

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

А . Я . БОМБА

С . В . БАРАНОВСЬКИЙ

І . М . ПРИСЯЖНЮК

**НЕЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО
ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ
“КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”**

РІВНЕ 2008

УДК 519.63.532.5

Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія”. – Рівне: Редакційно-видавничий відділ РДГУ, 2008. – 252 с.

Монографію присвячено моделюванню і дослідженню нелінійних процесів розповсюдження розчинних речовин (наприклад, забруднень) на квазіідеальних фільтраційних фонах у випадках переважання їх конвективних складових над дифузійними та розробці числово-асимптотичних методів побудови розв’язків відповідних нелінійних сингулярно збурених задач за умов взаємовпливу різних характеристик середовища та процесу.

Для спеціалістів з математичного моделювання та обчислювальних методів, інженерів, аспірантів, магістрантів, а також широкого кола наукових співробітників, що спеціалізуються в галузі прикладної математики.

Рецензенти:

д.т.н., проф. В.М. Булавацький, провідний науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

д.ф.-м.н., проф. В.Г. Самойленко, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

д.т.н., проф. А.О. Сяський, завідувач кафедри інформатики і прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету;

Затверджено до друку вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету

ISBN 966-7281-02-8

© А.Я. Бомба, С.В. Барановський, І.М. Присяжнюк, 2008

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1. АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ	8
1.1. <i>Розвиток асимптотичних методів в теорії диференціальних рівнянь</i>	<i>8</i>
1.2. <i>Асимптотичні методи розв'язання сингулярно збурених задач конвективної дифузії.....</i>	<i>18</i>
1.2.1. <i>Методика побудови асимптотичних наближень сингулярно збурених задач конвективної дифузії</i>	<i>18</i>
1.2.2. <i>Особливості обчислювальних аспектів асимптотичних наближень підвищеної точності сингулярно збурених задач типу “конвекція- дифузія”</i>	<i>31</i>
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”	43
2.1. <i>Сингулярні збурення в моделях процесів типу “конвекція-дифузія” для чотирикутних криволінійних областей</i>	<i>43</i>
2.1.1. <i>Моделювання нелінійних процесів екоенерго- систем з урахуванням зворотного впливу.....</i>	<i>43</i>
2.1.2. <i>Дослідження процесів, що описуються сингулярно збуреними інтегро-диференціальними рівняннями</i>	<i>51</i>
2.1.3. <i>Конвективно-дифузійний перенос у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації</i>	<i>58</i>
2.1.4. <i>Результати числових експериментів</i>	<i>63</i>
2.2. <i>Сингулярно збурені моделі процесів конвективної дифузії для многозв'язних областей</i>	<i>68</i>
2.2.1. <i>Нелінійні задачі конвективної дифузії у двоzv'язних областях</i>	<i>68</i>
2.2.2. <i>Моделювання процесів типу “фільтрація- конвекція-дифузія” у триzv'язних областях.....</i>	<i>78</i>

2.2.2.1. Процеси конвективної дифузії у випадках переважання їх конвективних складових над дифузійними.....	78
2.2.2.2. Процеси типу “фільтрація-конвекція” з умовами усереднення	82
2.2.3. Моделювання процесів конвективної дифузії у чотиририз’язних областях	88
2.2.4. Результати числових експериментів	95
2.3. Просторові сингулярно збурені задачі типу “фільтрація-конвекція-дифузія”	104
2.3.1. Просторові задачі конвективного переносу (метод характеристик)	104
2.3.2. Просторові задачі конвективно-дифузійного переносу при плоскій фільтрації.....	107
2.3.3. Просторові аналоги конформних відображень і сингулярно збурені задачі конвективної дифузії	117

РОЗДІЛ 3. СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МОДЕЛІ ТИПУ

“КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН”

3.1. Асимптотичне наближення розв’язків сингулярно збурених крайових задач процесів конвективної гетеродифузії.....	127
3.2. Сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін” у випадку малого масообміну.....	137
3.2.1. Нелінійні моделі процесів типу “конвекція-дифузія” з урахуванням масообміну породженого взаємодією забруднюючих речовин.....	137
3.2.2. Моделювання процесів конвективної дифузії за умов лінійної залежності інтенсивності масообміну від концентрацій двох сортів забруднюючих речовин	145
3.2.3. Асимптотичне наближення розв’язку нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії	149
3.3. Моделювання процесу очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах	154

3.3.1. Математичне моделювання процесів фільтрування рідин з домішками без урахування дифузії	154
3.3.2. Закономірності фільтрування з урахуванням дифузії	159
3.4. Математичне моделювання масопереносу забруднень в грунтах з урахуванням природного самоочищення	164
3.5. Результати обчислювальних експериментів.....	169

РОЗДІЛ 4. СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ І ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА..... 186

4.1. Дослідження дифузійних процесів в примежовій області із змінною ділянкою границі та моделювання процесів утворення піщаних хвиль	186
4.2. Математичні моделі дифузійних процесів в областях із вільними межами з урахуванням взаємовпливу зміни геометрії області на кінематичну структуру течії та коефіцієнт дифузії.....	201
4.3. Дослідження процесів деформації дна, що виникають при обтіканні течією незатоплених косо– та нормально розташованих півзагат.....	212
4.3.1. Моделювання процесу розмиву поблизу неза- топлених нормально розташованих півзагат ...	212
4.3.2. Дослідження процесу розмиву поблизу нормально розташованих півзагат з урахуванням впливу протилежної берегової лінії.....	224
4.3.3. Моделювання процесу розмиву поблизу незатоплених півзагат, розташованих під кутом до берегової лінії.....	228
4.4. Дослідження процесів деформації дна поблизу незатоплених вертикальних циліндричних перешкод (мостових опор).....	231

ЛІТЕРАТУРА..... 239

ПЕРЕДМОВА

Монографію присвячено розробці числово-асимптотичних методів побудови розв'язків нелінійних сингулярно збурених задач, які виникають при моделюванні і дослідженні процесів розповсюдження розчинних у фільтраційній течії речовин (наприклад, забруднень на квазіідеальних фільтраційних фонах) у випадках переважання їх конвективних складових над дифузійними за умов взаємовпливу різних характеристик середовища та процесу.

