*(t) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{(1+\sqrt{2})^2-1} + \cos(t)$, $y_*(t) = \sin(t)$, $t = [0, 2\pi)$ – внутрішній контур (свердловина); $y^*(t) = 10\sin(t)$, $x^*(t) = \frac{\left(1+\sqrt{101}\right)^2+100}{\left(1+\sqrt{101}\right)^2-100} + 10\cos(t)$, $t = [0, 2\pi)$ – зона впливу; $\varphi_* = \frac{Q}{2\pi}\ln(1+\sqrt{2})$, $\varphi^* = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\frac{1+\sqrt{101}}{10}\right)$ за побудованим нами алгоритмом та за отриманими аналітичними формулами практично ідентичні (як видно з рис. 2.41, вузли обох динамічних сіток візуально збігаються; при цьому похибка знаходження повної витрати становить 0,063).

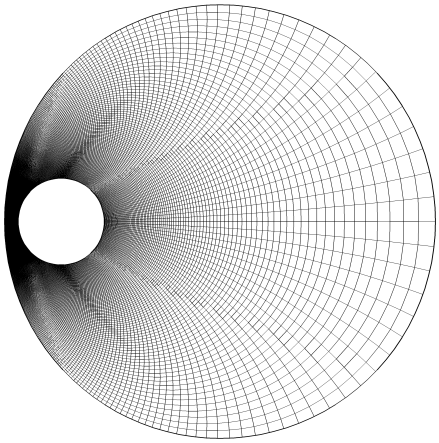


Рис. 2.41. Ідеальне поле, породжене витоком та втоком

Додаткові можливості розроблених алгоритмів та програм проілюстровані на рис. 2.42–2.44, де представлені динамічні сітки для випадків $x_*(t) = \cos t + \alpha$, $y_*(t) = \sin t$, $x^*(t) = 10\cos t$, $y^*(t) = 10\sin t$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 100$, $\kappa = 1$ (α – параметр, що дозволяє моделювати зміщення центра круглої свердловини відносно центра зони впливу).

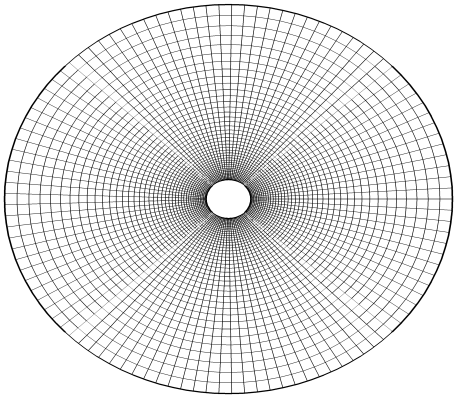


Рис. 2.42. Осесиметричний випадок розміщення свердловини ($\alpha = 0$)

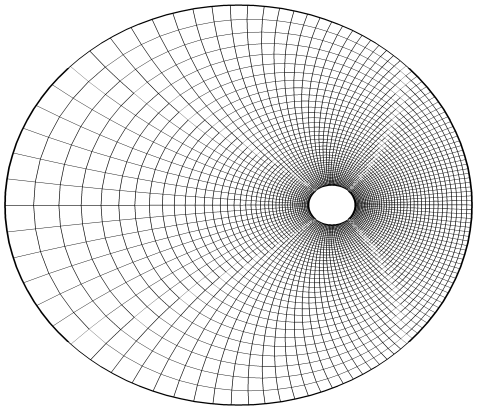


Рис. 2. 43. Свердловина у круговому пласті при $\alpha = 5$

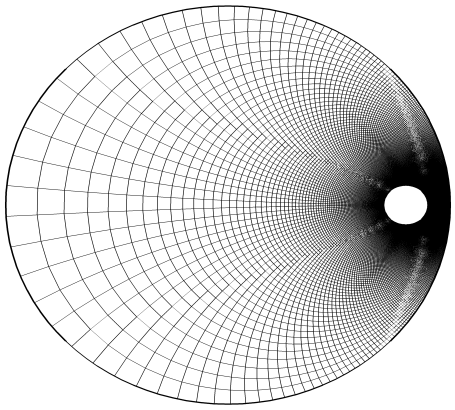


Рис. 2. 44. Свердловина у круговому пласті при $\alpha = 8$

Залежності *Q* та *v(A)* від α зображені на рис. 2.46 та 2.47. Зміну значення невідомої витрати *Q* під час ітераційного процесу розв'язування задачі при $\alpha = 8$ проілюстровано на рис. 2.45.

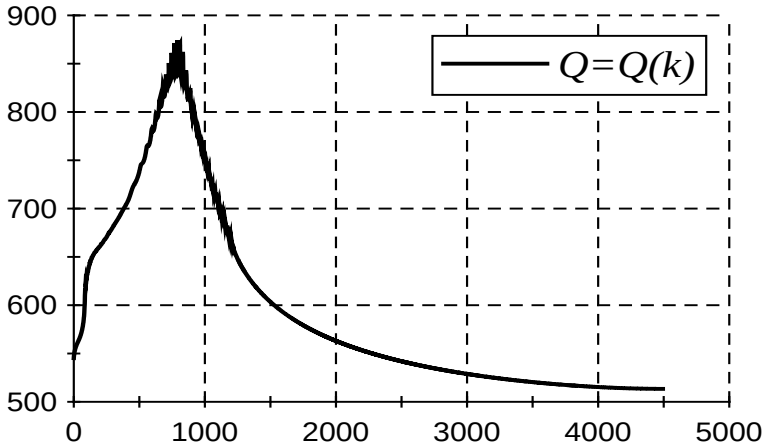


Рис. 2.45. Зміна повної витрати під час ітераційного процесу

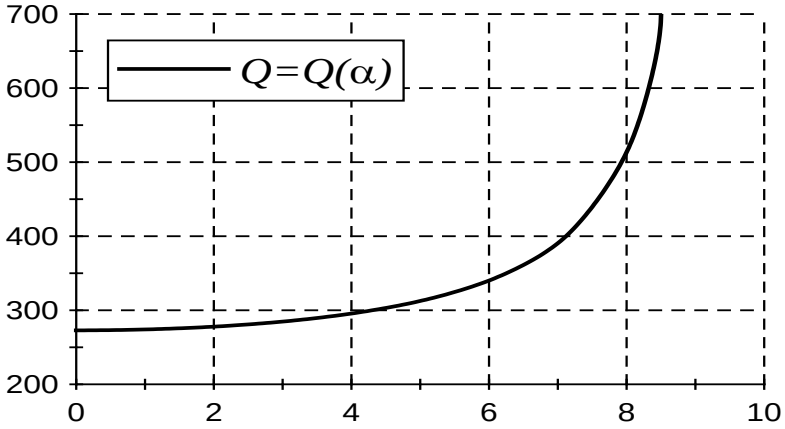


Рис. 2.46. Залежність повної витрати від розміщення свердловини у круговому пласті

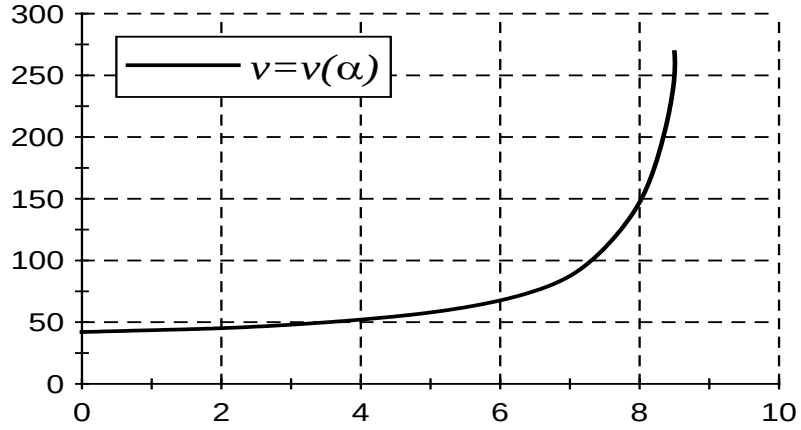


Рис. 2.47. Залежність швидкості на свердловині від розміщення останньої у круговому пласті

Таблиця 2.11. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку “Свердловина у круговому пласті”

α	N	m	n_{iter}	γ	Q	v(A)
0,0	40	109	169	1,0015161	272,91313	42,078704
1,0	40	109	644	1,0059480	274,12084	43,536920
2,0	40	111	603	1,0013998	277,88843	45,170836
3,0	40	113	598	1,0077947	284,70200	47,999598
4,0	40	118	601	1,0019847	295,58548	52,114187
5,0	100	312	4420	1,0017561	312,54789	57,914013
6,0	100	340	4427	1,0004788	340,16280	67,664687
7,0	100	390	4449	1,0013003	390,50713	87,465704
8,0	100	513	4494	1,0008144	513,41778	147,22649
8,5	100	697	4563	1,0008695	697,60601	268,88791

У результаті проведених спеціальних досліджень проблеми початкового наближення виявлено, що його неточне задання призводить до досить великих змін шуканих величин у процесі ітераційного розв’язування задачі та суттєвого збільшення кількості ітерацій для отримання заданої точності наближення розв’язку задачі. При надмірному відхиленні початкового наближення від шуканого розв’язку інколи спостерігалося стягування межових точок сітки в одну на кожному з відповідних межових контурів області, яке виявляється у візуальному спотворенні межі області в процесі роботи алгоритму. Такі результати можна інтерпретувати як результати розв’язку не заданої, а деякої їй супутньої задачі на знаходження характеристик течії всередині розрізу (при цьому невідомий параметр Q , як і

слід очікувати, дорівнював нулю). Як правило, уникнути таких “небажаних” ефектів спотворення постановок задач під час роботи алгоритму вдається шляхом збільшення параметрів розбиття сітки *n*, *m* із збереженням оптимального співвідношення між ними.

Результати розв’язку серії геометрично складніших задач ($x_*(t)=\alpha\cos t$, $y_*(t)=\sin t$, $x^*(t)=10\cos t$, $y^*(t)=10\sin t$, $\varphi_*=0$, $\varphi^*=100$, $\kappa=1$), в яких замість свердловини розглядався еліптичний резервуар, представлені на рис. 2.48 ($\alpha=0$), 2.49 ($\alpha=5$), 2.50 ($\alpha=8$), 2.51, 2.52, 2.53 та у відповідній таблиці 2.12. Результати розрахунків (рис. 2.51) наочно підтверджують затухаючий характер коливань значення шуканої невідомої витрати під час роботи алгоритму.

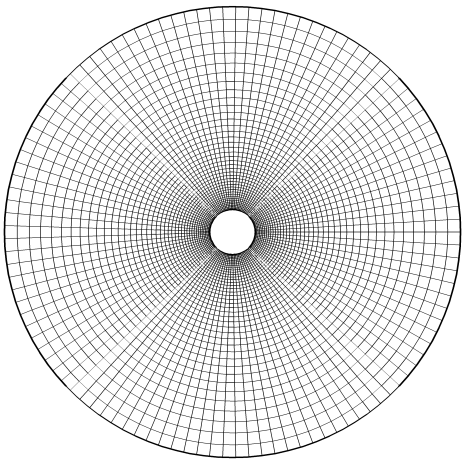


Рис. 2.48. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha=0$

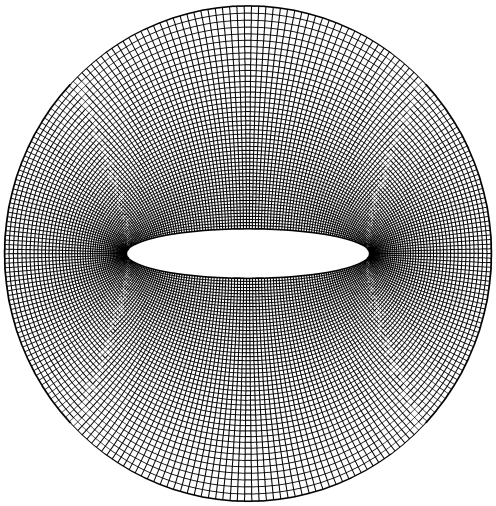


Рис. 2.49. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha=5$

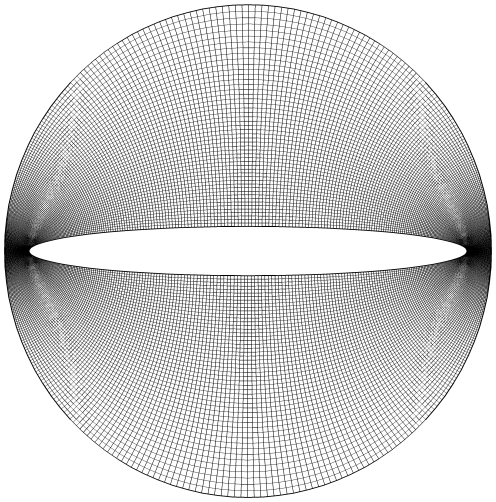


Рис. 2. 50. Еліптичний резервуар у круговому пласті при $\alpha = 8$

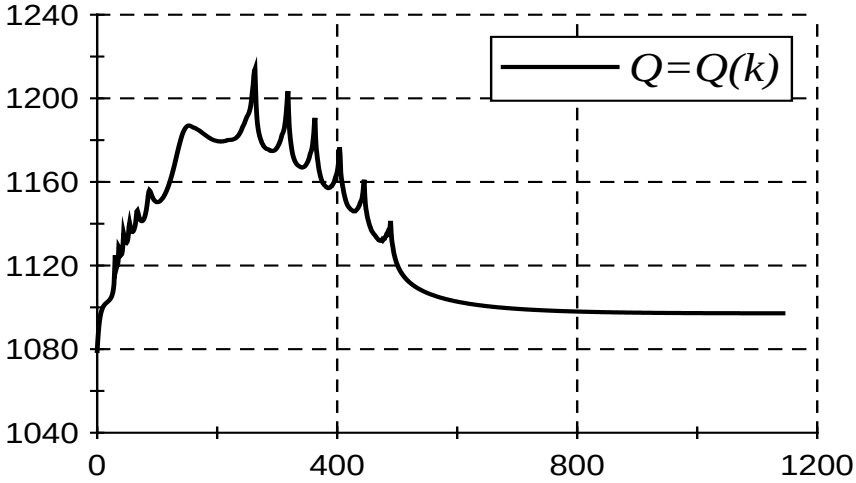


Рис. 2.51. Зміна повної витрати під час ітераційного процесу

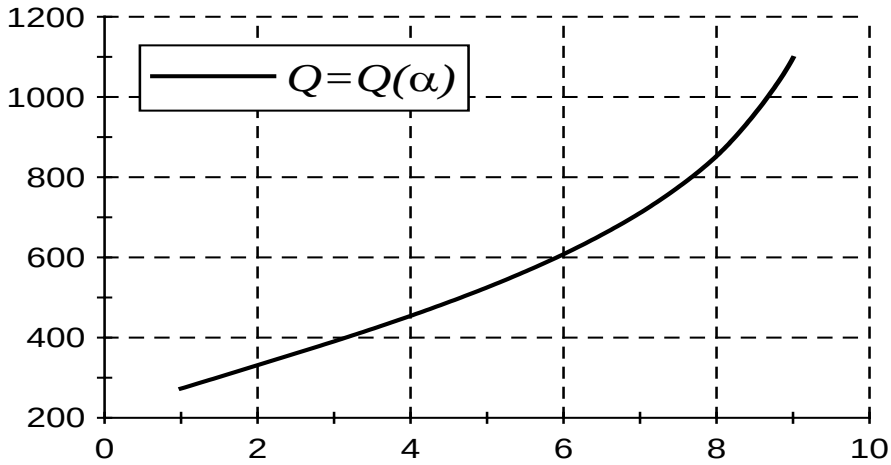


Рис. 2.52. Залежність повної витрати від параметрів еліптичного резервуара

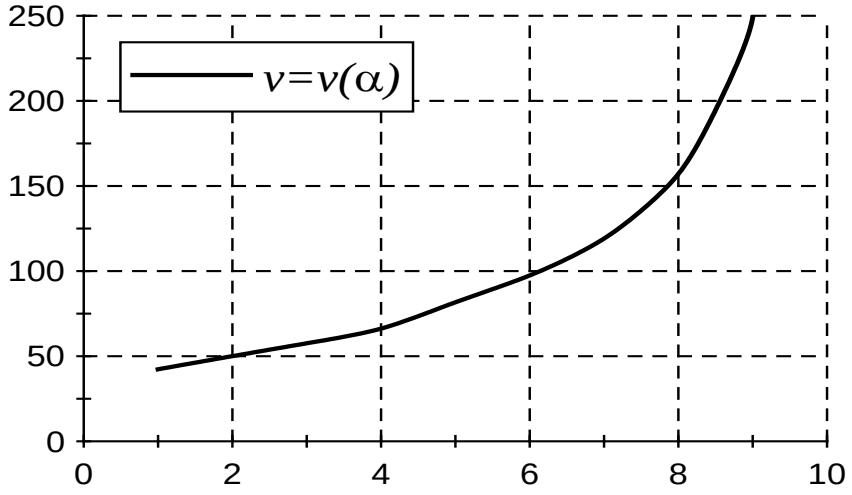


Рис.2.53. Залежність швидкості в крайній правій точці резервуара від параметрів останнього

Таблиця 2.12. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку “Еліптичний резервуар у круговому пласті”

α	n	m	n_{iter}	γ	Q	$v(A)$
1,0	50	136	254	1,0033079	272,89975	42,328284
2,0	50	165	284	1,0037443	331,23563	50,033917
3,0	50	195	317	1,0015640	390,60996	57,591556
4,0	50	227	300	1,0004089	454,18566	66,226574
5,0	50	262	283	1,0021256	525,11382	81,671091
6,0	50	303	485	1,0031748	607,92391	97,436911
7,0	50	355	667	1,0011558	710,82060	119,09577
8,0	50	426	862	1,0006952	852,59235	157,05766
9,0	50	548	1144	1,0010486	1097,1493	249,11876

На рис. 2.54–2.56 зображені динамічні сітки, побудовані для серії випадків “Свердловина у чотирикутному пласті” ($x_*(t) = \cos t + \alpha$, $x^*(t) = 10(\cos t + 0{,}1\cos 3t)$, $y_*(t) = \sin t$, $y^*(t) = 10(\sin t - 0{,}1\sin 3t)$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 100$, $\kappa = 1$) при різних значеннях параметра α, який визначає положення свердловини у пласті.

Числові результати розрахунків наведено у табл. 2.13. На рис. 2.57 проілюстровано залежність значення повної витрати від часу роботи алгоритму, а на рис. 2.58, 2.59 – залежності повної витрати та максимальної швидкості рідини на свердловині від параметра α.

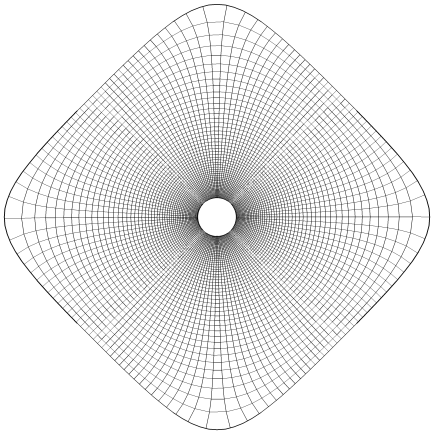


Рис.2.54. Осесиметричний випадок розміщення свердловини ($\alpha = 0$) у прямокутному пласті

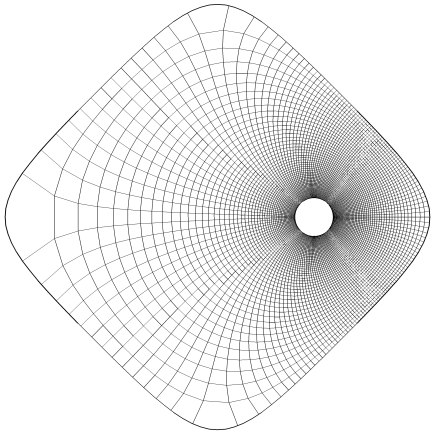


Рис. 2.55. Свердловина у прямокутному пласті із згладженими кутами

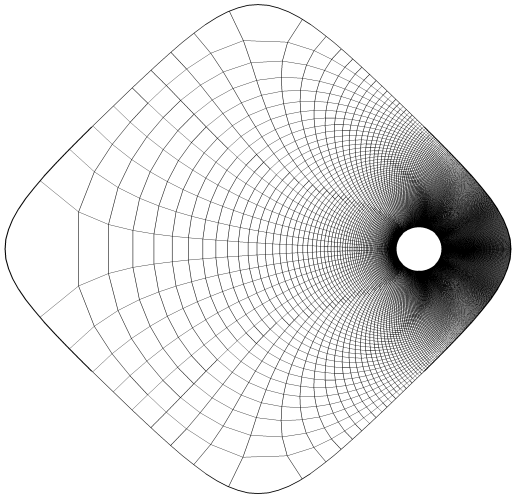


Рис. 2.56. Свердловина у прямокутному пласті зі згладженими кутами при $\alpha = 8$

Таблиця 2.13. Результати розрахунків фільтраційного поля для випадку "Свердловина у прямокутному пласті"

α	n	m	n_{iter}	γ	Q	$v(A)$
0,0	50	138	227	1,0053233	277,46923	43,374814
1,0	50	139	1055	1,0029468	278,81922	45,631689
2,0	50	141	970	1,0033456	282,94347	47,174747
3,0	50	145	944	1,0005924	290,17181	49,988440
4,0	50	154	960	0,9776947	301,12997	53,410942
5,0	50	158	910	1,0034381	317,08643	60,278202
6,0	100	340	3966	1,0005053	340,17182	66,299757

7,0	100	375	1326	1,0020168	375,75631	77,693905

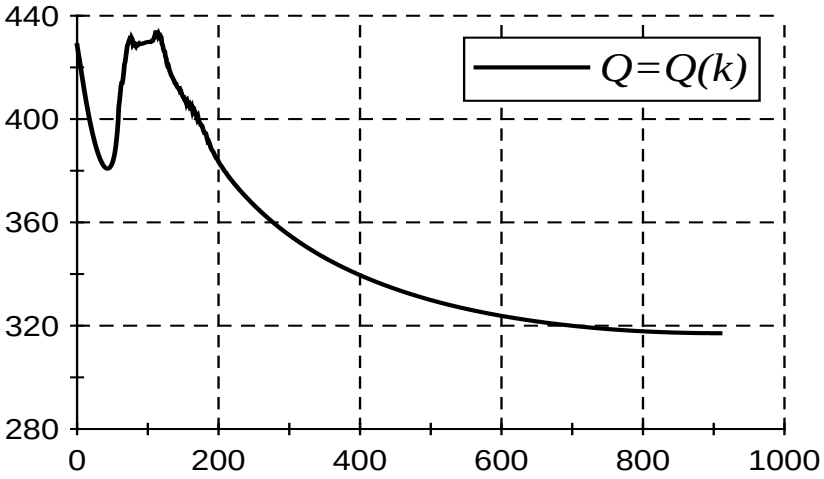


Рис. 2.57. Зміна параметра *Q* під час ітераційного процесу

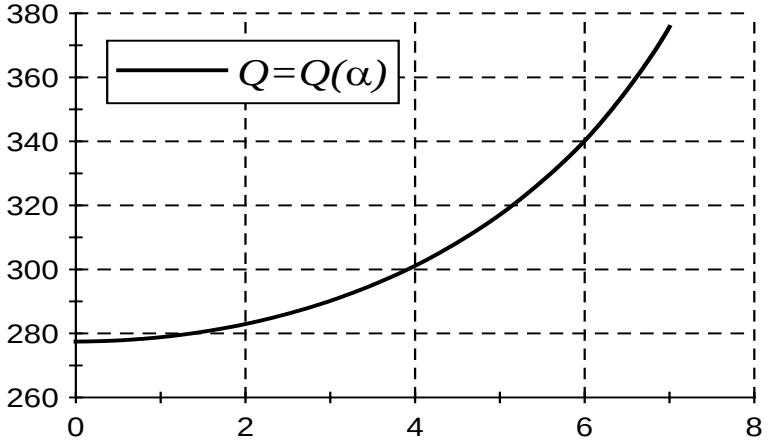


Рис. 2.58. Залежність повної витрати від розміщення свердловини у прямокутному пласті

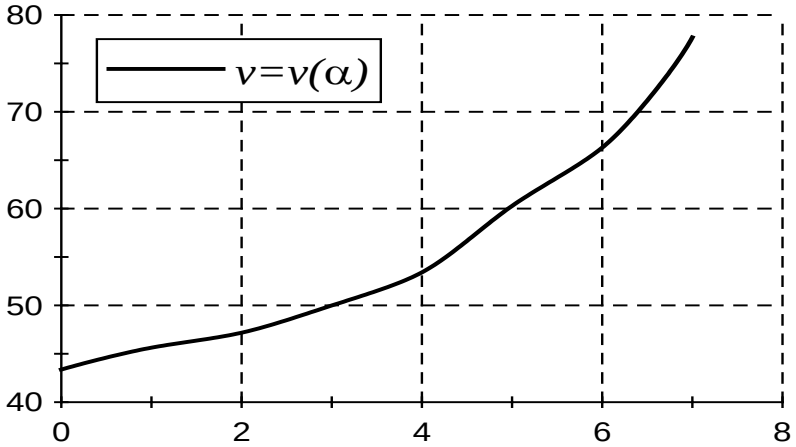


Рис. 2.59. Залежність швидкості на свердловині від її розміщення у пласті

Приклад гідродинамічної сітки, побудованої в еліптичному пласті з урахуванням анізотропної природи середовища, ілюструє рис. 2.60.

Результат розрахунку фільтраційного поля для тризв'язної області (еліптичний та круглий резервуари у круглому пласті) зображений на рис. 2.61.

На рис. 2.62 показано розрахункові динамічні сітки для системи "Кругла та еліптична свердловини у пласті" при різних значеннях керуючого потенціалу φ_0 на еліптичному контурі (випадки (a)–(e) впорядковані за зростанням значення φ_0; потенціал другої свердловини приймався рівним нулю, а потенціал зони впливу – одиниці). Величини перетоків при різних значеннях керуючого потенціалу наведені у табл. 2.14 (Q_*^*, Q_*^0 та Q_0^* – величина перетоків $L_* \to L^*$, $L_* \to L_0$ і $L_0 \to L^*$ відповідно), а графіки залежностей повних витрат від керуючого потенціалу проілюстровані на рис. 2.63.

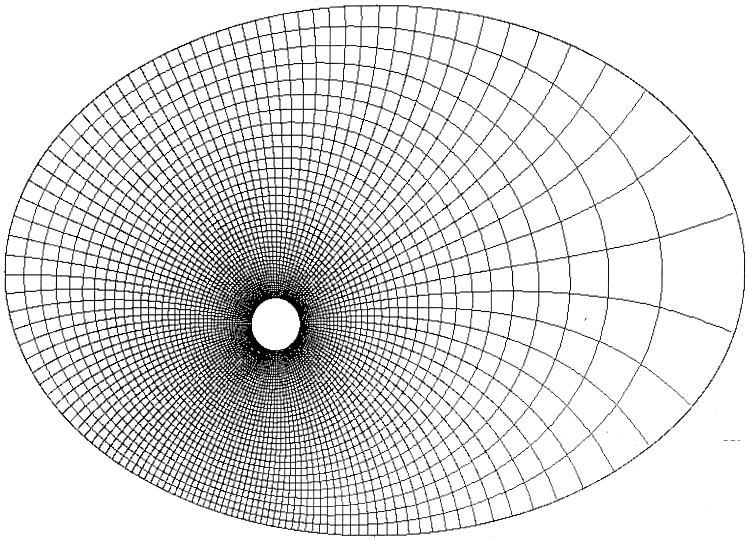


Рис. 2.60. Свердловина в еліптичному анізотропному пласті

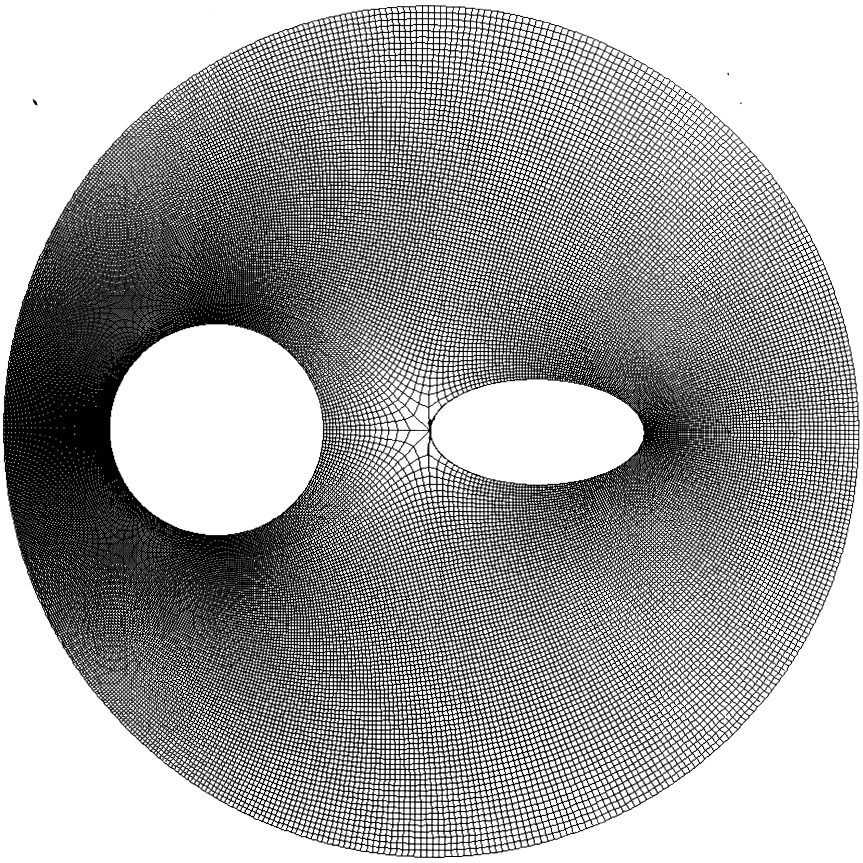
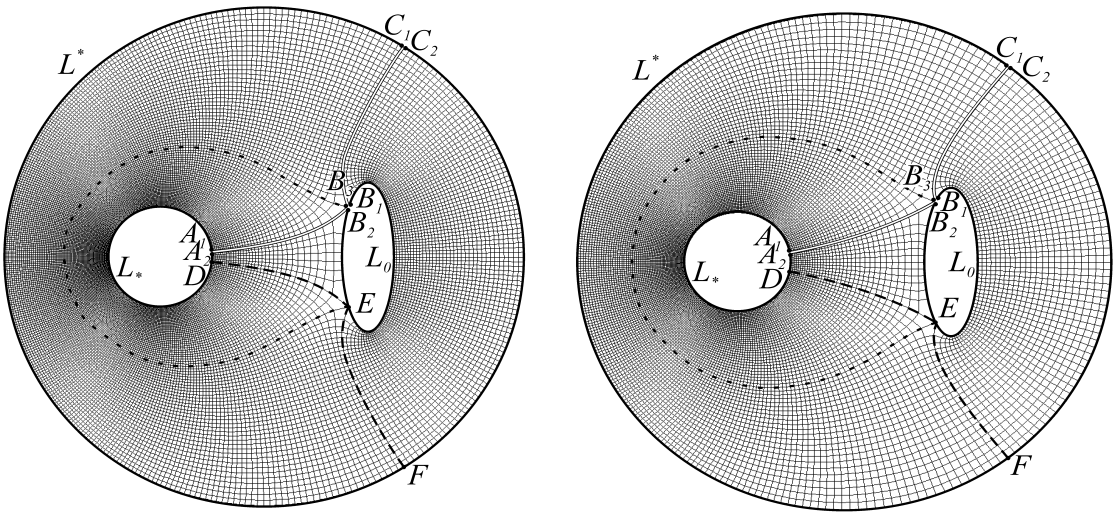


Рис.2.61. Еліптичний та круглий резервуари у круглому пласті



а $\varphi_0 = 0.5$ *б* $\varphi_0 = 0.6$

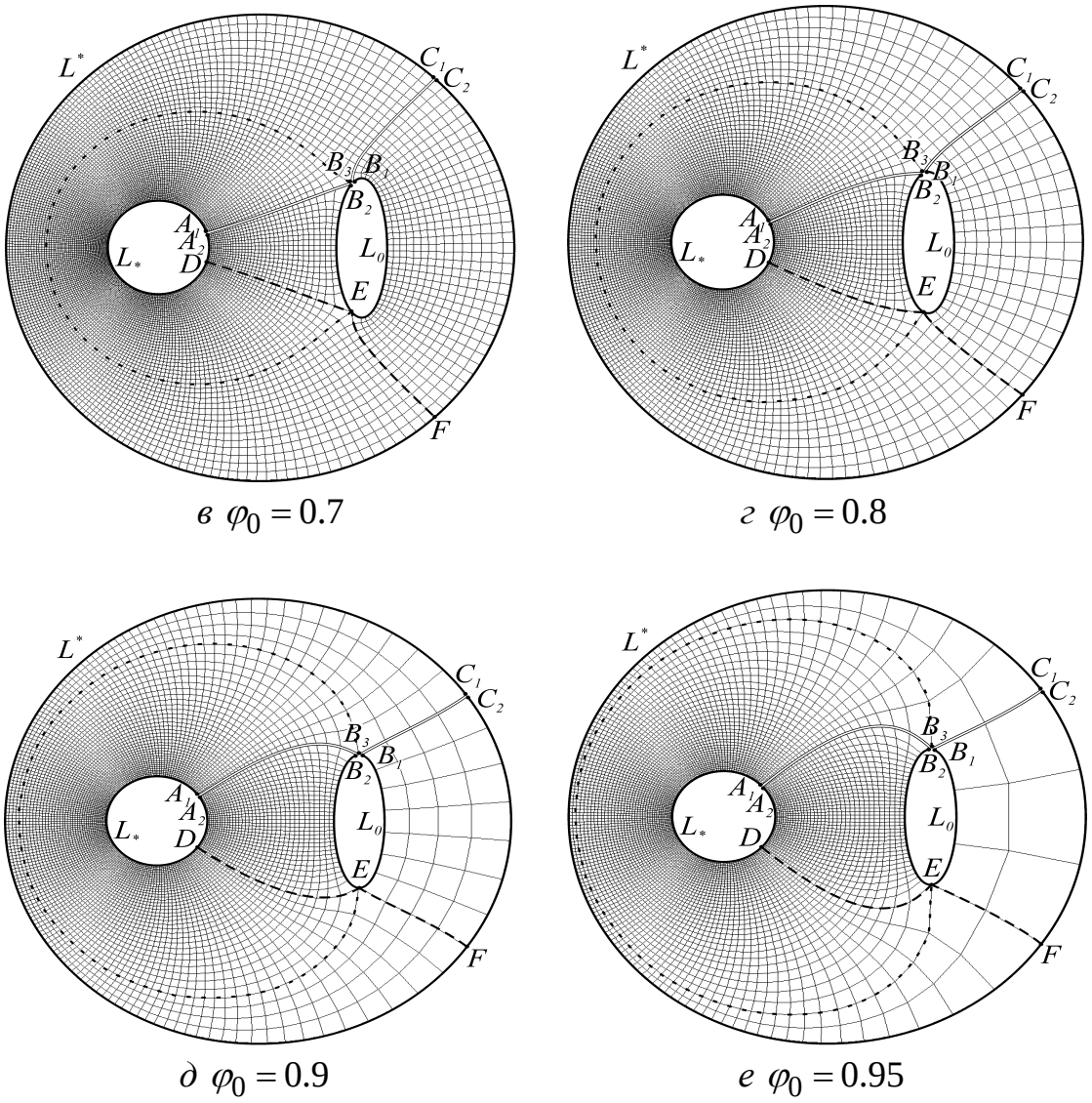


Рис. 2.62. Динамічні сітки при різних значеннях потенціалу керування

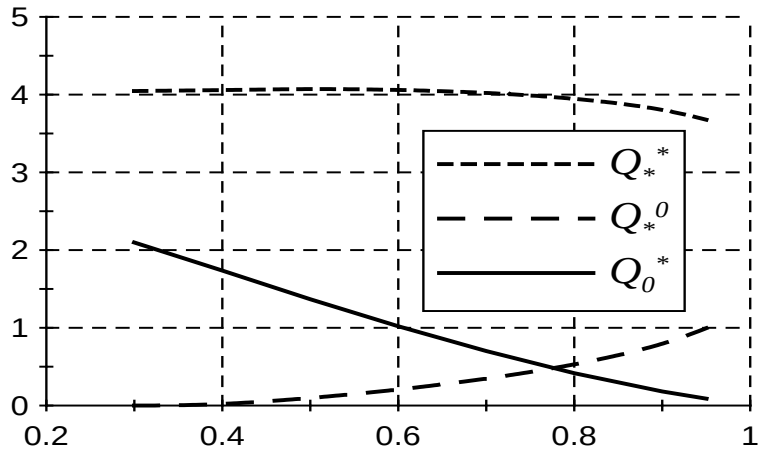


Рис. 2.63. Залежності повних витрат від керуючого потенціалу на еліптичному контурі

Таблиця 2.14. Величина перетоків при різних значеннях керуючого потенціалу для випадку “Кругла та еліптична свердловини у круглому пласті”

φ_0	Q_*^*	Q_*^0	Q_0^*
0,3	4,04618127	0,00045305	2,09780982
0,4	4,05861365	0,02114897	1,73638254
0,5	4,07092870	0,09799301	1,36716228
0,6	4,05993931	0,20678807	1,02055556
0,7	4,02175839	0,34645410	0,70094236
0,8	3,94595805	0,53016214	0,41607785
0,9	3,80313894	0,79561584	0,18142087
0,95	3,67703122	0,99514852	0,08831913

Отримані результати числових експериментів підтверджують факт збільшення величини перетоку $L_* \to L_0$ та одночасне зменшення двох інших при збільшенні φ_0.

Особливості комп’ютерного моделювання нелінійних процесів проілюструємо на прикладах фільтраційних процесів із урахуванням суфозійних явищ у ґрунті, що відбуваються під дією зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища (відповідні моделі та алгоритми побудови динамічної сітки і знаходження повної витрати наведені вище). Розглянемо приклад в якому за область фільтрації вибрана область близька до осесиметричної (див. рис. 2.64 та рис. 2.65):

$$L^* = \left\{(x,y):\ x = a^* \cos t,\ y = b^* \sin t\right\},\ L_* = \left\{(x,y):\ x = a_* \cos t - x_*^0,\ y = b_* \sin t\right\},$$

$$x_*^0 = 2, \quad a_* = 1, \quad b_* = 1, \quad a^* = 8, \quad b^* = 8).$$

Динамічна сітка та результати розрахунків для моделі $\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I < I_{êð}, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_{êð}), & I \ge I_{êð}, \end{cases}$ де μ – параметр, що характеризує ступінь впливу градієнтів потенціалу на коефіцієнт фільтрації; κ_0 – коефіцієнт фільтрації недеформованого середовища; $I = \sqrt{\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2}$ – величина діючого градієнту потенціалу; I_{kp} – його критичне значення ($\kappa_0 = 1,\ \mu = 1,\ I_{êð} = 0.25$) зображені на рис. 2.64 та рис. 2.66.

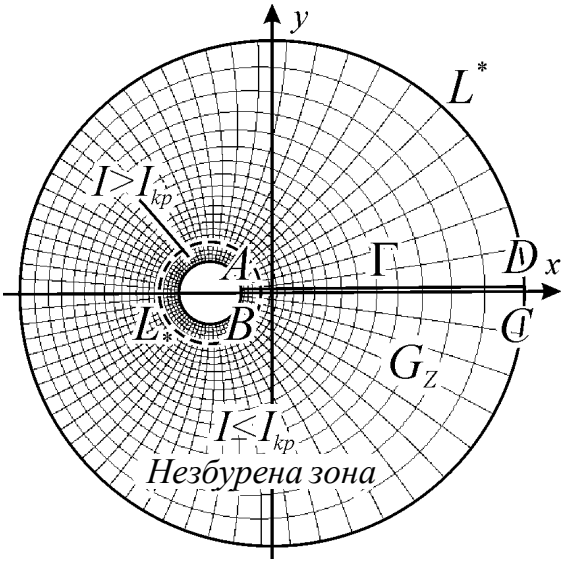


Рис. 2.64. Свердловина в еліптичному деформівному пористому пласті (модель з однією зоною збурення)

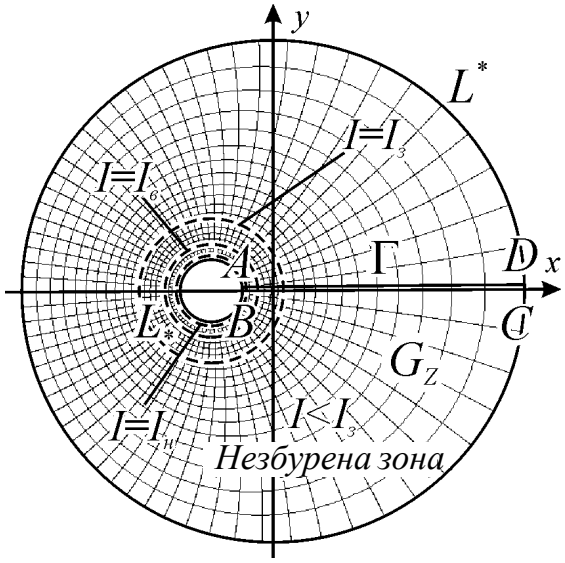


Рис. 2.65. Свердловина в еліптичному деформівному пористому пласті (модель з двома зонами збурення)

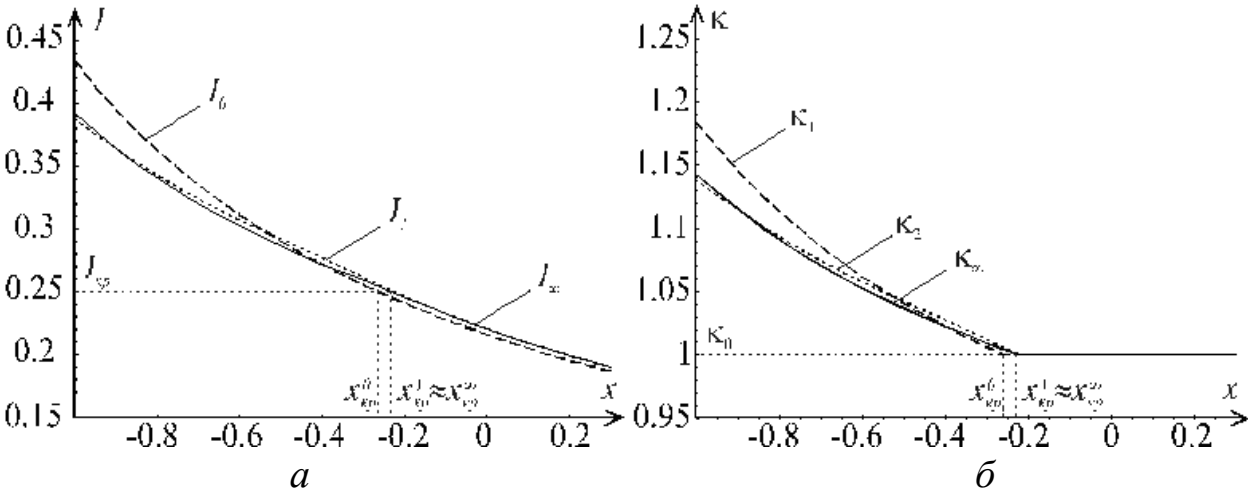


Рис. 2.66. Розподіл градієнта напору (*а*) та коефіцієнта фільтрації (*б*) вздовж розрізу Γ в еліптичному деформівному пласті (одна зона збурення)

У випадку неврахування взаємовпливу градієнта напору та коефіцієнта фільтрації ($\kappa = 1$) отримуємо повну витрату $Q_0 = 3{,}12$; його ж врахування за вище вказаним законом викликало збільшення розрахункової витрати Q до $3{,}21$. На рис. 2.66 відповідно пунктирними, точковими та жирними лініями зображено залежності $I = I_k(x)$, $\kappa = \kappa_k(x)$ ($x \in \Gamma$) на початкових ($k = 0$, $k = 1$) ітераціях і на стадії стабілізації процесу (I_∞, κ_∞).

Динамічна сітка та результати розрахунків для моделі, яка описується залежністю $\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I < I_ç, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_ç)(I - I_{\hat{a}}), & I_ç \le I \le I_{í}, \\ \kappa^*, & I > I_{í}; \end{cases}$

де $I_ç$, $I_{\hat{a}}$, $I_{í}$ – критичні значення градієнта напору (затримки суфозійних частинок, їхнього вимивання та повного вимивання), при $I_ç = 0{,}2$, $I_{\hat{a}} = 0{,}3$, $I_{í} = 0{,}3618$, $\kappa_0 = 1$, $\kappa^* = 1{,}2$, $\mu = 20$ зображені на рис. 2.65 та рис. 2.67.

При $\kappa = 1$ маємо повну витрату $Q_0 = 3{,}12$; врахування явищ типу суфозії за вказаним вище законом збільшує Q до $3{,}188$.

На рис. 2.67 штриховими та суцільними лініями зображені залежності $I = I(x)$, $\kappa = \kappa(x)$ ($x \in \Gamma$) відповідно на початковій ($k = 0$) ітерації і на стадії стабілізації процесу (I_∞, κ_∞).

Аналіз отриманих результатів числових експериментів показав їх повну узгодженість у граничному випадку при $x_*^0 \to 0$ з отриманими аналітично результатами, що підтверджує адекватність моделі.

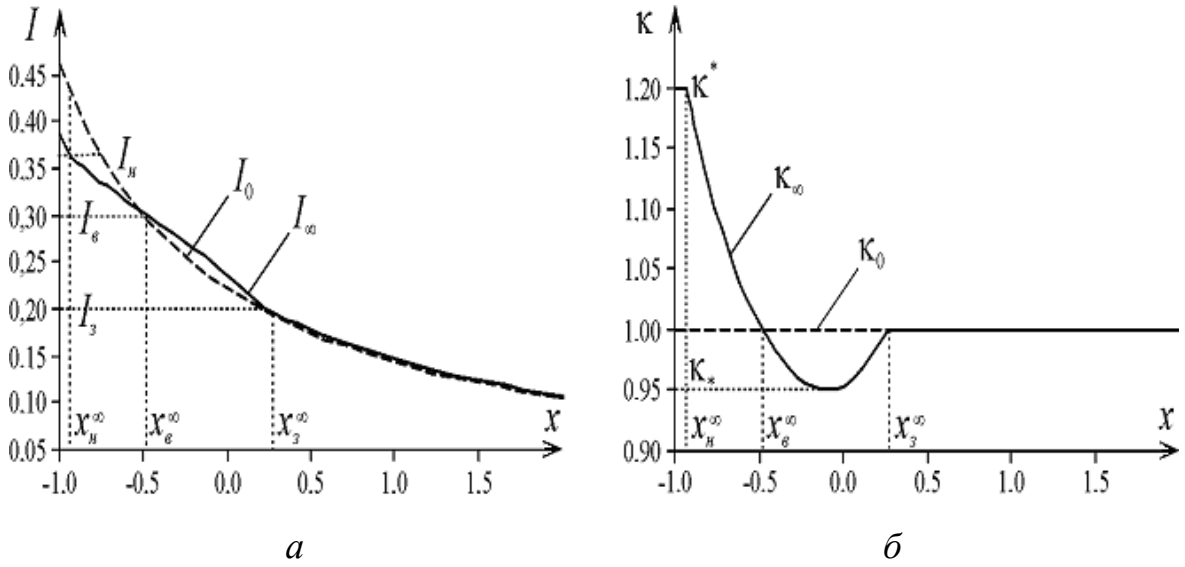


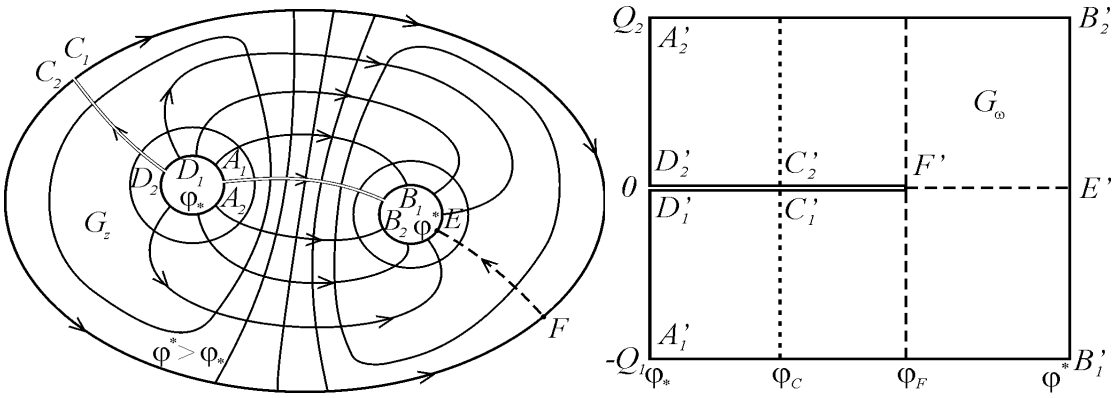
Рис. 2.67. Розподіл градієнта напору (*а*) та коефіцієнта фільтрації (*б*) вздовж розрізу Γ в еліптичному деформівному пласті

Зазначимо, що реалізовані алгоритми дозволяють ефективно отримувати і інші характеристики процесів, зокрема, встановлено залежність фільтраційної витрати Q від форми зони впливу (еліпса) при розрахунку процесу фільтрації до неї від свердловини у випадку двозв'язної області фільтрації. А саме: при фіксованій площі еліптичної області фільтрації

$S = \pi ab = \pi R_0^2$ знайдено залежність $Q = Q(\delta)$, де $\delta = a/b$ ($a = R_0 \cdot \sqrt{\delta}$, $b = R_0 / \sqrt{\delta}$). Результати числових розрахунків при r_0=0,05м, $R_0 = 50$ м, $\kappa = 1$ м/добу, $n \times m = 200 \times 192$, $\varepsilon = 10^{-5}$ наведені у табл. 2.15 (Q_0 – значення повної витрати при $\delta = 1$); зокрема, при співвідношенні осей еліпса 2:1 отримано збільшення повної витрати порівняно із випадком $\delta = 1$ приблизно на 2,26 %.

Таблиця 2.15. Результати розрахунків для випадку “Свердловина в еліптичному пласті”

δ	Q	Q/Q_0
0,50	9,3054	1,0226
0,75	9,1381	1,0043
1,00	9,0993	1,0000
1,50	9,1777	1,0086
2,00	9,3076	1,0229

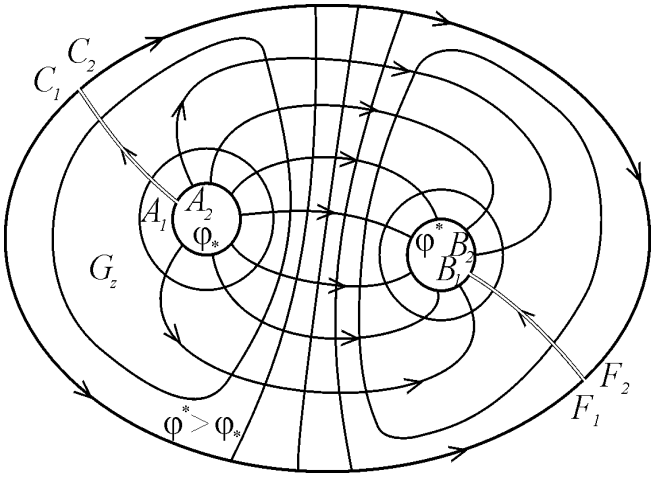


а *б*

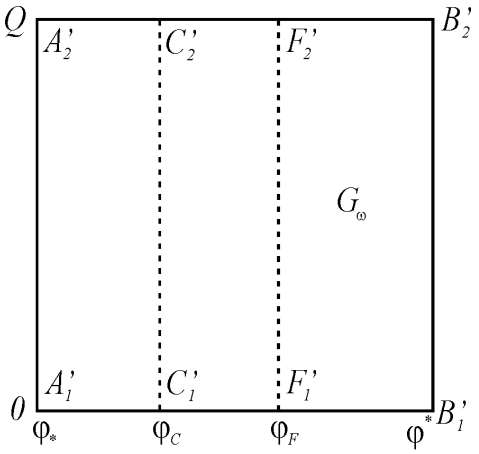
Рис. 2.68. Дві свердловини у пласті з непроникною зовнішньою стінкою та розрізом вздовж однієї з ліній поділу потоків (*а* – фізична область, *б* – область комплексного потенціалу течії)

Потрібно також зазначити переваги викладених методів і алгоритмів при розв’язуванні більш широких класів задач для областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, зокрема, коли зовнішній контур фільтраційної області є непроникним. Останні є важливими при моделюванні фільтраційних процесів у нафтогазових пластах, в яких для продовження терміну експлуатації штучно створюються додаткові впливи. Як приклад на рис. 2.68 та рис. 2.69 схематично зображено динамічну сітку та два варіанта

побудови області комплексного потенціалу для одного з випадків формування течії, породженої двома внутрішніми лініями рівного потенціалу – свердловинами (нагнітальною та експлуатаційною), у пласті із непроникною зовнішньою стінкою. Схематичне зображення області фільтрації, ліній течії та відповідної області комплексного потенціалу для більш складного випадку із врахуванням впливу додаткової третьої свердловини-перехоплювача наведено на рис. 2.70.

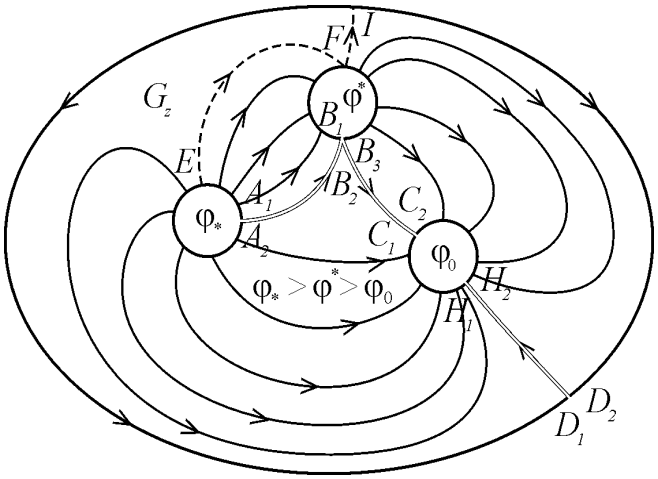


а

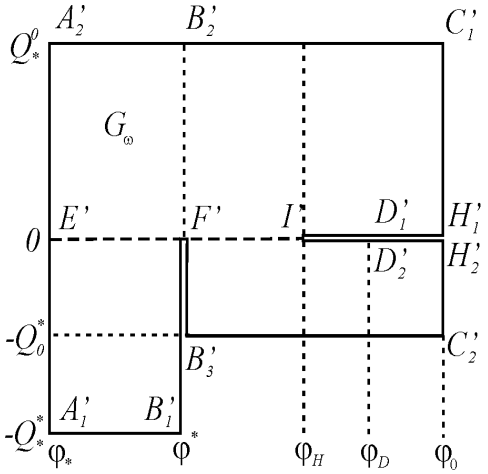


б

Рис. 2.69. Дві свердловини у пласті з непроникною зовнішньою стінкою та розрізами області вздовж двох ліній розділу потоків (*а* – фізична область, *б* – область комплексного потенціалу течії)



а



б

Рис. 2.70. Три свердловини у пласті з непроникною зовнішньою стінкою

(*а* – фізична область, *б* – область комплексного потенціалу течії)

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ЗАБРУДНЕНЬ ПРИ УСТАЛЕНІЙ ПЛОСКО- ВЕРТИКАЛЬНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ НЕРІВНОВАЖНОСТІ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

3.1. Асимптотичні розв'язки двовимірних крайових задач конвективної дифузії забруднень при усталеній плоско-вертикальній фільтрації за умов нерівноважності дифузійного процесу

3.1.1. Вступ. Вихідне диференціальне рівняння. Задачі конвективної дифузії (гідродинамічної дисперсії) забруднень при плоско-вертикальній усталеній фільтрації в рамках класичної математичної моделі дифузії вивчались в багатьох працях, зокрема в [26 , 30, 31, 75, 93, 118–125, 134]. У даному розділі вказані задачі розглядаються за умов нерівноважності дифузійного процесу, коли має місце значне відхилення від класичного закону Фіка. За умов суттєвої дифузійної нерівноважності використовуватимемо наступне узагальнення закону Фіка, запропоноване О.В. Ликовим [130]:

$$\vec{q} + \tau_1 \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -D\nabla\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{3.1}$$

де $\vec{q}$ – дифузійний потік, C – концентрація дифундуючої речовини, D – коефіцієнт дифузії, τ_1, τ_2 – дійсні числа (параметри релаксації).

З урахуванням (3.1) у двовимірному випадку конвективної дифузії при плоскій стаціонарній фільтрації матимемо наступне рівняння [32]:

$$\tau_1 \sigma \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon} \cdot \nabla\left(C + \tau_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right)\right) - D\Delta\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0, \tag{3.2}$$

де σ – пористість ґрунту, $\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості фільтрації розчину, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Розглянемо деякі окремі фільтраційні схеми.

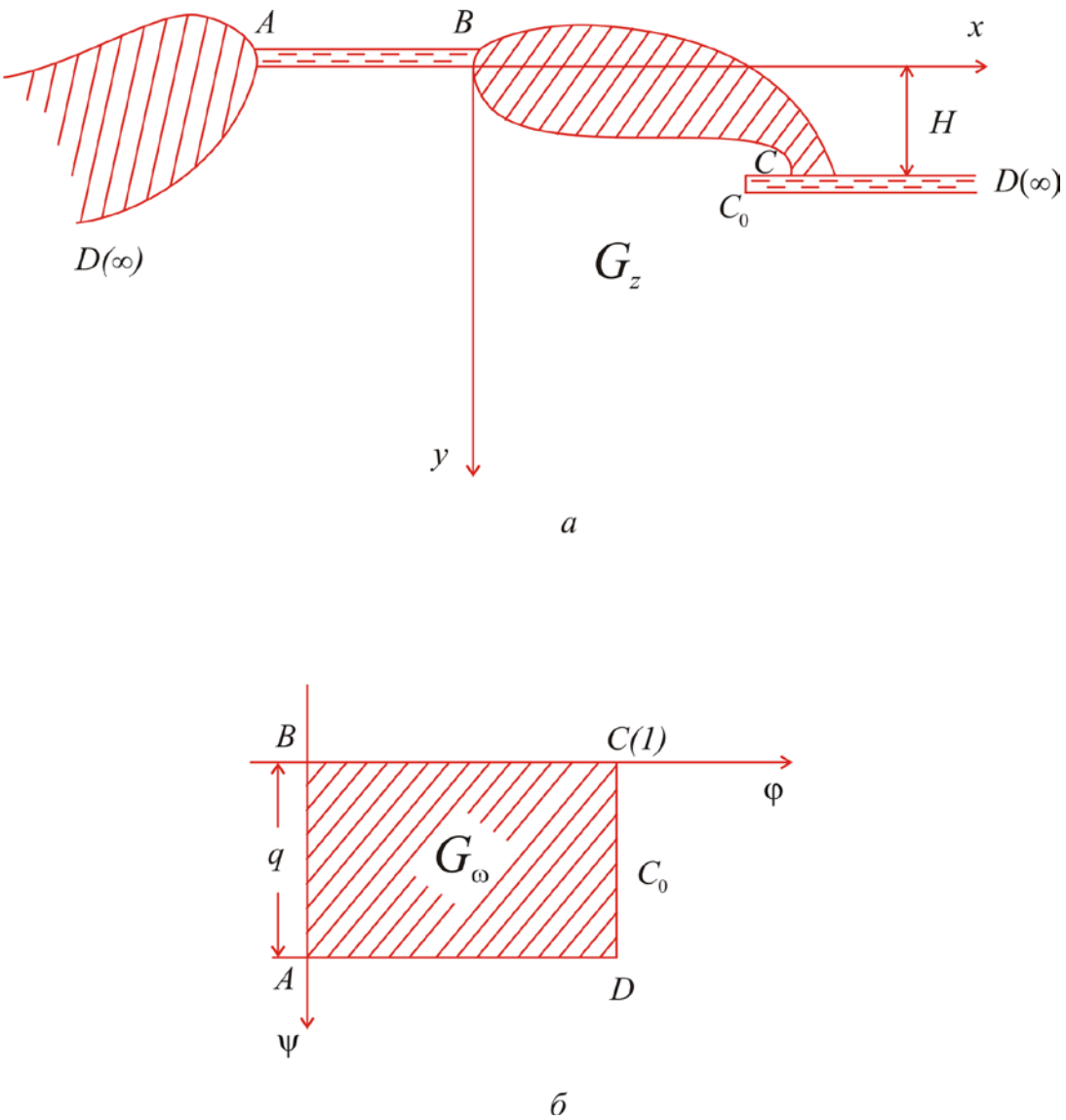


Рис. 3.1. Області фільтрації G_z та комплексного потенціалу G_ω
в задачі конвективної дифузії забруднень
при фільтрації зі сховищ промстоків до водозабору

3.1.2. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації зі сховища промстоків до водозабору за умов нерівноважності дифузійного процесу. **Відповідна фільтраційна схема для цього випадку і постановка крайової задачі фільтрації в фізичній області наведені в [123, 125]. Оскільки область течії є областю з вільною межею (рис. 3.1, *а*), то ефективним способом дослідження такого типу задач є перехід [153, 173] до області зведеного комплексного потенціалу G_ω, яка у даному випадку є прямокутником (рис. 3.1, б):**

$$G_\omega = \{(\varphi, \psi) : 0 \le \varphi \le 1, \quad 0 \le \psi \le q\},$$

де q – зведена фільтраційна витрата.

Тоді після осереднення швидкості фільтрації по області комплексного потенціалу і переходу до безрозмірних змінних згідно з [32, 123, 125], в області G_ω розглядувана задача фільтраційно-конвективної дифузії за умов нерівноважності зводиться до відшукання розв'язку наступної крайової задачі [32]:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta C + 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(C + \tau_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0, \tag{3.3}$$

$$C\big|_{\varphi=0} = C_1,\ C\big|_{\varphi=1} = C_2,\ \left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0, \tag{3.4}$$

$$C\big|_{t=0} = C_0(\varphi,\psi),\ C'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.5}$$

де C_1, C_2 – задані концентрації забруднень відповідно на вході і виході фільтраційного потоку; $C_0(\varphi,\psi)$ – початкова концентрація забруднень; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$, $\mu = \frac{kH}{2D}$; k – коефіцієнт фільтрації; H – напір.

Якщо прийняти в (3.3) $\tau_1 = \tau_2 = 0$, то одержуємо класичну математичну модель конвективної дифузії і відповідна задача досліджувалась в [123, 125]. При $\tau_1 = \tau_2$ в роботі [32] одержано точний аналітичний розв'язок розглядуваної задачі. Взагалі ж $\tau_1 \neq \tau_2$ і одержати точний розв'язок розглядуваної задачі не вдається через наявність в (3.3) конвективної складової. За цих умов виявляється ефективним застосування асимптотичних методів. Як правило, параметри релаксації τ_1, τ_2 – малі параметри і вважаючи їх малими одного порядку малості покладемо $\tau_1 = \varepsilon$, $\tau_2 = \alpha\varepsilon$, де ε – малий параметр, α – дійсне число відмінне від 0. Тоді, переходячи до однорідних граничних умов за допомогою заміни

$$C(\varphi,\psi,t) = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - U(\varphi,\psi,t), \tag{3.6}$$

одержуємо для визначення функції U наступну крайову задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \left(1 + \alpha\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta U + 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(U + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \theta, \tag{3.7}$$

$$U\Big|_{\substack{\varphi=0,\\ \varphi=1}} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial \psi}\Big|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0, \tag{3.8}$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.9}$$

де

$$\theta = 2\mu(C_2 - C_1),\ U^{(0)}(\varphi,\psi) = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - C_0(\varphi,\psi). \tag{3.10}$$

Таким чином, процес описується сингулярно-збуреною за часовою змінною крайовою задачею для рівняння з частинними похідними третього порядку.

За припущення сильних умов гладкості та узгодженості початкових і граничних умов наближений розв'язок розглядуваної задачі шукатимемо згідно з асимптотичним методом Вішика – Люстерніка [64] у вигляді

$$U(\varphi,\psi,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i U_i(\varphi,\psi,t) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \upsilon_i(\varphi,\psi,\tau) + R_n, \tag{3.11}$$

де $U_i (i = \overline{0,n})$ – члени зовнішнього наближення, $\upsilon_i (i = \overline{0,n})$ – члени внутрішнього наближення, R_n – залишковий член, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$.

Рівняння для визначення регулярної частини асимптотики одержуються застосуванням стандартної процедури методу збурень і мають вигляд

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \Delta U_i - 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial \varphi} + L(U_{i-1})\ \ (i = \overline{0,n}), \tag{3.12}$$

де

$$L(U_i) = \alpha \frac{\partial}{\partial t}(\Delta U_i) - \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi \partial t}\ \ (i = \overline{0,n-1}),\ L(U_{-1}) = \theta\,. \tag{3.13}$$

Граничні умови для функцій U_i $(i = \overline{0,n})$ такі:

$$U_i\Big|_{\substack{\varphi=0,\\ \varphi=1}} = 0,\ \frac{\partial U_i}{\partial \psi}\Big|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0\ \ (i = \overline{0,n}). \tag{3.14}$$

Рівняння для визначення функцій υ_i $(i = \overline{0,n})$ мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \tau} = M(\upsilon_{i-1}) \quad (i = \overline{0,n}), \qquad (3.15)$$

де

$$M = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \Delta - 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \tau}, \; M(\upsilon_{-1}) = 0. \qquad (3.16)$$

Вимагатимемо, щоб функції υ_i були функціями типу примежового шару. Функції U_i та υ_i пов'язані між собою через початкові умови:

$$U_0\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi, \psi), \; \upsilon_0\big|_{\tau=0} = 0, \qquad (3.17)$$

$$U_i\big|_{t=0} = -\upsilon_i\big|_{\tau=0} \; (i = \overline{1,n}), \qquad (3.18)$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon_0}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0, \; \left.\frac{\partial \upsilon_i}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -\left.\frac{\partial U_{i-1}}{\partial t}\right|_{t=0} \; (i = \overline{1,n}). \qquad (3.19)$$

Звідси для функцій $\upsilon_i \quad (i = \overline{0,n})$ отримаємо співвідношення

$$\upsilon_i(\varphi, \psi, \tau, \varepsilon) = e^{-\tau} \left[\left.\frac{\partial U_{i-1}}{\partial t}\right|_{t=0} - \int_0^{\tau} M(\upsilon_{i-1}(\varphi, \psi, \eta)) e^{\eta} d\eta \right] -$$

$$- \int_{\tau}^{+\infty} M(\upsilon_{i-1}(\varphi, \psi, \eta)) d\eta \; (i = \overline{1,n}), \; \upsilon_0 = 0 \qquad (3.20)$$

Для визначення функцій $U_i \quad (i = \overline{0,n})$ маємо крайову задачу (3.12), (3.14), (3.17), (3.18). Звідси вказані функції знаходяться в замкненому вигляді (точно). У результаті звичайних, однак громіздких перетворень знаходимо

$$U_i(\varphi, \psi, t) = \int_0^1 \int_0^q f_i(\xi, \eta) G(\varphi, \xi, \psi, \eta; t) d\eta d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^q L(U_{i-1}(\xi, \eta, \rho)) G(\varphi, \xi, \psi, \eta; t - \rho) d\eta d\xi d\rho \; (i = \overline{0,n}), \qquad (3.21)$$

де

$$G(\varphi,\xi,\psi,\eta;t)=\frac{4}{q}\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-[\chi_{nm}t+\mu(\xi-\varphi)]}\cdot\sin(\lambda_n\varphi)\sin(\lambda_n\xi)\cos(\nu_m\psi)\cos(\nu_m\eta)+$$

$$+\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-[\chi_{n_0}t+\mu(\xi-\varphi)]}\cdot\sin(\lambda_n\varphi)\sin(\lambda_n\xi), \qquad (3.22)$$

$$\chi_{nm}=\lambda_n^2+\nu_m^2+\mu^2,\ \lambda_n=n\pi,\ \nu_m=\frac{m\pi}{q}, \qquad (3.23)$$

$$f_i(\varphi,\psi)=-\upsilon_i\big|_{\tau=0}\ (i=\overline{1,n}),\ \ f_0(\varphi,\psi)=U^{(0)}(\varphi,\psi). \qquad (3.24)$$

Зауважимо, що основний внесок у розв’язок дають функції υ_1 і U_0.

3.1.3. Випадок наявності на виході фільтраційної течії інтенсивного відведення стоків. **В цьому випадку задача зводиться до розв’язання в області G_ω (рис. 3.2, *б*) наступної крайової задачі (відповідна область фільтрації зображена на рис. 3.2, *а*):**

$$\varepsilon\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}+\frac{\partial C}{\partial t}-\left(1+\alpha\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta C+2\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(C+\varepsilon\frac{\partial C}{\partial t}\right)=0, \qquad (3.25)$$

$$C\big|_{\varphi=0}=C_1,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=1}}=0, \qquad (3.26)$$

$$C\big|_{t=0}=C_0(\varphi,\psi),\ C_t'\big|_{t=0}=0. \qquad (3.27)$$

Переходячи до однорідних граничних умов за допомогою заміни

$$C(\varphi,\psi,t)=C_1-U(\varphi,\psi,t), \qquad (3.28)$$

отримуємо для визначення $U(\varphi,\psi,t)$ крайову задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\partial U}{\partial t}-\left(1+\alpha\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta U+2\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(U+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0, \qquad (3.29)$$

$$U\big|_{\varphi=0}=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial\psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}}=0, \qquad (3.30)$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.31}$$

де

$$U^{(0)}(\varphi,\psi) = C_1 - C_0(\varphi,\psi).$$

Наближений розв'язок розглядуваної задачі згідно з асимптотичним методом знаходиться аналогічно викладеному вище і має вигляд (3.11), (3.20), (3.21) – (3.24), де $\lambda_n = \dfrac{2n-1}{\pi}$.

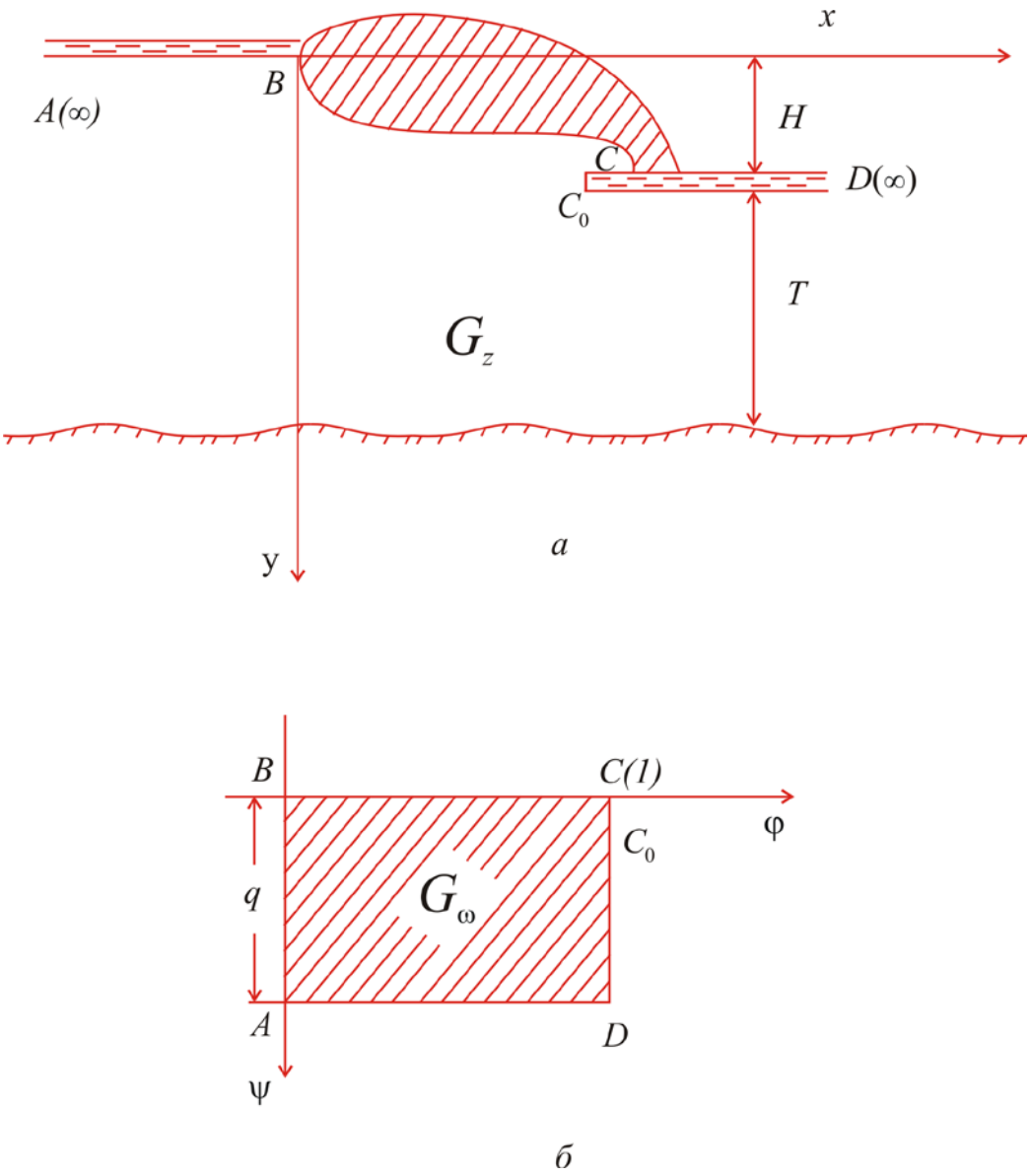


Рис. 3.2. Області фільтрації G_z та комплексного потенціалу течії G_ω у випадку наявності водоупору

3.1.4. Випадок наявності водоупору та відомої концентрації забруднень на цьому водоупорі. **В цьому випадку в області зведеного комплексного потенціалу G_ω (рис. 3.2, *б*) маємо наступну крайову задачу [32]:**

$$\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \left(1 + \alpha\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta C + 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(C + \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0, \tag{3.32}$$

$$C\big|_{\varphi=0} = C_1,\ C\big|_{\varphi=1} = C_2,\ \left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0,\ C\big|_{\psi=q} = C_H, \tag{3.33}$$

$$C\big|_{t=0} = C_0(\varphi,\psi),\ C'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.34}$$

де C_H – задана концентрація розчинника на глибині водоупору.

З урахуванням співвідношення (3.6) отримуємо задачу

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} = \left(1 + \alpha\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta U - 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(U + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t}\right) + \theta, \tag{3.35}$$

$$U\big|_{\substack{\varphi=0,\\ \varphi=1}} = 0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0,\ U\big|_{\psi=q} = g(\varphi), \tag{3.36}$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.37}$$

де $g(\varphi) = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - C_H$, а величини θ і $U^{(0)}(\varphi,\psi)$ визначаються співвідношеннями (3.10).

Розв’язок поставленої задачі шукаємо у вигляді (3.11). Члени внутрішнього наближення υ_i визначаються співвідношеннями (3.20), а для визначення членів зовнішнього наближення U_i маємо крайову задачу:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \Delta U_i - 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial \varphi} + L(U_{i-1})\ \ (i = \overline{0,n}), \tag{3.38}$$

$$U_i\big|_{\substack{\varphi=0,\\ \varphi=1}} = 0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0,\ U_i\big|_{\psi=q} = g_i(\varphi)\ \ (i = \overline{0,n}), \tag{3.39}$$

$$U_i\big|_{t=0} = f_i(\varphi,\psi)\ \ (i = \overline{0,n}), \tag{3.40}$$

де

$$g_i(\varphi)=\begin{cases} g(\varphi), & (i=0); \\ 0, & (i=\overline{1,n}); \end{cases},\ f_i(\varphi,\psi)=\begin{cases} U^{(0)}(\varphi,\psi), & (i=0); \\ -\upsilon_i\big|_{\tau=0}, & (i=\overline{1,n}) \end{cases}$$

і $L(U_{i-1})$ визначається співвідношеннями (3.13).

Розв'язок задачі (3.38)–(3.40) можна отримати у замкненому вигляді застосовуючи, наприклад, метод скінченних інтегральних перетворень [88]. Після простих, проте громіздких перетворень, маємо

$$U_i(\varphi,\psi,t)=F_i(\varphi,\psi,t)+\int_0^1\int_0^q f_i(\xi,\eta)\tilde{G}(\varphi,\xi,\psi,\eta;t)d\eta d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^q L(U_{i-1}(\xi,\eta,\rho))\tilde{G}(\varphi,\xi,\psi,\eta;t-\rho)d\eta d\xi d\rho\ \ (i=\overline{0,n}), \qquad (3.41)$$

де

$$F_i(\varphi,\psi,t)=\frac{4}{q}\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{nm}^{(i)}e^{-(\chi_{nm}t+\mu\varphi)}\sin(\lambda_n\varphi)\cos(\nu_m\psi), \qquad (3.42)$$

$$\tilde{G}(\varphi,\xi,\psi,\eta;t)=\frac{4}{q}\times$$

$$\times\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-[\chi_{nm}t+\mu(\xi-\varphi)]}\cdot\sin(\lambda_n\varphi)\sin(\lambda_n\xi)\cos(\nu_m\psi)\cos(\nu_m\eta), \qquad (3.43)$$

$$\delta_{nm}^{(i)}=(-1)^{m+1}\frac{\gamma_i^{(n)}\nu_m}{\chi_{nm}}(e^{\chi_{nm}}-1),$$

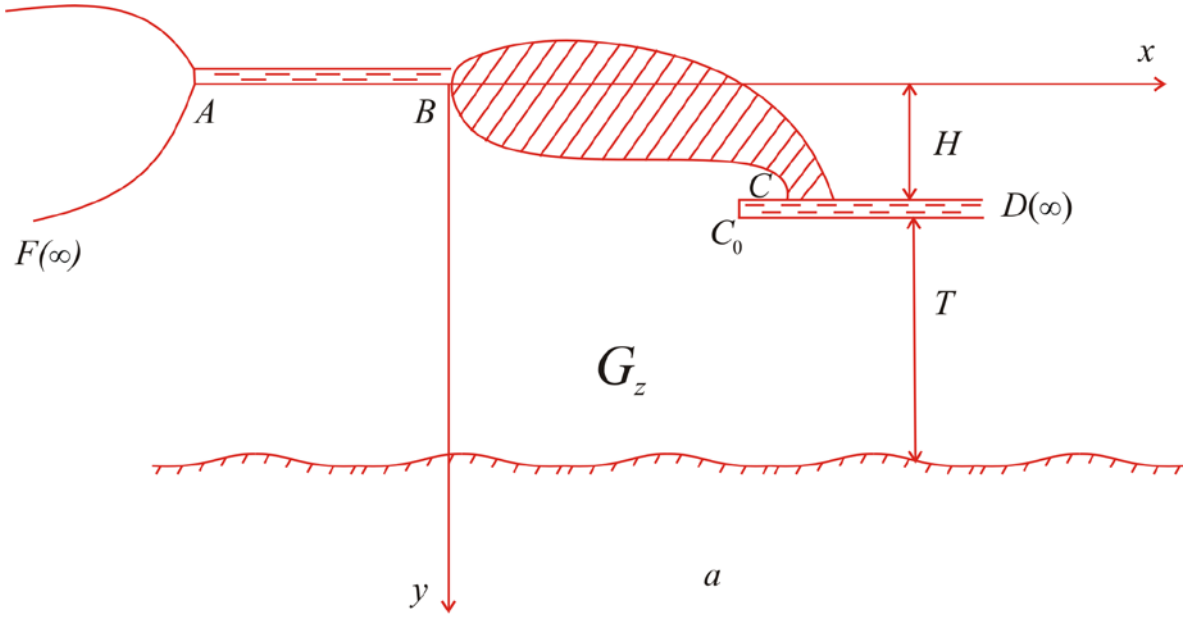
$$\gamma_i^{(n)}=\int_0^1 g_i(\varphi)e^{-\mu\varphi}\cdot\sin(\lambda_n\varphi)d\varphi,$$

$$\nu_m=\frac{(2m-1)\pi}{2q},$$

а величини ν_n і χ_{nm} визначаються співвідношеннями (3.22).

3.1.5. Випадок скінченної напірної водойми та нескінченного водозабору. **Нехай маємо скінченну напірну водойму, а дренована**

водойма чи канал простягається до нескінченності (рис. 3.3, *а*).



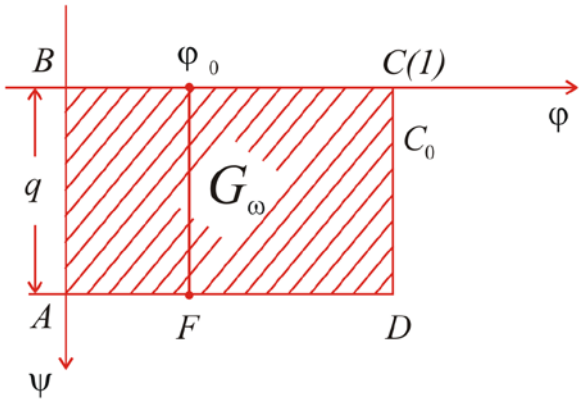


Рис. 3.3. Області фільтрації G_z і комплексного потенціалу течії G_ω у випадку скінченної напірної водойми та нескінченного водозабору

У цьому випадку область зведеного комплексного потенціалу течії, як і вище, є прямокутником G_ω (рис. 3.3, *б*) і для відповідної крайової задачі крайові умови запишуться у вигляді

$$C|_{\varphi=0} = C_1, \; C|_{\varphi=1} = C_2, \tag{3.44}$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0, \ \left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=q, \\ 0\le\varphi<\varphi_0}} = 0, \tag{3.45}$$

$$C\Big|_{\substack{\psi=q, \\ \varphi_0<\varphi\le 1}} = C_H, \tag{3.46}$$

$$C\big|_{t=0} = C_0(\varphi,\psi), \ C'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.47}$$

де C_1, C_2 – задані концентрації розчинника на вході та виході фільтраційного потоку відповідно; C_H – концентрація розчинника на глибині водоупору; $C_0(\varphi,\psi)$ – початкова концентрація в області зведеного комплексного потенціалу; φ_0 – відома величина, що визначається з розв'язку відповідної розглядуваній схемі фільтраційної задачі, розв'язок якої наведено, наприклад, в [123, 124, 125].

Таким чином, для відшукання концентраційного поля у розглядуваному випадку маємо крайову задачу (3.3), (3.44)–(3.47). Перейдемо до нової функції $U(\varphi,\psi,t)$ згідно з співвідношенням (3.6). Тоді крайові умови (3.44) –(3.47) набувають вигляду

$$U\big|_{\varphi=0,\ \varphi=1} = 0, \ \left.\frac{\partial U}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0, \tag{3.48}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=q \\ 0\le\varphi<\varphi_0}} = 0, \ U\Big|_{\substack{\psi=q, \\ \varphi_0<\varphi\le 1}} = f_1(\varphi), \tag{3.49}$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi), \ U'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.50}$$

де $f_1(\varphi) = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - C_H$, а функція $U^{(0)}(\varphi,\psi)$ визначається згідно з співвідношенням (3.10).