При цьому розглядаються різні підходи до моделювання та дослідження явищ зворотнього впливу концентрації розчинних речовин на коефіцієнт дифузії, зокрема, отримані розв'язки відповідних задач за умов многочленної та інтегральної залежностей коефіцієнта дифузії від концентрації забруднюючої речовини, а також із урахуванням запізнення у часі такого впливу. Одержані умови для асимптотичних розвинень розв'язків підвищеної точності таких задач.

У роботі також акцентується увага на особливостях та проблемах, які виникають при побудові асимптотичних наближень розв'язків сингулярно збурених задач конвективної дифузії у n -зв'язних областях ($n > 2$). Процедура побудови асимптотики розв'язку такого типу задач відрізняється від аналогічних алгоритмів для криволінійних обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями чотирикутних областей, а також обмежених еквіпотенціальними лініями двозв'язних областей, як “багатоповерховістю” формул запи-

су членів асимптотики, так і необхідністю попереднього знаходження ліній розділу течії. При цьому характер побудови асимптотики розв'язку суттєво залежить від значення потенціалу збурення φ° : одна і та ж ділянка границі області з відповідною крайовою умовою в одному випадку задання значення φ° породжує основну частину асимптотики, а в іншому – ту чи іншу поправку.

Відповідну методологію поширено на задачі, що виникають при моделюванні процесів міграції речовин двох сортів за умов їх масообміну, модельні задачі гетеродифузії для криволінійних областей обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями тощо. Розроблено підхід до моделювання та дослідження процесів очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах, які описано задачами конвективного масопереносу за умов масообміну.

Побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник і на цій основі одержано асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії в криволінійному паралелепіпеді.

З огляду на проблеми опису деформацій русла турбулентним потоком на основі розробленої загальної методології збурень розроблено підхід до побудови числово-асимптотичних наближень розв'язків відповідних нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь типу “конвекція-дифузія” в областях з вільною ділянкою границі.

РОЗДІЛ 1. АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ

1.1. Розвиток асимптотичних методів в теорії диференціальних рівнянь

Поява ідей асимптотичного наближення розв'язків задач для диференціальних рівнянь в першу чергу пов'язана з тривалим розвитком теорії збурень планетних орбіт. Тому довгий час здавалося, що вона має відношення лише до небесної механіки. Проте зараз ця ідея - одна з найбільш важливих і глибоких у математиці, особливо в тій її частині, що тісно стикається з фізикою. Асимптотичний підхід виявився дуже ефективним при розв'язуванні рівнянь, що описують ті чи інші фізичні процеси. Але ще більш важлива його роль як методологічного засобу, що відкриває шлях до заглибленого розуміння і декомпозиції складних систем, що сприяє розвитку фізичної інтуїції, формуванню нових понять і виявленню ієрархічних зв'язків між фізичними теоріями різного рівня. Саме в такому контексті американський математик М. Крускал запропонував ключове слово "асимптотологія", затверджуючи цим універсальність асимптотичних явищ, можливість розглядати їх з єдиної точки зору, у якій би формі й у якій би області природознавства вони не спостерігалися.

Стрімкий розвиток асимптотичних методів розпочався у математичному аналізі в XVIII ст. Його широко починають застосовувати у своїх працях Лагранж, Лаплас, Леверр'є, які заклали міцний

фундамент теорії збурення. Астрономічні задачі привели до нових методів Ньюкома, Ліндштедта, Гільдена, Боліна та ін.

Асимптотичними розвиненнями за незалежною змінною розв'язків для звичайних диференціальних рівнянь займались А. Пуанкаре, Пуассон, О. М. Ляпунов, Е. Айнс, Е. Коддінгтон, Н. Левінсон [16], Е. Камке, Ф. Трикомі, А. Ердейї, Ж. Хорн, О. Перрон, И. З. Штокало, І. М. Рапопорт та ін. Зокрема, в останній третині дев'ятнадцятого століття А. Пуанкаре й А.М. Ляпунов одержали строгі результати щодо збіжності асимптотичного розкладу, розвиваючи одну з модифікацій теорії збурень - метод малого параметра, що не припускає поділу змінних на швидкі і повільні, але застосовний лише до відшукування періодичних режимів (питання про те, які значення малого параметра забезпечують збіжність розкладу, при цьому залишалось відкритим). У той же час Пуанкаре зробив дуже важливий крок. Він уперше зрозумів, що розкладання за малими параметрами, що використовувались в астрономії, не обов'язково повинні збігатися. Вони можуть являти собою об'єкти особливої природи - асимптотичні ряди. Незважаючи на розбіжність, такі ряди в деякому сенсі добре наближають шукані функції. Тим самим, вперше в математиці виникла ситуація, коли абсолютна точність неможлива навіть у принципі: у кожній конкретній системі малий параметр має цілком визначене значення.

Вчені К. Штурм, І. Ж. Ліувіль, А. Пуанкаре, О. М. Ляпунов, Г. Біркгофф, Л. Шлезінгер, В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркін, П. Нуайон, Х. Территін, В. Пугачов, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов [32], И. З. Штокало, Ю. О. Митропольський [32], А. М. Тихонов [97],

І. С. Градштейн, А. Б. Васильєва [53,61], С. Ф. Фещенко [99], С. Г. Крейн, Л. А. Люстернік [79], М. Й. Вішик, С. О. Ломов [78], М. І. Шкіль [105], І. Г. Малкін, В. М. Волосов, М. М. Красовський та ін. присвятили свої праці знаходженню асимптотики розв'язків за параметром для звичайних диференціальних рівнянь. Розвитком асимптотичних методів розв'язування диференціальних рівнянь займалися також відомі іноземні автори [1-2, 6 –13, 15 – 18].

Асимптотичні розвинення розв'язків для звичайних диференціальних рівнянь одночасно за незалежною змінною і параметром розглянуто у працях М.В. Федорюка, Б. Ван-дер-Поля, И.З. Штокала та ін. Вивченню стійкості, обмеженості, порядку росту розв'язків звичайних диференціальних рівнянь на скінченному й нескінченному інтервалі присвячено чимало літератури, яка бере свій початок від праць О. М. Ляпунова і А. Пуанкаре.

Асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджували В. Штернберг, В. Тржицинський, В. Вазов [59], Л. Г. Магнарадзе, Н. Левінсон, М. В. Келдиш, О. А. Олійник, С. Каменомостська [69], Є. Жидков, Д. Аронсон [1], Є. Ісакова [66, 67], Т. Цуцунава, М. Вішик, Л. Люстернік, О. Ладиженська, Б. Панайоті, Л. Бобісуд [2], Су Юй-чен, В. О. Митропольський, С. Ф. Фещенко, Н. А. Павлюк, Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Н. С. Бахвалов [29], М. І. Фрейдлін, Р. С. Ефендієв, Л. Чезарі, ін.

Особливе місце серед асимптотичних методів зайняла теорія сингулярних збурень, предметом вивчення якої є рівняння, що містять малий параметр в коефіцієнтах при старших похідних. Розви-

ток теорії сингулярних збурень започатковано роботами А.Н.Тихонова. В них була розглянута початкова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром $\varepsilon > 0$ при певних похідних [97]. Вчений отримав умови, при яких розв'язок поставленої задачі прямує при $\varepsilon \rightarrow 0$ до одного з розв'язків так званої виродженої системи, яка отримувалась з початкової, якщо в ній формально покласти $\varepsilon=0$. Метод регуляризації розроблено в роботах С.А. Ломова [78]. Базируючись на роботах А.М. Ільїна, розвивається метод зрощування.

Є. К. Ісакова в праці [66] дослідила розв'язок задачі Коші при $\varepsilon \rightarrow 0$ для рівняння параболічного типу другого порядку $L_\varepsilon c(x,t) \equiv \varepsilon c_{xx} - c_t + b(x,t)u_x - c(x,t)c = 0$ при початковій умові $c(x,0) = \psi(x)$, $(x,t) \in D_\infty$ ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$). Також вона дослідила розв'язок $2p$ – параболічного рівняння за Петровським [67].

Крайові задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку також досліджував В. Л. Мельников. Так у роботі [84] автор вивчив залежність розв'язку другої крайової задачі від параметра і одержав його розклад за параметром. Також він дослідив поведінку розв'язку першої крайової задачі при розширенні області. Побудовою асимптотичного наближення розв'язку мішаної задачі для рівняння 4-го порядку займались М. М. Кабацій та І. І. Маркуш.

О. А. Олійник у праці [89] довела існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного рівняння $v_t + \varphi_x(t, x, v) = 0$ з початковою умовою $v(0, x) = v_0(x)$. Зауважимо, що розв'язок вчена визначала як границю при $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язків задачі Коші для параболічного рівнян-

ня $\varepsilon v_{xx} = v_t + \varphi_x(t, x, v)$, $\varepsilon > 0$ з тою ж початковою умовою. У праці розглядаються випадки, коли $v_0(x)$ неперервно диференційована функція з умовою $|v_0(x)| < M$ і $|v_0(x)| \leq K$ для всіх x , а також, коли $v_0(x)$ – довільна обмежена вимірна функція.

Побудову асимптотики за цілими степенями малого параметра розв'язку задачі Коші для рівняння $\varepsilon(u_\varepsilon)_{xx} - (\varphi(t, x, u_\varepsilon))_x - (u_\varepsilon)_t - \psi(t, x, u_\varepsilon) = 0$ у випадку, коли розв'язок виродженої задачі є кусково-гладкою функцією із скінченим числом ліній розриву, здійснив В. Г. Сушко в праці [96]. Автор будує асимптотику довільного порядку, а також знаходить оцінки похибок асимптотики, попередньо зробивши відповідні припущення відносно початкової функції.

Розв'язки рівнянь $v_t + (\varphi(v))_x = \varepsilon v_{xx}$ та $u_t + (\varphi(v))_x = 0$ при одній і тій же початковій умові, що відповідає центрованій хвилі розрідження для розв'язку другого рівняння, знайдено І. С. Бахваловим у праці [29]. Автор знаходить головний, при малих ε , член відхилення розв'язків цих рівнянь.

Асимптотичними методами розв'язання задач для параболічного рівняння і подібних задач для інших видів рівнянь із малим параметром при старших похідних присвячено ряд робіт і закордонних авторів. Зокрема, Д. Аронсон побудував нульові асимптотики із звичайним пограншаром [81]. Так у праці [1] автор розв'язав крайову задачу для лінійного рівняння параболічного типу $L(u) \equiv \varepsilon u_{xx} + a(x, y)u_x - b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y)$, за умов $u|_s = \varphi_i$ ($i =$

1, 2, 3), де $b(x,y) \geq m > 0$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, S – межа області, для якої розглядається дана задача. Аналогічний результат для рівняння еліптичного типу з малим параметром при старших похідних було отримано Н. Левінсоном у роботі [16]. В роботах американських вчених (наприклад, Коул [72], Ван-Дайк [60] і ін.) був розвинутий так званий метод зовнішніх і внутрішніх розкладів, на основі яких одержано ряд результатів у механіці суцільного середовища.