Отже, визначення поля концентрацій розчинника для розглядуваної фільтраційної схеми в математичній постановці зводиться до розв'язання крайової задачі (3.7), (3.48)–(3.50). Асимптотичний розв'язок цієї задачі шукатимемо у вигляді (3.11). При цьому, повторюючи вищенаведені викладки, одержимо вирази для членів внутрішнього наближення у вигляді (3.20). Для визначення функцій U_i $(i=\overline{1,n})$ матимемо рівняння (3.12), (3.13) та крайові умови:

$$U_i\big|_{\varphi=0,\ \varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial\psi}\right|_{\psi=0}=0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial\psi}\right|_{\substack{\psi=q,\\ 0\le\varphi<\varphi_0}}=0\ \ (i=\overline{0,n}),\tag{3.51}$$

$$U_0\big|_{\substack{\psi=q,\\ \varphi_0<\varphi\le1}}=f_1(\varphi),\ U_i\big|_{\substack{\psi=q,\\ \varphi_0<\varphi\le1}}=0\ \ (i=\overline{1,n}),\tag{3.52}$$

$$U_0\big|_{t=0}=U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U_i\big|_{t=0}=-\upsilon_i\big|_{\tau=0}\ \ (i=\overline{1,n}).\tag{3.53}$$

Введемо такі позначення:

$$\tilde{f}_i(\varphi)=\begin{cases} f_1(\varphi), & (i=0)\\ 0, & (i=\overline{1,n})\end{cases},\tag{3.54}$$

$$\tilde{U}_i^{(0)}(\varphi,\psi)=\begin{cases} U^{(0)}(\varphi,\psi), & (i=0)\\ -\upsilon_i\big|_{\tau=0}, & (i=\overline{1,n}).\end{cases}\tag{3.55}$$

Тоді, з урахуванням співвідношень (3.54), (3.55), умови (3.52), (3.53) матимуть вигляд

$$U_i\big|_{\substack{\psi=q,\\ \varphi_0<\varphi\le1}}=\tilde{f}_i(\varphi)\ \ (i=\overline{0,n}),\tag{3.56}$$

$$U_i\big|_{t=0}=\tilde{U}_i^{(0)}(\varphi,\psi)\ \ (i=\overline{0,n}).\tag{3.57}$$

Отже, пошук членів зовнішнього наближення зводиться до розв’язання крайової задачі (3.12), (3.13), (3.51), (3.56), (3.57). Звідси, опускаючи для спрощення запису індекси, одержуємо, що пошук членів зовнішнього наближення зводиться до розв’язання крайової задачі:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w+\mu^2 w=\tilde{F}(\varphi,\psi,t),\tag{3.58}$$

$$w\big|_{\varphi=0,\ \varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial\psi}\right|_{\psi=0}=0,\tag{3.59}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial\psi}\right|_{\substack{\psi=q\\ 0\le\varphi<\varphi_0}}=0,\ w\big|_{\substack{\psi=q\\ \varphi_0<\varphi\le1}}=\tilde{\tilde{f}}(\varphi),\tag{3.60}$$

$$w\big|_{t=0}=\tilde{\tilde{U}}^{(0)}(\varphi,\psi),\tag{3.61}$$

де $\tilde{F} = e^{-\mu\varphi} F$, $\tilde{\tilde{f}} = e^{-\mu\varphi} \tilde{f}$, $\tilde{\tilde{U}}^{(0)} = e^{-\mu\varphi} \tilde{U}^{(0)}$, $w = e^{-\mu\varphi} \cdot U$, $F(\varphi, \psi, t)$ – відома функція, що визначається співвідношенням $F = L(U_{i-1})$, причому L має вигляд (3.13).

Знайдемо чисельно-аналітичний розв'язок цієї задачі, використовуючи методику, яка поєднує застосування диференціально-різницевого методу [76] в сукупності з методом сумарних зображень [165]. Для цього введемо до розгляду сіткову область:

$$G_h = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \ \varphi_i = ih_1, \ \psi_j = (j - \frac{1}{2}) h_2, \quad (i = \overline{0, m+1}, \ \ j = \overline{0, n+1}) \right\},$$

де

$$h_1 = \frac{1}{m+1}, \ h_2 = \frac{q}{n}, \ \varphi_{m_0} = \varphi_0 \ \ (0 < m_0 < m+1)$$

і поставимо у відповідність крайовій задачі (3.58)–(3.61) диференціально-різницеву задачу

$$\frac{dw_{ij}(t)}{dt} - \Delta_h w_{ij}(t) + \mu^2 w_{ij}(t) = \tilde{F}_{ij}(t) \ \ (i = \overline{1, m}; \ \ j = \overline{1, n}), \tag{3.62}$$

$$w_{0j} = 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \tag{3.63}$$

$$w_{m+1, j} = 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \tag{3.64}$$

$$w_{i0}(t) - w_{i1}(t) = 0 \ \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.65}$$

$$w_{i,n+1}(t) - w_{in}(t) = \begin{cases} 0, & (i = \overline{1, m_0}); \\ \xi_i(t), & (i = \overline{m_0 + 1, m}); \end{cases} \tag{3.66}$$

$$w_{ij}(0) = \tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)} \qquad (i = \overline{1, m}; \qquad j = \overline{1, n}), \tag{3.67}$$

де $\Delta_h w_{ij}$ – різницевий аналог оператора Лапласа, $w_{ij}(t) = w(\varphi_i, \psi_j, t)$, $\xi_j(t)$ – невідомі параметри–функції, що підлягають визначенню згідно з другою з граничних умов (3.60).

Введемо позначення:

$$\vec{\hat{w}}_j(t) = \left\{\hat{w}_{ij}(t)\right\}_{i=1}^{m} = P^{(m)}\vec{w}_j(t), \;\; \vec{w}_j(t) = \left\{w_{ij}(t)\right\}_{i=1}^{m}, \tag{3.68}$$

$$\vec{\hat{\tilde{F}}}_j(t) = \left\{\hat{\tilde{F}}_{ij}(t)\right\}_{i=1}^{m} = P^{(m)}\vec{\tilde{F}}_j(t), \;\; \vec{\tilde{F}}_j(t) = \left\{\tilde{F}_{ij}(t)\right\}_{i=1}^{m}, \tag{3.69}$$

де $P^{(m)}$ – квадратна матриця порядку m, що визначена в [165]. Тоді, враховуючи умови (3.63),(3.64), одержуємо

$$\frac{d\hat{w}_{ij}(t)}{dt} + \left[\mu^2 + 2h_1^{-2}(1+\gamma^2-\lambda_i)\right]\hat{w}_{ij}(t) - h_1^{-2}\gamma^2\left[\hat{w}_{i,j+1}(t) + \right.$$
$$\left. + \hat{w}_{i,j-1}(t)\right] = \hat{\tilde{F}}_{ij}(t) \;\; (i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}), \tag{3.70}$$

де λ_i – власні числа матриці $T^{(m)}$, визначеної в [165].

Далі, використовуючи граничні умови (3.65), (3.66), скінченно-різницевий аналог розглядуваної задачі запишемо у вигляді

$$\frac{d\vec{\upsilon}_i(t)}{dt} + \left[\mu^2 + 2h_1^{-2}(1+\gamma^2-\lambda_i)\right]\vec{\upsilon}_i(t) -$$
$$-\left(\frac{\gamma}{h_1}\right)^2 T_2^{(n)}\vec{\upsilon}_i(t) = \vec{G}_i(t) \;\; (i=\overline{1,m}), \tag{3.71}$$

$$\vec{\upsilon}_i(0) = \vec{\hat{w}}_i(0) \;\; (i=\overline{1,m}), \tag{3.72}$$

де

$$\vec{G}_i(t) = \vec{\hat{\tilde{F}}}_i(t) + h_1^{-2}\gamma^2\vec{\omega}_i, \;\; \vec{\hat{w}}_i(0) = \left\{\hat{w}_{ij}(0)\right\}_{j=1}^{n}, \tag{3.73}$$

$$\vec{\hat{w}}_j(0) = \left\{\hat{w}_{ij}(0)\right\}_{i=1}^{m} = P^{(m)}\vec{w}_j(0) \;\; ,$$
$$\vec{w}_j(0) = \left\{\tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)}\right\}_{i=1}^{m}, \;\; \hat{\upsilon}_i(t) = \left\{\hat{w}_{ij}\right\}_{j=1}^{n}. \tag{3.74}$$

Введемо до розгляду P-трансформації векторів $\vec{\upsilon}_i(t)$ і $\vec{G}_i(t)$ згідно з співвідношеннями

$$\vec{\hat{\upsilon}}_i(t) = \left\{\hat{\upsilon}_{ij}(t)\right\}_{j=1}^{n} = P_2^{(n)*}\vec{\upsilon}_i(t), \tag{3.75}$$

$$\vec{\hat{G}}_i(t) = \left\{\hat{g}_{ij}(t)\right\}_{j=1}^{n} = P_2^{(n)*}\vec{G}_i(t), \tag{3.76}$$

$$\vec{\hat{\upsilon}}_i(0) = \left\{\hat{\nu}_{ij}\right\}_{j=1}^{n} = P_2^{(n)*}\vec{\hat{w}}_i(0). \tag{3.77}$$

Тут $P_2^{(n)}$ – фундаментальна матриця порядку n, що визначена в [65]; $P_2^{(n)*}$ – матриця, транспонована відносно матриці $P_2^{(n)}$.

Домножуючи (3.71), (3.72) зліва на матрицю $P_2^{(n)*}$, з урахуванням позначень (3.75)–(3.77) одержуємо задачу Коші:

$$\frac{d\hat{\upsilon}_{ij}(t)}{dt} + \sigma_{ij}\hat{\upsilon}_{ij}(t) = \hat{g}_{ij}(t) \;\; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}), \tag{3.78}$$

$$\hat{\upsilon}_{ij}(0) = \hat{\nu}_{ij}, \tag{3.79}$$

де

$$\sigma_{ij} = \mu^2 + 2h_1^{-2}(1 + \gamma^2 - \lambda_i - \gamma^2\lambda_j^{(2)}).$$

Розв’язок задачі (3.78), (3.79) має вигляд

$$\hat{\upsilon}_{ij}(t) = \hat{\nu}_{ij}e^{-\sigma_{ij}t} + \int_0^t \hat{g}_{ij}(\tau)e^{-\sigma_{ij}(t-\tau)}d\tau \;\; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}). \tag{3.80}$$

Звідси, переходячи до оригіналів, після низки простих, проте громіздких обчислень одержуємо розв’язок розглядуваної задачі у вигляді

$$w_{ij}(t) = R_{ij}(t) + \sum_{s=m_0+1}^{m}\int_0^t K_{ij}^{(s)}(t-\tau)\xi_s(\tau)d\tau \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}), \tag{3.81}$$

де

$$R_{ij}(t) = \sum_{\nu,\delta=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{i\nu}p_{\delta\nu}p_{j\alpha}^{(2)}p_{\beta\alpha}^{(2)}\left[\tilde{\tilde{U}}_{\delta\beta}^{(0)}\cdot e^{-\sigma_{\nu\alpha}t} + \int_0^t \tilde{F}_{\delta\beta}(\tau)e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)}d\tau\right], \tag{3.82}$$

$$K_{ij}^{(s)}(t-\tau) = \left(\frac{\gamma}{h_1}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\nu}p_{\nu s}p_{j\alpha}^{(2)}p_{n\alpha}^{(2)}e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)}, \tag{3.83}$$

p_{ij}, $p_{ij}^{(2)}$ – елементи матриць $P^{(m)}$ і $P_2^{(n)}$ відповідно.

Знайдений розв'язок містить невідомі функції-параметри $\xi_i(t)$ $(i=\overline{m_0+1,m})$, для визначення яких з другої з умов (3.60) одержуємо систему лінійних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду:

$$0,5\xi_i(t)=\rho_i(t)-\sum_{s=m_0+1}^{m}\int_0^t K_{in}^{(s)}(t-\tau)\xi_s(\tau)d\tau \quad (i=\overline{m_0+1,m}),$$

де

$$\rho_i(t)=\tilde{\tilde{f}}_i-R_{in}(t).$$

Розв'язуючи зазначену систему інтегральних рівнянь відомими методами (наприклад, методом квадратур [13, 137]) і підставляючи знайдені значення $\xi_i(t)$ у співвідношення (3.81), знаходимо чисельно-аналітичний розв'язок крайової задачі (3.58)–(3.61). Після цього члени зовнішнього наближення знаходимо за формулою

$$U_{ij}(t)=e^{\mu\varphi_i}w_{ij}(t),$$

де $w_{ij}(t)$ визначається згідно з співвідношеннями (3.81)–(3.83). При цьому для першого члена наближення в співвідношеннях (3.82) треба покласти $\tilde{F}=e^{-\mu\varphi}L(U_{-1})=e^{-\mu\varphi}\cdot\theta$, для другого члена наближення $\tilde{F}=e^{-\mu\varphi}\cdot L(U_0)$, для третього – $\tilde{F}=e^{-\mu\varphi}L(U_1)$ і т.д., де $L(U_i)$ визначається згідно з (3.13).

3.1.6. Задача фільтраційно-конвективної дифузії солей, що залягають у вигляді включень за умов нерівноважності дифузійного процесу. Розглянемо задачу неусталеної конвективної дифузії розчинних речовин при фільтрації під гідротехнічною спорудою у випадку, коли область фільтрації обмежена знизу горизонтальним водоупором і пласт містить у собі неоднорідність у вигляді непроникного включення солей (рис. 3.4, *а*). Як зазначається в [123, 125] у цьому випадку область комплексного потенціалу течії матиме вигляд прямокутника з горизонтальним розрізом $\psi=\psi_0$, $\varphi_0<\varphi<\varphi_1$ (рис. 3.4, *б*). Тоді відповідна крайова задача фільтраційно-конвективної дифузії розчинника за умов нерівноважності дифузійного процесу формується для даної фільтраційної схеми у вигляді

$$\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta C + 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(C + \tau_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0, \qquad (3.84)$$

$$C\big|_{\varphi=0} = C_1,\ C\big|_{\varphi=1} = C_2, \qquad (3.85)$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\psi=0,\psi=q} = 0,\ C\Big|_{\substack{\psi=\psi_{0,} \\ \varphi_0<\varphi<\varphi_1}} = C_H, \qquad (3.86)$$

$$C\big|_{t=0} = C_0(\varphi,\psi),\ C'_t\big|_{t=0} = 0, \qquad (3.87)$$

де C_1, C_2, C_H – задані концентрації забруднень відповідно на вході, виході фільтраційного потоку та на включенні; $C_0(\varphi,\psi)$ – початкова концентрація забруднень.

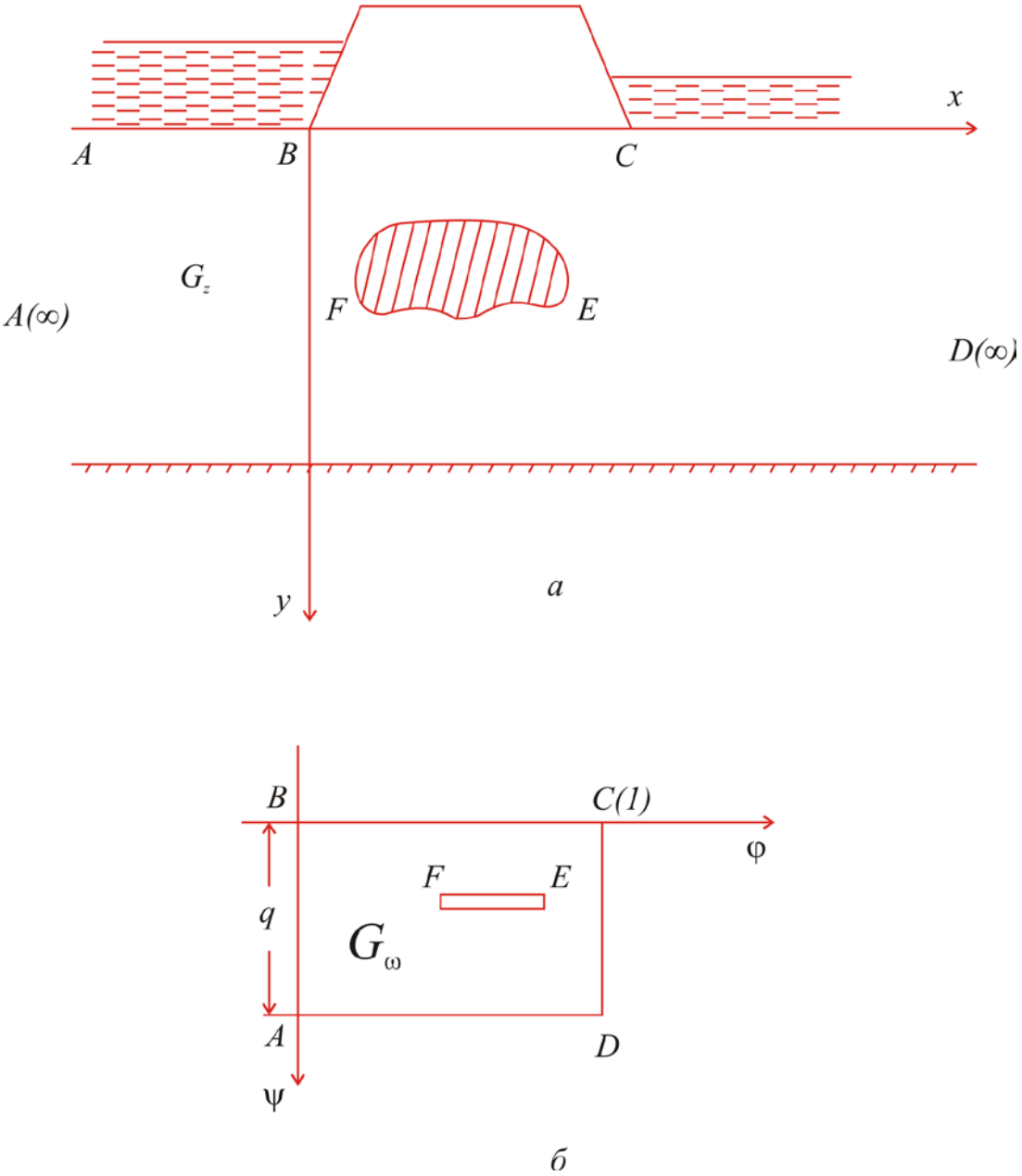


Рис. 3.4. Область фільтрації G_z і область комплексного потенціалу течії G_ω в задачі конвективної дифузії розчинних речовин, які знаходяться у ґрунті у вигляді включень

Вводячи до розгляду функцію $U(\varphi,\psi,t)$ згідно з співвідношенням (3.6) та вважаючи τ_1, τ_2 малими параметрами, перепишемо розглядувану задачу у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\partial U}{\partial t}-\left(1+\alpha\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta U+2\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(U+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}\right)=\theta, \qquad (3.88)$$

$$U\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\psi=q}=0, \tag{3.89}$$

$$U\big|_{\substack{\psi=\psi_0,\\ \varphi_0<\varphi<\varphi_1}}=u_H(\varphi), \tag{3.90}$$

$$U\big|_{t=0}=U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0}=0, \tag{3.91}$$

де $u_H(\varphi)=C_1(1-\varphi)+C_2\varphi-C_H$, а $U^{(0)}(\varphi,\psi)$ і θ задаються співвідношеннями (3.10).

Наближений розв'язок крайової задачі (3.88)–(3.91) згідно з асимптотичним методом шукатимемо у вигляді (3.11). Тоді члени внутрішнього наближення одержимо у вигляді (3.20) а пошук членів зовнішнього наближення зводиться до розв'язання в прямокутнику з горизонтальним розрізом крайової задачі:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}-\Delta U_i+2\mu\frac{\partial U_i}{\partial\varphi}=L(U_{i-1})\ \ (i=\overline{0,n}), \tag{3.92}$$

$$U_i\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\psi=q}=0\ \ (i=\overline{0,n}), \tag{3.93}$$

$$U_i\big|_{\substack{\psi=\psi_0\\ \varphi_0<\varphi<\varphi_1}}=f_i(\varphi)\ \ (i=\overline{0,n}), \tag{3.94}$$

$$U_i\big|_{t=0}=\tilde{U}_i^{(0)}(\varphi,\psi)\ \ (i=\overline{0,n}), \tag{3.95}$$

де

$$f_i(\varphi)=\begin{cases}u_H(\varphi), & (i=0),\\ 0, & (i=\overline{1,n}),\end{cases}$$

$L(U_{i-1})$ визначається згідно з (3.13).

Звідси, опускаючи для спрощення запису індекси та виключаючи з рівняння (3.92) конвективну складову, одержуємо крайову задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w+\mu^2 w=\tilde{F}(\varphi,\psi,t), \tag{3.96}$$

$$w\big|_{\varphi=0,\varphi=1} = 0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\psi=0,\psi=q} = 0, \tag{3.97}$$

$$w\big|_{\substack{\psi=\psi_0 \\ \varphi_0<\varphi<\varphi_1}} = \tilde{f}(\varphi), \tag{3.98}$$

$$w\big|_{t=0} = \tilde{\tilde{U}}^{(0)}(\varphi,\psi), \tag{3.99}$$

де

$$\tilde{f}(\varphi) = e^{-\mu\varphi} f(\varphi),\ w = e^{-\mu\varphi}\cdot U\ .$$

Наближений розв’язок цієї задачі шукатимемо за вищевикладеною методикою. Вводячи до розгляду сіткову область G_h, поставимо у відповідність розглядуваній крайовій задачі диференціально-різницеву задачу вигляду

$$\frac{dw_{ij}(t)}{dt} - \Delta_h w_{ij}(t) + \mu^2 w_{ij}(t) = \tilde{\tilde{F}}_{ij}(t)\ \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}), \tag{3.100}$$

$$w_{0j} = 0\ \ (j=\overline{1,n}), \tag{3.101}$$

$$w_{m+1,j} = 0\ \ (j=\overline{1,n}), \tag{3.102}$$

$$w_{i0}(t) - w_{i1}(t) = 0\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{3.103}$$

$$w_{i,n+1}(t) - w_{in}(t) = 0\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{3.104}$$

$$w_{ij}(0) = \tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)}\ \ (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}), \tag{3.105}$$

де

$$\tilde{\tilde{F}}_{ij}(t) = \begin{cases} \xi_i(t) + \tilde{F}_{ij} & (i=\overline{m_0+1,m_1};\quad j=n_0), \\ \tilde{F}_{ij} & \text{â}\ \ {}^{3}\text{í}\ \text{ø}\ \text{è}\ \text{õ}\ \ \text{âóçëàõ}\ \ G_h, \end{cases}$$

тобто $\tilde{\tilde{F}}_{ij}(t)$ вважається відмінною від $\tilde{F}_{ij}(t)$ лише у вузлах сітки, які знаходяться на розрізі $\psi = \psi_{in_0}$, $i=\overline{m_0+1,\ m_1}$. Тут $\xi_i(t)$ – невідомі функції–

параметри, що підлягають визначенню з граничної умови на розрізі: $w_{in_0} = \tilde{f}_i$ $(i = \overline{m_0 + 1, m_1})$.

Повторюючи з незначними змінами викладки попереднього параграфа, одержуємо розв'язок диференціально-різницевої задачі (3.100)–(3.105) у вигляді

$$w_{ij}(t) = R_{ij}(t) + \sum_{\delta=m_0+1}^{m_1} \int_0^t K_{ij}^{(\delta)}(t-\tau)\xi_{\delta n_0}(\tau)d\tau \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}), \quad (3.106)$$

де $R_{ij}(t)$ визначається співвідношенням (82), а для $K_{ij}^{(\delta)}(t-\tau)$ маємо співвідношення

$$K_{ij}^{(\delta)}(t-\tau) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\nu} p_{\delta\nu} p_{j\alpha}^{(2)} p_{n_0\alpha}^{(2)} \cdot e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)}. \quad (3.107)$$

Для визначення невідомих функцій-параметрів $\xi_i(t)$ $(i = \overline{m_0 + 1, m_1})$, використовуючи граничну умову на розрізі, одержуємо систему лінійних інтегральних рівнянь:

$$\tilde{f}_i = R_{in_0}(t) + \sum_{\delta=m_0+1}^{m_1} \int_0^t K_{in_0}^{(\delta)}(t-\tau)\xi_{\delta n_0}(\tau)d\tau, \ (i = \overline{m_0 + 1, m_1}). \quad (3.108)$$

Розв'язуючи систему (3.108) відомими чисельними методами [13] і підставляючи знайдені значення $\xi_i(t)$ в співвідношення (3.106), одержуємо наближені значення функцій – членів зовнішнього наближення в асимптотичному розкладі (3.11).

3.1.7. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації з напірної водойми до водозабору за наявності внутрішнього дренажу. **У випадку наявності в області течії внутрішнього дренажу при скінченній глибині залягання водоупору (рис. 3.5, *а*) областю комплексного потенціалу течії G_ω буде семикутник (рис. 3.5, *б*) [30, 125]; зокрема у випадку, коли внутрішній дренаж і водозабір знаходяться на одному рівні, областю G_ω буде прямокутник з горизонтальним розрізом [133]. У цьому випадку відповідні крайові умови для рівняння (3.3) в області зведеного комплексного потенціалу записуються у вигляді**

$$C\big|_{\varphi=0} = C_1,\ C\big|_{\substack{\varphi=1\\ 0<\psi<\psi^*}} = C_2, \tag{3.109}$$

$$C\big|_{\substack{\varphi=\varphi^*\\ \psi^*<\psi<q}} = C_3,\ \left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=\psi^*}}^{\substack{\psi=0,\psi=q,\\ (\varphi\in(\varphi^{**},\varphi^*)\cup(\varphi^{**},1))}} = 0, \tag{3.110}$$

$$C\big|_{t=0} = C_0(\varphi,\psi),\ C'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.111}$$

де C_1, C_2, C_3 – задані концентрації розчинника відповідно на вході фільтраційного потоку, внутрішній дрені та виході потоку; $0<\varphi^{**}<\varphi^*<1$, $0<\psi^*<q$; φ^{**}, φ^*,ψ^*, q – задані дійсні числа, що відомі з розв'язку фільтраційної задачі [123, 133].

Вводячи до розгляду функцію $U(\varphi,\psi,t)$ визначену співвідношенням (3.6), одержуємо крайову задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \left(1+\alpha\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta U + 2\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(U+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \theta, \tag{3.112}$$

$$U\big|_{\varphi=0,\varphi=1} = 0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial \psi}\right|_{\psi=0,\psi=q,\psi=\psi^*} = 0, \tag{3.113}$$

$$U\big|_{\varphi=\varphi^*} = a, \tag{3.114}$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3.115}$$

де

$$a = C_1(1-\varphi_0) + C_2\varphi_0 - C_3,\ \alpha\in R\setminus\{0\};$$

ε – малий параметр; $U^{(0)}(\varphi,\psi)$ і θ визначаються співвідношеннями (3.10).

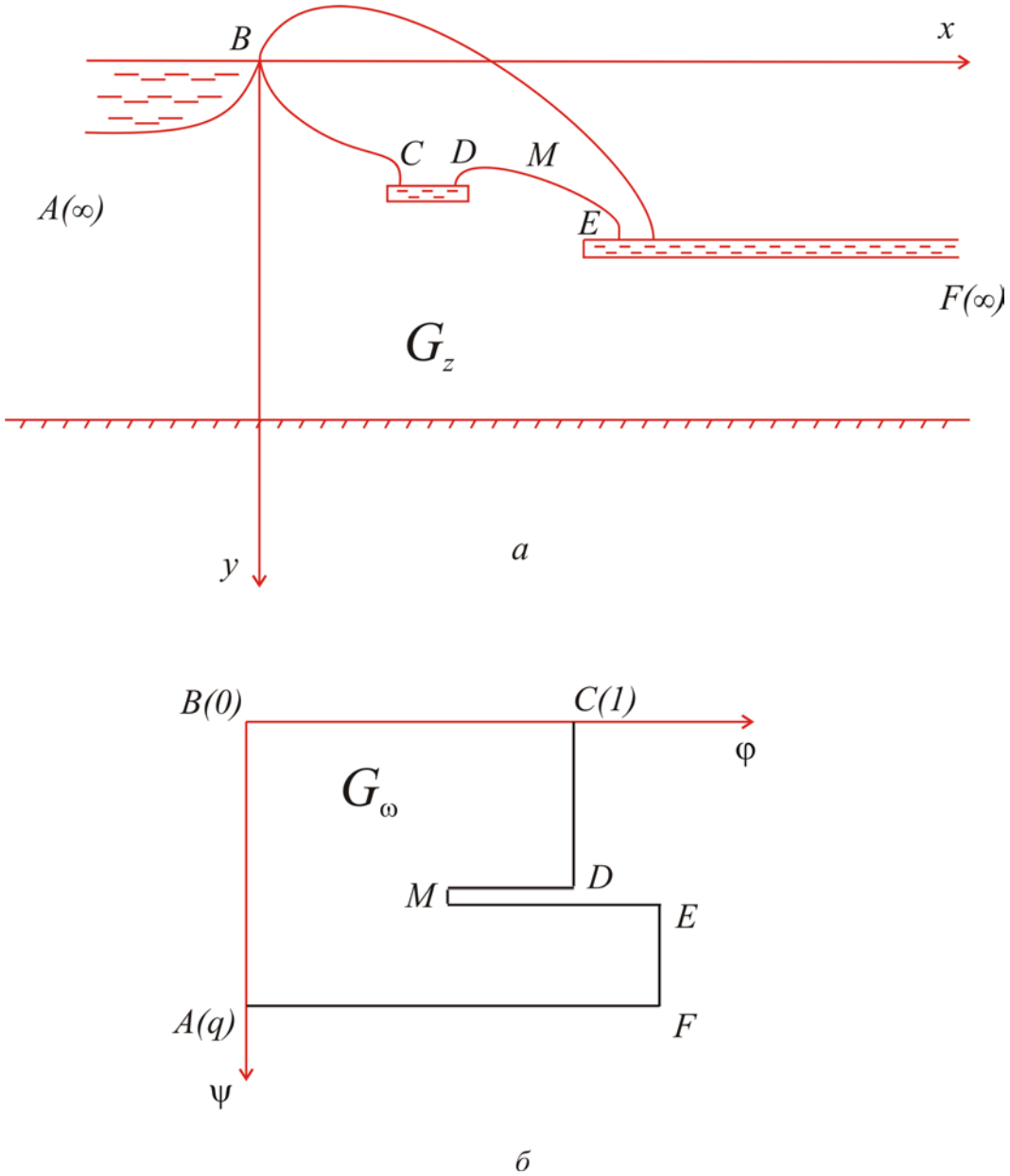


Рис. 3.5 Область фільтрації G_z і область комплексного потенціалу течії G_ω в задачі дифузії забруднень при фільтрації за наявності внутрішнього дренажу

Наближений розв’язок цієї крайової задачі шукатимемо у вигляді (3.11). Тоді члени внутрішнього наближення одержимо у вигляді (3.20), а для визначення членів зовнішнього наближення матимемо наступні крайові задачі:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - \Delta U_i + 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial \varphi} = L(U_{i-1}) \ \ (i = \overline{0, n}), \qquad (3.116)$$

$$U_i\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\psi=q,\psi=\psi^*}=0\ \ (i=\overline{0,n}),\tag{3.117}$$

$$U_i\big|_{\varphi=\varphi^*}=b_i\ \ (i=\overline{0,n}),\tag{3.118}$$

$$U_i\big|_{t=0}=\tilde{U}_i^{(0)}(\varphi,\psi),\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial t}\right|_{t=0}=0\ \ (i=\overline{0,n}),\tag{3.119}$$

де

$$b_i=\begin{cases}a & (i=0),\\ 0 & (i=\overline{1,n}),\end{cases}\ \tilde{U}_i^{(0)}=\begin{cases}U^{(0)}(\varphi,\psi) & (i=0),\\ -\upsilon_i\big|_{\tau=0} & (i=\overline{1,n}),\end{cases}\tag{3.120}$$

$L(U_{i-1})$ визначається згідно з (3.13).

Таким чином, пошук членів внутрішнього наближення зводиться до розв’язання крайових задач (3.116)–(3.119). Опускаючи надалі для спрощення запису індекс “i” в задачах (3.116)–(3.120), запишемо їх у вигляді такої крайової задачі:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\Delta U+2\mu\frac{\partial U}{\partial\varphi}=F(\varphi,\psi,t),\tag{3.121}$$

$$U\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ U\big|_{\varphi=\varphi^*}=b,\tag{3.122}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\psi=q,\psi=\psi^*}=0,\tag{3.123}$$

$$U\big|_{t=0}=\tilde{U}^{(0)}(\varphi,\psi),\tag{3.124}$$

де через $F(\varphi,\psi,t)$ позначена права частина рівняння (3.116) (F – відома для кожного $i=\overline{0,n}$ функція).

Виключаючи з (3.121) конвективну складову, одержуємо для функції $w(\varphi,\psi,t)$, визначеної співвідношенням $w=e^{-\mu\varphi}U$, крайову задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w+\mu^2 w=\tilde{F}(\varphi,\psi,t),\tag{3.125}$$

$$w\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ w\big|_{\varphi=\varphi^*}=\kappa,\tag{3.126}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\psi=0,\psi=q,\psi=\psi^*} = 0, \tag{3.127}$$

$$w|_{t=0} = \tilde{\tilde{U}}^{(0)}(\varphi,\psi), \tag{3.128}$$

де позначено $\kappa = be^{-\mu\varphi^*}$.

Із застосуванням методики, що поєднує диференціально-різницевий метод [76] та метод сумарних зображень [165], одержимо розв'язок крайової задачі (3.125)–(3.128). Введемо до розгляду сіткову область G_h, яка об'єднує два сіткових прямокутники

$$G_h = G_h^I \cup G_h^{II},$$

де

$$G_h^I = \left\{(\varphi_i,\psi_i):\ \varphi_i = ih_1,\ \ \psi_j = (j-0,5)h_2,\quad (1 \le i \le m,\quad 1 \le j \le n_0)\right\},$$

$$G_h^{II} = \left\{(\varphi_i,\psi_i):\ \varphi_i = ih_1,\ \ \psi_j = (j-0,5)h_2,\quad (1 \le i \le m_1-1,\quad n_0+1 \le j \le n)\right\},$$

причому $\varphi_{m_0+1} = \varphi^{**}$, $\varphi_{m_1} = \varphi^*$, $\psi_{n_0} = \psi^*$, $\psi_{n+1} = q + \frac{h_2}{2}$, $\psi_0 = -\frac{h_2}{2}$, h_1, h_2 – кроки сітки по φ і ψ відповідно.

Розглядуваній крайовій задачі поставимо у відповідність наступні дві диференціально-різницеві крайові задачі у сіткових прямокутниках G_h^I і G_h^{II} відповідно:

$$\frac{dw_{ij}(t)}{dt} - \Delta_h w_{ij}(t) + \mu^2 w_{ij}(t) = \tilde{F}_{ij}(t)\ \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n_0}), \tag{3.129}$$

$$w_{0j}(t) = 0\ \ (j = \overline{1,n_0}), \tag{3.130}$$

$$w_{m+1,j}(t) = 0\ \ (j = \overline{1,n_0}), \tag{3.131}$$

$$w_{i0}(t) - w_{i1}(t) = 0\ \ (i = \overline{1,m}), \tag{3.132}$$

$$w_{i,n_0+1}(t) - w_{in_0}(t) = \xi_i(t) \ \ (i = \overline{1, m_0}), \tag{3.133}$$

$$w_{i,n_0+1}(t) - w_{in_0}(t) = 0 \ \ (i = \overline{m_0 + 1, m}), \tag{3.134}$$

$$w_{ij}(0) = \tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)} \ \ (i = \overline{1, m}; \qquad j = \overline{1, n_0}), \tag{3.135}$$

$$\frac{dw_{ij}(t)}{dt} - \Delta_h w_{ij}(t) + \mu^2 w_{ij}(t) = \tilde{F}_{ij}(t) \ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}; \ j = \overline{n_0 + 1, n}), \tag{3.136}$$

$$w_{0j}(t) = 0 \ \ (j = \overline{n_0 + 1, n}), \tag{3.137}$$

$$w_{m_1 j}(t) = \kappa \ \ (j = \overline{n_0 + 1, n}), \tag{3.138}$$

$$w_{i,n+1}(t) - w_{in}(t) = 0 \ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}), \tag{3.139}$$

$$w_{in_0}(t) - w_{i,n_0+1}(t) = -\xi_i(t) \ \ (i = \overline{1, m_0}), \tag{3.140}$$

$$w_{in_0}(t) - w_{i,n_0+1}(t) = 0 \ \ (i = \overline{m_0 + 1, m_1 - 1}), \tag{3.141}$$

$$w_{ij}(0) = \tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)} \ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}; \ j = \overline{n_0 + 1, n}). \tag{3.142}$$

Тут $\xi_i(t)$ $(i = \overline{1, m_0})$ – невідомі параметри–функції, які підлягають визначенню з умови зшивання розв'язків на спільній межі сіткових прямокутників G_h^I і G_h^{II}, тобто в точках $(\varphi_i, \ \psi_{n_0})$ $(i = \overline{1, m_0})$; Δ_h – п'ятиточковий різницевий аналог оператора Лапласа.

Одержимо спочатку розв'язок задачі (3.129)–(3.135). Для цього введемо до розгляду означену в [165] квадратну матрицю $T^{(m)}$. З урахуванням властивостей матриці $P^{(m)}$ [165] і позначень (3.68), (3.69) одержуємо співвідношення (3.70) для $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n_0}$. Після цього вводимо до розгляду квадратну матрицю $T_2^{(n_0)}$ [165] порядку n_0 і вектори (3.73), (3.74) для $j = \overline{1, n_0}$. У результаті отримаємо задачу Коші, яка у векторній формі набуває вигляду (3.78), (3.79) де матрицю $T_2^{(n)}$ треба замінити матрицею $T_2^{(n_0)}$. Після введення P-трансформацій векторів $\vec{\upsilon}_i(t)$ і $\vec{G}_i(t)$ вигляду (3.75),

(3.76), де попередньо треба замінити $P_2^{(n)^*}$ на $P_2^{(n_0)^*}$, зводимо розглядувану задачу до розв'язання задачі Коші типу (3.78), (3.79). Розв'язок цієї задачі записується у вигляді (3.81). Звідси, переходячи до оригіналів, після простих, проте громіздких обчислень одержуємо розв'язок розглядуваної крайової задачі в сітковому прямокутнику G_h^I, який позначатимемо $w_{ij}^{(I)}(t)$. Цей розв'язок має вигляд

$$w_{ij}^{(I)}(t) = R_{1_{ij}}(t) + \sum_{s=1}^{m_0} \int_0^t K_{1_{ij}}^{(s)}(t-\tau)\xi_s(\tau)d\tau \quad (i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n_0}), \quad (3.143)$$

де

$$R_{1_{ij}}(t) = \sum_{\nu,\delta=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_0} p_{i\nu} p_{\delta\nu} p_{j\alpha}^{(2)} p_{\beta\alpha}^{(2)} \left[\tilde{\tilde{U}}_{\alpha\beta}^{(0)} e^{-\sigma_{\nu\alpha} t} + \int_0^t \tilde{F}_{\delta\beta}(\tau) e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)} d\tau \right], \quad (3.144)$$

$$K_{1_{ij}}^{(s)}(t-\tau) = \left(\frac{\gamma}{h_1}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_0} p_{i\nu} p_{\nu s} p_{j\alpha}^{(2)} p_{n_0\alpha}^{(2)} e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)}. \quad (3.145)$$

Переходячи до одержання розв'язку крайової задачі (3.136)–(3.142) зауважимо, що цей розв'язок знаходиться аналогічно викладеному вище. Коротко зупинимося лише на вузлових моментах одержання зазначеного розв'язку. Вводячи до розгляду квадратну матрицю $T^{(m_1-1)}$, визначену в [165], запишемо рівняння (3.136) у вигляді (3.70) для $j=\overline{n_0+1,n}$. Далі вводячи до розгляду квадратну матрицю $P^{(m_1-1)}$ і застосовуючи до (3.136) відповідне P-перетворення, маємо співвідношення

$$\frac{d\widehat{w}_{ij}(t)}{dt} + \left[\mu^2 + 2h_1^{-2}(1+\gamma^2-\lambda_i)\right]\widehat{w}_{ij}(t) - h_1^{-2}\gamma^2\left[\widehat{w}_{i,j+1}(t) + \right.$$

$$\left. + \widehat{w}_{i,j-1}(t)\right] = \widehat{\tilde{F}}'_{ij}(t) \quad (i=\overline{1,m_1-1};\ j=\overline{n_0+1,n}), \quad (3.146)$$

де

$$\vec{\widehat{w}}_j(t) = \left\{\widehat{w}_{ij}(t)\right\}_{i=1}^{m_1-1} = P^{(m_1-1)}\vec{w}_j(t), \quad (3.147)$$

$$\vec{\widehat{\tilde{F}}}'_j(t) = \left\{\widehat{\tilde{F}}'_{ij}\right\}_{i=1}^{m_1-1} = P^{(m_1-1)}\vec{\tilde{F}}'_j(t), \quad (3.148)$$

$$\vec{\tilde{F}}'_j(t) = \vec{\tilde{F}}_j(t) - \vec{\kappa},\ \ \vec{\kappa} = \{0, 0, ..., 0, \kappa\}^T\ . \qquad (3.149)$$

Це перетворення застосовуємо також до крайових умов. Далі вводимо до розгляду квадратну матрицю $T_2^{(n-n_0)}$ [165] і переписуємо з урахуванням цього систему (3.146) і крайові умови. Одержимо задачу Коші, яка в векторній формі матиме вигляд

$$\frac{d\vec{\upsilon}_i(t)}{dt} + \left[\mu^2 + 2h_1^{-2}(1+\gamma^2 - \lambda_i)\right]\vec{\upsilon}_i(t) -$$
$$-h_1^{-2}\gamma^2 T_2^{(n-n_0)}\vec{\upsilon}_i(t) = \vec{G}_i(t)\ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}), \qquad (3.150)$$

$$\vec{\upsilon}_i(0) = \vec{\hat{w}}_i(0)\ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}), \qquad (3.151)$$

де

$$\vec{\upsilon}_i(t) = \left\{\hat{w}_{ij}(t)\right\}_{j=n_0+1}^{n},\ \ \vec{G}_i(t) = \vec{\tilde{\tilde{F}}}'_i(t) - \left(\frac{\gamma}{h_1}\right)^2 \vec{q}_i(t),$$

$$\vec{q}_i(t) = \left\{\underbrace{\hat{\xi}_i(t), 0, ..., 0}_{n-n_0}\right\}^T\ \ (i = \overline{1, m_1 - 1}),$$

$$\vec{\hat{w}}_i(0) = \left\{\vec{w}_{ij}(0)\right\}_{j=n_0+1}^{n},$$

$$\vec{w}_j(0) = \left\{\tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(0)}\right\}_{i=1}^{m_1-1},\ \ \vec{\hat{w}}_j(0) = \left\{\hat{w}_{ij}(0)\right\}_{i=1}^{m_1-1} = P^{(m_1-1)}\vec{w}_j(0).$$

Після застосування до задачі (3.150), (3.151) P-перетворення згідно з співвідношеннями

$$\vec{\hat{\upsilon}}_i(t) = \left\{\hat{\upsilon}_{ij}(t)\right\}_{j=n_0+1}^{n} = P_2^{(n-n_0)^*}\vec{\upsilon}_i(t), \qquad (3.152)$$

$$\vec{\hat{G}}_i(t) = \left\{\hat{g}_{ij}(t)\right\}_{j=n_0+1}^{n} = P_2^{(n-n_0)^*}\vec{G}_i(t), \qquad (3.153)$$

де $P_2^{(n-n_0)^*}$ – матриця, транспонована до матриці $P_2^{(n-n_0)^*}$ [165], одержимо в зображеннях задачу Коші вигляду (3.78), (3.79). Розв'язок цієї задачі має вигляд (3.80). Повертаючись в область оригиналів згідно з формулами обернення [165], одержуємо розв'язок розглядуваної крайової задачі в сітковому прямокутнику G_h^{II}, який позначимо через $w_{ij}^{(II)}(t)$. Цей розв'язок має вигляд

$$w_{ij}^{(II)}(t) = R_{2_{ij}}(t) - \sum_{s=1}^{m_0} \int_0^t K_{2_{ij}}^{(s)}(t-\tau)\xi_s(\tau)d\tau \quad (i=\overline{1,m_1-1};\ j=\overline{n_0+1,n}), \quad (3.154)$$

де

$$R_{2_{ij}}(t) = \sum_{\nu,\delta=1}^{m_1-1} \sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n} p_{i\nu} p_{\delta\nu} p_{j\alpha}^{(2)} p_{\beta\alpha}^{(2)} \left[\tilde{\tilde{U}}_{\alpha\beta}^{(0)} e^{-\sigma_{\nu\alpha} t} + \int_0^t \tilde{F}'_{\delta\beta}(\tau) e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)} d\tau \right], \quad (3.155)$$

$$K_{2_{ij}}^{(s)}(t-\tau) = h_1^{-2}\gamma^2 \sum_{\nu=1}^{m_1-1} \sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n} p_{i\nu} p_{\nu s} p_{j\alpha}^{(2)} p_{n\alpha}^{(2)} e^{-\sigma_{\nu\alpha}(t-\tau)}, \quad (3.156)$$

$$\tilde{F}'_{ij}(\tau) = \begin{cases} \tilde{F}_{ij}(\tau) & (i=\overline{1,m_1-2};\quad j=\overline{n_0+1,n}), \\ \tilde{F}_{ij}(\tau) - \kappa & (i=m_1-1;\quad j=\overline{n_0+1,n}). \end{cases} \quad (3.157)$$

Для визначення невідомих функцій–параметрів $\xi_i(\tau)$ $(i=\overline{1,m_0})$ з умови збігу одержаних розв'язків $w_{ij}^{(I)}$ і $w_{ij}^{(II)}$ на прямій $\psi=\psi_{in_0}$ $(i=\overline{1,m_0})$ маємо систему лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра:

$$R'_i(t) + \sum_{s=1}^{m_0} \int_0^t K_i^{(s)}(t-\tau)\xi_s(\tau)d\tau = 0 \quad (i=\overline{1,m_0}), \quad (3.158)$$

де

$$R'_i(t) = R_{1_{in_0}}(t) - R_{2_{in_0}}(t),$$

$$K_i^{(s)}(t-\tau) = K_{1_{in_0}}^{(s)}(t-\tau) + K_{2_{in_0}}^{(s)}(t-\tau) \quad (i=\overline{1,m_0};\quad s=\overline{1,m_0}). \quad (3.159)$$

Після знаходження розв'язку системи (3.158) одним з відомих методів [13, 137], розв'язок розглядуваної задачі визначається формулами (3.143), (3.154). Звідси, з використанням вище введених позначень, тривіально одержуємо наближені значення членів

асимптотики зовнішнього наближення.