Ефективним інструментом розв'язку сингулярно збурених задач є асимптотичний метод Вішика-Люстерника. Важливим досягненням цього методу є його ідейна простота, можливість адекватного урахування як основних, так і другорядних складових процесу, чутливе реагування на малі зміни його характеристик, застосування до широкого кола задач, які пов'язані з розв'язуванням різноманітних рівнянь з частинними похідними. Суть його проілюстровано, зокрема, у роботі [63] на прикладі побудови асимптотики розв'язку такої задачі:

$$\varepsilon y''(x, \varepsilon) + a(x)y'(x, \varepsilon) + b(x)y(x, \varepsilon) = f(x), \quad (1.1.1)$$

$$y(0, \varepsilon) = d_0, \quad y(1, \varepsilon) = d_1, \quad (1.1.2)$$

де $a(x), b(x), f(x) \in C^\infty[0,1]$. Тут функція типу примежового шару (примежові поправки) може з'являтися в правому півколі точки $x=0$ (якщо $a(x) \geq a_* \gg \varepsilon > 0$), або в лівому півколі точки $x=1$ (якщо $-a(x) \geq a_* \gg \varepsilon > 0$). Причому у першому випадку розв'язок відповідного виродженого рівняння

$$a(x)u'(x)+b(x)u(x)=f(x)$$

слід шукати при умові

$$u(1)=d_1,$$

а в другому – при

$$u(0)=d_0.$$

Наприклад, у другому випадку розв'язок задачі (1.1.1)-(1.1.2) знаходиться у вигляді ряду:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[y_r(x) + u_r((1-x)\varepsilon^{-1}) \right],$$

після підстановки якого в (1.1.1) та врахувавши, що

$$a(x)u'((1-x)/\varepsilon) = a(1-\varepsilon\tau)u'_r(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{a^{(q)}(1)(-\tau)^q}{q!} u'_r(\tau),$$

$$b(x)u((1-x)/\varepsilon) = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{b^{(q)}(1)(-\tau)^q}{q!} u_r(\tau),$$

приходимо до співвідношення

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left\{ \varepsilon y_r''(x) + a(x)y_r'(x) + b(x)y_r(x) + \frac{1}{\varepsilon} u_r(\tau) + \right. \quad (1.1.3)$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^q \left[-a^{(q)}(1)(-\tau)^q u'_r(\tau) q!^{-1} - b^{(q)}(1)(-\tau)^q u_r(\tau) q!^{-1} \right] \right\} = f(x),$$

де $\tau=(1-x)/\varepsilon$ – змінна розтягу. Тоді, порівнявши у (1.1.3) коефіцієнти при однакових степенях ε , для визначення функцій $y_r(x)$ (так званих членів регулярної частини асимптотики) та $u_r(\tau)$ (примежевих поправок) одержуємо такі послідовності диференціальних рівнянь:

$$a(x)y_0'(x)+b(x)y_0(x)=f_0(x), \dots, a(x)y_r'(x)+b(x)y_r(x)=f_r(x), \dots; \quad (1.1.4)$$

$$u_0'(\tau)-a(1)u_0(\tau)=0, \dots, u_r'(\tau)-a(1)u_r(\tau)=\Phi_r(\tau), \dots,$$

де $f_r(x)$ та $\Phi_k(\tau)$ рекурентно виражаються відповідно через функції $f_i(x)$ та $\Phi_i(\tau)$ з номерами $i < k$, зокрема $f_0(x)=f(x)$, $\Phi_0(\tau)=0$.

При цьому диференціальні рівняння першої послідовності (1.1.4) розв'язуються при умовах $y_0(0)=d_0$, $y_1(0)=y_2(0)=\dots=0$, а другої – при $u_0(0)=d_1-y_0(1)$, $u_r(0)=-y_r(1)$ ($r=1,2,\dots$); $u_r \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ ($r=0,1,\dots$).

У роботах В.Ф.Бутузова та А.Б.Васильєвої [53–58] широкий розвиток і застосування отримали так звані методи примежевих і кутових функцій, а також метод згладження “негладкостей”. Зокрема, в роботі [61] В.Бутузовим асимптотичний розклад розв'язку задачі

$$\varepsilon^2 \Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in (0, a) \times (0, b) = \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.1.5)$$

отримано у вигляді:

$$u = \bar{u} + \Pi + P,$$

де $\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, y)$ - регулярна частина асимптотики, Π - примежеві функції, вплив яких є суттєвим поблизу сторін прямокутника, а P - кутові функції, які є суттєвими в околах вершин прямокутника. Тут

$$\begin{aligned} \Pi = & \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \Pi^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\Pi_k^{(1)}(x, \eta) + \\ & + \Pi_k^{(2)}(\xi, y) + \Pi_k^{(3)}(x, \eta_*) + \Pi_k^{(4)}(\xi_*, y)), \end{aligned}$$

де $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta_* = (b-y)/\varepsilon$, $\xi_* = (a-x)/\varepsilon$ - примежеві змінні (розтяги). Тут функції типу примежевого шару $\Pi_k^{(1)}(x, \eta)$ в околі сторони $y=0$ призначені для усунення нев'язки, яка вноситься у граничні умови на цій стороні регулярною частиною асимптотики, та визначаються з допомогою оператора $\partial_{\eta\eta}^2 - k^2(x, 0)$, $\eta > 0$ і граничних умов $\Pi_k^{(1)}(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0)$, $\Pi_k^{(1)}(x, \infty) = 0$. Зокрема, для $\Pi_0^{(1)}(x, \eta)$ одержано вираз:

$$\Pi_0^{(1)}(x, \eta) = -\bar{u}_0(x, 0) \exp(-k(x, 0)\eta).$$

Усі інші функції $\Pi_k^{(1)}(x, \eta)$ ($k=1, 2, \dots$) також знаходяться послідовно у явному вигляді та мають експоненціальну оцінку:

$$|\Pi_k^{(1)}(x, \eta)| \leq c \exp(-\chi\eta).$$

Таким же чином визначаються інші примежеві функції

$P_k^{(2)}(\xi, y)$, $P_k^{(3)}(x, \eta_*)$ і $P_k^{(4)}(\xi_*, y)$ відповідно в околах сторін $x=0$, $y=b$ і $x=a$ та мають аналогічні експоненціальні оцінки.

Зазначимо, що, наприклад, примежові функції $P_k^{(1)}(x, \eta)$, усуваючи нев'язку в граничній умові на стороні $y=0$, в свою чергу вносять додаткові нев'язки на сторонах $x=0$ і $x=a$, які суттєві в околах кутових точок $(0,0)$ і $(a,0)$, а далі зі зростанням y вони експоненціально прямують до нуля. Аналогічні нев'язки вносять функції $P_k^{(2)}(\xi, y)$ на сторони $y=0$ і $y=b$, функції $P_k^{(3)}(x, \eta_*)$ – на сторони $x=0$ і $x=a$ та функції $P_k^{(4)}(\xi_*, y)$ – на сторони $y=0$ і $y=b$. Для усунення таких неузгодженостей вводяться функції

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + P^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_k^{(1)}(\xi, \eta) + P_k^{(2)}(\xi, \eta_*) + P_k^{(3)}(\xi_*, \eta_*) + P_k^{(4)}(\xi_*, \eta)),$$

де $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$ – кутові функції відповідно в околах точок $(0,0)$, $(0,b)$, $(a,0)$, (a,b) .

Рівняння, наприклад, для функцій $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ отримуються із вихідного рівняння (1.1.5) (точніше, із однорідного рівняння, що відповідає (1.1.5)) стандартним способом: переходом до змінних $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, розкладом в ряд Тейлора коефіцієнта $k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta)$ в околі точки $(0,0)$ і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε в обох частинах відповідного рівняння (аналогічно для $P_k^{(2)}(\xi, \eta_*)$, $P_k^{(3)}(\xi_*, \eta_*)$, $P_k^{(4)}(\xi_*, \eta)$):

$$\begin{aligned}
P_{k\xi\xi}^{(1)} + P_{k\eta\eta}^{(1)} - k^2(0,0)P_k^{(1)} &= p_k(\xi, \eta), \xi > 0, \eta > 0, \\
P_k^{(1)}(0, \eta) &= -\Pi_k^{(1)}(0, \eta), P_k^{(1)}(\xi, 0) = -\Pi_k^{(2)}(\xi, 0), \\
P_k^{(1)}(\xi, \eta) &\rightarrow 0 \text{ при } (\xi + \eta) \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

де $p_k(\xi, \eta)$ рекурентно виражаються через функції $P_i^{(1)}(\xi, \eta)$ з номерами $i < k$, зокрема $p_0(\xi, \eta) = 0$. Розв'язки задач (1.1.6) можна поспідовно виразити в явному вигляді через функцію Гріна [93].

1.2. Асимптотичні методи розв'язання сингулярно збурених задач конвективної дифузії

1.2.1. Методика побудови асимптотичних наближень сингулярно збурених задач конвективної дифузії

Для криволінійної чотирикутної області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженої чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, розглянемо модельну сингулярно збурену задачу процесу конвективної дифузії розчинних речовин при фільтрації [19–21, 51, 68, 71, 80, 90, 100] у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t}, \tag{1.2.1}$$

$$C|_{AB} = C_*(M, t), \quad C|_{AD} = C_{**}(M, t), \quad C|_{BC} = C^{**}(M, t), \quad C|_{CD} = C^*(M, t),$$

$$C(M, 0) = C_0^0(M); \quad (1.2.2)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0,$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad (1.2.3)$$

де $C(x, y, t)$ – шукана концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x, y) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, що характеризує превалювання конвективної складової процесу над дифузійною, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $C_*(M, t)$, $C^*(M, t)$, $C_0^0(M)$, $C_{**}(M, t)$, $C^{**}(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (в тому числі і в кутових точках) області G ($G = G_z \times (0, \infty)$).

Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох граничних умов (1.2.3) на умови: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$ (Q – невідомий параметр, повна витрата), дану задачу замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $w = w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на прямокутник (об-

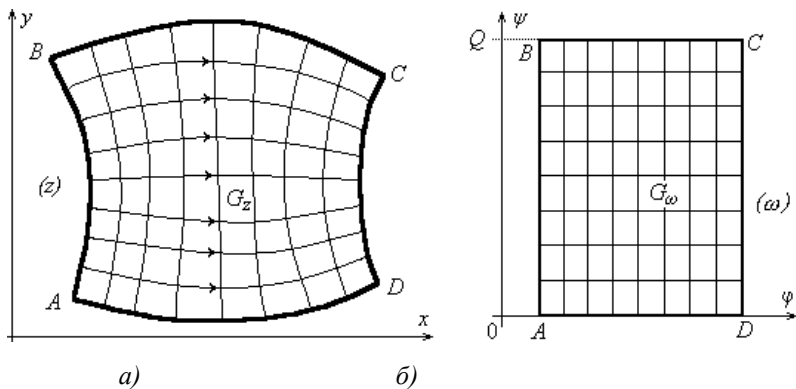


Рис. 1.1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

ласть комплексного потенціалу) $G_w = \{w: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, $\kappa=1$ (κ – коефіцієнт фільтрації) при відповідності чотирьох кутових точок (див. рис. 1.1). У роботах [40, 41] представлені обчислювальні алгоритми розв’язку такого роду задач фільтрації. Аналогічні алгоритми знаходження розв’язків фільтраційних задач для багатозв’язних областей представлені, наприклад, у роботах [44, 45].

Припустивши, що задача фільтрації (1.2.3) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв’язаною, здійснюємо заміну змінних $x=x(\varphi, \psi)$, $y=y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1.2.1) та умовах (1.2.2) і приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) [C_{\varphi\varphi} + C_{\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi) C_{\varphi} = C_t, \quad (1.2.4)$$

$$C(\varphi_*, \psi, t) = C_*(\psi, t), \quad C(\varphi^*, \psi, t) = C^*(\psi, t), \quad C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t),$$

$$C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t), \quad C(\varphi, \psi, 0) = C_0^0(\varphi, \psi),$$

де $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z)

знаходиться в процесі розв'язку задачі фільтрації.

Розв'язок C даної задачі з точністю $O(\varepsilon^2)$ знайдено у вигляді такого асимптотичного ряду [33–39, 41–50, 75–77, 85–88, 98, 104, 124]:

$$C(\varphi, \psi, t) = C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} P_i(\varphi, \eta, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \bar{P}_i(\varphi, \mu, t) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (1.2.5)$$

де R_2 – залишковий член, $C_i(\varphi, \psi, t)$, ($i = \overline{0, 1}$) – члени регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, t)$, ($i = \overline{0, 2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_z), $P_i(\varphi, \eta, t)$, $\bar{P}_i(\varphi, \mu, t)$, ($i = \overline{0, 2}$) – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$ (відповідно поправки на лініях течії BC та AD), $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = (Q - \psi) \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = \psi \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регулятивні перетворення (змінні розтягів).