Наведені розв'язки мають конструктивний характер. Комп'ютерна реалізація одержаних вище залежностей для конкретних значень вхідних параметрів, що становлять практичний інтерес, дає змогу здійснити уточнений прогноз динаміки поширення розчинних речовин – забрудників середовища в фільтраційній області за складних гідрогеологічних умов, коли значний вплив на динаміку процесу міграції забруднень може мати наявність властивості нерівноважності дифузійного процесу, що унеможливлює застосування традиційного на даний час математичного опису процесу фільтраційно-конвективної дифузії на основі класичного закону дифузії Фіка [12].

3.2. Конвективна дифузія забруднень при фільтрації зі сховища промстоків до водозабору за умов нерівноважності дифузійного процесу та врахування масообміну

У даному розділі задачі конвективної дифузії забруднень при плоско-вертикальній усталеній фільтрації розв'язуються за умов нерівноважності дифузійного процесу, коли має місце значне відхилення від класичного закону Фіка та за наявності масообміну з вміщуючими породами.

У випадку наявності масообміну з вміщуючими породами рівняння матеріального балансу має вигляд [12, 136, 151, 167, 173]:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{q} = 0, \tag{3.160}$$

де C – концентрація дифундуючої речовини, N – концентрація речовини в твердій фазі, σ – пористість середовища, $\vec{q}$ – питомий потік маси домішок, який враховує дифузійне та конвективне перенесення:

$$\vec{q} = \vec{\upsilon} C + \vec{q}_D. \tag{3.161}$$

Тут $\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості фільтрації розчину, $\vec{q}_D$ – дифузійний потік.

Тоді, з урахуванням запропонованого О.В. Ликовим узагальнення закону Фіка для дифузійного потоку (3.1), у двовимірному випадку конвективної дифузії при плоскій стаціонарній фільтрації маємо рівняння

$$\sigma\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \frac{\partial N}{\partial t} + \vec{\upsilon} \cdot \nabla \left(C + \tau_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right) = D\Delta \left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \tag{3.162}$$

де τ_1, τ_2 – параметри релаксації дифузійного потоку і концентрації відповідно.

Якщо прийняти рівняння кінетики масообміну у вигляді рівняння нерівноважної оборотної сорбції при ізотермі Генрі [167, 173]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \beta(\sigma C - \alpha N), \tag{3.163}$$

де α – коефіцієнт рівноважного сорбційного розподілу, β – коефіцієнт швидкості сорбції, то математична модель розглядуваного процесу складатиметься з рівнянь (3.162), (3.163). Виключаючи з цієї системи рівнянь функцію $N(x, y, t)$, одержуємо рівняння

$$\sigma\tau_1 \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} + \sigma(1 + \tau_1\beta + \alpha\beta\tau_1)\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma\beta(1+\alpha)\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\upsilon}\cdot\nabla\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \tau_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right) +$$
$$+\alpha\beta\vec{\upsilon}\cdot\nabla\left(C + \tau_1\frac{\partial C}{\partial t}\right) = D\Delta\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \tau_2\frac{\partial^2 C}{\partial t}\right) + \alpha\beta D\Delta\left(C + \tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right). \tag{3.164}$$

З огляду на те, що область фільтрації містить невідомі криві депресії, перейдемо в (3.164) до області комплексного потенціалу течії [173] $\omega = \varphi + i\psi$, де φ – потенціал швидкості фільтрації, ψ – функція току. В результаті нескладних, але громіздких перетворень одержуємо рівняння

$$\sigma\tau_1\frac{\partial^3 C}{\partial t^3} + \sigma\left[1 + \beta(1+\alpha)\tau_1\right]\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma\beta(1+\alpha)\frac{\partial C}{\partial t} =$$
$$= \upsilon^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(D\tau_2\Delta C - \tau_1\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[D(1+\alpha\beta\tau_2)\Delta C - (1+\alpha\beta\tau_1)\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right] +\right.$$
$$\left. +\alpha\beta\left(D\Delta C - \frac{\partial C}{\partial\varphi}\right)\right\}, \tag{3.165}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\psi^2}$ – оператор Лапласа за змінними φ, ψ.

Осереднюючи швидкість фільтрації υ по області комплексного потенціалу і вводячи безрозмірні змінні та параметри співвідношеннями

$$\varphi' = \frac{\varphi}{kH},\ \psi' = \frac{\psi}{kH},\ t' = \frac{D\upsilon^2}{\sigma(kH)^2}t,\ \tau_i' = \frac{D\upsilon^2}{\sigma(kH)^2}\tau_i\ \ (i = 1, 2),$$
$$\mu = \frac{kH}{2D},\ \beta' = \frac{\sigma(kH)^2}{D\upsilon^2}\beta, \tag{3.166}$$

де k – коефіцієнт фільтрації, H – напір, одержуємо наступне рівняння (знак “штрих” над безрозмірними змінними опущено):

$$\tau_1 \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} + [1+\beta(1+\alpha)\tau_1]\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \beta(1+\alpha)\frac{\partial C}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\tau_2 \Delta C - 2\mu\tau_1 \frac{\partial C}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[(1+\alpha\beta\tau_2)\Delta C - 2\mu(1+\alpha\beta\tau_1)\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right] +$$
$$+\alpha\beta\left(\Delta C - 2\mu\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right). \qquad (3.167)$$

Відповідні крайові умови для розглядуваної задачі приймають вигляд

$$C\big|_{\varphi=0} = C_1,\ C\big|_{\varphi=1} = C_2,\ \left.\frac{\partial C}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0, \qquad (3.168)$$

$$C\big|_{t=0} = C^{(0)}(\varphi,\psi),\ C'_t\big|_{t=0} = C^{(1)}(\varphi,\psi),\ C''_{tt}\big|_{t=0} = C^{(2)}(\varphi,\psi), \qquad (3.169)$$

де $q = \dfrac{Q}{kH}$ – зведена фільтраційна витрата, Q – повна витрата, $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ – задані функції.

Таким чином, вивчення процесу конвективної дифузії розчинних речовин при фільтрації зі сховища промстоків до водозабору за умов нерівноважності дифузійного процесу та наявності массобміну з вміщуючими породами зводиться до розв’язання крайової задачі (3.167)–(3.169).

Попередньо виконаємо перехід до однорідних граничних умов за допомогою заміни $C(\varphi,\psi,t) = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - U(\varphi,\psi,t)$. Одержуємо крайову задачу:

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + [1+\beta(1+\alpha)\tau_1]\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (1+\alpha)\beta\frac{\partial U}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\tau_2 \Delta U - 2\mu\tau_1 \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[(1+\alpha\beta\tau_2)\Delta U - 2\mu(1+\alpha\beta\tau_1)\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right] +$$
$$+\alpha\beta\left(\Delta U - 2\mu\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \theta, \qquad (3.170)$$

$$U\big|_{\varphi=0} = 0,\ U\big|_{\varphi=1} = 0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0, \qquad (3.171)$$

$$U\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ U'_t\big|_{t=0} = U^{(1)}(\varphi,\psi),\ U''_{tt}\big|_{t=0} = U^{(2)}(\varphi,\psi), \quad (3.172)$$

де

$$\theta = 2\alpha\beta\mu(C_2 - C_1),\ U^{(i)} = C_1(1-\varphi) + C_2\varphi - C^{(i)}(\varphi,\psi)\ \ (i = 0,1,2).$$

Вважаючи параметри релаксації τ_1, τ_2 малими параметрами одного порядку малості, покладемо $\tau_1 = \varepsilon$, $\tau_2 = \gamma\varepsilon$ $(\gamma \in R \setminus \{0\})$. Тоді рівняння (3.170) перепишеться так:

$$\varepsilon\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + [1+\beta(1+\alpha)\varepsilon]\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (1+\alpha)\beta\frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\gamma\Delta U - 2\mu\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[(1+\alpha\beta\gamma\varepsilon)\Delta U - 2\mu(1+\alpha\beta\varepsilon)\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right] + \alpha\beta\left(\Delta U - 2\mu\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \theta. \quad (3.173)$$

Згідно з асимптотичним методом [64] наближений розв’язок задачі (3.173), (3.171), (3.172) шукатимемо у вигляді

$$U = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left[U_i(\varphi,\psi,t) + \upsilon_i(\varphi,\psi,\tau)\right] + R_n, \quad (3.174)$$

де $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$.

Рівняння для визначення регулярної частини асимптотики одержуємо застосуванням стандартної процедури методу збурень. Маємо

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \beta(1+\alpha)\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta U_i) - 2\mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial\varphi} + \alpha\beta\Delta U_i -$$
$$-2\mu\alpha\beta\frac{\partial U_i}{\partial\varphi} + F_i(\varphi,\psi,t)\ \ (i = \overline{0,n}), \quad (3.175)$$

де

$$F_0 = \theta,$$

$$F_i(\varphi,\psi,t) = -\frac{\partial^3 U_{i-1}}{\partial t^3} - \beta(1+\alpha)\frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta U_{i-1}) -$$
$$-2\mu\frac{\partial^3 U_{i-1}}{\partial t^2\partial\varphi} + \alpha\beta\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\Delta U_{i-1}) - 2\alpha\beta\mu\frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial t\partial\varphi}\ \ (i = \overline{1,n}). \quad (3.176)$$

Граничні умови для функцій U_i $(i=\overline{0,n})$ візьмемо такими:

$$U_i\big|_{\varphi=0,\varphi=1}=0,\ \left.\frac{\partial U_i}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\psi=q}=0\ \ (i=\overline{0,n}). \tag{3.177}$$

Рівняння для визначення функцій υ_i $(i=\overline{0,n})$ мають вигляд

$$\frac{\partial^3\upsilon_i}{\partial\tau^3}+\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial\tau^2}=M_i(\varphi,\psi,\tau)\ \ (i=\overline{0,n}), \tag{3.178}$$

де

$$M_0=0,$$

$$M_1=-\beta(1+\alpha)\frac{\partial^2\upsilon_0}{\partial\tau^2}-\beta(1+\alpha)\frac{\partial\upsilon_0}{\partial\tau}+\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\Delta\upsilon_0\right)-$$
$$-2\mu\frac{\partial^3\upsilon_0}{\partial\tau^2\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Delta\upsilon_0\right)-2\mu\frac{\partial^2\upsilon_0}{\partial\tau\partial\varphi}, \tag{3.179}$$

$$M_i=-\beta(1+\alpha)\frac{\partial^2\upsilon_{i-1}}{\partial\tau^2}-\beta(1+\alpha)\frac{\partial\upsilon_{i-1}}{\partial\tau}+\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\Delta\upsilon_{i-1}\right)-$$
$$-2\mu\frac{\partial^3\upsilon_{i-1}}{\partial\tau^2\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Delta\upsilon_{i-1}\right)+\alpha\beta\gamma\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Delta\upsilon_{i-2}\right)-$$
$$-2\mu\frac{\partial^2\upsilon_{i-1}}{\partial\tau\partial\varphi}-2\alpha\beta\mu\frac{\partial^2\upsilon_{i-2}}{\partial\tau\partial\varphi}+\alpha\beta\Delta\upsilon_{i-2}-2\alpha\beta\mu\frac{\partial\upsilon_{i-2}}{\partial\varphi}\ \ (i=\overline{2,n}). \tag{3.180}$$

Функції U_i, υ_i пов’язані між собою початковими умовами:

$$U_0\big|_{t=0}=U^{(0)}(\varphi,\psi),\ \upsilon_0\big|_{\tau=0}=0, \tag{3.181}$$

$$U_i\big|_{t=0}=-\upsilon_i\big|_{\tau=0}\ \ (i=\overline{1,n}), \tag{3.182}$$

$$\left.\frac{\partial U_0}{\partial t}\right|_{t=0}=U^{(1)}(\varphi,\psi),\ \left.\frac{\partial\upsilon_1}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0, \tag{3.183}$$

$$\left.\frac{\partial U_i}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial \upsilon_{i+1}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{3.184}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = U^{(2)}(\varphi,\psi) - \left.\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right|_{t=0}, \tag{3.185}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \upsilon_{i+2}}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = -\left.\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}\right|_{t=0} \quad (i=\overline{1,n}). \tag{3.186}$$

Вимагаючи, щоб функції $\upsilon_i \quad (i=\overline{0,n})$ були функціями типу примежового шару, одержуємо з урахуванням (3.181), (3.183), (3.185), (3.186)

$$\upsilon_0 \equiv 0, \ \upsilon_1 \equiv 0, \tag{3.187}$$

$$\upsilon_2(\varphi,\psi,t) = \left[U^{(2)}(\varphi,\psi) - \left.\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right|_{t=0}\right]\cdot e^{-\tau}, \tag{3.188}$$

$$\upsilon_3(\varphi,\psi,t) = \left[\int_0^{\tau} e^s M_3(\varphi,\psi,s)ds - \left.\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right|_{t=0}\right]\cdot e^{-\tau} + \\ + \int_{\tau}^{+\infty} (s-\tau+1)M_3(\varphi,\psi,s)ds. \tag{3.189}$$

Переходячи до пошуку функцій $U_i \quad (i=\overline{0,n})$, зазначимо, що для визначення функції U_0 маємо крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \beta(1+\alpha)\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta U_0) - \\ -2\mu\frac{\partial^2 U_0}{\partial t \partial \varphi} + \alpha\beta\left(\Delta U_0 - 2\mu\frac{\partial U_0}{\partial \varphi}\right) + \theta, \tag{3.190}$$

$$U_0\big|_{\varphi=0,\varphi=1} = 0, \ \left.\frac{\partial U_0}{\partial \psi}\right|_{\psi=0,\psi=q} = 0, \tag{3.191}$$

$$U_0\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi),\ \left.\frac{\partial U_0}{\partial t}\right|_{t=0} = U^{(1)}(\varphi,\psi). \tag{3.192}$$

Розв'язок цієї задачі знайдемо за допомогою методу скінченних інтегральних перетворень [88]. З метою виключення конвективної складової в рівнянні (3.190) введемо до розгляду нову функцію $w(\varphi,\psi,t)$ співвідношенням

$$U_0 = e^{\mu\varphi} w. \tag{3.193}$$

Тоді для визначення функції w маємо крайову задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\beta + \alpha\beta + \mu^2\right)\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha\beta\mu^2 w - \alpha\beta\Delta w - \frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) = \theta e^{-\mu\varphi}, \tag{3.194}$$

$$w\big|_{\varphi=0,\varphi=1} = 0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\substack{\psi=0,\\ \psi=q}} = 0, \tag{3.195}$$

$$w\big|_{t=0} = U^{(0)}(\varphi,\psi)e^{-\mu\varphi},\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = U^{(1)}(\varphi,\psi)e^{-\mu\varphi}. \tag{3.196}$$

Застосуємо до задачі (3.194)–(3.196) скінченне інтегральне перетворення Фур'є за змінними φ, ψ вигляду [88]:

$$\overline{\overline{w}}_{nm}(t) = \int_0^1\int_0^q w(\varphi,\psi,t)\sin(\lambda_n\varphi)\cos(\eta_m\psi)d\varphi d\psi, \tag{3.197}$$

де

$$\lambda_n = n\pi,\ \eta_m = \frac{m\pi}{q}.$$

Тоді, в образах Фур'є отримаємо наступну задачу Коші:

$$\frac{d^2\overline{\overline{w}}_{nm}(t)}{dt^2} + s_{nm}\frac{d\overline{\overline{w}}_{nm}(t)}{dt} + \rho_{nm}\overline{\overline{w}}_{nm}(t) = A_{nm}, \tag{3.198}$$

$$\overline{\overline{w}}_{nm}(0) = \gamma_{nm},\ \overline{\overline{w}}'_{nm}(0) = \delta_{nm}, \tag{3.199}$$

де

$$A_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_n \theta}{\mu^2 + \lambda_n^2}\left[1 - (-1)^n e^{-\mu}\right] & (m = 0, \quad n \geq 1), \\ 0 & (m \geq 1, \quad n \geq 1), \end{cases} \tag{3.200}$$

$$\gamma_{nm} = \int_0^1 \int_0^q e^{-\mu\varphi} U^{(0)}(\varphi, \psi) \sin(\lambda_n \varphi) \cos(\eta_m \psi) d\varphi d\psi, \tag{3.201}$$

$$\delta_{nm} = \int_0^1 \int_0^q e^{-\mu\varphi} U^{(1)}(\varphi, \psi) \sin(\lambda_n \varphi) \cos(\eta_m \psi) d\varphi d\psi, \tag{3.202}$$

$$s_{nm} = \beta + \alpha\beta + \mu^2 + \kappa_{nm}, \;\; \rho_{nm} = \alpha\beta(\mu^2 + \kappa_{nm}), \;\; \kappa_{nm} = \lambda_n^2 + \eta_m^2. \tag{3.203}$$

Розв’язуючи задачу (3.198), (3.199), знаходимо

$$\overline{\overline{w}}_{nm}(t) = \gamma_{nm} Q_{nm}(t) + \delta_{nm} K_{nm}(t) + A_{nm} \int_0^t K_{nm}(t - \tau) d\tau, \tag{3.204}$$

де

$$Q_{nm}(t) = s_{nm} K_{nm}(t) + K'_{nm}(t),$$

$$K_{nm}(t) = \begin{cases} e^{-\frac{s_{nm}}{2} t} \dfrac{\operatorname{sh}(q_{nm} t)}{q_{nm}} & (D_{nm} > 0); \\ e^{-\frac{s_{nm}}{2} t} \dfrac{\sin(p_{nm} t)}{p_{nm}} & (D_{nm} < 0); \\ t e^{-\frac{s_{nm}}{2} t} & (D_{nm} = 0), \end{cases} \tag{3.205}$$

$$D_{nm} = s_{nm}^2 - 4\rho_{nm}, \;\; q_{nm} = \frac{\sqrt{D_{nm}}}{2}, \;\; p_{nm} = \frac{\sqrt{-D_{nm}}}{2}.$$

Повертаючись в співвідношеннях (3.204) до оригіналів, одержуємо розв’язок розглядуваної задачі у вигляді

$$w(\varphi, \psi, t) = \Phi_1(\varphi, t) +$$

$$+\int_0^1\int_0^q [U^{(0)}(\xi,\zeta)G_1(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)+U^{(1)}(\xi,\zeta)G_2(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)]d\zeta d\xi, \quad (3.206)$$

де

$$\Phi_1(\varphi,t)=\frac{4\theta}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\left[1-(-1)^n e^{-\mu}\right]}{\mu^2+\lambda_n^2}\cdot\int_0^t K_{n0}(t-\tau)d\tau\cdot\sin(\lambda_n\varphi), \quad (3.207)$$

$$G_1(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)=\frac{4}{q}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}Q_{nm}(t)e^{-\mu\xi}\sin(\lambda_n\xi)\cos(\eta_m\zeta)\sin(\lambda_n\varphi)\cos(\eta_m\psi), \quad (3.208)$$

$$G_2(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)=\frac{4}{q}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}K_{nm}(t)e^{-\mu\xi}\sin(\lambda_n\xi)\cos(\eta_m\zeta)\sin(\lambda_n\varphi)\cos(\eta_m\psi). \quad (3.209)$$

Таким чином, шукана функція U_0 дається співвідношенням (3.193), де функція w визначається згідно з (3.206)–(3.209).

Для визначення функцій U_i при $i\geq 1$ маємо крайову задачу (3.175), (3.177), (3.182), (3.184). Розв’язок цієї задачі одержуємо аналогічно вищевикладеному із застосуванням методу скінченних інтегральних перетворень. Отже, маємо

$$U_i=e^{\mu\varphi}w_i \ \ (i=\overline{1,n}), \quad (3.210)$$

де

$$w_i(\varphi,\psi,t)=\int_0^t\int_0^1\int_0^q F_i(\xi,\zeta,\tau)G_2(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t-\tau)d\zeta d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^1\int_0^q \upsilon_i(\xi,\zeta,0)G_1(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)d\zeta d\xi-$$

$$-\int_0^1\int_0^q \frac{\partial\upsilon_{i+1}(\xi,\zeta,0)}{\partial\tau}\cdot G_2(\varphi,\psi,\xi,\zeta;t)d\zeta d\xi \ \ (i=\overline{1,n}). \quad (3.211)$$

Отже, послідовність обчислень для знаходження наближень до роз'язку така: υ_0, υ_1, U_0, υ_2, U_1, υ_3, U_2,..., υ_{i+1}, U_i,... Основний вклад в розв'язок дають функції U_0, υ_2. Після визначення функції $U(\varphi,\psi,t)$ здійснюється перехід до функції концентрації $C(\varphi,\psi,t)$ за формулою $C(\varphi,\psi,t) = = C_1(1-\varphi)+C_2\varphi - U(\varphi,\psi,t)$.

Концентрація N речовини в твердій фазі обчислюється згідно з співвідношенням

$$N = N_0 e^{-\alpha\beta t} + \beta\sigma\int_0^t e^{-\alpha\beta(t-\tau)} C(\varphi,\psi,\tau)d\tau,$$

де $N_0 = N(\varphi,\psi,0)$ – задана початкова концентрація речовини в твердій фазі.

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ГРУНТОВИХ МАСИВІВ, НАСИЧЕНИХ СОЛЬОВИМИ РОЗЧИНАМИ

4.1. Чисельне моделювання фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов повзучості ґрунтового скелета

4.1.1. Вступ. Актуальність проблеми. Актуальність досліджень процесів фільтрації в деформівних грунтах обумовлена широким їх застосуванням в гідротехніці, будівництві та ін. [32, 68, 92, 94, 199]. При цьому особливо важливе значення має дослідження процесів ущільнення основ накопичувачів промислових стоків, що пов'язано з вивченням умов екологічно безпечного функціонування цих інженерних об'єктів. Нерідко вказані накопичувачі заповнюються відходами гірничої та хімічної промисловості, які є концентрованими сольовими розчинами. Тому для оцінки процесів консолідації за таких умов некоректно застосовувати класичну теорію консолідації, яка базується на припущенні, що фільтрат у масиві є чистою водою [94, 199].

У працях [65, 67] вперше поставлено і розв'язано деякі задачі фільтраційної консолідації грунтів, насичених сольовими розчинами, та встановлено факт істотного впливу засоленості фільтрату на процес ущільнення. Автори [67–69] на основі класичної теорії фільтрації, з урахуванням запропонованого ними узагальненого закону Дарсі – Герсеванова, дослідили ряд важливих задач консолідації і, зокрема, вивчили вплив нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації $k = k(C)$ від концентрації C солей на перебіг процесу ущільнення.

Вплив властивостей повзучості ґрунтового скелета на перебіг процесу консолідації у випадку сталого коефіцієнта фільтрації вивчався в [32–36, 184–186]. У даному розділі виконано моделювання процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, у випадку нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та наявності властивості повзучості ґрунтового скелета.

4.1.2. Математична модель. Постановка задачі. Припустимо, що виконується наступне узагальнення закону Дарсі–Герсеванова на випадок руху сольових розчинів [65–69]:

$$u_x - \frac{n'}{m}\vartheta_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu\frac{\partial C}{\partial x}, \tag{4.1}$$

де u_x – швидкість фільтрації, ϑ_x – швидкість руху твердої фази, n' – пористість за наявності газу, $m = 1/(1+e)$, e – коефіцієнт пористості, $k = k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, $H = \frac{p}{\gamma}$ – надлишковий напір, p – поровий тиск, γ – об'ємна вага рідини, C – концентрація солей в рідкій фазі, ν – коефіцієнт осмосу (знак „+" відповідає нормальній осмотичній фільтрації, а знак „–" – аномальній).

За відомих припущень [73, 84, 94, 199], враховуючи рівняння нерозривності для трифазного середовища і рівняння балансу об'ємів рідини та твердих частинок, одержуємо, з урахуванням (4.1), наступне рівняння консолідації трифазного грунтового масиву, насиченого сольовим розчином:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \beta(1+\overline{e})\frac{\partial p}{\partial t} = (1+\overline{e})\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right), \tag{4.2}$$

де β – коефіцієнт об'ємної стисливості газу, $\overline{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості.

Згідно з уявленнями теорії спадкової лінійної повзучості залежність коефіцієнта пористості від часу можна записати у вигляді [199]

$$e(t) = e(\tau_1) - \theta(\tau_1)\ \ \delta(t,\tau_1) - \int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau. \tag{4.3}$$

Тут

$$\delta(t,\tau) = a_0 + a_1\left[1 - \exp\left(-\gamma_1(t-\tau)\right)\right], \tag{4.4}$$

де a_0 – параметр миттєвої деформації, a_1, γ_1 – параметри повзучості [199], θ – сума головних напружень в скелеті грунту.

Підставляючи результат диференціювання співвідношення (4.3) за t в (4.2), а потім диференціюючи одержаний результат за цією ж змінною, після додавання до знайденого рівняння попереднього, помноженого на γ_1, одержуємо наступне рівняння консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, з урахуванням повзучості ґрунтового скелета [68]:

$$\tau_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{k}\frac{\partial H}{\partial x} + \tau_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{k}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] \mp \tilde{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.5}$$

де $\tilde{\mu} = \frac{\nu}{k_0} C_\upsilon$, $\tilde{k} = \frac{k}{k_0}$, $C_\upsilon = \frac{k_0 (1+\overline{e})}{\gamma\, a}$ – коефіцієнт консолідації, $\tau_1 = \frac{a_0}{\gamma_1 a}$, $\tau_2 = \frac{1}{\gamma_1}$, $a = a_0 + a_1$, $k_0 =$ const.

Рівняння конвективної дифузії розчинника при фільтрації порового розчину у першому наближенні запишемо у такому спрощеному вигляді [68]:

$$n' \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + k \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2, \tag{4.6}$$

де D – коефіцієнт дифузії [12, 63], $n' = n$ у випадку двофазного середовища (n – пористість) і знехтувано доданком $C(kH_x + \nu C_x)_x$.

Таким чином, математична модель розглядуваного процесу консолідації базується на системі нелінійних диференціальних рівнянь (4.5), (4.6). При цьому згідно з [68] приймемо наступну залежність коефіцієнта фільтрації глинистого грунту від концентрації сольового розчину:

$$k(C) = a_0 + a_1 C + a_2 C^2 + a_3 C^3 + a_4 C^4 + a_5 C^5 \quad , \tag{4.7}$$

де $C \in [0,1]$ – безрозмірна концентрація, $a_0 \div a_5$ – відомі дійсні коефіцієнти [68]. У рамках моделі, визначеної співвідношеннями (4.5)–(4.7), вивчення процесу консолідації ґрунтового масиву потужності ℓ, насиченого сольовим розчином і розміщеного на непроникній основі, з урахуванням повзучості ґрунтового скелета і залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину, зводиться до розв'язання в області $(0,\ell) \times (0,\infty)$ наступної крайової задачі [32, 186]:

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + k \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)^2, \tag{4.8}$$

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{k} \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{k} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] \mp \tilde{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \tag{4.9}$$

$$H(0,\ t) = 0, \quad H_x(\ell,\ t) = 0, \tag{4.10}$$

$$H(x,\ 0) = H_0, \quad H_t(x,\ 0) = 0, \tag{4.11}$$

$$C(0,\ t) = C_0, \quad C_x(\ell,\ t) = 0, \tag{4.12}$$

$$C(x,0) = 0, \tag{4.13}$$

де H_0, C_0 – відомі функції (надалі, не зменшуючи загальності, вважатимемо, що H_0, $C_0 = \text{const}$), а функція k визначається співвідношенням (4.7).

4.1.3. Алгоритм наближеного розв'язку задачі. Введемо до розгляду безрозмірні змінні і параметри такими співвідношеннями:

$$x' = \frac{x}{\ell},\ t' = \frac{t}{T},\ H' = \frac{H}{H_0},\ C' = \frac{C}{C_0},\ \tau' = \frac{\tau_i}{T}\ \ (i = \overline{1,2};\ T = \text{const}), \quad (4.14)$$

$$C_\upsilon{}' = \frac{C_\upsilon T}{\ell^2},\ \mu' = \frac{\tilde{\mu} C_0 T}{\ell^2 H_0},\ \nu' = \frac{\nu C_0 T}{\ell^2},\ u' = \frac{k_0\ H_0 T}{\ell^2},\ D = \frac{D_0 T}{\ell^2}\ \ (D_0 = \text{const}).$$

Опускаючи далі знак "штрих" над безрозмірними величинами, перепишемо розглядувану задачу у вигляді

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{D}\frac{\partial C}{\partial x}\right) + u\cdot\tilde{k}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2, \quad (4.15)$$

$$\tau_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{k}\frac{\partial H}{\partial x} + \tau_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{k}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] \mp \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right), \quad (4.16)$$

$$H(0,t) = 0,\ H_x(1,t) = 0, \quad (4.17)$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0, \quad (4.18)$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \quad (4.19)$$

$$C(x,0) = 0, \quad (4.20)$$

де

$$\tilde{D} = \frac{D}{D_0} = 1 + \lambda'\left|-\tilde{k}u\frac{\partial H}{\partial x} \pm \ \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right|,\quad \lambda' = \lambda\ell/(D_0 T),$$

λ – параметр дисперсії.

Чисельний розв'язок крайової задачі (4.15)–(4.20) одержимо скінченно-різницевим методом таким чином.

Введемо до розгляду сіткову область з кроками h і τ відповідно за геометричною змінною і за часом

$$\omega_{h\tau} = \left\{(x_i, t_j):\ x_i = (i-1)h,\ t_j = j\tau;\ i = \overline{1, m+1},\quad j = \overline{0, N}\right\}.$$

Розглядуваній задачі поставимо у відповідність систему різницевих рівнянь, яка в позначеннях роботи [177] запишеться у вигляді (випадок аномальної осмотичної фільтрації)

$$nC_t = D\left(d\widehat{C}_{\bar{x}}\right)_x + uH_x\widehat{C}_x + \nu C_x^2, \tag{4.21}$$

$$\tau_1 H_{\bar{t}\ t} + H_t - C_\upsilon(\widehat{a}\widehat{H}_{\bar{x}})_x - \tau_2 C_\upsilon(aH_{\bar{x}})_{x\ t} = \mu(\widehat{C} + \tau_2 C_t)_{\bar{x}\ x}, \tag{4.22}$$

де a, d – середнє арифметичне значень $\tilde{k}$ і $\tilde{D}$ відповідно в сусідніх вузлах сітки.

Виконуючи в співвідношеннях (4.21), (4.22) стандартні перетворення, одержуємо наступну систему:

$$S_i^j\, C_{i-1}^{j+1} - B_i^j\, C_i^{j+1} + A_i^j\, C_{i+1}^{j+1} = \Phi_i^j\,, \tag{4.23}$$

$$B_{1_i}^{j+1} H_{i-1}^{j+1} - A_{1_i}^{j+1} H_i^{j+1} + B_{2_i}^{j+1} H_{i+1}^{j+1} = \Phi_{1_i}^{j+1} \quad (i = \overline{2,m};\ j = \overline{1,N}) \tag{4.24}$$

де позначено

$$S_i^j = \frac{D\, d_i^j}{h^2},\ A_i^j = \frac{1}{h^2}\left[D\, d_{i+1}^j + u_i^j\,(H_{i+1}^j - H_i^j)\right],\ B_i^j = \frac{n}{\tau} + A_i^j + S_i^j,$$

$$\Phi_i^j = -\frac{n}{\tau}C_i^j - \frac{\nu}{h^2}(C_{i+1}^j + C_i^j)^2,\ B_{1_i}^{j+1} = \frac{C_\upsilon}{h^2}\ \ a_i^{j+1}(1 + \frac{\tau_2}{\tau}),$$

$$B_{2_i}^{j+1} = \frac{C_\upsilon}{h^2}a_{i+1}^{j+1}(1 + \frac{\tau_2}{\tau}),\ A_{1_i}^{j+1} = \frac{\tau_1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} + B_{1_i}^{j+1} + B_{2_i}^{j+1},$$

$$a_i = 0,5(\tilde{k}_{i-1} + \tilde{k}_i)\,,\ d_i = 0,5(\tilde{D}_{i-1} + \tilde{D}_i)\,,$$

$$\Phi_{1_i}^{j+1} = -\frac{1}{\tau}\left[1 + \frac{2\tau_1}{\tau} + \frac{\tau_2 C_\nu}{h^2}(a_i^j + a_{i+1}^j)\right]H_i^j + \frac{\tau_1}{\tau^2}H_i^{j-1} +$$

$$+\frac{\tau_2 C_\nu}{h^2\tau}(a_{i+1}^j H_{i+1}^j + a_i^j H_{i-1}^j) - \frac{\mu}{h^2}(1 + \frac{\tau_2}{\tau})\times$$

$$\times(C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}) + \frac{\mu\tau_2}{h^2\tau}(C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j). \tag{4.25}$$

Крайові умови враховуються очевидним чином. Рахунок по різницевій схемі виконується в два етапи: спочатку згідно з (4.23) обчислюється концентрація солей на даному шарі за t, а потім згідно з (4.24) обчислюється на цьому шарі значення надлишкового напору H.

Різницеві рівняння системи (4.23), (4.24) являються трьохточковими і ефективно розв'язуються методом прогонки [13, 137, 177]. При цьому прогоночні співвідношення мають вигляд

$$\begin{aligned} C_i^{j+1} &= \alpha_{i+1}^j C_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{j+1}, \\ H_i^{j+1} &= \tilde{\alpha}_{i+1} H_{i+1}^{j+1} + \tilde{\beta}_{i+1}^{j+1} \end{aligned} \quad (i = \overline{2, m};\ j = \overline{1, N}), \tag{4.26}$$

а прогоночні коефіцієнти обчислюються за формулами

$$\alpha_{i+1}^j = \frac{A_i^j}{B_i^j - \alpha_i^j \cdot S_i^j},\ \beta_{i+1}^{j+1} = \frac{\alpha_{i+1}^j}{A_i^j}(S_i^j \beta_i^{j+1} - \Phi_i^j), \tag{4.27}$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1}^{j+1} = \frac{B_{2_i}^{j+1}}{A_{1_i}^{j+1} - \tilde{\alpha}_i^{j+1} B_{1_i}^{j+1}},\ \tilde{\beta}_{i+1}^{j+1} = \frac{\tilde{\alpha}_{i+1}^{j+1}}{B_{2_i}^{j+1}}(B_{1_i}^{j+1} \tilde{\beta}_i^{j+1} - \Phi_{1_i}^{j+1}). \tag{4.28}$$

Для визначення стартових значень прогоночних коефіцієнтів використаємо скінченнорізницеві аналоги крайових умов. Тоді одержимо

$$\alpha_2^j = 0, \quad \beta_2^{j+1} = 1, \quad \tilde{\alpha}_2^{j+1} = 0, \quad \tilde{\beta}_2^{j+1} = 0. \tag{4.29}$$

Слід зазначити, що стійкість методу прогонки для системи (4.23), (4.24) випливає з факту діагонального переважання в матриці коефіцієнтів системи.

4.1.4. Результати чисельної реалізації. Висновки. Чисельна реалізація викладеного алгоритму розв'язування задачі консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, за умови, що скелет масиву має властивість повзучості, виконана для вхідних даних, наведених у роботі [67]. При цьому залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину прийнята у вигляді многочлена 5–го степеня вигляду (4.7). Результати розрахунків згідно моделі першого наближення дозволяють зробити такі висновки про характер поведінки надлишкових напорів в масиві, що ущільнюється за умов фільтрації сольового розчину та повзучості ґрунтового скелета [32, 186].

1. Урахування нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солі згідно з (4.7) призводить до принципово іншої картини поведінки надлишкових напорів в грунтовому масиві, скелет якого має властивість повзучості: замість розсіювання надлишкових напорів з часом (рис. 4.1, криві $1' - 5'$), що характерно для випадку сталого значення коефіцієнта фільтрації у разі аномальної осмотичної фільтрації, тут маємо стабільне збільшення напорів з часом (рис. 4.1, криві 1–5).