В результаті підстановки (1.2.5) у (1.2.4) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження головної частини

$C_0(\varphi, \psi, t)$ розв'язку і поправки $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)C_{0\varphi} + C_{0t} = 0, \\ C_0|_{t=0} = C_0^0(\varphi, \psi), \quad C_0|_{\varphi=\varphi_*} = C_*(\psi, t), \end{cases} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)C_{1\varphi} + C_{1t} = g(\varphi, \psi, t), \\ g(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)(C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}), \\ C_1(\varphi, \psi, 0) = C_1(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Характеристичне рівняння, рівняння характеристик і загальний розв'язок задачі (1.2.6) записується у вигляді:

$$\frac{d\varphi}{v^2(\varphi, \psi)} = \frac{dt}{1}, \quad f(\varphi, \psi) - t = \rho, \quad C_0(\varphi, \psi, t) = \Phi(f(\varphi, \psi) - t),$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) d\tilde{\varphi}$, $\Phi(\square)$ – довільна диференційована функція, ρ – довільна стала. Врахувавши початкову та крайову умови, її розв'язок запишеться у вигляді:

$$C_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \\ C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де f^{-1} – функція обернена до f по змінній φ . Використовуючи метод характеристик та врахувавши, що змінна ψ у задачі (1.2.7) фігурує лише як параметр, знаходимо розв'язок $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$C_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, \\ t > f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad t \leq f(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Якщо в якості умов узгодженості функцій $C_0^0(\varphi, \psi)$ та $C_*(\varphi, t)$ виконується лише умова неперервності $C_0^0(0, \psi) = C_*(0, t)$, то функція $C_0(\varphi, \psi, t)$ (не кажучи вже про $C_1(\varphi, \psi, t)$) не буде достатньо гладкою вздовж характеристик $t = f(\varphi, \psi)$ ($\forall \varphi \in (-\varphi_*, \varphi^*)$). А тому функція (1.2.5) не задовольнить рівняння (1.2.6) в цій області $\{(\varphi, \psi, t) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q, t > 0\}$.

З метою згладження цієї негладкості вздовж характеристики $t = f(\varphi, \psi)$ поступають таким чином. Спочатку замість цієї негладкої функції $C_0(\varphi, \psi, t)$ розглядають її згладження:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) = & 2^{-1}(1 - D(\theta))C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi) + \\ & + 2^{-1}(1 + D(\theta))C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)), \end{aligned}$$

де $D(\theta) = \int_0^\theta e^{-\tau^2} d\tau, \quad \theta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(t - f(\varphi, \psi))$.

Як неважко переконатись, функція $C \approx \tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}(\varphi, \psi, t)$ задовольняє рівняння (1.2.4) з вказаною точністю $O(\varepsilon^2)$, але порушує виконання початкової та граничних умов, які задовольнялись функцією $C_0(\varphi, \psi, t)$. З метою усунення

нев'язки у початкових та граничних умовах будують функцію:
 $S(\varphi, \psi, t) = S_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon S_1(\varphi, \psi, t)$ таким чином, щоб функція
 $C = \tilde{C}_0 + S$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла наступне рівняння та
 початкову і граничну умови:

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left[(\tilde{C}_0 + S)_{\varphi\varphi} + (\tilde{C}_0 + S)_{\psi\psi} \right] - v^2(\varphi, \psi) (\tilde{C}_0 + S)_{\varphi\varphi} = (\tilde{C}_0 + S)_t + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{C}_0 + S \Big|_{t=0, \varphi>0} = C_0^0(\varphi, \psi) + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{C}_0 + S \Big|_{\varphi=\varphi_*, t \geq 0} = C_*(\psi, t) + O(\varepsilon^2). \end{array} \right.$$

Перейшовши в даних співвідношеннях від змінних (φ, ψ, t) до
 змінних (ζ, ψ, t) за формулами $\zeta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(t - f(\varphi, \psi))$,
 $\varphi = f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi)$ та розклавши функцію $v^2(\varphi, \psi) =$
 $= v^2(f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi), \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\zeta = 0$, отримано для
 знаходження функцій S_0 і S_1 такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_0}{\partial t} - a(\psi, t) \frac{\partial^2 C_0}{\partial \zeta^2} = 0, \\ S_0 \Big|_{t=0, \zeta \leq 0} = 0, \quad S_0 \Big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta \leq 0} = 0, \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} = a(\psi, t) \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial \zeta^2} + b(\psi)(1 - \zeta^2)e^{-\zeta^2} \right), \\ S_1 \Big|_{t=0, \zeta \leq 0} = \zeta \frac{b(\psi)}{2} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-r^2} dr, \quad S_1 \Big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta \leq 0} = \zeta \frac{b(\psi)}{2} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-r^2} dr, \end{array} \right. \quad (1.2.8)$$

де

$$\begin{cases} b(\psi) = 2\sqrt{\pi^{-1}} \left(v^2(0, \psi) C_0^0(\varphi_*, \psi)_{,\psi\psi} + C_*(\varphi, 0)_t \right), \\ a(\psi, t) = v^2(f^{-1}(t, \psi), \psi) + v^2(f^{-1}(t, \psi), \psi) (v'_\psi(f^{-1}(t - \sqrt{\varepsilon}\zeta, \psi), \psi))^2. \end{cases}$$

Очевидно, що $S_0(\varphi, \psi, t) = 0$. Замінивши в другій із задач (1.2.8) крайову умову на промені $\{t = \sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta > 0\}$ на крайову умову на промені $\{t = 0, \zeta > 0\}$ матимемо з точністю $O(\varepsilon^2)$

$$S_1(\zeta, \psi, t) = 2^{-1} b(\psi) \left(\zeta \int_{\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}}^{\zeta} e^{-s^2} ds - \sqrt{t\varepsilon} e^{-\frac{\zeta^2}{4t}} \right).$$

Для того, щоб задовольнити другу із крайових умов будуватиметься зовнішня примежова функція $P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2$ в околі $\varphi = \varphi_*$ таким чином, щоб функція $C(\varphi, \psi, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг) $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi_* - \varphi)$, $\varphi = \varphi_* - \varepsilon\xi$.