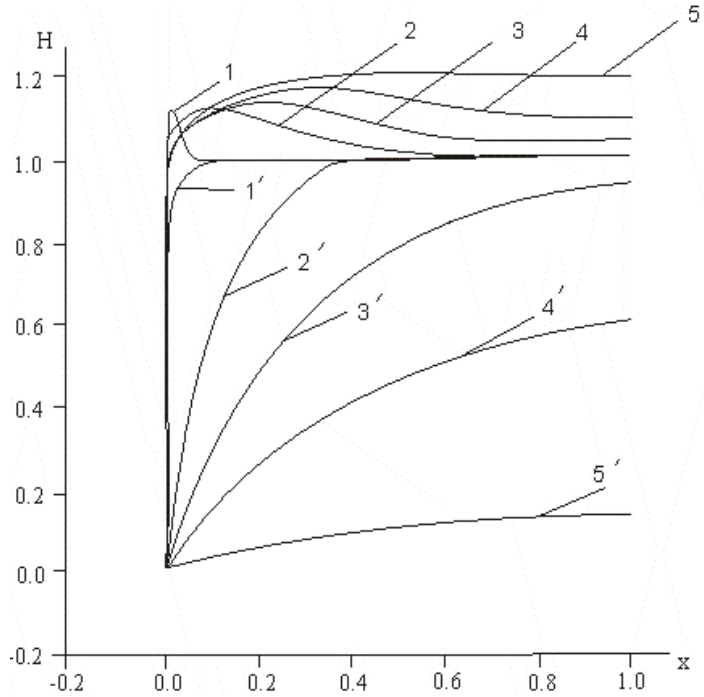


Рис. 4.1. Порівняння надлишкових напорів залежно від коефіцієнта фільтрації (криві 1′–5′ відповідають сталому *k*, а криві 1–5 – змінному *k*; 1, 1′ – *t*=0,002; 2, 2′ – *t*=0,05; 3 , 3′ – *t*=0,25; 4, 4′ – *t*=0,5; 5, 5′ – *t*=1; $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 12$)

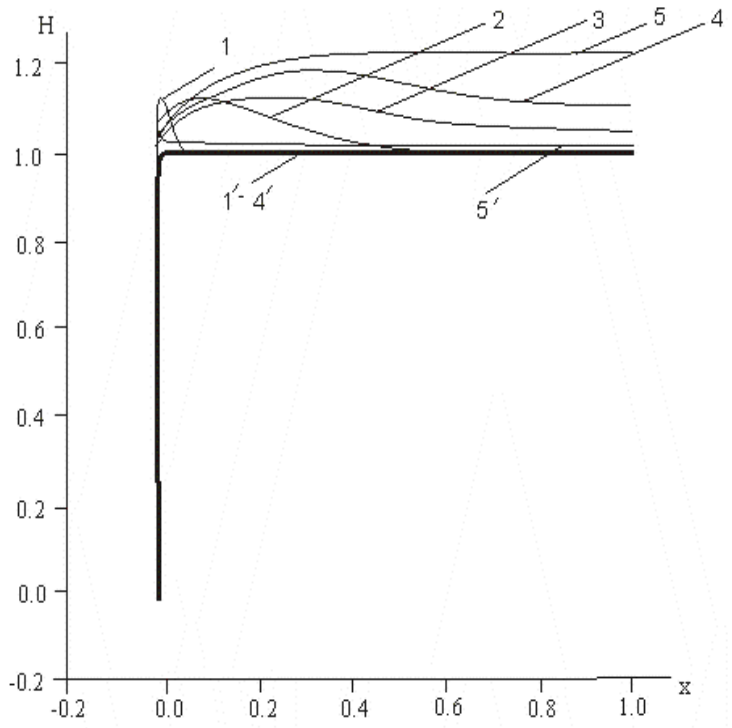


Рис. 4.2. Вплив аномальної осмотичної фільтрації на поведінку кривих надлишкових напорів при врахуванні повзучості скелета і залежності *k=k(C)* (1, 1′ – *t*=0,002; 2, 2′ – *t*=0,05; 3, 3′ – *t*=0,25; 4, 4′ – *t*=0,5; 5, 5′ – *t*=1)

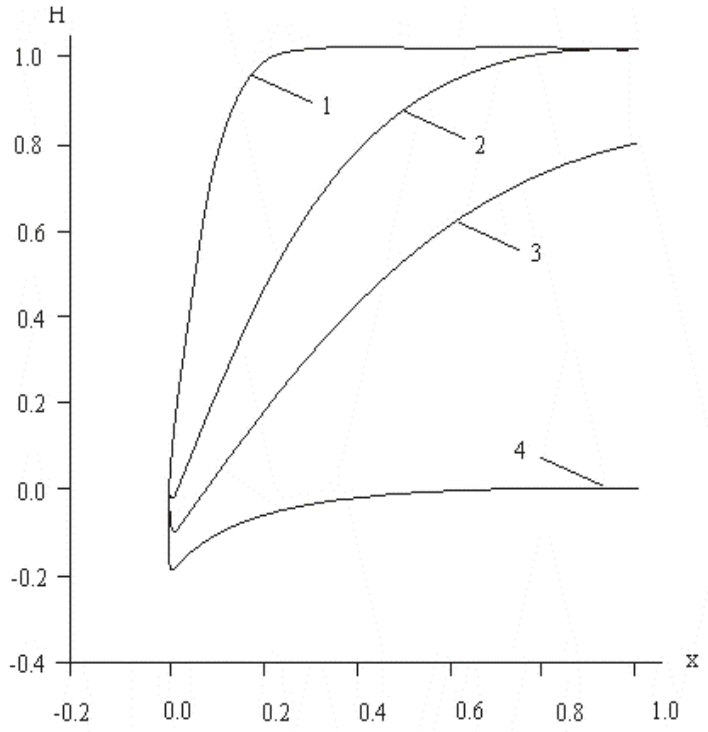


Рис. 4.3. Вплив нормальної осмотичної фільтрації на поведінку кривих надлишкових напорів при врахуванні повзучості скелету і залежності *k=k(C)* (1 – *t*=0,002; 2 – *t*=0,05; 3 – *t*=0,25; 4 – *t*=0,75)

2. У разі неврахування осмотичної фільтрації, але врахування явища повзучості ґрунтового скелета і нелінійної залежності $k = k(C)$ маємо, що надлишкові напори з часом не розсіюються, а утворюється стійка зона підвищених надлишкових напорів (криві $1' - 4'$ на рис. 4.2). Додаткове врахування явища аномальної осмотичної фільтрації за вказаних умов лише підсилює цей ефект (криві 1–4 на рис. 4.2), що обумовлює перехід грунту в стан набухання.

3. У випадку наявності нормальної осмотичної фільтрації вказана вище картина поведінки надлишкових напорів змінюється на протилежну: напори стають від'ємними, грунт переходить у стан переущільнення (рис. 4.3).

4.1.5. Альтернативний підхід до моделювання процесу фільтраційної консолідації. Коротко висвітлимо ще один з можливих підходів до математичного моделювання розглядуваного процесу консолідації.

У ряді випадків фізично коректна постановка другої з початкових умов (4.18) для функції надлишкового напору ускладнена (зокрема при відмові від

схеми “миттєвої” деформації у питаннях дослідження процесів консолідації малозв’язних грунтів з урахуванням віброповзучості грунтового скелета). З метою усунення цього ускладнення моделюватимемо розподіл надлишкових напорів у масиві не рівнянням (4.16), а за допомогою наступного інтегро-диференціального рівняння, яке в безрозмірних змінних (4.14) набуває вигляду

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\left(H-e^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{1}{\tau_2}\int_0^t H(x,\xi)e^{-\frac{t-\xi}{\tau_2}}d\xi\right)=$$

$$=\frac{\tau_2}{\tau_1}C_\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k}\frac{\partial H}{\partial x}\mp\nu\frac{\partial C}{\partial x}\right). \qquad (4.30)$$

Зазначимо, що рівняння (4.30) одержується підстановкою співвідношень (4.3), (4.4) в рівняння (4.2).

За цієї умови задача математичного моделювання розглядуваного процесу ущільнення зводиться до розв’язання крайової задачі для системи рівнянь (4.15), (4.30) за умов (4.17), (4.19), (4.20) та першої з умов (4.18). Чисельний розв’язок цієї задачі одержимо, використовуючи наступну методику.

Введемо до розгляду визначену вище сіткову область ω_{hr} і поставимо у відповідність рівнянню (4.15) скінченнорізницеву схему (4.21). Апроксимуючи інтеграл у (4.30), наприклад, за допомогою квадратурної формули трапецій, поставимо у відповідність рівнянню (30) наступну скінченнорізницеву схему:

$$H_t-C_\upsilon\alpha(a\overline{H}_{\bar{x}})_x=\alpha\nu C_\upsilon\hat{C}_{\bar{x}x}+$$

$$+\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\left[\left(1-\frac{t}{2\tau_2}\right)\hat{H}-e^{-t/\tau_2}\left(1+\frac{t}{2\tau_2}\right)\right], \qquad (4.31)$$

де $\alpha = \dfrac{\tau_2}{\tau_1}$.

Звідси, зводячи подібні члени, маємо

$$Q_{1_i}^j H_{i-1}^{j+1} - R_i^j H_i^{j+1} + Q_{2_i}^j H_{i+1}^{j+1} = \Phi_{2_i}^{j+1}, \tag{4.32}$$

де

$$Q_{1_i}^j = \frac{\alpha C_\upsilon}{h^2} a_i^j, \; Q_{2_i}^j = \frac{\alpha c_\nu}{h^2} a_{i+1}^j,$$

$$R_i^j = \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha C_\upsilon}{h^2}\left(a_i^j + a_{i+1}^j\right) + \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\left(1 - \frac{t_{j+1}}{2\tau_2}\right),$$

$$\Phi_{2_i}^{j+1} = -\frac{\alpha \nu C_\upsilon}{h^2}\left(C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}\right) - \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\left(1 + \frac{t_{j+1}}{2\tau_2}\right) \cdot e^{-\frac{t_{j+1}}{\tau_2}} - \frac{1}{\tau} H_i^j.$$

Різницеві рівняння системи (4.32) являються трьохточковими і розв’язуються методом прогонки [13, 137, 177]. Числова реалізація даного способу моделювання процесу ущільнення грунтового масиву, насиченого сольовим розчином, показала його ефективність: у розрахованих прикладах відносне відхилення значень напору при різних способах моделювання на початкових стадіях процесу ущільнення не перевищувало 7%.

4.2. Математичне моделювання фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, з урахуванням нелінійної повзучості грунтового скелета

4.2.1. Математична модель. Постановка крайової задачі. Припускатимемо, що має місце узагальнення закону Дарсі–Герсеванова на випадок руху сольових розчинів вигляду (4.1).

За відомих припущень [92, 94, 199] з урахуванням (4.1) одержуємо рівняння консолідації масиву, насиченого сольовим розчином вигляду (4.2).

Залежність коефіцієнта пористості від часу можна представити у вигляді [94, 199]:

$$e(t) = e_0 - a_0\theta(t) + \int_{\tau_1}^{t} f[\theta(\tau)]\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{4.33}$$

де міра повзучості визначається співвідношенням (4.4).

У випадку нелінійної повзучості матимемо [199]:

$$f[\theta(\tau)] = \theta(\tau) + \zeta\theta^{2}(\tau), \tag{4.34}$$

де ζ – параметр, що визначається експериментально [199].

Підставляючи результат диференціювання співвідношення (4.33) за t в рівняння (4.2), а потім диференціюючи одержаний результат за цією самою змінною, після додавання до знайденого рівняння попереднього, помноженого на γ_1, одержуємо з урахуванням (4.34) наступне рівняння консолідації масиву, насиченого сольовим розчином за умови нелінійної повзучості ґрунтового скелета [32, 186]:

$$\tau_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon\left(H_0 - H\right)\frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \tau_2\frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.35}$$

де

$$\tau_1 = \frac{a_0 + \beta(1+\overline{e})}{\gamma_1[a + \beta(1+\overline{e})]},\ \tau_2 = \frac{1}{\gamma_1},\ c_v = \frac{k(1+\overline{e})}{\gamma[a + \beta(1+\overline{e})]},\ \mu = \frac{c_v\nu}{\kappa},$$
$$\varepsilon = \frac{2\gamma a_1\zeta}{a + \beta(1+\overline{e})},\ a = a_0 + a_1,\ H_0 = \text{const}. \tag{4.36}$$

Рівняння конвективної дифузії при фільтрації порового розчину (випадок аномальної осмотичної фільтрації) з урахуванням (4.1) запишемо у вигляді

$$n\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+k\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2+C\frac{\partial^2}{\partial x^2}(kH+\nu C), \qquad (4.37)$$

де C – шукана концентрація, D – коефіцієнт дифузії, n – пористість.

Таким чином, математична модель розглядуваного процесу консолідації базується на системі нелінійних диференціальних рівнянь (4.35), (4.37). У рамках цієї моделі вивчення процесу консолідації ґрунтового масиву потужності ℓ, розміщеного на непроникній основі з урахуванням нелінійної повзучості грунтового скелета, зводиться до розв'язання в області $(0,\ell)\times(0,T)$ наступної крайової задачі:

$$\tau_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\frac{\partial H}{\partial t}+\varepsilon(H_0-H)\frac{\partial H}{\partial t}=$$

$$=c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H+\tau_2\frac{\partial H}{\partial t}\right)+\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C+\tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.38)$$

$$n\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+k\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2+C\frac{\partial^2}{\partial x^2}(kH+\nu C), \qquad (4.39)$$

$$H(0,t)=0,\ H_x(\ell,t)=0, \qquad (4.40)$$

$$H(x,0)=H_0,\ H_t(x,0)=0, \qquad (4.41)$$

$$C(0,t)=C_0,\ C_x(\ell,t)=0, \qquad (4.42)$$

$$C(x,0)=0, \qquad (4.43)$$

де C_0 , H_0 – відомі величини.

4.2.2. Алгоритм чисельного розв'язання задачі. Введемо безрозмірні змінні і параметри співвідношеннями

$$x'=\frac{x}{\ell},\ t'=\frac{t}{T},\ H'=\frac{H}{H_0},$$

$$C'=\frac{C}{C_0},\ \tau_i'=\frac{\tau_i}{T}\ (i=\overline{1,2}),\ c_v'=\frac{c_v T}{\ell^2},$$

$$\mu'=\frac{\nu C_0 c_v'}{kH_0},\ D'=\frac{DT}{\ell^2},\ u'=\frac{kH_0T}{\ell^2},\ \nu'=\frac{\nu C_0 T}{\ell^2},\ \varepsilon'=\varepsilon H_0. \qquad (4.44)$$

Переходячи в (4.38) – (4.43) до нових змінних згідно з (4.44) і опускаючи надалі знак "штрих" над безрозмірними величинами, запишемо розглядувану крайову задачу у вигляді

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon (1 - H) \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) \qquad (4.45)$$

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + C \frac{\partial^2}{\partial x^2}(uH + \nu C), \qquad (4.46)$$

$$H(0,t) = 0,\ H_x(1,t) = 0, \qquad (4.47)$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0, \qquad (4.48)$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \qquad (4.49)$$

$$C(x,0) = 0. \qquad (4.50)$$

Наближений розв’язок задачі (4.45)–(4.50) одержимо скінченно-різницевим методом наступним чином.

Введемо до розгляду сіткову область $\omega_{h\tau}$ з кроками h і τ відповідно за геометричною змінною і за часом:

$$\omega_{h\tau} = \left\{ \left(x_i, t_j\right):\ \ x_i = (i-1)h,\ t_j = j\tau,\ i = \overline{1, m+1},\ \ j = \overline{0, N} \right\}.$$

Розглядуваній задачі поставимо у відповідність систему різницевих рівнянь, яка в позначеннях праці [177], матиме вигляд

$$\tau_1 H_{\bar{t}t} + H_{\overset{0}{t}} + \varepsilon (1 - H) H_{\overset{0}{t}} = c_v \hat{H}_{\bar{x}x} + c_v \tau_2 \left(H_{\bar{x}\,x}\right)_t^0 + \mu\left(\hat{C} + \tau_2 C_t\right)_{\bar{x}\,x}, \qquad (4.51)$$

$$nC_t = D\hat{C}_{\bar{x}x} + uH_x \hat{C}_x + \nu C_x^{\,2} + \hat{C}(uH + \nu C)_{\bar{x}\,x}. \qquad (4.52)$$

Розписуючи в (4.51), (4.52) різницеві оператори та зводячи подібні члени, одержуємо наступну систему:

$$D_1 \cdot H_{i-1}^{j+1} - A_{1_i}^j \cdot H_i^{j+1} + D_1 \cdot H_{i+1}^{j+1} = \Phi_{1_i}^j, \qquad (4.53)$$

$$S \cdot C_{i-1}^{j+1} - B_i^j \cdot C_i^{j+1} + A_i^j \cdot C_{i+1}^{j+1} = \Phi_i^j \quad (i = \overline{2, m},\ j = \overline{1, N}), \qquad (4.54)$$

де позначено

$$D_1 = \frac{c_v}{h^2}\left(1 + \frac{\tau_2}{2\tau}\right),\ A_{1_i}^j = \frac{\tau_1}{\tau^2} + \frac{1}{2\tau} + 2D_1 + \frac{\varepsilon}{2\tau}\left(1 - H_i^j\right),$$

$$S = \frac{D}{h^2},\ A_i^j = \frac{1}{h^2}\left[D + u\left(H_{i+1}^j - H_i^j\right)\right],$$

$$B_i^j = \frac{m}{\tau} + S + A_i^j - \frac{1}{h^2}\left[u\left(H_{i+1}^j - 2H_i^j + H_{i-1}^j\right) + \nu\left(C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j\right)\right],$$

$$\Phi_i^j = -\frac{n}{\tau}C_i^j - \frac{\nu}{h^2}\left(C_{i+1}^j - C_i^j\right)^2,$$

$$\Phi_{1\,i}^j = -\frac{2\ \tau_1}{\tau^2}H_i^j - \frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{2} - \frac{\tau_1}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - H_i^j\right) + \frac{c_v\tau_2}{h^2}\right]H_i^{j-1} +$$

$$+\frac{c_v\tau_2}{2h^2\tau}\left(H_{i-1}^{j-1} + H_{i+1}^{j-1}\right) -$$

$$-\frac{\mu}{h^2}\left(1 + \frac{\tau_2}{\tau}\right)\left(C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}\right) + \frac{\mu\tau_2}{h^2\tau}\left(C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j\right).$$

Алгоритм розрахунку по різницевій схемі такий: спочатку згідно з (4.54) обчислюється концентрація солей на даному часовому шарі, а потім згідно з (4.53) обчислюється на цьому шарі значення надлишкових напорів. Різницеві рівняння системи (4.53), (4.54) являються трьохточковими і ефективно розв’язуються методом прогонки [13, 137, 177].

4.2.3. Результати реалізації алгоритму. Висновки. Числова реалізація наведеного алгоритму виконана для вхідних даних з роботи [67]. Деякі з результатів реалізації графічно зображено на рис. 4.4, 4.5. Одержані результати дозволяють зробити наступні висновки [32]:

1. У випадку наявності нелінійної повзучості ґрунтового скелета характер поведінки кривих надлишкових напорів залишається якісно таким самим, як і у випадку лінійної повзучості, однак величина надлишкових напорів за умови нелінійної повзучості може істотно збільшуватись порівняно з випадком лінійної повзучості (рис. 4.4).

2. Для кожного фіксованого значення t ступінь консолідації масиву, скелет якого має властивість нелінійної повзучості, є меншим, порівняно з випадком лінійної повзучості. Зі збільшенням значення параметра нелінійності ε вказаний ступінь консолідації зменшується (рис. 4.5).

3. Для малих значень безрозмірного параметра ε (зокрема при $0 < \varepsilon < 0,005$) з достатньо високою точністю за ступенем консолідації можна апроксимувати нелінійну повзучість ґрунтового скелета лінійною (криві 1–3 на рис. 4.5).

4. Нелінійне рівняння стосовно надлишкового напору H можна лінеаризувати, замінивши в (4.45) множник $1 - H$ множником $1 - H_{сер}$. При

цьому, як показують розрахунки, для досягнення відносної похибки по H, що не перевищує 10%, достатньо покласти $H_{сер} \approx 0,6$.

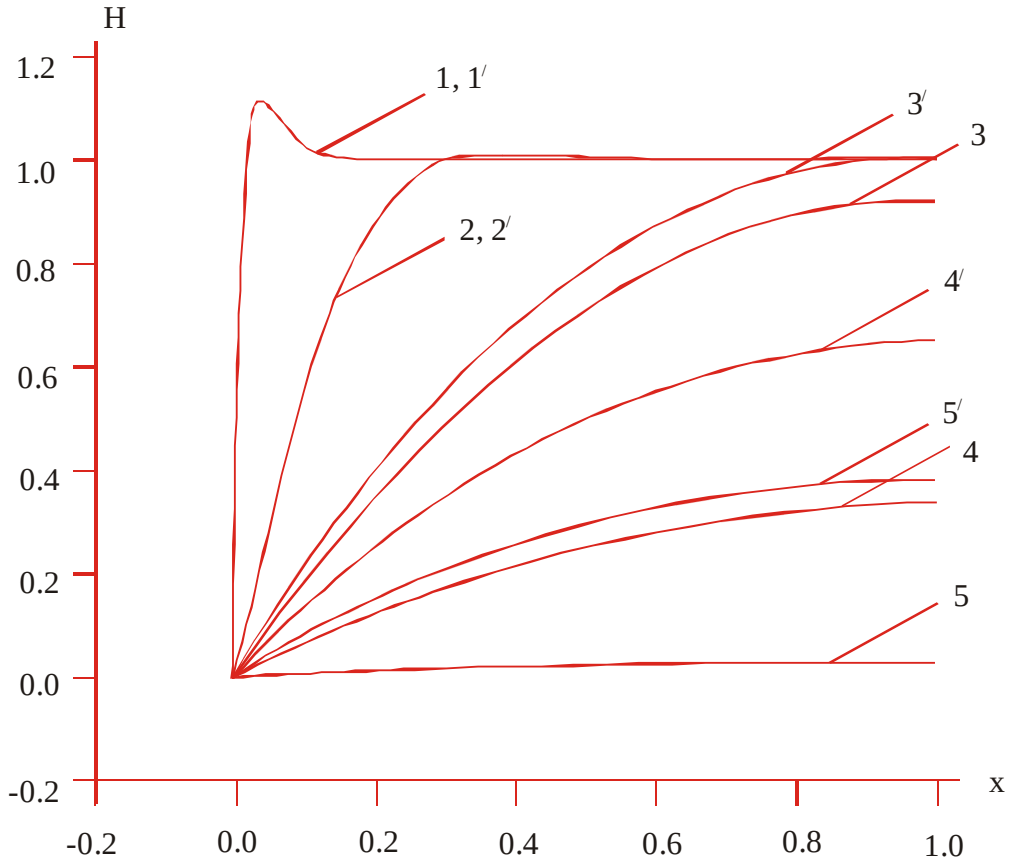


Рис. 4.4. Графіки надлишкових напорів для випадку лінійної (криві 1 – 5) та нелінійної (криві 1′– 5′) повзучості (1, 1′ – t=0,0005; 2, 2′– t = 0,025; 3, 3′ – t=0,25; 4, 4′ – t=0,75; 5, 5′ – t=1,5)

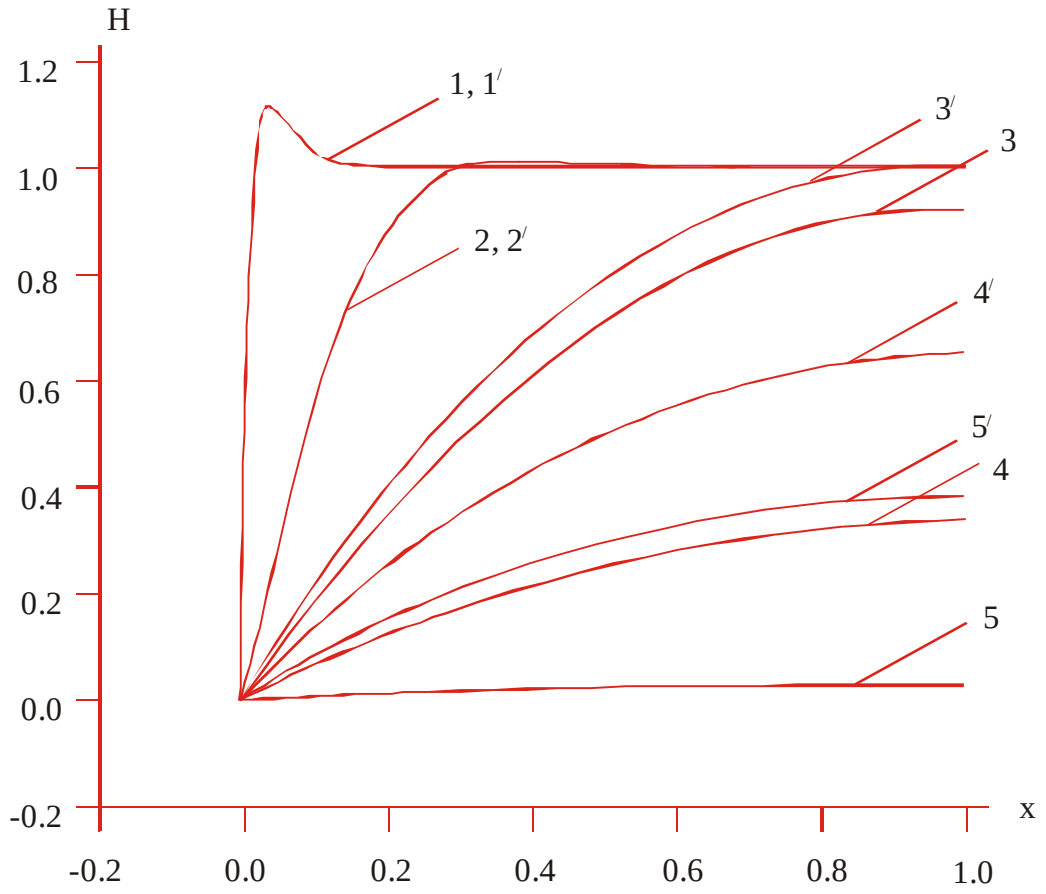


Рис. 4.5. Графіки ступеня консолідації масиву для різних значень ε (1 – ε=0, 2 – ε=0,001, 3 – ε=0,005, 4 – ε=0,5, 5 – ε=2, 6 – ε=5, 7– ε=10, 8 – ε=20)

4.3. Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами грунтових масивів з урахуванням нерівноважності процесу формування дифузійного поля концентрацій

Нижче побудована математична модель фільтраційної консолідації за наявності градієнта концентрації солей у поровому розчині, згідно з якою припускається, що в процесі консолідації має місце нерівноважність формування дифузійного поля концентрацій. В цьому зв'язку наведено постановку одновимірної крайової задачі теорії фільтраційної консолідації насиченого сольовим розчином грунтового масиву, розміщеного на непроникній основі, розроблено алгоритм чисельного розв'язання цієї задачі та викладено результати реалізації вказаного алгоритму на ПК.

4.3.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі. При нерівноважних умовах диффузійного процесу будемо виходити з наступного узагальнення закону Фіка [130]:

$$q + \tilde{\tau}_1 \frac{\partial q}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \tilde{\tau}_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.55}$$

де q – диффузійний потік, C – концентрація, D – коефіцієнт дифузії, $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ – відповідно параметри релаксації дифузійного потоку та концентрації. Для одержання рівняння конвективної диффузії розчинника при фільтрації порового розчину запишемо одновимірне рівняння балансу маси у вигляді [63, 74, 75, 167]

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x C\right) = 0, \tag{4.56}$$

де u_x – швидкість фільтрації, σ – пористість.

Тоді, дифференціюючи рівняння (4.55) за змінною x і додаючи до одержаного рівняння рівняння (4.56), попередньо продиференційоване за змінною t і помножене на множник $-\tilde{\tau}_1$, одержимо, після нескладних перетворень, рівняння

$$\sigma\tilde{\tau}_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x C + \tilde{\tau}_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(u_x C\right)\right) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right). \tag{4.57}$$

Використовуючи далі узагальнення закону Дарсі на випадок фільтрації сольових розчинів згідно з співвідношенням [65, 68]:

$$u_x = -k \frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{4.58}$$

де k – коефициєнт фільтрації, C – концентрація солей в рідкій фазі, H – надлишковий напір, ν – коефіцієнт осмосу, перетворимо рівняння (4.57) до вигляду

$$\sigma\tilde{\tau}_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[C\left(k \frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu \frac{\partial C}{\partial x}\right)\right] +$$
$$+ \tilde{\tau}_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left[C\left(k \frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu \frac{\partial C}{\partial x}\right)\right]. \tag{4.59}$$

Тут знак “+” відповідає нормальній осмотичній фільтрації, а знак “–” – аномальній.

Рівняння консолидації масиву з урахуванням справедливості закону (4.58) і наявності властивості лінійної повзучості скелета запишемо таким чином [68]:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) , \qquad (4.60)$$

де

$$\tau_1 = \frac{a_0 + \beta\,(1+\overline{e})}{\gamma_1\,[a + \beta\,(1+\overline{e})]},\ \tau_2 = \frac{1}{\gamma_1},\ c_v = \frac{k(1+\overline{e})}{\gamma\,[a + \beta\,(1+\overline{e})]},$$

$$\mu = \frac{c_v\,\nu}{k}\ ,\ a = a_0 + a_1,$$

a_0 – коефіцієнт миттєвого (пружного) ущільнення, a_1 , γ_1 – параметри повзучості [199], β – коефіцієнт об’ємної стискуваності газової компоненти, $\overline{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості.

Таким чином, математична модель розглядуваного процесу консолідації базується на системі диференціальних рівнянь (4.59), (4.60). У рамках цієї моделі вивчення процесу фільтраційної консолідації масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі і насиченого сольовим розчином за умов релаксаційності дифузійного процесу та повзучості грунтового скелета, зводиться до розв’язку в області $(0,l)\times(0,\infty)$ наступної нелінійної крайової задачі:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.61)$$

$$\sigma\tilde{\tau}_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[C\left(u \frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu \frac{\partial C}{\partial x}\right)\right] +$$

$$+ \tilde{\tau}_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left[C\left(u \frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu \frac{\partial C}{\partial x}\right)\right], \qquad (4.62)$$

$$H(0,t) = H_x(1,t) = 0, \qquad (4.63)$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0, \qquad (4.64)$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \qquad (4.65)$$

$$C(x,0) = C_t(x,0) = 0, \qquad (4.66)$$

де введено безрозмірні змінні та параметри співвідношеннями (4.44) і знак “штрих” над безрозмірними величинами опущено.

4.3.2. Алгоритм наближеного розв’язання задачі. Розглядаючи випадок аномальної осмотичної фільтрації, використаємо запропонований в роботі [76] підхід, що поєднує диференціально-різницевий метод та метод суммарних зображень [165]. Для цього введемо до розгляду сіткову область:

$$\omega_h = \{x_i : x_i = ih, i = \overline{0, m+1}, h = \frac{2}{2m+1}\}$$

і поставимо у відповідність задачі (4.61), (4.63), (4.64) диференціально-різницеву задачу вигляду

$$\tau_1 \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{2c_\nu \tau_2}{h^2}\right)\frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{c_\nu \tau_2}{h^2} T_3^{(m)} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{c_\nu}{h^2} T_3^{(m)} \vec{u}(t) +$$
$$+ \frac{2c_\nu}{h^2}\vec{u}(t) = \vec{w}(t), \tag{4.67}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{\varphi}, \tag{4.68}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(0) = \vec{0}, \tag{4.69}$$

де

$$\vec{u}(t) = \{H_i(t)\}_{i=1}^{m}, \ \vec{w}(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^{m},$$

$$f_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left\{\left(1 + \tau_2 \frac{d}{dt}\right)\left[c_{i-1}(t) + c_{i+1}(t)\right] - 2\left[c_i(t) + \tau_2 \frac{dc_i(t)}{dt}\right]\right\},$$

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^{m} \quad (\varphi_i = 1, i = \overline{1, m}),$$

$T_3^{(m)}$ – квадратна матриця, визначена в [165].

Введемо до розгляду P-трансформації векторів $\vec{u}$ і $\vec{w}$ згідно з співвідношеннями

$$\vec{\hat{u}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{u}(t), \ \vec{\hat{w}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{w}(t), \tag{4.70}$$

де $P_3^{(m)^*}$ – квадратна матриця порядку m, транспонована відносно матриці $P_3^{(m)} = \left[p_{kj}^{(3)}\right]_{k,j=1}^{m}$ (див., наприклад, [165]). Домножуючи (4.67) зліва на матрицю $P_3^{(m)^*}$, з урахуванням початкових умов (4.68), (4.69) та співвідношення [165]:

$$T_3^{(m)} = P_3^{(m)} \Lambda_3^{(m)} P_3^{(m)^*}$$

($\Lambda_3^{(m)} = \left[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, ..., \lambda_m^{(3)}\right]$ – діагональна матриця власних чисел матриці $T_3^{(m)}$ [165]), одержуємо задачу Коші, яка запишеться в скалярній формі у вигляді

$$\tau_1 \frac{d^2 \hat{u}_i(t)}{dt^2} + \sigma_i \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{4.71}$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{\varphi}_i, \ \frac{d}{dt}\hat{u}_i(0) = 0 \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.72}$$

де

$$\sigma_i = 1 + \frac{2c_\nu \tau_2}{h^2}\left(1 - \lambda_i^{(3)}\right), \quad \theta_i = \frac{2c_\nu}{h^2}\left(1 - \lambda_i^{(3)}\right) \ (i = \overline{1, m}).$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що розв’язок задачі (4.71),(4.72) має вигляд

$$\hat{u}_i(t) = \hat{\varphi}_i Q_i(t) + \frac{1}{\tau_1}\int_0^t \hat{w}_i(\tau) K_i(t-\tau) d\tau \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.73}$$

де

$$K_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{sh(q_i t)}{q_i} & (D_i > 0); \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{\sin(\beta_i t)}{\beta_i} & (D_i < 0); \\ te^{-\gamma_i t} & (D_i = 0); \end{cases} \tag{4.74}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{\gamma_i sh(q_i t) + q_i ch(q_i t)}{q_i} & (D_i > 0); \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{\gamma_i \sin(\beta_i t) + \beta_i \cos(\beta_i t)}{\beta_i} & (D_i < 0); \\ (1 + \gamma_i t)\ e^{-\gamma_i t} & (D_i = 0); \end{cases} \tag{4.75}$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2\tau_1}, \ D_i = \sigma_i^2 - 4\tau_1\theta_i, \ q_i = \frac{\sqrt{D_i}}{2\tau_1}, \ \beta_i = \frac{\sqrt{-D_i}}{2\tau_1}.$$

Переходячи в співвідношеннях (4.73) до оригіналів, одержуємо розв'язок вихідної диференціально-різницевої задачі у вигляді

$$H_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \left[c_{k+1}(\tau) - 2c_k(\tau) + c_{k-1}(\tau)\right] S_{ik}(t-\tau)d\tau, \quad (4.76)$$

де

$$S_{ik}(t) = \frac{\mu}{h^2\tau_1}\sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} M_\nu(t), \quad f_i(t) = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} Q_\nu(t),$$

$$M_\nu(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_\nu t}\dfrac{(1-\tau_2\gamma_\nu)sh(q_\nu t) + \tau_2 q_\nu ch(q_\nu t)}{q_\nu} & (D_\nu > 0); \\ e^{-\gamma_\nu t}\dfrac{(1-\tau_2\gamma_\nu)\sin(\beta_\nu t) + \tau_2\beta_\nu\cos(\beta_\nu t)}{\beta_\nu} & (D_\nu < 0); \\ (\tau_2 + (1-\tau_2\gamma_\nu)t)\, e^{-\gamma_\nu t} & (D_\nu = 0). \end{cases}$$

З урахуванням викладеного можна запропонувати методику розв'язання розглядуваної задачі, яка базується на сукупному застосуванні диференціально-різницевого і власне різницевого методів. При цьому обчислення поля концентрацій здійснюється, наприклад, згідно з різницевою схемою, яка в позначеннях праці [177] має вигляд (випадок аномальної осмотичної фільтрації)

$$\sigma\tilde{\tau}_1 C_{\bar{t}t} + \sigma \underset{t}{C_\circ} = D(\hat{C} + \tilde{\tau}_2 \underset{t}{C_\circ})_{\bar{x}x} + u(H_x\hat{C}_x + CH_{\bar{x}x}) + \nu(C_x^2 + CC_{\bar{x}x}) +$$
$$+\tilde{\tau}_1 u(C_x H_x + CH_{\bar{x}x})_{\bar{t}} + \nu\tilde{\tau}_1\left(C_x^2 + CC_{\bar{x}x}\right)_{\bar{t}}. \quad (4.77)$$

Звідси алгоритм обчислень може бути сформульований наступним чином: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі за часом згідно з різницевою схемою (4.77), а потім обчислюється значення H згідно з явною залежністю (4.76). При чисельній реалізації алгоритму інтеграл в співвідношенні (4.76) апроксимується за допомогою відповідної квадратурної формули, наприклад зручно використати формулу правих прямокутників [13, 137].

4.3.3. Результати чисельної реалізації алгоритму. Висновки. Чисельна реалізація викладеного алгоритму виконана для вхідних даних, наведених в роботі [68]. Результати розрахунків дозволяють зробити наступні висновки про характер формування поля концентрацій за умов релаксаційності дифузійного процесу та особливостях поведінки надлишкових напорів в масиві, що деформується.

1. Наявність властивості релаксаційності процесу дифузії при фильтраційній консолидації за умов повзучості скелета грунтового масиву, насиченого сольовим розчином, зумовлює запізнення формування поля концентрацій розчинника порівняно з випадком опису дифузійного процесу в рамках класичної математичної моделі (тобто відповідно до закону Фіка [63]).

2. У випадку аномальної осмотичної фільтрації урахування фактора релаксаційності дифузійного процесу спричинює деяке збільшення надлишкових напорів у більшій частині фільтраційної області порівняно з випадком відсутності впливу вказаного чинника (рис. 4.6). Зазначені підвищені надлишкові напори функціонують у масиві, як правило, на початкових стадіях процесу консолідації і впливають на динаміку проходження цього процесу, подовжуючи його в часі. При цьому, як показують розрахунки, вплив на динаміку процесу консолідації фактора релаксаційності процесу дифузії несумірний з впливом власне фактора повзучості грунтового скелета [186], або наявності градієнта концентрації [184].

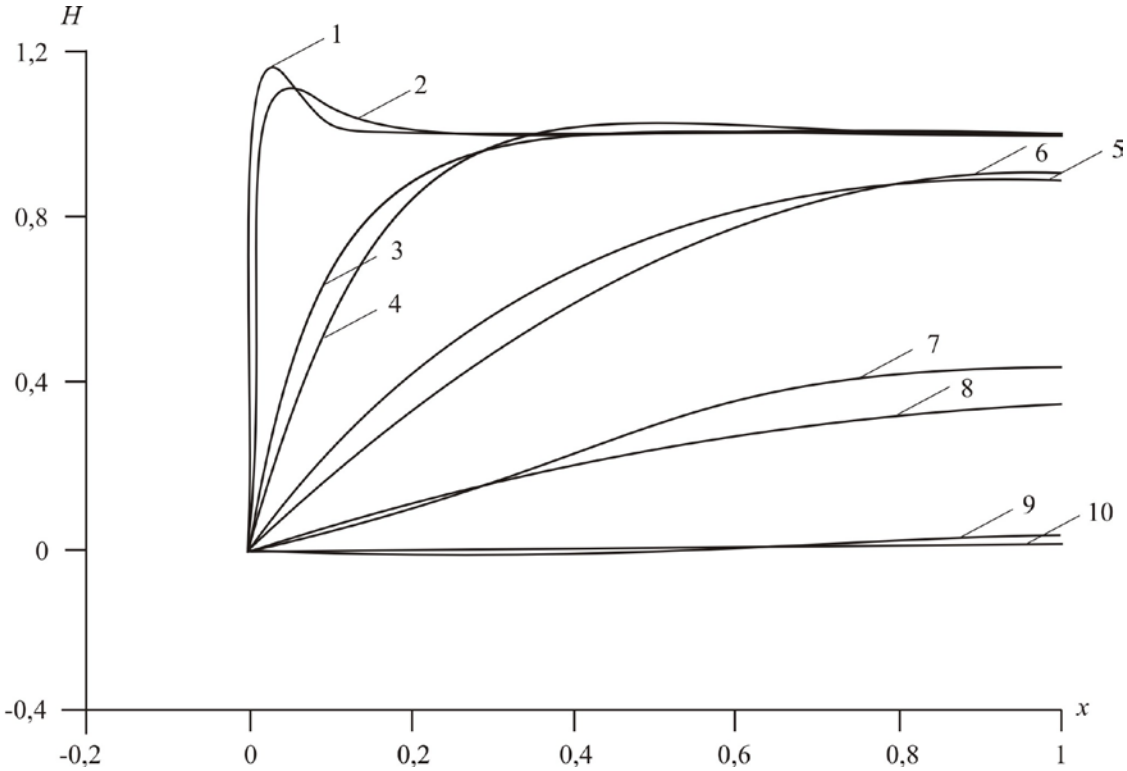


Рис. 4.6. Порівняння надлишкових напорів у випадку релаксаційності дифузійного процесу (криві з непарними номерами) і в класичному випадку (криві з парними номерами) у фіксовані моменти часу (1, 2 – t=0,0005; 3, 4 – t=0,025; 5, 6 – t=0,25; 7,8 – t=0,75; 9, 10 – t=1,51; $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = 0,5$)

Наведені міркування можуть бути використаними при розробці конструктивних рішень з метою визначення оптимальних характеристик динаміки процесу консолідації за умов насиченості масиву сольовим розчином з урахуванням нерівноважності дифузійного процесу та повзучості грунтового скелета.

4.4. Математичне моделювання процесу консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, за умов релаксаційної фільтрації

За наявності складної внутрішньої структури розчинів, що заповнюють сховища промислових стоків (зокрема, коли наповнювачами шламо- та хвостосховищ є розчини з яскраво вираженими властивостями неньютонівських рідин), важливе значення має врахування релаксаційних властивостей фільтраційного процесу, оскільки, як відзначається, наприклад, у роботі [130], час релаксації для таких рідин може бути досить значним. Зауважимо також, що у випадку нестаціонарних процесів фільтрації в слабопроникних пористих середовищах спостерігаються значні відхилення від класичного закону Дарсі, що спричиняє використання для опису цих процесів релаксаційних моделей [148]. Звідси випливає необхідність врахування впливу релаксаційних явищ на перебіг процесу фільтраційного ущільнення масивів, насичених сольовими розчинами. В зв'язку з цим нижче виконано математичне моделювання фільтраційного ущільнення насичених сольовими розчинами грунтових масивів за умов релаксаційності фільтраційного процесу.

4.4.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі. Припустимо, що має місце таке узагальнення закону релаксаційної фільтрації [148] у випадку руху сольових розчинів [187]:

$$u_x + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) \pm \nu \ \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.78)$$

де k – коефіцієнт фільтрації, C – концентрація солей в рідкій фазі, $H = \dfrac{p}{\gamma}$ – надлишковий напір, p – поровий тиск, γ – густина рідини, λ_1, λ_2 – параметри релаксації швидкості і тиску відповідно, ν – коефіцієнт осмосу (знак "+" відповідає нормальній осмотичній фільтрації, а знак "–" – аномальній [68]).

Зауважимо, що в окремому випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ із співвідношення (4.78) одержуємо узагальнення закону Дарсі–Герсеванова для випадку руху сольових розчинів, запропоноване в [65, 68].

Виходячи з рівняння конвективної дифузії (гідродинамічної дисперсії) при фільтрації порового розчину [63, 136, 167]:

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\ -\ \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x C\right)\ , \tag{4.79}$$

де n – пористість, D – коефіцієнт конвективної дифузії, з урахуванням співвідношення (4.78), та за припущенням сталого початкового розподілу надлишкових напорів у масиві, одержимо таке рівняння для визначення концентрації:

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{k}{\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}}d\tau\right) \mp \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right). \tag{4.80}$$

Зазначимо, що в окремому випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ інтегральний член в (4.80) відсутній і одержане рівняння не залежатиме від релаксаційних параметрів, набуваючи загальновідомого вигляду [63, 173].

Щоб знайти рівняння для надлишкового напору H, скористаємось рівнянням нерозривності з урахуванням лінійного закону ущільнення [84, 94, 199]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{a\gamma}{1+\overline{e}}\frac{\partial H}{\partial t} = 0\,, \tag{4.81}$$

де a – коефіцієнт ущільнення, $\overline{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості. Тоді, диференціюючи співвідношення (4.78) за змінною x, а співвідношення (4.81) – за змінною t і додаючи одержані співвідношення, після виключення з результату похідних $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t}$, знаходимо шукане рівняння для напору у вигляді

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.82}$$

де $C_v = \frac{k(1+\overline{e})}{\gamma a}$ – коефіцієнт консолідації [199], $\mu = \frac{\nu C_v}{k}$.

Таким чином, математична модель розглядуваного процесу консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, за умов релаксаційності процесу фільтрації, базується на системі рівнянь (4.80), (4.82). У рамках побудованої моделі вивчення процесу консолідації масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі, зводиться до розв'язання в області $(0, l)\times(0, +\infty)$ нелінійної крайової задачі:

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{u\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{u}{\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\times$$
$$\times\ \frac{\partial}{\partial x}\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}}d\tau\right) \mp \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right), \qquad (4.83)$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.84)$$

$$H(0,t) = 0,\ H_x(l,t) = 0, \qquad (4.85)$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0, \qquad (4.86)$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \qquad (4.87)$$

$$C(x,\ 0) = 0, \qquad (4.88)$$

де введено безрозмірні змінні і параметри співвідношеннями

$$x' = \frac{x}{l},\ t' = \frac{t}{T},\ H' = \frac{H}{H_0},\ C' = \frac{C}{C_0},\ \lambda_i' = \frac{\lambda_i}{T}\ (i = \overline{1,2})\ C_v' = \frac{C_v T}{l^2},$$
$$\mu' = \frac{\mu C_0 T}{l^2},\ \nu' = \frac{\nu C_0 T}{l^2},\ u' = \frac{kH_0 T}{l^2},\ D' = \frac{DT}{l^2}\ (D,\ T,\ C_0,\ H_0 = \text{const})$$

і знак "штрих" над безрозмірними величинами опущено.

4.4.2. Алгоритм наближеного розв'язку задачі. Розглядаючи випадок аномальної осмотичної фільтрації, застосуємо до (4.84)–(4.86) запропонований в [76] підхід, що поєднує диференціально-різницевий метод та метод сумарних зображень [165]. Для цього введемо до розгляду сітку $x_i = ih\quad (i = \overline{0, m+1})$ і поставимо у відповідність задачі (4.84)–(4.86) диференціально-різницеву задачу вигляду

$$\lambda_1 \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{2C_\nu \lambda_2}{h^2}\right)\frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{C_\nu \lambda_2}{h^2} T_3^{(m)} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{C_\nu}{h^2} T_3^{(m)} \vec{u}(t) +$$

$$+ \frac{2C_\nu}{h^2}\vec{u}(t) = \vec{w}(t), \tag{4.89}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{\varphi}\ ,\ \frac{d}{dt}\vec{u}(0) = \vec{0}, \tag{4.90}$$

де

$$\vec{u}(t) = \{H_i(t)\}_{i=1}^m,\ \vec{w}(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^m,$$

$$f_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left\{\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right)\left[C_{i-1}(t) - 2C_i(t) + C_{i+1}(t)\right]\right\},$$

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \quad (\varphi_i = 1,\ i = \overline{1, m}),\ \vec{0} = \{0, 0, ..., 0\},$$

$T_3^{(m)}$ – квадратна матриця, визначена в [165].

Введемо до розгляду P-трансформації векторів $\vec{u}$ і $\vec{w}$ згідно з співвідношеннями

$$\vec{\hat{u}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{u}(t),\ \vec{\hat{w}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{w}(t), \tag{4.91}$$

де $P_3^{(m)^*}$ – квадратна матриця порядку m, транспонована відносно матриці $P_3^{(m)} = \left[p_{kj}^{(3)}\right]_{k,j=1}^m$, визначеної в [165]. Домножуючи (4.89), (4.90) зліва на матрицю $P_3^{(m)^*}$, з урахуванням співвідношення [165]

$$T_3^{(m)} = P_3^{(m)} \Lambda_3^{(m)} P_3^{(m)^*}$$

($\Lambda_3^{(m)} = \left[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, ..., \lambda_m^{(3)}\right]$ – діагональна матриця власних чисел матриці $T_3^{(m)}$ [165]), одержуємо задачу Коші, яка в скалярній формі набуває вигляду

$$\lambda_1 \frac{d^2\hat{u}_i(t)}{dt^2} + \sigma_i \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{4.92}$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{\varphi}_i,\ \frac{d}{dt}\hat{u}_i(0) = 0 \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.93}$$

де

$$\sigma_i = 1 + \lambda_2\theta_i, \quad \theta_i = \frac{C_\nu}{h^2}\left(2 - \lambda_i^{(3)}\right), \ \widehat{\varphi}_i = \sum_{k=1}^{m} p_{ki}^{(3)},$$

$$\widehat{w}_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left[p_{1i}^{(3)} + \left(\lambda_i^{(3)} - 2\right)\sum_{k=1}^{m} p_{ki}^{(3)}\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right)C_k(t)\right] \ (i = \overline{1, m}).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що розв'язок задачі (4.92), (4.93) має вигляд

$$\widehat{u}_i(t) = \widehat{\varphi}_i Q_i(t) + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t \widehat{w}_i(\tau) K_i(t-\tau)d\tau \ \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.94}$$

де

$$K_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{sh(q_i t)}{q_i} & (D_i > 0); \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{\sin(\beta_i t)}{\beta_i} & (D_i < 0); \\ te^{-\gamma_i t} & (D_i = 0), \end{cases}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{\gamma_i sh(q_i t) + q_i ch(q_i t)}{q_i} & (D_i > 0); \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{\gamma_i \sin(\beta_i t) + \beta_i \cos(\beta_i t)}{\beta_i} & (D_i < 0); \\ (1 + \gamma_i t)\ e^{-\gamma_i t} & (D_i = 0), \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2\lambda_1}, \ D_i = \sigma_i^2 - 4\lambda_1\theta_i, \ q_i = \frac{\sqrt{D_i}}{2\lambda_1}, \ \beta_i = \frac{\sqrt{-D_i}}{2\lambda_1}.$$

Переходячи в співвідношеннях (4.95) до оригіналів, одержуємо розв'язок вихідної диференціально-різницевої задачі:

$$H_i(t) = F_i(t) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t C_k(\tau)\ S_{ik}(t-\tau)d\tau \ \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.95}$$

де

$$S_{ik}(t) = \frac{\mu}{h^2\lambda_1}\sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)}\left(\lambda_\nu^{(3)} - 2\right) M_\nu(t),$$

$$F_i(t) = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} Q_\nu(t) + \frac{\mu}{\lambda_1 h^2}\sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{1\nu}^{(3)} \Phi_\nu(t),$$

$$M_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{(1-\lambda_1\gamma_i)sh(q_i t) + \lambda_1 q_i ch(q_i t)}{q_i} & (D_i > 0); \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{(1-\lambda_1\gamma_i)\sin(\beta_i t) + \lambda_1\beta_i\cos(\beta_i t)}{\beta_i} & (D_i < 0); \\ (\lambda_1 + (1-\lambda_1\gamma_i)t)\, e^{-\gamma_i t} & (D_i = 0), \end{cases}$$

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} \theta_i^{-1}\{1 - e^{-\gamma_i t}[\gamma_i q_i^{-1} sh(q_i t) + ch(q_i t)]\} & (D_i > 0); \\ \theta_i^{-1}\{1 - e^{-\gamma_i t}[\gamma_i \beta_i^{-1}\sin(\beta_i t) + \cos(\beta_i t)]\} & (D_i < 0); \\ \gamma_i^{-2}\,[1 - (1 + t\gamma_i)e^{-\gamma_i t}] & (D_i = 0). \end{cases}$$

З урахуванням викладеного можна запропонувати методику розв’язання розглядуваної задачі, яка базується на поєднанні диференціально-різницевого та власне різницевого методів. При цьому обчислення поля концентрацій здійснюється, наприклад, згідно з різницевою схемою, яка в позначеннях праці [177] має вигляд

$$nC_t = D\widehat{C}_{\bar{x}x} + \frac{u}{\lambda_1}\left(\widehat{C}V_{\bar{x}}\right)_x + \frac{u\lambda_2}{\lambda_1}\left(CV_{\bar{x}t}\right)_x + \nu\left(\widehat{C}C_{\bar{x}}\right)_x, \qquad (4.96)$$

$$\lambda_1 V_t = \lambda_1 H - V \qquad (4.97)$$

і для функції V в початковий момент часу очевидно, $V(x, 0) = 0$.

Звідси, алгоритм обчислень можна сформулювати таким чином: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі за часом, згідно з різницевою схемою (4.96), (4.97), а потім обчислюється значення надлишкового напору H на цьому шарі, згідно з явною залежністю (4.95). При чисельній реалізації алгоритму інтеграл в співвідношенні (4.95) апроксимується за допомогою однієї з квадратурних формул [13, 137].

4.4.3 Результати чисельної реалізації алгоритму. Висновки. Чисельна реалізація викладеного алгоритму розв’язання задачі виконана для

вхідних даних, наведених у праці [67]. Результати розрахунків дозволяють зробити такі висновки про характер поведінки надлишкових напорів в масиві, що ущільнюється за умов фільтрації сольового розчину з урахуванням релаксаційності фільтраційного процесу.

1. Вплив солеперенесення на перебіг процесу консолідації за умов релаксаційності фільтраційного процесу (випадок аномальної осмотичної фільтрації) полягає в наступному: за вказаних умов він призводить до істотного збільшення надлишкових напорів у масиві порівняно з випадком відсутностіі солеперенесення. У зв'язку з цим процес ущільнення помітно затримується і відбувається перехід грунтового масиву на початкових стадіях процесу до більш нестабілізованого стану, ніж за відсутності солеперенесення (рис. 4.7).

2. Вплив нерівноважності фільтраційного процесу на перебіг процесу ущільнення масиву, насиченого сольовим розчином, у випадку аномальної осмотичної фільтрації полягає в наступному: на початкових стадіях процесу ущільнення у разі релаксаційності фільтраційного процесу маємо деяке перевищення надлишкових напорів в масиві над напорами, що відповідають випадку класичної фільтрації за законом Дарсі (рис. 4.8). При цьому немонотонна зміна надлишкових напорів у разі релаксаційності фільтраційного процесу (рис. 4.8) свідчить про те, що грунт перебуває в нестабілізованому стані.

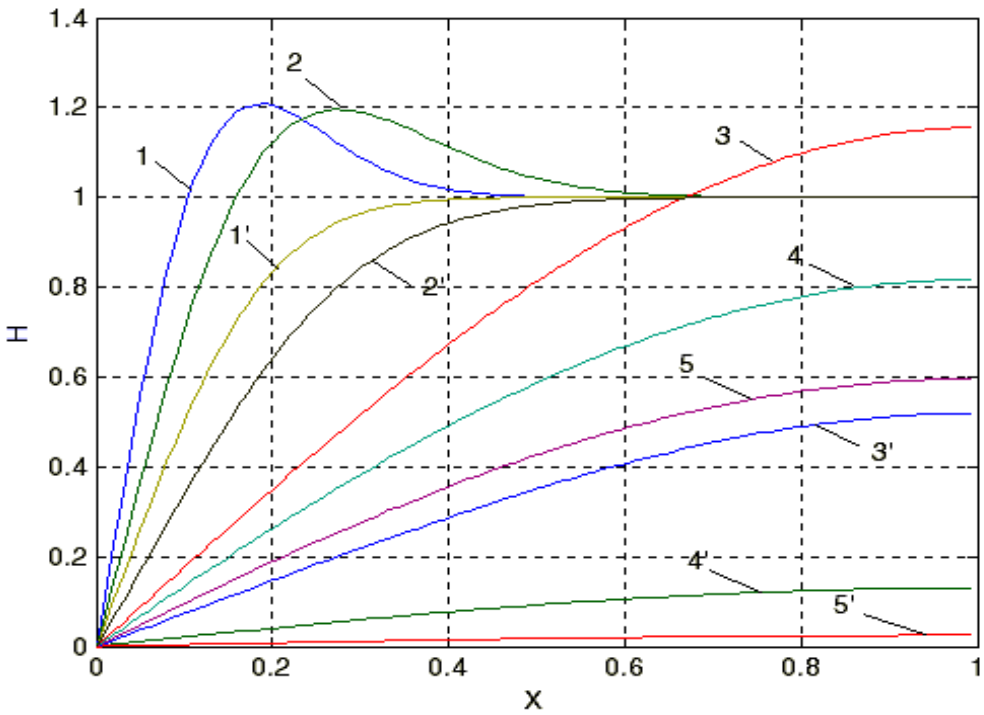


Рис. 4.7. Вплив солеперенесення на перебіг процесу консолідації за умов релаксаційності фільтраційного процесу ($1, 1' - t = 0,012$;

$2, 2' - t = 0,025$; $3, 3' - t = 0,25$; $4, 4' - t = 0,75$; $5, 5' - t = 1,51$,
1 – 5 відповідають наявності солеперенесення, $1^{/}$ – $5^{/}$ – його відсутності)

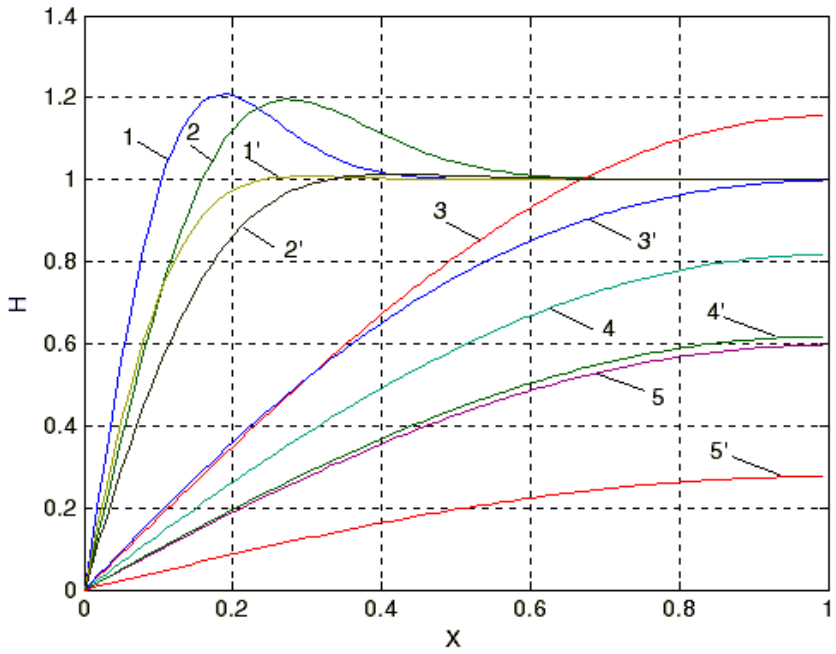


Рис. 4.8. Вплив нерівноважності фільтраційного процесу на поведінку надлишкових напорів в процесі консолідації масиву насиченого сольовим розчином ($1, 1' - t = 0,012$; $2, 2' - t = 0,025$; $3, 3' - t = 0,25$; $4, 4' - t = 0,75$; $5, 5' - t = 1,51$, 1 – 5 – випадок релаксаційної фільтрації, $1^{/}$ – $5^{/}$ – випадок класичної фільтрації)

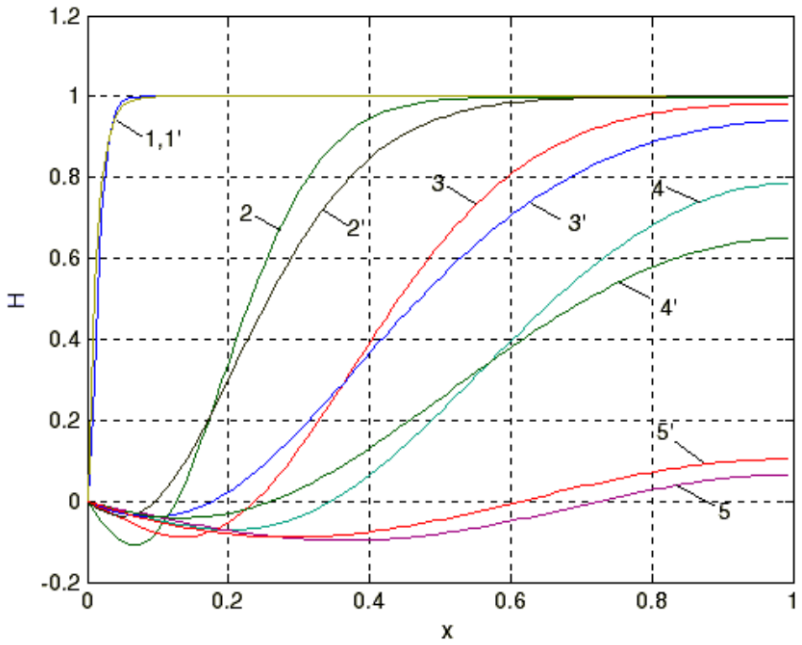


Рис. 4.9. Вплив нерівноважності фільтраційного процесу на поведінку надлишкових напорів у випадку нормальної осмотичної фільтрації в масиві, насиченому сольовим розчином ($1, 1' - t = 0,001$; $2, 2' - t = 0,015$;

$3, 3' - t = 0,05$; $4, 4' - t = 0,1$; $5, 5' - t = 0,2$, 1 – 5 – випадок релаксаційної фільтрації, $1^{/}$ – $5^{/}$ – класичної фільтрації)

3. При нормальній осмотичній фільтрації вплив нерівноважності фільтраційного процесу на перебіг процесу ущільнення масиву, насиченого сольовим розчином, буде іншим: на початкових стадіях процесу ущільнення надлишкові напори дещо зменшуються біля крівлі масиву і збільшуються біля його підошви, порівняно з випадком класичної фільтраційної моделі (рис. 4.9). При цьому біля крівлі пласта маємо деяке переущільнення, а біля підошви – недоущільнення грунту.

Таким чином, одержані результати свідчать про значний вплив явища нерівноважності фільтраційного процесу на перебіг процесів ущільнення в грунтових масивах, насичених сольовими розчинами.

4.5. Спрощена математична модель для опису процесу фільтраційної консолідації грунтових масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації

Як зазначено вище, у разі наявності складної внутрішньої структури розчинів, що заповнюють сховища промстоків, чи у випадку нестаціонарних процесів фільтрації в слабкопроникних пористих середовищах спостерігаються значні відхилення від класичного закону Дарсі, що обумовлює використання для опису цих процесів релаксаційних моделей [148]. Врахування впливу релаксаційності явищ фільтрації на перебіг процесу ущільнення грунтових масивів, насичених сольовими розчинами, здійснено в [187]. Проте дослідження процесу консолідації в рамках запропонованої в [187] математичної моделі ускладнено тим, що вказана модель базується на нелінійній системі диференціального та інтегро-диференціального рівнянь. Нижче пропонується спрощена, наближена математична модель процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами грунтових масивів за умови релаксаційності фільтраційного процесу, яка базується на системі виключно диференціальних рівнянь з частинними похідними. Порівняння результатів розрахунків полів концентрацій та надлишкових напорів згідно з обома вказаними моделями (спрощеною та повною) засвідчує задовільні апроксимаційні властивості спрощеної математичної моделі, а отже, і доцільність її подальшого інженерного використання.

4.5.1. Побудова спрощеної математичної моделі процесу консолідації. Математична модель процесу консолідації грунтового масиву, насиченого сольовим розчином, за умови релаксаційності фільтраційного процесу базується на системі рівнянь, яка у безрозмірних змінних має вигляд (4.83), (4.84) або у випадку аномальної осмотичної фільтрації:

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{u\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{u}{\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}}d\tau\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right), \qquad (4.98)$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2\frac{\partial H}{\partial t}\right) + \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.99)$$

де C_ν – коефіцієнт консолідації [92, 94, 199], $\mu = \frac{\nu C_\nu}{k}$, D – коефіцієнт дифузії, n – пористість, k – коефіцієнт фільтрації, C – концентрація солей в рідкій фазі, $H = \frac{p}{\gamma}$ – надлишковий напір, p – поровий тиск, γ – густина рідини, λ_1, λ_2 – параметри релаксації швидкості та тиску відповідно, ν – коефіцієнт осмосу, $u = \text{const}$ – безрозмірний параметр. При цьому, згідно з викладеним вище, рівняння моделі (4.98), (4.99) виведено на основі узагальнення закону релаксаційної фільтрації на випадок руху сольових розчинів вигляду (4.78).

Слід зазначити, що в першому з рівнянь системи (4.98), (4.99) при $\lambda_1 = \lambda_2$ інтегральний член взагалі відсутній. У загальному випадку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Маючи на меті апроксимацію інтегро-диференціального рівняння (4.98) деяким диференціальним, зважимо на наявність в (4.98) експоненційно-спадного по t множника під знаком інтеграла по проміжку $[0, t]$. Звідси можна припустити, що для малих і великих значень t можна у першому наближенні знехтувати в (4.98) інтегральним членом. В результаті одержуємо рівняння для концентрації у вигляді

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{u\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right). \qquad (4.100)$$

Система диференціальних рівнянь (4.99), (4.100) складає основу математичної моделі, яку надалі називатимемо спрощеною моделлю (на відміну від моделі, що грунтується на системі рівнянь (4.98), (4.99) і яку умовно називатимемо повною моделлю).

Виникає питання про апроксимаційні властивості спрощеної математичної моделі та можливість застосування цієї моделі в інженерних розрахунках. З метою дослідження цього питання розглянемо наступну крайову задачу про консолідацію грунтового масиву, розміщеного на непроникній основі.

4.5.2. Постановка крайової задачі та алгоритм її наближеного розв'язку. Розглянемо процес консолідації грунтового масиву потужності $l = 1$, розміщеного на непроникній основі. В рамках спрощеної математичної моделі вивчення цього процесу зводиться до розв'язання в області $(0,1)\times(0,+\infty)$ крайової задачі для системи рівнянь (4.99), (4.100) за таких умов [187]:

$$H(0,t) = 0,\ H_x(1,t) = 0, \tag{4.101}$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0, \tag{4.102}$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \tag{4.103}$$

$$C(x,0) = 0. \tag{4.104}$$

Спочатку розглянемо задачу (4.99), (4.101), (4.102), до якої застосуємо підхід, що поєднує у собі диференціально-різницевий метод та метод сумарних зображень [76, 165]. Не зупиняючись на відповідних перетвореннях (детально викладених вище), одержуємо розв'язок диференціально-різницевої крайової задачі, що відповідає (4.99), (4.101), (4.102) у вигляді

$$H_i(t) = F_i(t) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t C_k(\tau)\ S_{ik}(t-\tau)d\tau\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{4.105}$$

де

$$F_i(t) = \frac{\mu}{\lambda_1 h^2}\sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{1\nu}^{(3)}\Phi_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{m}\ \sum_{k=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} Q_\nu(t),$$

$$S_{ik}(t) = \frac{\mu}{h^2 \lambda_1} \sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} (\lambda_\nu^{(3)} - 2) M_\nu(t),$$

$$M_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t} \dfrac{(1-\lambda_1\gamma_i)\mathrm{sh}(q_i t) + \lambda_1 q_i \mathrm{ch}(q_i t)}{q_i}, & D_i > 0; \\ e^{-\gamma_i t} \dfrac{(1-\lambda_1\gamma_i)\sin(\beta_i t) + \lambda_1 \beta_i \cos(\beta_i t)}{\beta_i}, & D_i < 0; \\ (\lambda_1 + (1 - \lambda_1 \gamma_i)t)\, e^{-\gamma_i t}, & D_i = 0; \end{cases}$$

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} \theta_i^{-1} \left\{ 1 - e^{-\gamma_i t} \left[\gamma_i q_i^{-1} \mathrm{sh}(q_i t) + \mathrm{ch}(q_i t) \right] \right\}, & D_i > 0; \\ \theta_i^{-1} \left\{ 1 - e^{-\gamma_i t} \left[\gamma_i \beta_i^{-1} \sin(\beta_i t) + \cos(\beta_i t) \right] \right\}, & D_i < 0; \\ \gamma_i^{-2} \, [1 - (1 + \gamma_i t)\, e^{-\gamma_i t}], & D_i = 0; \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2\lambda_1},\ D_i = \sigma_i^2 - 4\lambda_1\theta_i,\ q_i = \frac{\sqrt{D_i}}{2\lambda_1},\ \beta_i = \frac{\sqrt{-D_i}}{2\lambda_1},$$

$$\sigma_i = 1 + \lambda_2\theta_i, \quad \theta_i = \frac{c_\nu}{h^2}(2 - \lambda_i^{(3)}),$$

h – крок сітки по геометричній змінній (інші величини визначено в п. 4.4.2).

Методику розв’язання крайової задачі (4.99), (4.100), (4.101)–(4.104) побудуємо на основі сумісного застосування диференціально-різницевого та власне різницевого методів. При цьому обчислення поля концентрації солей у поровому розчині здійснюється, наприклад, згідно з різницевою схемою, яка в позначеннях праці [177] має вигляд

$$nC_t = D\hat{C}_{\bar{x}x} + u\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\hat{C}H_{\bar{x}})_x + \nu(\hat{C}C_{\bar{x}})_x. \qquad (4.106)$$

Звідси алгоритм обчислень може бути сформульований таким чином: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі по часу згідно з різницевою схемою (4.106), а потім обчислюється значення надлишкового напору H на цьому шарі згідно з явною залежністю (4.105).

4.5.3. Результати чисельної реалізації та висновки. Чисельна реалізація викладеного алгоритму розв’язку задачі консолідації в рамках спрощеної математичної моделі виконана для вхідних даних, вказаних у

праці [67]. (У рамках відповідної повної математичної моделі результати розрахунків, виконаних для цих же самих вхідних даних, наведено в [187]). Метою розрахунків (рис. 4.10, 4.11) було порівняння концентрацій та надлишкових напорів, обрахованих згідно з повною та спрощеною моделями. Стосовно апроксимаційних властивостей спрощеної математичної моделі результати розрахунків дозволяють зробити наступний висновок.

Для малих і великих значень безрозмірного часу t маємо добрий збіг як концентрації (рис. 4.10), так і надлишкових напорів (рис. 4.11), визначених у рамках спрощеної та повної математичних моделей. Найбільше відхилення значень C і H, обчислених у рамках спрощеної математичної моделі, від відповідних значень, обрахованих у рамках повної моделі, спостерігається для проміжних (середніх) значень часу консолідації (рис. 4.10, 4.11), причому відповідна відносна похибка наближення в розрахованих прикладах коливалась в межах 1,2–5,8%, що свідчить про задовільні апроксимаційні властивості спрощеної математичної моделі консолідації.

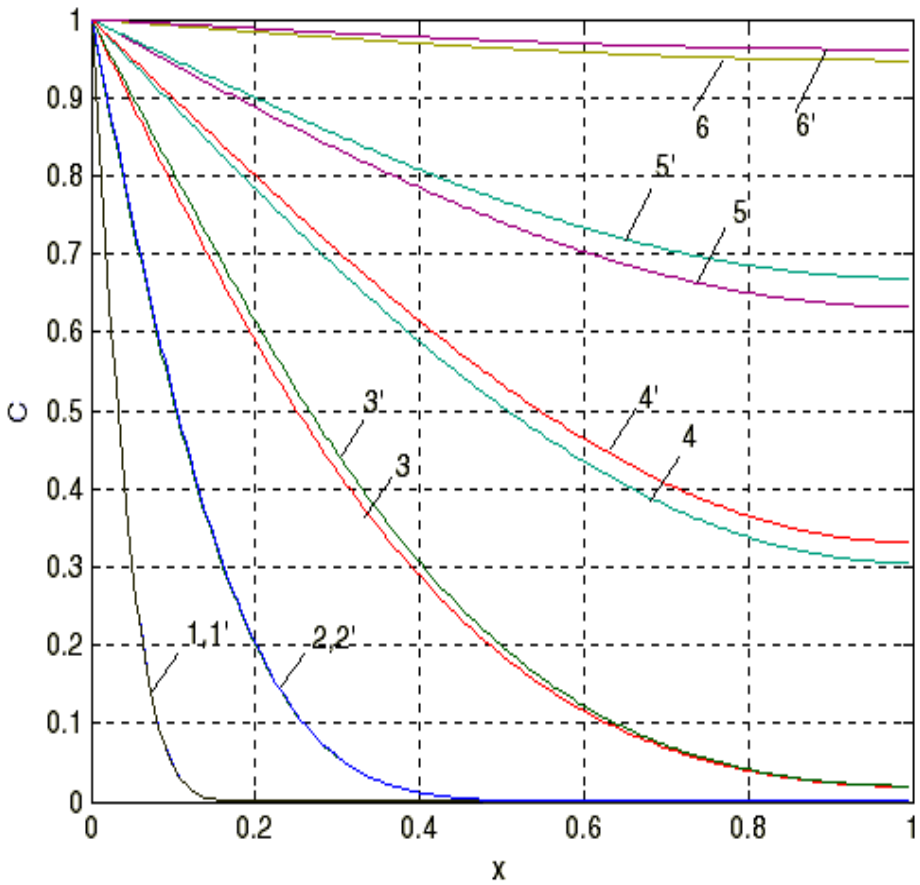


Рис. 4.10. Порівняння кривих концентрації для повної (1 – 6) і спрощеної ($1'-6'$) моделей: $1, 1' - t = 0{,}0025$; $2, 2' - t = 0{,}025$; $3, 3' - t = 0{,}015$; $4, 4' - t = 0{,}05$; $5, 5' - t = 1$; $6, 6' - t = 2{,}5$

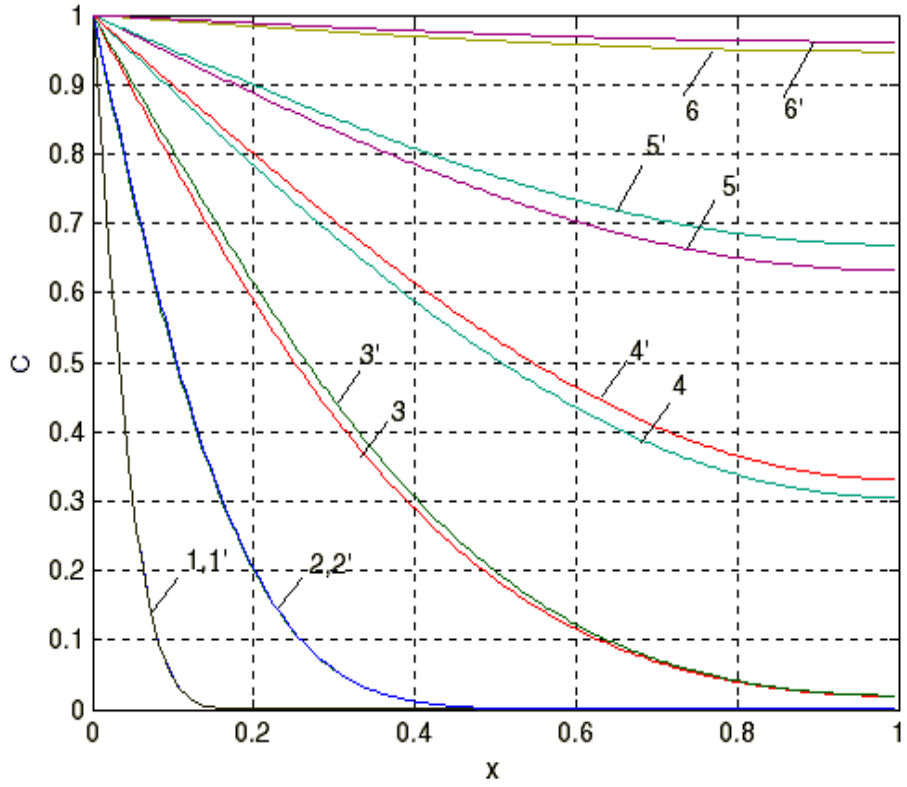


Рис. 4.11. Порівняння надлишкових напорів для повної (1 – 6) і спрощеної ($1'$ – $6'$) моделей: $1, 1' - t = 0{,}0025$; $2, 2' - t = 0{,}025$; $3, 3' - t = 0{,}015$; $4, 4' - t = 0{,}05$; $5, 5' - t = 1$; $6, 6' - t = 2{,}5$

Таким чином, результати розрахунків дають підстави рекомендувати застосування спрощеної математичної моделі в інженерній практиці для аналізу особливостей перебігу процесів ущільнення грунтових масивів, насичених сольовими розчинами, за умов релаксаційності фільтраційного процесу.

4.6. Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами грунтових масивів з урахуванням релаксаційності фільтраційного та дифузійного процесів

Вивченню впливу реологічних властивостей грунтів на динаміку процесу консолідації насичених сольовими розчинами масивів та релаксаційності процесів формування фільтраційного або дифузійного полів присвячено попередні параграфи. Тут розглянемо методику математичного моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами

масивів з урахуванням релаксаційних явищ одночасно в процесах фільтрації та дифузії [35]. Розв'язання цієї задачі дозволяє повніше характеризувати динаміку формування полів концентрацій та надлишкових напорів у процесі консолідації особливо на початкових його стадіях.

4.6.1. Побудова математичної моделі процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами масивів за умов релаксаційності фільтраційного та дифузійного процесів. Постановка крайової задачі. Для врахування релаксаційних явищ в дифузійному процесі виходитимемо з наступного узагальнення закону Фіка [130]:

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.107}$$

де q – дифузійний потік, C – концентрація, D – коефіцієнт диффузії, τ_1, τ_2 – відповідно параметри релаксації дифузійного потоку та концентрації.

З урахуванням рівняння балансу маси [136] звідси одержуємо рівняння конвективної дифузії розчинника при фільтрації порового розчину у вигляді

$$n\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + n\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x C + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}(u_x C)\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.108}$$

де u_x – швидкість фільтрації, n – пористість.

Запишемо узагальнення закону релаксаційної фільтрації [148] на випадок руху сольових розчинів у вигляді (4.78). Зі співвідношення (4.108) з урахуванням (4.78) маємо рівняння для визначення концентрації солей в рідкій фазі:

$$n\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{k}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau\right) \mp \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right). \tag{4.109}$$

З урахуванням рівняння нерозривності, лінійного закону ущільнення [199] і співвідношення (4.78) одержуємо наступне рівняння для надлишкового напору $H(x,t)$:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mp \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{4.110}$$

де C_v – коефіцієнт консолідації [199], $\mu = \dfrac{\nu C_v}{k}$.

Отже, шукана математична модель фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами масивів з урахуванням релаксаційних явищ в процесах формування полів надлишкових напорів і концентрацій базується на системі рівнянь (4.109), (4.110). У рамках цієї моделі вивчення процесу фільтраційного ущільнення масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі і насиченого сольовим розчином, зводиться до розв'язання в області $(0,l)\times(0,+\infty)$ крайової задачі для системи рівнянь (4.109), (4.110) за умов

$$H(0,t)=0,\ H_x(l,t)=0, \tag{4.111}$$

$$H(x,0)=H_0,\ H_t(x,0)=0, \tag{4.112}$$

$$C(0,t)=C_1,\ C_x(l,t)=0, \tag{4.113}$$

$$C(x,0)=0,\ C_t(x,0)=0, \tag{4.114}$$

де, не порушуючи загальності, покладемо H_0, $C_1=\text{const}$.

Застосовуючи до інтегралу в (4.109) узагальнену теорему про середнє та апроксимуючи одержаний інтеграл за допомогою деякої квадратурної формули, наприклад, формули трапецій [13, 137], можна перейти від інтегро-диференціального рівняння до диференціального рівняння вигляду

$$n\tau_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}+n\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C+\tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1(t)+\tau_1 u_2(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right)\mp$$
$$\mp\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right), \tag{4.115}$$

де

$$u_1(t)=\frac{k\tau_1}{2\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\left(1-\frac{t}{2\lambda_1}\right)e^{-\frac{t}{2\lambda_1}}+u_2(t), \tag{4.116}$$

$$u_2(t)=\frac{k}{\lambda_1}\left[\lambda_2+\frac{t}{2}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)e^{-\frac{t}{2\lambda_1}}\right]. \tag{4.117}$$

Математичну модель процесу консолідації, що базується на рівняннях (4.110),(4.115), далі називатимемо наближеною моделлю, а модель, що базується на рівняннях (4.109),(4.110), – точною моделлю.

4.6.2. Алгоритм розв'язання задачі консолідації в рамках наближеної моделі. В рамках наближеної моделі вивчення процесу

консолідації зводиться до розв'язання крайової задачі (4.110), (4.115), (4.111)–(4.114). Розглядаючи випадок аномальної осмотичної фільтрації, застосуємо до задачі (4.110)–(4.112) запропонований у праці [76] підхід. Він базується на поєднанні диференціально-різницевого методу та методу сумарних зображень [165]. Для цього введемо до розгляду сіткову область:

$$\omega_h = \left\{ x_i : x_i = ih,\ i = \overline{0, m+1},\ h = \frac{2}{2m+1} \right\}$$

і поставимо у відповідність розглядуваній задачі диференціально-різницеву задачу вигляду

$$\lambda_1 \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{2C_\nu \lambda_2}{h^2}\right) \frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{C_\nu \lambda_2}{h^2} T_3^{(m)} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} -$$
$$- \frac{C_\nu}{h^2} T_3^{(m)} \vec{u}(t) + \frac{2C_\nu}{h^2} \vec{u}(t) = \vec{w}(t), \qquad (4.118)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{\varphi},\ \ \frac{d}{dt}\vec{u}(0) = \vec{0}, \qquad (4.119)$$

де

$$\vec{u}(t) = \{H_i(t)\}_{i=1}^m,\ \vec{w}(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^m,$$
$$f_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left\{\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right)\left[C_{i-1}(t) - 2C_i(t) + C_{i+1}(t)\right]\right\},$$
$$\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \quad (\varphi_i = H_0,\ i = \overline{1, m}),\ \vec{0} = \{0, 0, \ldots, 0\},$$

$T_3^{(m)}$ – квадратна матриця, що визначена в [165].

Введемо до розгляду P-трансформації векторів $\vec{u}$ і $\vec{w}$ згідно з співвідношенням

$$\vec{\hat{u}}(t) = P_3^{(m)^*} \vec{u}(t),\ \ \vec{\hat{w}}(t) = P_3^{(m)^*} \vec{w}(t), \qquad (4.120)$$

де $P_3^{(m)^*}$ – квадратна матриця порядку m, транспонована відносно до матриці $P_3^{(m)} = \left[p_{kj}^{(3)} \right]_{k,j=1}^m$, що визначена у [165]. Домножуючи (4.118), (4.119) зліва на матрицю $P_3^{(m)^*}$, з урахуванням співвідношення [165]

$T_3^{(m)} = P_3^{(m)}\Lambda_3^{(m)}P_3^{(m)^*}$ $(\Lambda_3^{(m)} = \left[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, ..., \lambda_m^{(3)}\right]$ – діагональна матриця власних чисел матриці $T_3^{(m)}$ [165]), одержуємо задачу Коші, яка записується в скалярній формі у вигляді

$$\lambda_1 \frac{d^2\widehat{u}_i(t)}{dt^2} + \sigma_i \frac{d\widehat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \widehat{u}_i(t) = \widehat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{4.121}$$

$$\widehat{u}_i(0) = \widehat{\varphi}_i, \ \frac{d}{dt}\widehat{u}_i(0) = 0 \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.122}$$

де

$$\sigma_i = 1 + \lambda_2\theta_i, \quad \theta_i = \frac{C_\nu}{h^2}(2 - \lambda_i^{(3)}), \ \widehat{\varphi}_i = H_0 \sum_{k=1}^{m} p_{ki}^{(3)},$$

$$\widehat{w}_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left[p_{1i}^{(3)} + (\lambda_i^{(3)} - 2)\sum_{k=1}^{m} p_{ki}^{(3)}\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right) C_k(t)\right] (i = \overline{1, m}).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що розв’язок задачі (4.121), (4.122) має вигляд

$$u_i(t) = \widehat{\varphi}_i Q_i(t) + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t \widehat{w}_i(\tau) K_i(t-\tau) d\tau \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.123}$$

де

$$K_i(t) = \begin{cases} e^{-\gamma_i t}\dfrac{\mathrm{sh}(q_i t)}{q_i}, & D_i > 0; \\ e^{-\gamma_i t}\dfrac{\sin(\beta_i t)}{\beta_i}, & D_i < 0; \\ te^{-\gamma_i t}, & D_i = 0; \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2\lambda_1}, \ D_i = \sigma_i^2 - 4\lambda_1\theta_i, \ q_i = \frac{\sqrt{D_i}}{2\lambda_1}, \ \beta_i = \frac{\sqrt{-D_i}}{2\lambda_1},$$

$$Q_i(t) = 2\gamma_i K_i(t) + K_i'(t).$$

Переходячи в співвідношеннях (4.123) до оригіналів, одержуємо розв’язок вихідної диференціально-різницевої задачі у вигляді

$$H_i(t) = F_i(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t C_k(\tau) \; S_{ik}(t-\tau) d\tau \;\; (i = \overline{1, m}), \qquad (4.124)$$

де $F_i(t)$, $S_{ik}(t)$ визначено в п. 4.4.2.

З урахуванням вищевикладеного можна запропонувати методику розв'язання розглядуваної задачі, яка базується на сукупному застосуванні диференціально-різницевого і власне різницевого методів. При цьому обчислення поля концентрацій здійснюється, наприклад, згідно з різницевою схемою, яка в позначеннях роботи [177] має вигляд (випадок аномальної осмотичної фільтрації)

$$n\tau_1 C_{\overline{t}t} + nC_{\underset{t}{\circ}} = D(\widehat{C} + \tau_2 C_{\underset{t}{\circ}})_{\overline{x}x} + u_1(t)(H_x \widehat{C}_x + CH_{\overline{x}x}) + \nu(C_x^2 + CC_{\overline{x}x}) +$$
$$+ \tau_1 u_2(t)(C_x H_x + CH_{\overline{x}x})_{\overline{t}} + \nu\tau_1 \left(C_x^2 + CC_{\overline{x}x}\right)_{\overline{t}}. \qquad (4.125)$$

Звідси алгоритм обчислень може бути сформульований наступним чином: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі за часом згідно з різницевою схемою (4.125), а потім – значення надлишкового напору H на цьому шарі згідно з явною залежністю (4.124). При чисельній реалізації цього алгоритму інтеграл у співвідношенні (4.124) апроксимується за допомогою деякої квадратурної формули, наприклад, зручно використати формулу прямокутників [13, 137].