Врахувавши співвідношення: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, перепишемо оператор $LP = \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \Delta P - v^2(\varphi, \psi) P_\varphi - P_t$ у вигляді (у змінних (ξ, ψ, t)): $LP = v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon, \psi) \left[\left[\varepsilon^{-1} P_{\xi\xi} + \varepsilon P_{\psi\psi} \right] + \varepsilon^{-1} P_\xi \right] - P_t$.

Розкладемо $v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_*$:

$$v^2(\varphi_* - \varepsilon\xi, \psi) = v^2(\varphi_*, \psi) + 2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)(-\varepsilon\xi) + (v'^2(\varphi_*, \psi) +$$

$$+v(\varphi_*, \psi)v''(\varphi_*, \psi)(\varepsilon\xi)^2 + \dots$$

Прирівняємо в рівності $L(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon(v^2(\varphi_*, \psi) - \alpha\xi\varepsilon + \dots)(\varepsilon^{-2}P_{\xi\xi} + P_{\psi\psi}) + \\ + \varepsilon^{-1}(v^2(\varphi_*, \psi) - \alpha\xi\varepsilon + \dots)P_\xi = P_t, \end{aligned}$$

де $\alpha = -2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)$. Тоді для визначення P_0 , P_1 і P_2 одержимо такі рівняння із відповідними умовами:

$$\begin{cases} P_{0\xi\xi} + P_{0\xi} = 0, \\ P_0(0, \psi, t) = C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t), P_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{1\xi\xi} + P_{1\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi)f_1(\xi, \psi, t), f_1(\xi, \psi, t) = P_{0t}(\xi, \psi, t), \\ P_1(\varphi_*, \psi, t) = -C_1(\varphi_*, \psi, t), P_1(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\ P_{2\xi\xi} + P_{2\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi)f_2(\xi, \psi, t), \\ f_2(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi)\alpha\xi P_{0t}(\xi, \psi, t) + P_{1t}(\xi, \psi, t) - \\ - v^2(\varphi_*, \psi)P_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t), \\ P_2(\varphi_*, \psi, t) = 0, P_2(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} P_0(\xi, \psi, t) &= (C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t))e^{-\xi}, \\ P_1(\xi, \psi, t) &= -C_1(\varphi_*, \psi, t)e^{-\xi} - v^{-2}(\varphi_*, \psi)\xi P_{0t}(\xi, \psi, t), \end{aligned}$$

$$P_2(\xi, \psi, t) = -((M_1 + M_2)\xi - M_2\xi^2/2)e^{-\xi},$$

де

$$M_1 = -(v^{-2}(\varphi_*, \psi)C_{1t}(\varphi_*, \psi, t) + (C_{\psi\psi}^*(\psi, t) - C_{0\psi\psi}(\varphi_*, \psi, t))),$$

$$M_2 = v^{-4}(\varphi_*, \psi)\alpha(C_t^*(\psi, t) - C_{0t}(\varphi_*, \psi, t)) - v^{-4}(\varphi_*, \psi)(C_{tt}^*(\psi, t) - C_{0tt}(\varphi_*, \psi, t)).$$

З метою задовольнити умову $C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t)$, будеться зовнішня примежова функція $P = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1$ таким чином, щоб функція $P(\varphi, \psi, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводять заміну (розтяг) $\eta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}\psi$, $\psi = \eta\sqrt{\varepsilon}$. Врахувавши ці співвідношення, а також спів-

відношення: $\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$, перепишемо оператор

$$LP = \varepsilon v^2(\varphi, \psi)\Delta P - v^2(\varphi, \psi)P_\varphi - P_t \quad \text{у вигляді змінних } (\varphi, \eta, t):$$

$$LP = \varepsilon v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta) [P_\varphi + \varepsilon^{-1}P_{\eta\eta}] - v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)P_\varphi - P_t.$$

Розклавши $v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi=0$ (за степенями $\sqrt{\varepsilon}\eta$) і прирівнявши в рівності $L(P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , матимемо такі рівняння для визначення P_0 , $P_{1/2}$, P_1 .

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{0\eta\eta} + P_{0\varphi}) = P_{0t}, \\ P_0(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t) - W(\varphi, 0, t), \quad P_0(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{1/2\eta\eta} + P_{1/2\varphi}) = K(\varphi, \eta, t), \\ P_{1/2}(\varphi, 0, t) = 0, P_{1/2}(\varphi, 0, t) \rightarrow 0, \\ \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) = B(\varphi, \eta, t), \\ P_1(\varphi, 0, t) = 0, P_1(\varphi, 0, t) \rightarrow 0, \\ \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} W(\varphi, \psi, t) &= C_0 + \varepsilon C_1 + \Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \varepsilon^2 \Pi_2, \\ K(\varphi, \eta, t) &= P_{1t} - 2\eta v'(\varphi, 0, t) v^{-1}(\varphi, 0, t) P_{0t}, \\ B(\varphi, \eta, t) &= P_{2t} - 2\eta v'(\varphi, 0) \vartheta(\varphi, 0) (P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) - \\ &- v^2(\varphi, 0) P_{0\varphi\varphi} - \frac{v'^2(\varphi, 0) + v(\varphi, 0) v''(\varphi, 0)}{v^2(\varphi, 0)} \eta^2 P_{0t}. \end{aligned}$$

Щоб задовольнити крайову умову $C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t)$, побудуємо зовнішню примежову функцію $\bar{P} = \bar{P}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{P}_{1/2} + \varepsilon \bar{P}_1$ аналогічно до того, як це було зроблено для примежової функції P (для цього вводимо заміну $\mu = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(Q - \psi)$, $\psi = Q - \mu \sqrt{\varepsilon}$).