4.6.3. **Алгоритм роз'язання задачі в рамках точної моделі консолідації.** Переходячи до задачі (4.109)–(4.114), введемо до розгляду функцію $V(x,t)$, пов'язану з надлишковим напором $H(x,t)$ співвідношенням

$$H = \lambda_1^{-1} V + \frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (4.126)$$

Тоді рівняння (4.109) перетворюється на диференціальне і в термінах функцій C, V розглядувана крайова задача має вигляд

$$n\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{k}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial}{\partial x}\left(V + \lambda_2 \frac{\partial V}{\partial t}\right)\right) \mp$$
$$\mp \; \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right), \qquad (4.127)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \lambda_1^{-1}\frac{\partial V}{\partial t} = C_\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda_1^{-1} V + \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) \mp$$
$$\mp \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (4.128)$$

$$C(0,t) = C_1,\ C_x(l,t) = 0, \tag{4.129}$$

$$C(x,0) = 0,\ C_t(x,0) = 0, \tag{4.130}$$

$$V(0,t) = 0,\ V_x(l,t) = 0, \tag{4.131}$$

$$V(x,0) = 0,\ V_t(x,0) = H_0,\ V_{tt}(x,0) = -\lambda_1^{-1} H_0. \tag{4.132}$$

Аналогічно вищевикладеному, використовуючи диференціально-різницевий метод разом з методом сумарних зображень [76, 165], можна отримати розв'язок задачі (4.128), (4.131), (4.132) відносно функції $V(x,t)$. Дійсно, повторюючи проведені вище викладки, зводимо задачу до розв'язання в області зображень задачі Коші для звичайного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\lambda_1 \frac{d^3 \hat{u}_i(t)}{dt^3} + \sigma_i \frac{d^2 \hat{u}_i(t)}{dt^2} + \varsigma_i \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t)\ \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.133}$$

$$\hat{u}_i(0) = 0,\ \hat{u}_i'(0) = \hat{e}_i,\ \hat{u}_i''(0) = \hat{\alpha}_i\ \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.134}$$

де

$$\sigma_i = 2 + \lambda_1 \lambda_2 \theta_i,\ \varsigma_i = \lambda_1^{-1} + (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_i,\ \ \theta_i = \frac{C_\nu}{\lambda_1 h^2}(2 - \lambda_i^{(3)}),$$

$\hat{e}_i$, $\hat{\alpha}_i$ – зображення початкових умов (4.132), $\vec{u}(t) = \{V_i(t)\}_{i=1}^m$, $\vec{\hat{u}}(t)$ – визначається згідно з (4.120).

Розв'язуючи задачу Коші (4.133), (4.134) та переходячи в область оригіналів, одержуємо співвідношення

$$V_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t C_k(\tau) \tilde{S}_{ik}(t-\tau) d\tau\ \ (i = \overline{1, m}), \tag{4.135}$$

де

$$f_i(t) = \sum_{\nu,k=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} \left[p_{k\nu}^{(3)} Q_\nu(t) + \frac{\mu}{\lambda_1 h^2} p_{1\nu}^{(3)} \int_0^t G_\nu(t-\tau) d\tau \right],$$

$$\tilde{S}_{ik}(t) = \frac{\mu}{h^2 \lambda_1} \sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} (\lambda_\nu^{(3)} - 2)[G_\nu(t) - \lambda_1 G_\nu'(t)],$$

$$Q_\nu(t) = -\mu_1^{(\nu)}(\lambda_1^{-1} + k_2^{(\nu)} + k_3^{(\nu)})e^{k_1^{(\nu)}t} + \mu_2^{(\nu)}(\lambda_1^{-1} + k_1^{(\nu)} + k_3^{(\nu)})e^{k_2^{(\nu)}t} -$$
$$-\mu_3^{(\nu)}(\lambda_1^{-1} + k_1^{(\nu)} + k_2^{(\nu)})e^{k_3^{(\nu)}t},$$

$$G_\nu(t) = \mu_1^{(\nu)}e^{k_1^{(\nu)}t} - \mu_2^{(\nu)}e^{k_2^{(\nu)}t} + \mu_3^{(\nu)}e^{k_3^{(\nu)}t},$$

$$\mu_1^{(i)} = [(k_2^{(i)} - k_1^{(i)})(k_3^{(i)} - k_1^{(i)})]^{-1},$$

$$\mu_2^{(i)} = [(k_2^{(i)} - k_1^{(i)})(k_3^{(i)} - k_2^{(i)})]^{-1},$$

$$\mu_3^{(i)} = [(k_3^{(i)} - k_2^{(i)})(k_3^{(i)} - k_1^{(i)})]^{-1},$$

$k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}$ – дійсні і різні корені характеристичного кубічного рівняння, відповідного (4.133). (Зазначимо, що аналогічно розглядаються і інші можливі випадки наявності коренів вказаного характеристичного рівняння. Відповідні цим випадкам аналітичні співвідношення для функцій $G(t)$ і $Q(t)$ з огляду на громіздкість тут не наводяться).

Один з можливих алгоритмів наближеного розв'язання вихідної крайової задачі (4.127)–(4.132) у рамках точної моделі консолідації може бути сформульований так: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі за часом згідно, наприклад, з різницевою схемою, яка в позначеннях праці [177] має вигляд

$$n\tau_1 C_{\overline{t}t} + nC_{\overset{\circ}{t}} = D(\widehat{C} + \tau_2 C_{\overset{\circ}{t}})_{\overline{x}x} + \frac{k}{\lambda_1}\Big\{\Big[\widehat{C}\left(V + \lambda_2 V_{\overline{t}}\right)_{\overline{x}}\Big]_x +$$
$$+\tau_1\Big[C\left(V + \lambda_2 V_{\overline{t}}\right)_{\overline{x}}\Big]_{tx}\Big\} + \nu(C_x^2 + CC_{\overline{x}x}) + \nu\tau_1\left(C_x^2 + CC_{\overline{x}x}\right)_{\overline{t}};$$

далі визначається значення функції $V_i(t)$ згідно з явною залежністю (4.135). Після цього значення надлишкового напору розраховується за формулою (4.126).

4.6.4. Чисельна реалізація і висновки. Чисельна реалізація задачі виконана для вхідних даних, наведених в [67, 68]. Результати розрахунків з використанням обох описаних вище моделей добре узгоджуються між собою для значень часу, що відповідають пізнім стадіям розвитку процесу консолідації. Для значень часу, що відповідають початковій стадії процесу ущільнення, відносне відхилення надлишкових напорів, розрахованих за точною і наближеною моделями, збільшується до 3–5%, причому це відхилення значно зменшується зі зменшенням параметра релаксації

дифузійного потоку, або абсолютної величини різниці числових значень параметрів релаксації швидкості фільтрації та тиску. Для проміжних стадій процесу ущільнення максимальне відхилення результатів обчислень надлишкових напорів за точною і наближеною моделями у всіх розрахованих прикладах не перевищувало 10%, що вказує на можливість використання наближеної (в певній мірі більш простої) математичної моделі з метою інженерного аналізу динаміки процесу фільтраційного ущільнення насичених сольовими розчинами грунтових масивів з урахуванням релаксаційних явищ в процесах фільтрації та дифузії.

Аналіз виконаних розрахунків дає змогу зробити також висновок, що за умов наявності релаксаційності процесів “фільтрація–дифузія” насичений сольовим розчином грунтовий масив перебуває у достатньо нестабілізованому стані, оскільки:

– при нормальній осмотичній фільтрації надлишкові напори у поровій рідині на початкових стадіях розвитку процесу консолідації зменшуються біля крівлі шару грунтового масиву та збільшуються біля його підошви, порівняно з випадком відсутності явища релаксаційності;

– при аномальній осмотичній фільтрації на вказаних стадіях розвитку процесу консолідації у більшій частині фільтраційної області спостерігається перевищення надлишкових напорів у поровій рідині порівняно з відповідними напорами, що відповідають класичній математичній моделі процесу фільтраційної консолідації, у рамках якої відсутній вплив релаксаційних явищ.

В цілому спостерігається помітний вплив на динаміку процесу ущільнення грунтового масиву, насиченого сольовим розчином, фактора наявності релаксаційних явищ в обох (фільтраційній та дифузійній) складових одночасно, що свідчить про необхідність врахування вказаного фактора в практиці інженерних розрахунків.

4.7. Комплексний підхід до проблеми математичного моделювання процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами грунтових масивів

Для підвищення ступеня адекватності математичних моделей консолідації грунтових масивів, насичених сольовими розчинами, нижче запропоновано комплексний підхід до моделювання цього процесу. Згідно з цим підходом побудова математичної моделі процесу виконується з урахуванням низки умов:

– насиченості масиву сольовим розчином;

– релаксаційності фільтраційного процесу;

– неізотермічності процесу ущільнення.

У зв'язку з цим побудована відповідна математична модель процесу консолідації та поставлена крайова задача фільтраційної консолідації масиву, розміщеного на непроникній основі. З використанням дифференційно-різницевого методу (методу прямих) одержано наближений її розв'язок та викладено результати чисельних експериментів [36].

4.7.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі. Розглядаючи одновимірний нестаціонарний процес фільтраційного ущільнення, припустимо, що має місце наступне природнє узагальнення закону релаксаційної фільтрації на випадок руху сольових розчинів за неізотермічних умов з урахуванням термоосмосу [36]:

$$u_x + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + k_T \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial t}\right), \quad (4.136)$$

де u_x – швидкість фільтрації, k – коефіцієнт фільтрації, $H = \dfrac{p}{\gamma}$ – надлишковий напір, p – поровий тиск, γ – густина рідини, C – концентрація солей в рідкій фазі, T – температура, λ_1, λ_2 – параметри релаксації, ν – коефіцієнт хімічного осмосу, k_T – коефіцієнт термоосмосу. Зазначимо, що в окремому випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ з (4.136) одержуємо узагальнення закону Дарсі–Герсеванова на випадок урахування хімічного осмосу і термоосмосу, запропоноване в [69]. Беручи до уваги закон Фіка, рівняння конвективної диффузії (гідродинамічної дисперсії) при фільтрації порового розчину запишемо у вигляді (4.79). З урахуванням співвідношення (4.136) та припущення про сталість початкового розподілу поля надлишкових напорів в масиві маємо наступне рівняння для визначення концентрації:

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{k}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x}\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau\right) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right) - k_T\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial T}{\partial x}\right). \quad (4.137)$$

Щоб одержати рівняння для визначення надлишкового напору H, скористаємось рівнянням нерозривності з урахуванням лінійного закону ущільнення (4.81). Тоді, диференціюючи співвідношення (4.136) за змінною x, а співвідношення (4.81) за змінною t, після виключення з одержаних співвідношень похідних $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t}$, маємо шукане рівняння для визначення напору H у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t}\right) -$$

$$-\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t}\right) - \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial t}\right), \qquad (4.138)$$

де $C_v = \dfrac{k(1+\overline{e})}{\gamma a}$ – коефіцієнт консолідації [82, 92, 173, 199], $\mu = \dfrac{\nu C_v}{k}$, $\theta = \dfrac{k_T C_v}{k}$.

Рівняння теплоперенесення приймаємо у вигляді [69, 136]:

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_\rho \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x T\right), \qquad (4.139)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності грунту, C_T – об'ємна теплоємність грунту, C_ρ – питома теплоємність порового розчину, ρ – густина розчину. Підставляючи в (4.139) замість швидкості фільтрації її значення з співвідношення (4.136), одержуємо

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k_1 \lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{k_1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\left(T \int_0^t \frac{\partial H}{\partial x} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau\right) - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial C}{\partial x}\right) - k_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (4.140)$$

де

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{C_T},\ k_1 = \frac{k \rho C_\rho}{C_T},\ \nu_1 = \frac{\nu \rho C_\rho}{C_T},\ k_2 = \frac{k_T \rho C_\rho}{C_T}. \qquad (4.141)$$

Таким чином, система диференціального та інтегро-диференціальних рівнянь (4.137), (4.138), (4.140) утворює шукану математичну процесу фільтраційної консолідації. У рамках побудованої моделі вивчення процесу консолідації грунтового масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі, зводиться до розв'язання в області $(0, l) \times (0, +\infty)$ нелінійної крайової задачі для системи рівнянь (4.137), (4.138), (4.140) за таких умов:

$$H(0,\ t) = 0,\ H_x(l,\ t) = 0, \qquad (4.142)$$

$$H(x,\ 0) = H_0,\ H_t(x,\ 0) = 0, \qquad (4.143)$$

$$C(0,\ t)=\tilde{C}_1,\ C_x(l,t)=0, \tag{4.144}$$

$$C(x,\ 0)=\tilde{C}_0, \tag{4.145}$$

$$T(0,\ t)=\tilde{T}_1,\ T_x(l,\ t)=0, \tag{4.146}$$

$$T(x,\ 0)=\tilde{T}_0, \tag{4.147}$$

де H_0, $\tilde{C}_1$, $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_0$ – задані величини.

4.7.2. Побудова наближеного розв'язку крайової задачі. Введемо до розгляду функцію $V(x,t)$, яка зв'язана з напором $H(x,t)$ співвідношенням (4.126). Тоді відносно функцій C, V, T інтегро-диференціальні рівняння перетворюються на диференціальні і розглядувана крайова задача записується у вигляді

$$\lambda_1^2\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}+2\lambda_1\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial V}{\partial t}=C_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(V+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial V}{\partial t}+\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)-$$
$$-\mu\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C+\lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right)-\theta\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T+\lambda_1\frac{\partial T}{\partial t}\right), \tag{4.148}$$

$$n\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{k}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)-$$
$$-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right)-k_T\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{4.149}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_0\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{k_1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{k_1\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)-$$
$$-\nu_1\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial C}{\partial x}\right)-k_2\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{4.150}$$

$$C(0,t)=\tilde{C}_1,\ C_x(l,t)=0, \tag{4.151}$$

$$C(x,0)=\tilde{C}_0, \tag{4.152}$$

$$T(0,t)=\tilde{T}_1,\ T_x(l,t)=0, \tag{4.153}$$

$$T(x,0)=\tilde{T}_0, \tag{4.154}$$

$$V(0,t)=0,\ V_x(l,t)=0, \tag{4.155}$$

$$V(x,0)=0,\ V_t(x,0)=\tilde{\upsilon}_0,\ V_{tt}(x,0)=\tilde{\upsilon}_1, \tag{4.156}$$

де $\tilde{\upsilon}_0 = H_0,\ \tilde{\upsilon}_1 = -\tilde{\upsilon}_0/\lambda_1$.

Нижче коротко викладена методика побудови наближеного розв'язку задачі (4.148)–(4.156), яка базується на диференціально-різницевому методі з використанням поздовжньої схеми методу прямих [126, 137].

Вводячи до розгляду сіткову область:

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\quad i=\overline{0,N+1},\quad h=\frac{l}{N+0,5},\ x_0=0,\quad x_N = l-\frac{h}{2} \right\},$$

поставимо у відповідність крайовій задачі (4.148)–(4.156) дифференціально-різницеву задачу, або після виключення граничних умов – задачу Коші, яка в векторно-матричній формі має вигляд

$$\lambda_1^2 \frac{d^3\vec{V}}{dt^3} + \lambda_1\left(2E - \frac{\lambda_2 C_v}{h^2}A\right)\frac{d^2\vec{V}}{dt^2} + \left(E - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)C_v}{h^2}A\right)\frac{d\vec{V}}{dt} =$$

$$= \frac{C_v}{h^2}A\vec{V} - \frac{\mu\lambda_1}{h^2}A\vec{C} - \frac{\mu\lambda_1^2}{h^2}A\frac{d\vec{C}}{dt} - \frac{\theta\lambda_1}{h^2}A\vec{T} - \frac{\theta\lambda_1^2}{h^2}A\frac{d\vec{T}}{dt} - \frac{1}{h^2}\vec{g}_v, \tag{4.157}$$

$$n\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{D}{h^2}A_1\vec{C} + \frac{k}{2\lambda_1 h^2}B(\vec{C})\vec{V} + \frac{k\lambda_2}{2\lambda_1 h^2}B(\vec{C})\frac{d\vec{V}}{dt} -$$

$$-\frac{\nu}{2h^2}A\overrightarrow{C^2} - \frac{k_T}{2h^2}B(\vec{C})\vec{T} + \frac{1}{h^2}\vec{g}_C, \tag{4.158}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\lambda_0}{h^2}A_2\vec{T} + \frac{k_1}{2\lambda_1 h^2}P(\vec{T})\vec{V} + \frac{k_1\lambda_2}{2\lambda_1 h^2}P(\vec{T})\frac{d\vec{V}}{dt} -$$

$$-\frac{\nu}{2h^2}P(\vec{T})\vec{C} - \frac{k_2}{2h^2}A\overrightarrow{T^2} + \frac{1}{h^2}\vec{g}_T, \tag{4.159}$$

$$\vec{V}(0)=\vec{0},\ \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{t=0} = \vec{\tilde{\upsilon}}_0,\ \left.\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}\right|_{t=0} = \vec{\tilde{\upsilon}}_1, \tag{4.160}$$

$$\vec{C}(0) = \vec{\tilde{C}}_0,\ \vec{T}(0) = \vec{\tilde{T}}_0, \tag{4.161}$$

де введено такі позначення:

$$\vec{V}(t) = \left[V_1(t), V_2(t), \ldots, V_N(t)\right]^T,\ \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \left[V_1'(t), V_2'(t), \ldots, V_N'(t)\right]^T,$$

$$\vec{C}(t)=\left[C_1(t),C_2(t),...,C_N(t)\right]^T,\ \frac{d\vec{C}(t)}{dt}=\left[C_1'(t),C_2'(t),...,C_N'(t)\right]^T,$$

$$\vec{T}(t)=\left[T_1(t),T_2(t),...,T_N(t)\right]^T,\ \frac{d\vec{T}(t)}{dt}=\left[T_1'(t),T_2'(t),...,T_N'(t)\right]^T,$$

$$\vec{\tilde{T}}_0=\left[\tilde{T}_0,\tilde{T}_0,...,\tilde{T}_0\right]^T,\ \vec{\tilde{\upsilon}}_0=\left[\tilde{\upsilon}_0,\tilde{\upsilon}_0,...,\tilde{\upsilon}_0\right]^T,\ \vec{\tilde{\upsilon}}_1=\left[\tilde{\upsilon}_1,\tilde{\upsilon}_1,...,\tilde{\upsilon}_1\right]^T,$$

$$\vec{0}=[0,0,...,0]^T,\ \overrightarrow{C^2(t)}=\left[C_1^2,C_2^2,...,C_N^2\right]^T,\ \overrightarrow{T^2(t)}=\left[T_1^2,T_2^2,...,T_N^2\right]^T,$$

$$\vec{g}_v=\left[\lambda_1(\mu\tilde{C}_1+\theta\tilde{T}_1),0,0,...,0\right]^T,\ \vec{g}_C=\left[\tilde{C}_1\left(D-\frac{\nu\tilde{C}_1}{2}-\frac{k_T\tilde{T}_1}{2}\right),0,0,...,0\right]^T,$$

$$\vec{g}_T=\left[\tilde{T}_1\left(\lambda_0-\frac{\nu\tilde{C}_1}{2}-\frac{k_2\tilde{T}_1}{2}\right),0,0,...,0\right]^T,$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що матриця A_1 зі співвідношення (4.158), одержується з матриці A шляхом заміни першого її елемента виразом $-\left(2+k_T\dfrac{\tilde{T}_1}{2D}\right)$, а матриця A_2 зі співвідношення (4.159) одержується з матриці A заміною першого її елемента виразом $-\left(2+\nu_1\dfrac{\tilde{C}_1}{2\lambda_0}\right)$. Матриця $B(\vec{C})=\left[b_{ij}\right]_{i,j=1}^N$ у співвідношенні (4.158) є тридіагональною матрицею з такими елементами: $b_{ii}=-\left(C_{i-1}+\right.$ $\left.+2C_i+C_{i+1}\right)$ $(i=\overline{2,N-1})$; $b_{11}=-\left(\tilde{C}_1+2C_1+C_2\right)$; $b_{NN}=-\left(C_{N-1}+C_N\right)$; $b_{i-1,i}=b_{i,i-1}=C_{i-1}+C_i$ $(i=\overline{2,N})$, $b_{ij}=0$ при $j>i+1$, $j<i-1$. Матриця $P(\vec{T})$ у співвідношенні (4.159) має ту саму структуру, що й матриця $B(\vec{C})$ і одержується з неї шляхом заміни елементів C_i відповідно елементами T_i $(i=\overline{1,N})$.

Від задачі (4.157)–(4.161) перейдемо до задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \Re(\vec{z})\vec{z} + \vec{F}(\vec{z}) + \vec{g},\ t > 0,\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0, \tag{4.162}$$

де позачено

$$\vec{z}(t) = \left[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{C}, \vec{T}\right]^T,\ \vec{z}_0 = \left[\vec{0}, \vec{\tilde{\upsilon}}_0, \vec{\tilde{\upsilon}}_1, \vec{\tilde{C}}_0, \vec{\tilde{T}}_0\right]^T,$$

$$\vec{V}_1 \equiv \vec{V},\ \vec{V}_2 = \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt},\ \vec{V}_3 = \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \frac{d^2\vec{V}}{dt^2},$$

$$\Re(\vec{z}) = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & \tilde{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & -A_{34} & -A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} & -A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & 0 & -A_{54} & A_{55} \end{bmatrix},$$

$$\vec{F}(\vec{z}) = \frac{1}{2h^2}\left[\vec{0}, \vec{0}, A^2\left(\theta k_2 \vec{T}^2 + \frac{\mu}{n}\vec{C}^2\right), -\frac{\nu}{n}A\vec{C}^2, -k_2 A\vec{T}^2\right]^T,$$

$$\vec{g} = \frac{1}{h^2}\left[\vec{0},\ \vec{0},\ -\frac{1}{\lambda_1^2}\left(\vec{g}_\nu + \frac{\theta\lambda_1^2}{h^2}A\vec{g}_T + \frac{\mu\lambda_1^2}{nh^2}A\vec{g}_C\right),\ \vec{g}_C, \vec{g}_T\right]^T,$$

$$A_{31}(\vec{C},\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1^2}A\left\{c_\nu - \frac{\lambda_1}{2h^2}\left[\frac{\mu}{n}B(\vec{C}) - \theta k_1 P(\vec{T})\right]\right\},$$

$$A_{32}(\vec{C},\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1^2}\left\{c_\nu(\lambda_1 + \lambda_2) - h^2 E - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2h^2}A\left[\frac{k\mu}{n}B(\vec{C}) - \theta k_1 P(\vec{T})\right]\right\},$$

$$A_{33} = \frac{1}{\lambda_1}\left(\lambda_2 c_\nu A - 2h^2 E\right),$$

$$A_{34}(\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\mu A + \frac{\lambda_1}{2h^2}A\left[\frac{2\mu D}{n}A_1 + \theta\nu P(\vec{T})\right]\right\},$$

$$A_{35}(\vec{C}) = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\theta A + \frac{\lambda_1}{2h^2}A\left[2\theta\lambda_0 A_2 - \frac{\mu k_T}{n}B(\vec{C})\right]\right\},$$

$$A_{41}(\vec{C}) = \frac{k}{2\lambda_1 n} B(\vec{C}),\ A_{42}(\vec{C}) = \lambda_2 A_{41}(\vec{C}),\ A_{44} = \frac{D}{n} A_1,$$

$$A_{45}(\vec{C}) = \frac{\lambda_1 k_T}{k} A_{41}(\vec{C}),\ A_{51}(\vec{T}) = \frac{k_1}{2\lambda_1} P(\vec{T}),\ A_{52}(\vec{T}) = \lambda_2 A_{51}(\vec{T}),$$

$$A_{54}(\vec{T}) = \frac{\nu\lambda_1}{k_1} A_{51}(\vec{T}),\ A_{55} = \lambda_0 A_2,\ \tilde{E} = h^2 E,$$

E – одинична матриця.

Для розв'язання задачі Коші (4.162) використаємо неявну різницеву схему, яку одержимо наступним чином. Інтегруючи (4.162) по проміжку $[t, t+\tau]$ одержуємо інтегральне співвідношення:

$$\vec{z}(t+\tau) = \vec{z}(t) + \int_t^{t+\tau} \Re(\vec{z}(s))\vec{z}(s)ds + \int_t^{t+\tau} \vec{F}(\vec{z}(s))ds + \tau\vec{g}, \quad \tau > 0. \quad (4.163)$$

Задачі (4.162) на основі (4.163) поставимо у відповідність неявну схему з вагами (надалі стрілки над векторами опускаємо):

$$\begin{gathered}\hat{z} = z + \alpha\tau\left[\Re(\hat{z})\hat{z} + F(\hat{z})\right] + \\ + \tau\left\{g + (1-\alpha)\left[\Re(z)z + F(z)\right]\right\},\ \tau > 0,\ \alpha \in [0,5; 1],\end{gathered} \quad (4.164)$$

де

$$\hat{z} = z(t+\tau),\ \ z = z(t).$$

Ефективний наближений розв'язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (4.164) відшукується, наприклад, з використанням методу Ньютона [13, 137].

4.7.3. Результати чисельної реалізації розв'язку. Висновки. Чисельна реалізація викладеного розв'язку виконана для вхідних даних, наведених у праці [67]. Деякі з результатів розрахунків, виконаних стосовно наступних безрозмірних змінних та параметрів:

$$x' = \frac{x}{l},\ t' = \frac{t}{t_*},\ C' = \frac{C}{C_0},\ T' = \frac{T}{T_0},\ H' = \frac{H}{H_0},\ \tau_i' = \frac{\tau_i}{t_*}\ (i = \overline{1,2}),$$

$$\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{t_*}\ (i = \overline{0,2}),\ D' = \frac{Dt_*}{l^2},\ \nu' = \frac{\nu\tilde{C}_0 t_*}{l^2},\ k_T' = \frac{k_T\tilde{T}_0 t_*}{l^2},\ c_\nu' = \frac{c_\nu t_*}{l^2},$$

$$\mu' = \frac{\mu\tilde{C}_0 t_*}{H_0 l^2},\ \theta' = \frac{\theta\tilde{T}_0 t_*}{H_0 l^2},\ \lambda_0' = \frac{\lambda_0 t_*}{l^2},\ k_1' = \frac{k_1 H_0 t_*}{l^2},\ k_2' = \frac{k_2\tilde{T}_0 t_*}{l^2}$$

графічно зображені на рис. 4.12–4.15. Результати чисельних експериментів дозволяють зробити наступні висновки про характер поведінки надлишкових напорів у масиві, що консолідується за умов насиченості сольовим розчином, неізотермічності проходження процесу ущільнення, релаксаційності процесу фільтрації сольового розчину.

1. При неізотермічності процесу консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації, наявність аномальної осмотичної фільтрації обумовлює прискорене розсіювання поля надлишкових напорів порівняно з випадком ізотермічності вказаного процесу (рис. 4.12).

2. Підсилення впливу релаксаційних властивостей фільтраційного процесу не змінює вказаної вище закономірності поведінки надлишкових напорів залежно від наявності чи відсутності ізотермічності (рис. 4.13). Ця закономірність поведінки надлишкових напорів у масиві носить стабільний характер і має місце також при перевищенні часу релаксації тиску над часом релаксації швидкості (рис. 4.14).

3. При нормальній осмотичній фільтрації порового розчину вплив неізотермічності на динаміку проходження процесу ущільнення за умов релаксаційності фільтраційного процесу буде таким: в обох випадках (ізотермічності та неізотермічності) надлишкові напори стають від’ємними біля крівлі масиву, залишаючись додатніми біля його підошви, причому біля підошви масиву значення напорів відрізняються мало а біля крівлі маємо помітне зменшення абсолютних величин напорів в неізотермічному випадку порівняно з ізотермічним (рис. 4.15). Наявність переущільнення грунту біля крівлі масиву свідчить про нестабілізованість його стану, яка зберігається і за умов неізотермічності проходження процесу ущільнення.

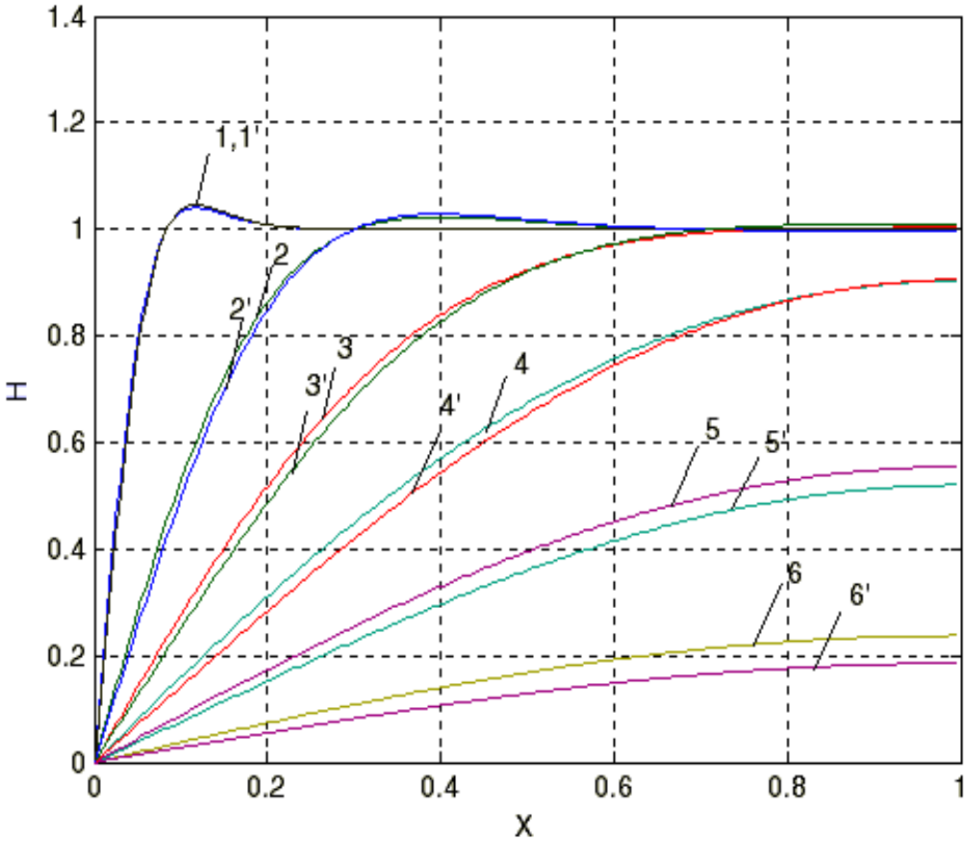


Рис. 4.12. Порівняння надлишкових напорів в масиві
у ізотермічному (1–6) та неізотермічному ($1' - 6'$) випадках:
$1,1' - t = 0,0025$; $2,2' - t = 0,025$; $3,3' - t = 0,1$; $4,4' - t = 0,3$;
$5,5' - t = 0,75$; $6,6' - t = 1,5$; $\lambda_1 = 0,01$; $\lambda_2 = 0,009$

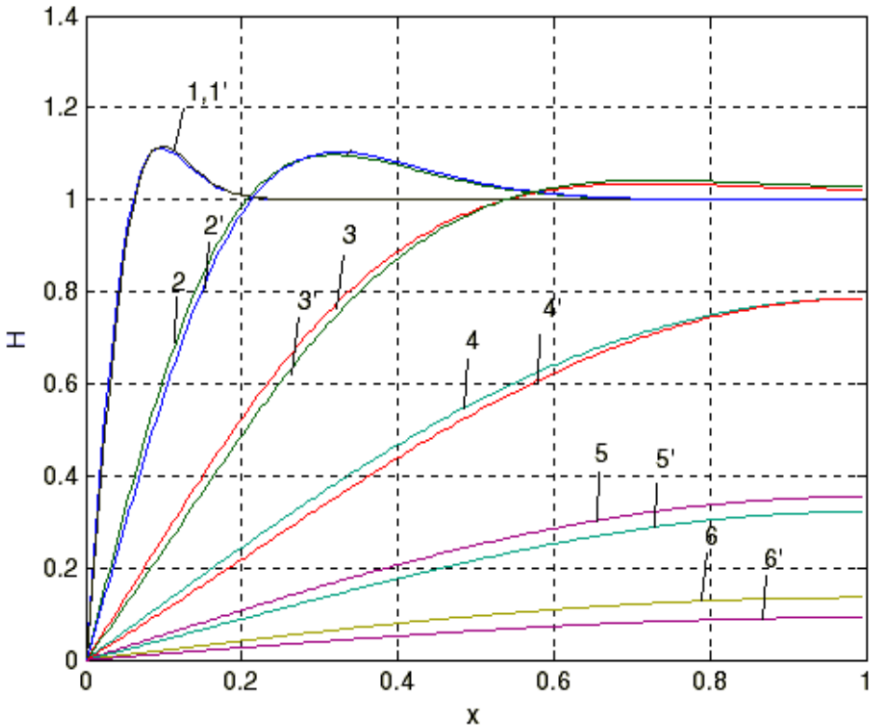


Рис. 4.13. Порівняння надлишкових напорів в масиві у ізотермічному (1–6) та неізотермічному ($1' - 6'$) випадках при збільшенні значень релаксаційних параметрів: $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,07$

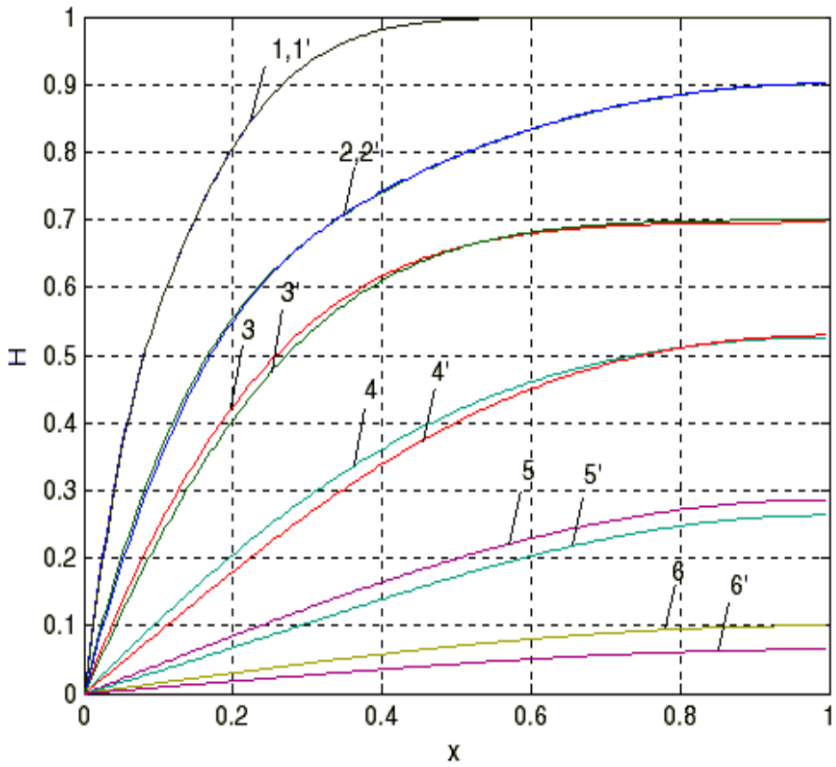


Рис. 4.14. Порівняння надлишкових напорів в ізотермічному (1–6) та неізотермічному ($1' - 6'$) випадках при $\lambda_2 > \lambda_1$ ($\lambda_1 = 0,02$, $\lambda_2 = 0,08$)

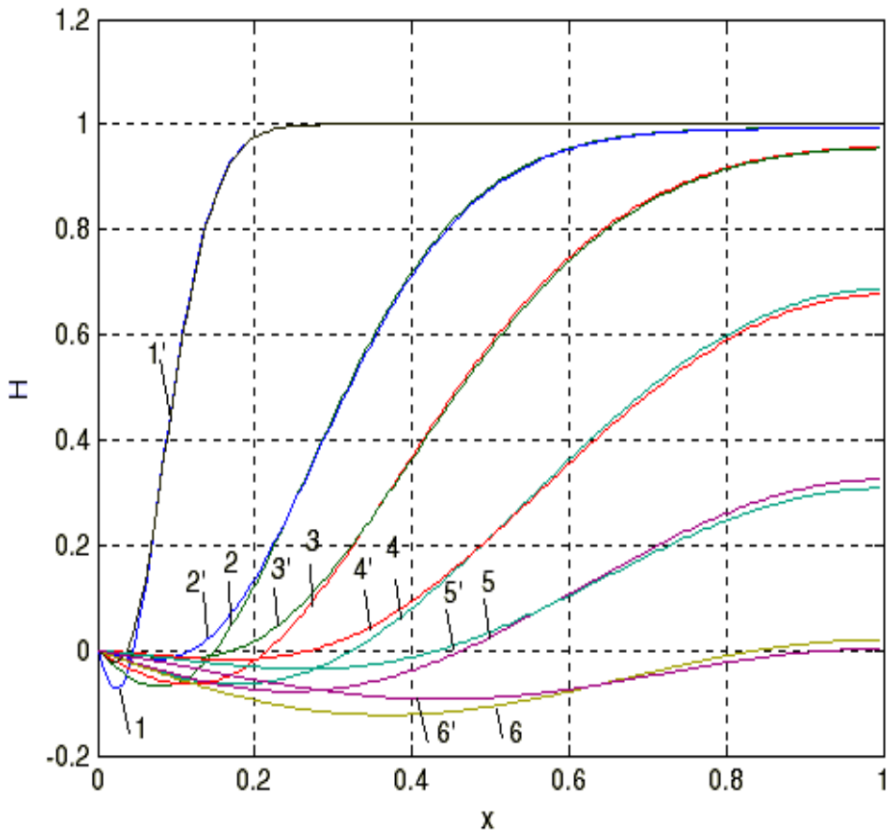


Рис. 4.15. Порівняння надлишкових напорів в масиві у ізотермічному (1–6) та неізотермічному ($1' - 6'$) випадках при нормальній осмотичній фільтрації: $1, 1' - t = 0,0025$; $2, 2' - t = 0,025$; $3, 3' - t = 0,05$; $4, 4' - t = 0,1$; $5, 5' - t = 0,15$; $6, 6' - t = 0,2$

4. Зіставлення результатів проведених чисельних експериментів з результатами праці [187] вказує на те, що вплив нерівноважності фільтраційного процесу протилежний впливу неізотермічності проходження процесу ущільнення в тому сенсі, що, наприклад, у випадку аномальної осмотичної фільтрації наявність релаксаційності фільтраційного процесу за умов ізотермічності призводить до затримки розсіювання поля надлишкових напорів у масиві, а наявність неізотермічності процесу консолідації за умов релаксаційної фільтрації призводить до прискореного розсіювання вказаного поля напорів.

На закінчення зазначимо, що порівняння впливу трьох факторів при фільтраційній консолідації: засоленості порового розчину, нерівноважності фільтраційного процесу, неізотермічності процесу ущільнення показує, що перші два чинники здійснюють вирішальний вплив на динаміку перебігу ущільнення масиву.

Проте впливом третього фактора в багатьох випадках також нехтувати не можна, оскільки наявність його в процесі ущільнення може обумовити

перехід грунту в нестабілізований стан з можливими негативними наслідками для стійкості грунтових основ гідроспоруд. Звідси випливає необхідність перерахунку (з метою корекції) чинних довідкових прогнозних величин часу консолідації грунтових масивів, які на даний час розраховано без урахування неізотермічності процесу ущільнення за умов руху сольових розчинів.

4.8. Математичне моделювання неізотермічної фільтраційної консолідації за умов руху сольових розчинів та релаксаційності фільтраційного і дифузійного процесів

Нижче запропоновано математичну модель процесу фільтраційної консолідації грунтових масивів з урахуванням насиченості масиву сольовим розчином, неізотермічності та релаксаційності процесів фільтрації порового розчину і дифузії солей. У рамках вказаної моделі поставлена відповідна крайова задача про консолідацію грунтового масиву скінченної потужності, розміщеного на непроникній основі, і з використанням диференціально-різницевого методу побудовано її наближений розв'язок.

4.8.1. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі. *Розглянемо одновимірний нестаціонарний процес ущільнення насиченого сольовим розчином грунтового масиву за припущення справедливості узагальнення закону релаксаційної фільтрації на випадок руху сольових розчинів в неізотермічних умовах вигляду (4.136). Беручи до уваги також узагальнення закону Фіка для умов істотної дифузійної нерівноважності вигляду (4.107), одержуємо рівняння конвективної дифузії у вигляді (4.108). Звідси, з урахуванням (4.136) одержуємо наступне рівняння для визначення концентрації:*

$$n\tau_1 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2 \frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial H}{\partial x}\right) +$$
$$+\frac{k}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau\right) -$$
$$-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right) - k_T \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (4.165)$$

Для одержання рівняння, яке описує динаміку надлишкових напорів у масиві, скористаємось рівнянням нерозривності з зурахуванням лінійного закону ущільнення [94, 199]. З урахуванням (4.136) знаходимо рівняння (4.138). Рівняння теплопереносу запишемо у вигляді (4.140).

Таким чином, система диференціального (4.138) та інтегро-диференціальних (4.165), (4.140) рівнянь утворює шукану математичну процесу неізотермічної консолідації з урахуванням релаксаційності процесів фільтрації та дифузії.

У рамках побудованої моделі вивчення процесу консолідації грунтового масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі, зводиться до розв'язання в області $(0, l)\times(0, +\infty)$ нелінійної крайової задачі для системи рівнянь (4.165), (4.138), (4.140) за таких умов:

$$H(0,\ t) = 0,\ H_x(l,\ t) = 0, \tag{4.166}$$

$$H(x,\ 0) = H_0,\ H_t(x,\ 0) = 0, \tag{4.167}$$

$$C(0,\ t) = \tilde{C}_1,\ C_x(l,\ t) = 0\ , \tag{4.168}$$

$$C(x,\ 0) = \tilde{C}_0,\ C_t(x,0) = 0, \tag{4.169}$$

$$T(0,\ t) = \tilde{T}_1,\ T_x(l,\ t) = 0, \tag{4.170}$$

$$T(x,\ 0) = \tilde{T}_0, \tag{4.171}$$

де H_0, $\tilde{C}_1$, $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_0$ – задані величини.

4.8.2. Побудова наближеного розв'язку крайової задачі. Введемо до розгляду функцію $V(x,t)$ зв'язану з напором $H(x,t)$ співвідношенням (4.126). Тоді відносно функцій C, V, T інтегро-диференціальні рівняння перетворюються на диференціальні і розглядувана крайова задача запишеться у вигляді

$$\lambda_1^2\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + 2\lambda_1\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(V + (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) - \\ -\mu\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right) - \theta\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \lambda_1\frac{\partial T}{\partial t}\right), \tag{4.172}$$

$$n\tau_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + n\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tau_2\frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{k}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \\ +\frac{k\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right) - \\ -k_T\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(C\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{4.173}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k_1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{k_1\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\right) -$$
$$-\nu_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial C}{\partial x}\right) - k_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (4.174)$$

$$C(0,\ t) = \tilde{C}_1,\ C_x(l,\ t) = 0, \qquad (4.175)$$

$$C(x,\ 0) = \tilde{C}_0,\ C_t(x,0) = 0, \qquad (4.176)$$

$$T(0,\ t) = \tilde{T}_1,\quad T_x(l,\ t) = 0, \qquad (4.177)$$

$$T(x,\ 0) = \tilde{T}_0, \qquad (4.178)$$

$$V(0,t) = 0,\ V_x(l,t) = 0, \qquad (4.179)$$

$$V(x,0) = 0,\ V_t(x,0) = \tilde{\upsilon}_0,\ V_{tt}(x,0) = \tilde{\upsilon}_1, \qquad (4.180)$$

де $\tilde{\upsilon}_0 = H_0,\ \tilde{\upsilon}_1 = -\tilde{\upsilon}_0/\lambda_1$.

Викладемо методику побудови наближеного розв’язку задачі (4.172)–(4.180), яка грунтується на диференціально-різницевому методі з використанням поздовжньої схеми методу прямих [126, 137].

Вводячи до розгляду сіткову область:

$$\omega_h = \left\{x_i = ih,\quad i = \overline{0, N+1},\quad h = \frac{l}{N+0,5},\ x_0 = 0,\quad x_N = l - \frac{h}{2}\right\},$$

поставимо у відповідність розглядуваній крайовій задачі диференціально-різницеву задачу, або, після виключення граничних умов, – задачу Коші, яка в векторно-матричній формі має вигляд

$$\lambda_1^2 \frac{d^3\vec{V}}{dt^3} + \lambda_1\left(2E - \frac{\lambda_2 c_v}{h^2}A\right)\frac{d^2\vec{V}}{dt^2} + \left(E - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)c_v}{h^2}A\right)\frac{d\vec{V}}{dt} =$$
$$= \frac{c_v}{h^2}A\vec{V} - \frac{\mu\lambda_1}{h^2}A\vec{C} - \frac{\mu\lambda_1^2}{h^2}A\frac{d\vec{C}}{dt} - \frac{\theta\lambda_1}{h^2}A\vec{T} - \frac{\theta\lambda_1^2}{h^2}A\frac{d\vec{T}}{dt} - \frac{1}{h^2}\vec{g}_v, \qquad (4.181)$$

$$n\tau_1\frac{d^2\vec{C}}{dt^2} + \left(\Lambda^{(n)} - \frac{D\tau_2}{h^2}A\right)\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{D}{h^2}A_1\vec{C} + \frac{k}{2\lambda_1 h^2} + \left[B(\vec{C}) + \tau_1\frac{dB(\vec{C})}{dt}\right]\vec{V} +$$

$$+\frac{k}{2\lambda_1 h^2}\left[\left(\tau_1+\lambda_2\right)B(\vec{C})+\lambda_2\tau_1\frac{dB(\vec{C})}{dt}\right]\frac{d\vec{V}}{dt}+\frac{k\lambda_2\tau_1}{2\lambda_1 h^2}B(\vec{C})\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}-$$

$$-\frac{\nu}{2h^2}A\overrightarrow{C^2}-\frac{\nu\tau_1}{2h^2}\frac{dB(\vec{C})}{dt}\vec{C}-\frac{\nu\tau_1}{2h^2}B(\vec{C})\frac{d\vec{C}}{dt}-\frac{k_T}{2h^2}\left[B(\vec{C})+\tau_1\frac{dB(\vec{C})}{dt}\right]\vec{T}-$$

$$-\frac{k_T\tau_1}{2h^2}B(\vec{C})\frac{d\vec{T}}{dt}+\frac{1}{h^2}\vec{g}_C, \qquad (4.182)$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{\lambda_0}{h^2}A_2\vec{T}+\frac{k_1}{2\lambda_1 h^2}P(\vec{T})\vec{V}+\frac{k_1\lambda_2}{2\lambda_1 h^2}P(\vec{T})\frac{d\vec{V}}{dt}-\frac{\nu}{2h^2}P(\vec{T})\vec{C}-$$

$$-\frac{k_2}{2h^2}A\overrightarrow{T^2}+\frac{1}{h^2}\vec{g}_T, \qquad (4.183)$$

$$\vec{V}(0)=\vec{0},\ \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{t=0}=\vec{\tilde{\upsilon}}_0,\ \left.\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}\right|_{t=0}=\vec{\tilde{\upsilon}}_1, \qquad (4.184)$$

$$\vec{C}(0)=\vec{\tilde{C}}_0,\ \left.\frac{d\vec{C}}{dt}\right|_{t=0}=\vec{0},\ \vec{T}(0)=\vec{\tilde{T}}_0, \qquad (4.185)$$

де введено позначення, що аналогічні до позначень у п. 4.7.2.

Від задачі (4.181)–(4.185) перейдемо до задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\vec{z}}{dt}=\Re_*(\vec{z})\vec{z}+\vec{F}_*(\vec{z})+\vec{g}_*,\ t>0,\ \vec{z}(0)=\vec{z}_0, \qquad (4.186)$$

де

$$\vec{z}(t)=\left[\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3,\vec{C}_1,\vec{C}_2,\vec{T}\right]^T,\ \vec{z}_0=\left[\vec{0},\vec{\tilde{\upsilon}}_0,\vec{\tilde{\upsilon}}_1,\vec{\tilde{C}}_0,\vec{0},\vec{\tilde{T}}_0\right]^T,$$

$$\vec{V}_1\equiv\vec{V},\ \vec{V}_2=\frac{d\vec{V}_1}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt},\ \vec{V}_3=\frac{d\vec{V}_2}{dt}=\frac{d^2\vec{V}}{dt^2},$$

$$\vec{C}_1\equiv C,\ \vec{C}_2=\frac{d\vec{C}_1}{dt}=\frac{d\vec{C}}{dt},$$

$$\Re_*(\vec{z}) = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & \tilde{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & -A_{34} & -A_{35} & -A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{E} & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & -A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & 0 & -A_{64} & 0 & A_{66} \end{bmatrix},$$

$$\vec{F}_*(\vec{z}) = \frac{1}{2h^2}\left[\vec{0},\ \vec{0},\ \frac{\theta}{h^2}A^2\overrightarrow{T^2}, \vec{0},\ -\frac{\nu}{n\tau_1}A\overrightarrow{C_1^2} + \frac{k_2 k_T}{2nh^2}B(\vec{C}_1)A\overrightarrow{T^2},\ -k_2 A\overrightarrow{T^2}\right]^T,$$

$$\vec{g}_* = \frac{1}{h^2}\left[\vec{0},\ \vec{0},\ -\frac{1}{\lambda_1^2}\left(\vec{g}_\nu + \frac{\theta\lambda_1^2}{h^2}A\vec{g}_T\right), \vec{0}, \frac{\vec{g}_C}{n\tau_1} - \frac{k_T}{2nh^2}B(\vec{C}_1)\,\vec{g}_T,\ \vec{g}_T\right]^T,$$

$$A_{31}(\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1^2}A\left[c_\nu - \frac{\theta k_1 \lambda}{2h^2}P(\vec{T})\right],$$

$$A_{32}(\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1^2}\left[c_\nu(\lambda_1+\lambda_2) - h^2 E - \frac{\lambda_1\lambda_2\theta k_1}{2h^2}AP(\vec{T})\right],$$

$$A_{33} = \frac{1}{\lambda_1}\left(\lambda_2 c_\nu A - 2h^2 E\right),\ A_{34}(\vec{T}) = \frac{1}{\lambda_1}A\left[\mu - \frac{\theta\nu\lambda_1}{2h^2}P(\vec{T})\right],$$

$$A_{35} = \mu A,\ A_{36} = \frac{\theta}{\lambda_1}A\left[E + \frac{\lambda_0\lambda_1}{h^2}A_2\right],$$

$$A_{51}(\vec{C}_1,\vec{C}_2,\vec{T}) = \frac{1}{n\tau_1}\tilde{B}_1(\vec{C}_1,\vec{C}_2) - \frac{k_1 k_T}{4n\lambda_1 h^2}B(\vec{C}_1)P(\vec{T}),$$

$$A_{52}(\vec{C}_1,\vec{C}_2,\vec{T}) = \frac{1}{n\tau_1}\tilde{B}_2(\vec{C}_1,\vec{C}_2) - \frac{k_1 k_T \lambda_2}{4n\lambda_1 h^2}B(\vec{C}_1)P(\vec{T}),$$

$$A_{53}(\vec{C}_1) = \frac{k\lambda_2}{2n\lambda_1}B(\vec{C}_1),\ A_{54}(\vec{C}_1,\vec{T}) = \frac{1}{n\tau_1}\tilde{B}_4(\vec{C}_1) + \frac{\nu k_T}{4nh^2}B(\vec{C}_1)P(\vec{T}),$$

$$A_{55}(\vec{C}_1) = \frac{1}{n\tau_1}(\tau_2 DA - h^2\Lambda^{(n)}) - \frac{\nu}{2n}B(\vec{C}_1),$$

$$A_{56}(\vec{C}_1) = \frac{1}{n\tau_1}\tilde{B}_6(\vec{C}_1) + \frac{\lambda_0 k_T}{2nh^2}B(\vec{C}_1)A_2,$$

$$A_{61}(\vec{T}) = \frac{k_1}{2\lambda_1}P(\vec{T}),\ A_{62}(\vec{T}) = \lambda_2 A_{61}(\vec{T}),$$

$$A_{64}(\vec{T}) = \frac{\nu\lambda_1}{k_1}A_{61}(\vec{T}),\ A_{66} = \lambda_0 A_2,$$

$$\tilde{B}_1(\vec{C}_1,\vec{C}_2) = \frac{k}{2\lambda_1}\left[B(\vec{C}_1) + \tau_1 B(\vec{C}_2)\right],$$

$$\tilde{B}_2(\vec{C}_1,\vec{C}_2) = \frac{k}{2\lambda_1}\left[(\tau_1+\tau_2)B(\vec{C}_1) + \tau_1\lambda_2 B(\vec{C}_2)\right],$$

$$\tilde{B}_4(\vec{C}_1) = DA_1 - \frac{\nu\tau_1}{2}B(\vec{C}_2), \quad \tilde{B}_6(\vec{C}_1,\vec{C}_2) = \frac{k_T}{2}\left[B(\vec{C}_1) + \tau_1 B(\vec{C}_2)\right],$$

$\tilde{E} = h^2 E,\ E -$ одинична матриця.

Для розв’язання задачі Коші (4.186) можна скористатись скінченнорізницевими методами, зокрема неявною різницевою схемою, яка одержується (аналогічно викладеному вище) наступним чином. Інтегруючи (4.186) по проміжку $[t, t+\tau]$ маємо інтегральне співвідношення:

$$\vec{z}(t+\tau) = \vec{z}(t) + \int_t^{t+\tau} \Re_*(\vec{z}(s))\vec{z}(s)ds + \int_t^{t+\tau} \vec{F}_*(\vec{z}(s))ds + \tau\vec{g}_*,\ \tau > 0. \quad (4.187)$$

Задачі (4.186) на основі (4.187) поставимо у відповідність неявну схему з вагами (надалі стрілки над векторами опускаємо):

$$\begin{gathered}\hat{z} = z + \alpha\tau\left[\Re_*(\hat{z})\hat{z} + F_*(\hat{z})\right] + \\ +\tau\left\{g_* + (1-\alpha)\left[\Re_*(z)z + F_*(z)\right]\right\},\ \tau > 0,\ \alpha \in [0,5;1], \end{gathered} \quad (4.188)$$

де $\hat{z} = z(t+\tau),\ z = z(t)$.

Ефективний наближений розв’язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (4.188) можна знайти, наприклад, використовуючи метод Ньютона [13, 137, 158].

На завершення зазначимо, що програмна реалізація викладеного алгоритму відкриває можливості комплексного дослідження сумісного впливу властивостей неізотермічності та релаксаційності фільтраційного і дифузійного процесів на динаміку перебігу процесів ущільнення грунтових масивів за умов насиченості їх сольовими розчинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Авер'янов С.Ф.* Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод.– М.: Колос, 1982. – 237 с.
2. *Антонцев С.Н., Монахов В.Н.* Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах // Докл. АН СССР. – 1978. – 243, №3. – С. 553–556.
3. *Аравин В.И.* Расчет плоской фильтрации в грунтах с криволинейной анизотропией // Изв. ВНИИГ. – 1974. – Вып. 104. – С. 3–9.
4. *Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
5. *Ахиезер Н.И.* Элементы теорий эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
6. *Байоки К., Маджeнес Э.* О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы // УМН. – 1974. – 29, вып. 2 (176). – С. 50–69.
7. *Барановський С.В.* Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // Вісник Тернопільськ. держ. техн. ун-ту.– 1999.– 4, № 2.– С. 36–40.
8. *Барановський С.В.* Про один метод розрахунку процесу деформації дна під впливом турбулентного водного потоку // Гидравлика и гидротехника. – К.: Техніка, 1998. – Вып. 59. – С. 110–115.
9. *Баренблатт Г.И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // Прикл. математика и механика. – 1953. – 17, №3. – С. 261–274.
10. *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движения жидкости и газа в пористой среде // ПММ. – 1952. –16, №1. – С. 67–78.
11. *Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
12. *Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах – М.: Недра, 1984. – 303 с.
13. *Бахвалов Н.С. Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 451 с.
14. *Бер Я., Заславский Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
15. *Берман В.С.* Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции // Докл. АН СССР. – 1978. –242, №2. – С. 265–267.
16. *Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
17. *Бомба А. Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн. 1982. –4, №4. – С. 493–496.
18. *Бомба А.Я., Гутіна Ж.С., Каштан С.С., Хлапук М.М.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах

горизонтального дренажу // Вісник Укр. держ. ун-ту водн. госп. та природокорист: Збірн. наук. праць. – Вип. 4 (23). – Рівне: УДУВГП. – 2003. – С. 11–20.

19. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Вісник Тернопільськ. держ. техн. ун–ту.– 2004.– 9, № 1.– С. 123–129.
20. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – 45, №2. – С. 15–22.
21. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. – 2001. – Вип. 8. – С. 19–33.
22. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Скопецкий В.В.* Нелинейные обратные краевые задачи на конформные отображения с управляющим потенциалом // Кибернетика и системный анализ. – 2004.– №1.– С.71–79.
23. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.О.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформівних середовищах // Вісник Львівськ. національного ун–ту. Сер.: Прикладна математика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3–10.
24. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецкий В.В.* Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища // Вісник Київськ. ун–ту. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 1. – С. 126–135.
25. *Бомба А.Я., Хлапук М.М.* Моделювання впливу градієнтів напору на процес фільтрації в середовищах, що деформуються // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип.5. – С. 26–35.
26. *Бондарев Э.Н., Николаевский В.Н.* Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явлений адсорбции // ПМТФ.– 1962. – №5. – С. 127–134.
27. *Бондарев Э.Н., Николаевский В.Н.* Перемешивание жидкости в осесимметрическом фильтрационном потоке // Изв. АН СССР: ОТН. Механ. и машиностр. – 1961. – №6. – С. 170–171.
28. *Бочевер Ф.М., Орадовская А.Е.* Гидрогеологическое обоснование защиты подземных вод и водозаборов от загрязнений. – М.: Недра, 1972. – 129 с.
29. *Бочков Н.М.* Механическая суффозия грунта. – М. –Л.: ОНТИ, 1936. – 235 с.
30. *Булавацкий В.М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики. – К.: Наук. думка, 1993. – 132с.
31. *Булавацький В.М.* Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації // Доп. НАН України.– 1997. – №8. – С.13–17.

32. *Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – К.: Наукова думка, 2005. – 283с.
33. *Булавацький В.М., Рогаль І.В.* Застосування методу прямих до задачі консолідації грунтового масиву насиченого сольовим розчином // Волинський математичний вісник. Сер. Прикладна математика. – 2003. – №1(10). – С.36 – 45.
34. *Булавацький В.М., Рогаль І.В.* Математичне моделювання процесу консолідації основ накопичувачів промислових стоків// Доп. НАН України. – 2004. – №1. – С.42 – 47.
35. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений // Пробл. управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 48 – 56.
36. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Системный подход к проблеме мате-матического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 73 – 81.
37. *Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Чапля Е.Я.* Деформация электронных тел с учетом гетеродиффузии заряженных перемесных частиц // Физ.-хим. мех. материалов. – 1980. – №5. – С. 8–14.
38. *Бурак Я.Й., Кондрат В.Ф.* Рівняння електродинаміки повільно рухомих пористих насичених тіл // Волинський математичий вісник. – Рівне. – 2001. – Вип. 8. – С. 27–32.
39. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я.* Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі // Доп. НАН України. – 1993. – №10. –С. 59–63.
40. *Бурак.Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Про вертикальну міграцію радіонуклідів у грунті // Доп. НАН України. – 1995. – №11. – С. 34–37.
41. *Бутузов В. Ф. Васильева А. Б., Федорюк М. В.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб.: «Итоги науки». – М.: Матем. анализ. – 1967. – С. 5–73.
42. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решений некоторых модельних задач химической кинетики с учетом диффузии // Докл. АН СССР. – 1978. – 242, №2. – С. 268–271.
43. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k(x,y)u = f$ в прямоугольной области. – М.: ДУ. – 1973.9, №9. – С. 1654–1660.
44. *Бутузов В.Ф.* Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “реакция-диффузия-перенос” // Методы теории сингулярних возмущений в прикладних задачах. – Рига: Intelstrv, 1990. – С. 18–26.
45. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.–1975. – 11, №6. – С. 1030–1041.
46. *Бутузов В.Ф.* Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с

частными производными // Дифференц. уравнения. – 1975. – 15, №10. – С. 1848–1862.
47. *Бутузов В.Ф., Мамонов В.М.* Процедура згладжування в одній сингулярно збуреній квазілінійній параболічній задачі // Журн. вычислительной матем. и матем. физ. – 1987. –27, №3. – С. 391–399.
48. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малими параметрами при старших производных // Журн. вычисл. математики и матем. физики. –1982. – 22, №4. – С. 865–870.
49. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об одной сингулярно возмущенной задаче параболического типа // Тр. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С. 73–74.
50. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестник МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1978. – № 2. – С. 49–56.
51. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
52. *Бэрнардинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 200 с.
53. *Вабищевич П.Н.* Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – 29, №6. – С. 902–914.
54. *Вазов В*. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
55. *Ван-дайк Милтон*. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 310 с.
56. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. –М.: Наука, 1973. – 273 с.
57. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
58. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. – М.-Л.: Госстройиздат, 1939. – 248 с.
59. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
60. *Веремчук И.А.* Стационарная фильтрация под флюбетами в анизотропных грунтах конечной глубины // Изв. АН СССР. Мех. жид. и газа. – 1981. – №6. – С. 155–158.
61. *Веригин Н.Н., Васильев С.В.* Нестационарный солевой режим грунтовых вод, обусловленный действием дренажа // Труды Ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 77–79.
62. *Веригин Н.Н., Куранов Н.П.* О промывании засоленных почвогрунтов // Геология и разведка. – 1975. – №4. – С. 114–117.
63. *Веригин Н.Н., Шержуков Б.С.* Диффузия и массообмен при фильтрации

жидкостей в пористых средах // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М.: Наука, 1967. – С. 237–313.
64. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математ. наук. – 1957. – 12, Вып. 5. – С. 3–122.
65. *Власюк А.П., Жеребятьєв О.В.* Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей // Вісн. Укр. держ. акад. водн. госп-ва. – Рівне. –1998.– Вип. 1., Ч.1. – С. 40–43.
66. *Власюк А.П., Кузло М.Т.* Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах // Меліорація і водне господарство: Міжвідомчий темат. наук. зб. – Вип. 87. – Київ, 2000. – С. 43–46.
67. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Чисельне розв'язування задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням масопе-реносу солей // Вісник Київськ. ун–ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2000. – Вип. 2. – С. 197–204.
68. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211с.
69. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Числове моделювання стабілізованими схемами МСЕ фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С.59–70.
70. *Власюк А.П., Михальчук В.Г.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трёхсвязных областей. – 1991. – 56 с. – (Препринт АН України. Ін-т математики, 91.57).
71. *Власюк А.П., Михальчук В.Г.* Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутних областях для еліптичних систем рівнянь. – 1994.– 24 с.– (Препринт НАН України. Ін-т математики, 94.36).
72. *Волковысский Л.И.* Квазиконформные отображения.–Львов: Изд. Львовск. гос. ун-та, 1954. – 156 с.
73. *Герсеванов Н.М.* Основы динамики грунтовой масы.–М.-Л.: ОНТИ, 1937. –242 с.
74. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / *Веригин Н.Н., Васильев С.В., Саркисян В.С., Шержуков Б.С.* – М.: Наука, 1977. – 271 с.
75. *Гладкий А.В., Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е.* Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем. – К.: Вищ. школа, 1981. – 288с.
76. *Глущенко А.А.* Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Докл. АН УССР. Сер.А.– 1978.– №6. – С.490 – 494.
77. *Глущенко А.А., Кузьменко А.П.* Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С. 50–56.
78. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука,

1976. – 178 с.
79. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Ж. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. –7, № 5. – С. 1031–1059.
80. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Ж. вычисл. математики и мат. физики.– 1972.– 12, №2.– С. 429–440.
81. *Голубев В.С., Гарибьянц А.Л.* Гетерогенные процессы геохимической миграции. – М.: Недра, 1968. – 192с.
82. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
83. *Голубева О.В.* Фильтрация к скважинам и критерий их работы без загрязнения: Препринт /АН СССР. Ин-т пробл. мех.; №182.– М.: 1981. – 51 с.
84. *Горелик Л.В.* Расчеты консолидации оснований и плотин из грунтовых материалов. – Л.: Энергия, 1975. – 220 с.
85. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – К.: Наук. думка, 1995. – 262с.
86. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения.– К.: Наук. думка, 1998. – 614с.
87. *Джеймс А.* Математические методы контроля загрязнения воды.– М.: Мир, 1981.- 471 с.
88. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 542с.
89. *Добронравов А.А., Кремез В.С., Сирый В.С.* Расчет на ЭВМ нестационарной фильтрации в районах гидротехнических сооружений.– К.: Наук. думка, 1980.– 184 с.
90. *Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я.* Математичне моделювання процесів теплопровідності у багатошарових середовищах із тонкими включеннями // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур.– Львів.– 2000.– №1.–С. 212–216.
91. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.– М.: «Физматлит» ВО «Наука», 1994.– 437с.
92. *Зарецкий Ю.К.* Теория консолидации грунтов. – М.: Наука, 1967.– 543с.
93. *Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К., Беляев Н.Н.* Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде. – К.: Наук. думка, 1997. – 367с.
94. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высшая школа, 1991.– 447 с.
95. *Избаш С.В*. Фильтрационные деформации грунта. // Изв. НИИГ. – 1932. – 5. – С. 173–205.
96. *Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Таюрская Г.Р.* Построение прямой однородной решетки профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 3. – С. 35–38.

97. *Исакова Е.К.* Асимптотика решения диференциального уравнения параболического типа с малым параметром // ДАН СССР. – 119, №6. – 1958. – С. 1077–1080.
98. *Исакова Е.К.* Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром // Матем. сборник. – 1966. – 69(111).– С. 300–320.
99. *Истомина В.С.* Фильтрационная устойчивость грунтов. – М.: Госстройиздат, 1957. – 295 с.
100. *Каменомостская С.Л.* Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных // Матем. сб. – 1952. – 31(73). – С. 703–708.
101. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
102. *Каштан С.С.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 78–86.
103. *Каштан С.С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища // Там само.– 2002.– Вип.9.– С. 32–40.
104. *Каштан С.С., Пригорницький Д.О.* Про чисельне розв'язання обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // IV Всеукраїнська наукова конференція з прикладної математики та інформатики, присвячена 340-річчю Львівського університету (Львів, 11 – 13 квітня 2001 р.): Тези доповідей. – Львів – 2001. – С. 40–41.
105. *Ковальчук С.В., Олейник А.Я.* Фильтрация воды к дрене в двухслойной среде с боковым и инфильтрационным питанием // Прикл. механика. – 1968. – Вып.12. – С. 108-112.
106. *Козлов В.С.* К вопросу о расчете движения воды под гидротехническими сооружениями в анизотропно-водопроницаемых грунтах // Изв. АН СССР: ОТН. – 1940. – №3. – С. 59–79.
107. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
108. *Кондратьев В.Н.* Фильтрация и механическая суффозия в несвязных грунтах. – Крымиздат, 1958. – 76 с.
109. *Копсон Э.Т.* Асимптотические разложения. – М.: Мир, 1966. – 159 с.
110. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
111. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 584с.; 1977. – Т.2. – 611 с.
112. *Кузьменко А.П.* Про фільтраційний розрахунок неоднорідної земляної греблі на проникліи основі // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – Львів: Світ. – 1992. – С. 75–78.
113. *Курант Р.* Уравнение с частными производными.– М.: Мир,1964.– 830 с.

114. *Кухарський В.М., Савула Я.Г., Головач Н.П.* Стабілізація розв'язків задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченніх елементів // Моделювання та інформаційні технології. – 2002. – Вип. 15. – С. 3–14.
115. *Кухарський В.М., Савула Я.Г., Копитко М.Ф.* Чисельне дослідження задач адвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами // Волинський математичий вісник. – Рівне. – 2001. – Вип. 8. – С.86–92.
116. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
117. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука. – 1977. – 407 с.
118. *Лаврик В.И.* О приближенном решении краевых задач конвективной диффузии растворимых в фильтрационном потоке веществ // Укр. матем. журнал. – 1979. – 31. – №4. – С.437–441.
119. *Лаврик В.И., Бомба А.Я.* Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод // ДАН УССР.– 1980.– №5.– С. 47–51.
120. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85-72.– Киев: 1985.– 16 с.
121. *Лаврик В.І., Булавацький В.М.* Математичне моделювання деяких нерівноважних процесів фільтраційно-конвективної дифузії // Доп. НАН України.– 2002.–№2. – С. 68 – 72.
122. *Лаврик В.І., Булавацький В.М.* Математичне моделювання деяких нерівноважних фільтраційних процесів // Доп. НАН України. – 2003. – №1. – С. 37 – 43.
123. *Лаврик В.И., Милютин А.Ф.* Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод: Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78–24.– К.: 1978.– 56 с.
124. *Лаврик В.И., Никифорович Н.А.* Математическое моделирование в гидроэкологических системах. – К.: Фитосоциоцентр, 1998. – 288 с.
125. *Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А.* Конформные отображения физико-топологических моделей. – К.: Наук. думка, 1990.– 374 с.
126. *Лебедев В.И.* Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода (метода прямых) // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. наук. – 1965. – №10. – С.47-58.
127. *Лейбензон Л.С.* Подземная гидрогазодинамика: Собр. Тр. в 2 т.– М.: Изд-во АН СССР, 1953.– 554 с.
128. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.– 847 с.
129. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
130. *Лыков А.В., Берковский Б.М.* Законы переноса в неньютоновских

жидкостях // Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. – М.: Энергия, 1968. – С. 5-14.
131. *Люстерник Л.А., Олейник О.А*. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр // Тр. 3 матем. съезда.–М.: Изд-во АН СССР, 1963.–Т.2.– С. 158–169.
132. *Ляшко И.И. Великоиваненко И.М.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наук. думка, 1973. – 264 с.
133. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. – К.: Наук. думка, 1974. – 200 с.
134. *Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1977. – 288 с.
135. *Ляшко І.І., Демченко Л.І., Мистецький Г.Ю.* Вологоперенос у насичено-ненасичених пористих середовищах // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – №8. – С. 600–603.
136. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 264 с.
137. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А*. Методы вычислений. – К.: Вищ. школа, 1977. – 408с.
138. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.– 534 с.
139. *Маслов В. П*. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.
140. Методы прогноза солевого режима грунтов и ґрунтових вод / Под ред. В.Н.Верегина. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
141. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем / С.В.Васильев, Н.Н.Верыгин, Б.А.Глейзер и др. – М.: Колос, 1970. – 440 с.
142. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.И. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 335с.
143. *Минц Д.М.* Теоретическое исследование процесов фильтрации суспензий через песчаные фильтры // Науч. тр. АКХ. – 1949. – Вып. 4–5. – С. 16–18.
144. *Мироненко В.А., Шестаков В.М.* Основы гидрогеомеханики. – М.: Недра, 1974. – 296 с.
145. *Мистецкий Г.Е.* Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах. – К.: Будівельник, 1985. – 136с.
146. *Михальчук В.Г., Власюк А.П.* О применении конформных и квазиконформных отображений для решения краевых задач на ЭВМ / Ровно, 1988.– 36с.- Рус.– Деп. в УкрНИИНТИ 25.10.88, №2730.
147. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 379 с.
148. *Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В*. Релаксационная фильтрация. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 136с.

149. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободними границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 422 с.
150. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.– 535 с.
151. *Николаевский В.Н.* Конвективная диффузия в пористых средах // Прикл. математика и механика. – 1959. – 23, №6. – С. 1042–1050.
152. *Николаевский В.Н.* Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках // Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение. – 1960. – №5. – С. 189–193.
153. *Нумеров С.Н., Патрашев А.Н.* Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений // Тр. ЛПИ. – 1947. – №4. – С. 165–169.
154. *Олейник А.Я.* Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. – К.: Наук. думка, 1978. – 204 с.
155. *Олейник А.Я., Лаврик Н.И., Поляков В.Л.* Решение задачи нестационарной фильтрации из каналов к несовершенному дренажу при наличии инфильтрационного питания // Некоторые задачи механики сплошных сред. – К.: Наук. думка, 1978. – С.85–94.
156. *Олейник А.Я., Поляков В.П.* Дренаж переувлажненных земель. – К.: Наук. думка, 1987. – 279 с.
157. *Орадовская А.Е., Бочевер Ф.М.* Приближенный расчет растворения пластовых солей в основании гидротехнических сооружений // Тр. ВОДГЕО. – 1964. – Вып. 6. – С. 9–14.
158. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
159. Основы гидрогеологических расчетов / Ф.М.Бочевер, И.В.Гармонов, А.В.Лебедев, В.М.Шестаков. – М.: Недра, 1969. – 386 с.
160. *Павловский Н.Н.* Движение грунтовых вод: Собр. соч. в 2 т.– М.: Изд- во АН СССР, 1956.– 771 с.
161. *Патрашев А.Н.* Диффузия солей при фильтрации по трещинам // Изв. ВНИИГ. – 1946. – №31. – С. 55–92.
162. *Пеньковский В.И.* Промывка почвы с подвижной границей промачивания в условиях нелинейной кинетики солеотдачи // Математ. вопр. механики. – Новосибирск, 1975. – С. 133–137.
163. *Пивовар Н.Г., Бугай Н.Г., Рычко В.А.* Дренаж с волокнистыми фильтрами. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
164. *Положий Г.М.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного: ρ-аналитические и (ρ, q)-аналитические функции и их некоторые приложения. – К.: Изд-во КГУ, 1965. – 442 с.
165. *Положий Г.М.* Численное решения двумерных и трехмерних краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – К: Изд-во КГУ, 1982. – 161 с.
166. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. – М.: Изд- во АН СССР, 1948. – 144 с.
167. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

168. *Поляков В.Л.* К расчету фильтрации со свободной поверхности // Теория и расчеты фильтрации. – К: Наук. думка, 1980. – С. 46–56.
169. *Поляков В.Л.* Расчет осушительного действия дренажа с учетом испарения, инфильтрационного и напорного питания // Гидромехеника.–1984. – Вып.50. – С. 63–68.
170. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. 12-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1977.– 444 с.
171. *Радкевич Е. В., Меликулов А. С.* Краевые задачи со свободной границей.– Ташкент: ФАН, 1988. – 185 с.
172. *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов. – М.: Высш. школа, 1983.– 160 с.
173. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 - 1967) / Под ред. П.Я. Полубариновой-Кочиной.– М.: Наука, 1969.– 546 с.
174. *Рауз Х.* Механика жидкости. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
175. *Савула Я.Г., Дяконюк Л.М.* Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Вісник ЛНУ ім. Івана Франка. Сер. прикл. матем. та інформат. – 2000. – Вип. 3.– С. 125–131.
176. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н.* Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1981. – 38 с.
177. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
178. *Самойленко А.М.* Применение метода усреднения для иследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами, в автоколебательных системах второго порядка с малым параметром // УМЖ. – 1961. – 13, №3. – С. 103–109.
179. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 375 с.
180. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
181. *Сидорчук Б.П.* Математичні моделі нестаціонарних задач процесу фільтрації в середовищах, що деформуються // Вісник Тернопільськ. держ. техн. ун-ту. – 1999. – 4, № 2. – С. 30–36.
182. *Сидорчук Б.П.* Математичні моделі процесу фільтрації в шаруватих середовищах, що деформуються // Вісник Тернопільськ. держ. техн. ун-ту. – 1999. – 4, № 4. – С. 66–71.
183. *Сидорчук Б.П.* Про математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації в шаруватих середовищах, що деформуються // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 115–121.
184. *Скопецкий В.В., Булавацкий В.М.* Математическое моделирование фильтрационной консолидации с учетом наличия градиента концентра-ции // Пробл. управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 54 – 59.
185. *Скопецкий В.В., Булавацкий В.М.* Некоторые математические модели процессов фильтрационной консолидации // Компьютерная математика. – 2005. – №3. – С.22 – 30.

186. *Скопецький В.В., Булавацький В.М.* Математичне моделювання деяких процесів фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами//Доп. НАН України.– 2005.–№8. – С.55 – 61.
187. *Скопецький В.В., Булавацький В.М.* Математичне моделювання процесу консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації //Доп. НАН України. – 2006. – №2. – С.55 – 61.
188. *Скопецький В.В., Дейнека В.С.* Задачі теорії фільтрації в середовищах з тонкими включеннями // Волинський математичий вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 121–128.
189. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – К.: Наук. думка, 2002. – 362 с.
190. *Слезкин Н.А*. О дифференциальных уравнениях фильтрации // Докл. АН СССР. – 1951. – 79, №5. – С. 755–758.
191. *Стеля О.Б., Ходорівський М.С.* Математичне моделювання в системі моніторингу майданчика об'єкту "ВЕКТОР" (30-км зона ЧАЕС) // Волинський математичий вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 134–138.
192. *Сушко В.Г.* О некоторых сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с вырождением // Докл. АН СССР. – 1989. – 304, №4. – С. 777–780.
193. *Сушко В.Г.* Об асимптотике по малому параметру для одного квазилинейного параболического уравнения // Докл. АН СССР. – 1972. – 205, №4.– С. 794–797.
194. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. – 1952. – 31(73), № 3. – С. 575–586.
195. *Тихонов А.Н*. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных // УМН. – 1952. – 7, вып. 1(47). – С. 140–142.
196. *Треногин В.А.* Об асимптотике решений почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, вып.1. (9). – С. 163–170.
197. *Треногин В.А*. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // УМН. – 1970. – 25, вып. 4. – С. 123–156.
198. Фильтрация из водохранилищ и прудов / С.В.Васильев, Н.Н.Веригин, Г.А.Газумов, Б.С.Шержуков. – М.: Колос, 1975. – 303 с.
199. *Флорин В.А*. Основы механики грунтов: В 2-х т. – Л.; М.: Госстройиздат, 1961. – Т.2. – 544с.
200. *Фильчаков П.Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. – К.: Изд- во АН УССР, 1960. – Т.2. – 255 с.
201. *Франк-Каменецкий Д.А*. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.– М.: Наука, 1967. – 491 с.
202. *Франкль Ф.И*. Опыт полуэмпирической теории движения взвешенных наносов в неравномерном потоке // Избр. труды по газовой динамике. – М.: Наука. – 1973. – С. 664–669.
203. *Фрид Ж*. Загрязнение подземных вод.– М.: Недра, 1981.– 304 с.

204. *Хлапук М.М.* Особливості моделювання нелінійних процесів фільтрації із зволожувача в середовище, що деформується // Сучасні проблеми теорії фільтрації. – Вісник УДАВГ.– 1998. – С. 151–157.
205. *Хмельник М.И., Литвинов В.Е.* Об одном видоизменении метода особах точек в гидродинамике и его электродинамической аналогии // Задачи технической гидродинамики. – М.: Наука, 1991. – С. 82–88.
206. *Хрисанов Н.И., Камбуров В.А.* Математическое и физическое моделирование фильтрационных деформаций грунта при работе закрытого дренажа. // Физическое и математическое моделирование в мелиорации. – М.: Колос, 1973. – С. 345–353.
207. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следуещее закону Дарси // Прикл. матем. и мех. – 1940. – 4, вып. 1.– С. 3–52.
208. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Про врахування нелінійного зв′язку між хімічними потенціалами і концентраціями в задачах гетеродифузії // Волин. математ. вісн. – 2001. – Вип. 8. – С. 98–104.
209. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
210. *Чарный И.А.* Безнапорный приток жидкости к гидравлически несовершенным скважынам и фильтрам // Изв. АН СССР: ОТН. – 1953. – №2. – С. 216–225.
211. *Чарный И.А.* Подземная гидромеханика. – М.;Л.: ОГИЗ, 1948. – 196 с.
212. *Чернуха О.Ю.* Про одну нелінійну задачу дифузії з логарифмічною залежністю хімічного потенціалу від концентрації для шару // Доп. НАН України. – 2000. – №8. – С. 37–42.
213. *Шержуков Б.С.* Диффузия и неравномерный масообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков.-Тр. Ин-та ВОДГЕО. – М. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.
214. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. – М.: Изд-во МГУ, 1979.– 368 с.
215. *Шестаков В.М.* Модели переноса в неоднородных пластах // Теория и расчеты фильтрации. – К.: Наук. думка, 1980. – С. 179–187.
216. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.–711 с.
217. *Шульгин Д.Ф.* К расчету опреснения засоленных почвогрунтов при промывке // Вопр. механики. – 1969. – Вып. 7. – С. 122–130.
218. *Эндрюс Д., Мак-Лоун Р.* Математическое моделирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.– 278 с.
219. *Якимов Н.Д.* Исследование разрешимости задачи фильтрации в неоднородной земляной плотине // Докл. АН СССР.– 1979.– 249, №2.– С. 307–310.
220. *Aronson D.G.* Linear parabolic equations containing a small parameter // J.Rational Mech. Anal. – 1956. – N.5. – P. 1003–1014.
221. *Bobisud L.E.* Parabolic equations wits a small paramer and discontinuons data // J. Math. Anal.and Appl. – 1969. – 26, N 1. – P. 208–220.
222. *Bobisud L.E.* The second initial-boundary-value problem for a linear parabolic equation with a small parameter // Mich. Math. J. – 1968. – 15, N4. – P. 112–127.
223. *Burak Y., Chaplia Y., Chernukha O.* Mathematical models of admixture migration in ground. – Львів: 1997. – 32с. (Препр. / НАН України. Центр матем. моделювання ІППММ; 1–97).

224. *Burak J., Chapla E.* Termomechanika przeplywow dyfuzyjnych w przypowierchniowych warstwach betonu // Zeszyty naukowe politechniki opolskiej. Poland. Ser. Budownictwo. – 1998. – 42, № 239. – S. 7–19.
225. *Dachler R.* Veber sicherwasserstromugen in geschichteten material // Die Wasserwirtschaft, Wien. – 1933. – N 2. – S. 54–63.
226. *Eckhaus W.* Asymptotic analysis of singular perturbations. – Amsterdam: North-Holland, 1979. – 286 p.
227. *Eckhaus W., Dejager E.M.* Asumptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1966. – N23. – P. 26–86.
228. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – New York.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964. – 365 p.
229. *Friedrichs K.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – 61, N6. – P. 485–504.
230. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Pures et appl. – 1913. – 6, N 9. – P.305–415.
231. *Haber S., Mauri R.* Boundary conditions for Darcy' s flow through porous media // J. Multiphase Flow. – 1983. – 9, N5. – P. 561–574.
232. Hunt Bruce. Seepage into Collection Galleries // J. Hudraul Eng. – 1983. – 109, N6. – P. 852–864.
233. *Larry Bobisud* (Communicated by A. Erdelvi) Second-order limar parabolic equations with a small parameter // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – N 27. – P. 385–397.
234. *Levinson N.* The first boundary problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // Ann. Math. –1950. – 51, N 2 . – P. 428–445.
235. *Lions J.L.* Perturbations singulieres olsens les problemus aux linutes eten controle optimal. Springer- New York: Verlag Berlin-Heidelberg, 1973. – 285 p.
236. Numerical conformal mapping // J. Comput. and Applied. Math. – 1986. – №14. – P. 1–69.
237. *Prandtl L.* Uber fliissigheits-bewegung bei Sehr kleiner beibung.-Verhandl. d. 3. Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 1907. – S. 21–45.
238. *Schaffernak E.* Erforschung der physikalischen gresetze, nach welchen die durchsickerung des wassers durch eine tallspre oder durch deu untergrund stattfindet // Die Wasserwirtschaft, Wien. – 1933. – N 3. – S. 43–49.
239. *Schawab G.O., Fouss J.L.* Tile Flow and Surface Runoff for Drainage Systems winh Corn and Grass Cover // Winter Meting ASAE. – 1966. – P. 666–703.
240. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical Grid Generation // Foundation and Applications. – New York: Elsevier, 1985. – 631 p.