У випадку недостатньої узгодженості граничних умов вздовж ребер та кутових точок паралелепіпеда $\{(\varphi, \psi, t): \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q, 0 < t < \infty\}$ А.П. Власюком [77] побудовані відповідні реброві та кутові функції. Звичайна погранфункція задачі (1.2.4) $\Pi(\xi, \psi, t)$, яка забезпечує виконання граничної умови на $\varphi = \varphi^*$, сама вносить нев'язки на границі $t=0$, $\psi=0$, $\psi=Q$. Погранфункції

$P(\varphi, \eta, \tau)$ та $\bar{P}(\varphi, \mu, t)$, які слугують для виконання граничних умов на $\psi=0$, $\psi=Q$, вносять неузгодженість в граничну умову на $\varphi=\varphi^*$. Для ліквідації неузгодженостей, внесених погранфункцією $\Pi(\xi, \psi, t)$ на границю $t=0$ слугує кутова погранфункція $L^0(\xi, \psi, \tau)$, яка діє в околі ребра $\{\varphi=\varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q\}$. Для ліквідації неузгодженостей внесених погранфункціями $\Pi(\xi, \psi, t)$, $P(\varphi, \eta, \tau)$ та $\Pi(\xi, \psi, t)$, $\bar{P}(\varphi, \mu, t)$ в околі ребер $\{\varphi=\varphi^*, \psi=0, t \geq 0\}$ та $\{\varphi=\varphi^*, \psi=Q, t \geq 0\}$, слугують кутові погранфункції $L^1(\xi, \sigma_0, t)$, $L^2(\xi, \sigma_1, t)$, які діють відповідно в околах цих ребер. Неузгодженості, внесені кутовими погранфункціями $L^0(\xi, \psi, \tau)$ та $L^1(\xi, \sigma_0, t)$, $L^2(\xi, \sigma_1, t)$ в околах кутових точок $C(\varphi^*, 0, 0)$ і $C(\varphi^*, Q, 0)$, ліквідують кутові погранфункції $\Gamma^0(\xi, \sigma_0, \tau)$ і $\Gamma^1(\xi, \sigma_1, \tau)$, які, відповідно, діють в околах цих точок. Звідси асимптотичний розклад задачі (1.2.4) в цьому випадку шукаємо у вигляді [33]:

$$C(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = (C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t)) + \Pi(\xi, \psi, t) + \\ P(\varphi, \eta, t) + \bar{P}(\varphi, \mu, t) + L^0(\xi, \psi, \tau) + L^1(\xi, \sigma_0, t) + L^2(\xi, \sigma_1, t) + \\ + \Gamma^0(\xi, \sigma_0, \tau) + \Gamma^1(\xi, \sigma_1, \tau) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon),$$

де $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$, $\sigma_0 = \sqrt{\varepsilon^{-1}}\eta = \varepsilon^{-1}\psi$, $\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon^{-1}}\mu = (Q - \psi)\varepsilon^{-1}$, $\tau = \varepsilon^{-1}t$ – пограншарові змінні.

Як приклад, наведемо алгоритм знаходження кутової погранфункції $L^1(\xi, \sigma_0, t) = L_0^1(\xi, \sigma_0, t) + \varepsilon L_1^1(\xi, \sigma_0, t) + \varepsilon^2 L_2^1(\xi, \sigma_0, t)$.

Спочатку робимо заміну змінних: $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi^* - \varphi)$, $\sigma_0 = \varepsilon^{-1}\psi$.

Потім розкладемо функцію $v^2(\varphi, \psi)$ в ряд за степенями ε :

$$v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \varepsilon\sigma_0) = v^2(\varphi^*, 0) + \varepsilon(-\xi v_{\xi}^2(\varphi^*, 0) + \sigma_0 v_{\sigma_0}^2(\varphi^*, 0)) + \\ + \varepsilon^2(\xi^2 v_{\xi\xi}^2(\varphi^*, 0) + \sigma_0^2 v_{\sigma_0\sigma_0}^2(\varphi^*, 0)) + \dots$$

Підставимо в рівняння (1.2.4) функцію $L^1(\xi, \sigma_0, t)$ та розклад $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \varepsilon\sigma_0)$ в ряд за степенями ε . Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо такі задачі для знаходження функції $L_i^1(\xi, \sigma_0, t)$, $i = \overline{0, 2}$:

$$\begin{cases} L_{i\xi\xi}^1 + L_{i\sigma_0\sigma_0}^1 + L_{i\xi}^1 = p_i, & L_i^1(\xi, \sigma_0, t) \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{\xi^2 + \sigma_0^2} \rightarrow \infty, \\ L_i^1(\varphi^*, \sigma_0, t) = -P_i(\varphi^*, \sigma_0, t), & L_i^1(\xi, 0, t) = -\Pi_i(\xi, 0, t), \end{cases}$$

де $p_0 = 0$, $p_1 = v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1$, $p_2 = v^{-2}(\varphi^*, 0)(L_{1t}^1 - v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1)$.

Для знаходження R_2 маємо задачу:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi)[R_{2\varphi\varphi} + R_{2\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi)R_{2\varphi} = R_{2t} + \varepsilon^3 g_1(\varphi, \psi, t),$$

$$R_2(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = \\ = R_2(\varphi, \psi, Q, \varepsilon) = R_2(\varphi, 0, t, \varepsilon) = 0,$$

де $g_1(\varphi, \psi, t)$ – функція, що виражається через відомі члени ряду (1.2.5).

На підставі принципу максимуму для параболічних рівнянь переконуємось у тому, що $|R_2| = O(\varepsilon^2)$.

1.2.2. Особливості обчислювальних аспектів асимптотичних наближень підвищеної точності сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія”

Представлені вище асимптотичні розвинення розв’язків сингулярно збурених модельних задач конвективної дифузії побудовані нами з точністю $O(\varepsilon^2)$ за формально сформульованих так званих сильної гладкості та відповідної узгодженості початкової та граничних умов. На сьогодні є важливим питання про підсилення слабких умов гладкості і узгодженості з метою підвищення точності наближення розв’язків.

З метою зручності подальших викладок розглянемо поставлену раніше модельну задачу у якомога простішому варіанті:

$$\begin{cases} \varepsilon V^2(x)U_{xx} - V^2(x)U_x = U_t, & (x,t) \in G = (0,\infty) \times (0,\infty), \\ U(0,t) = U_0^*(t), 0 \leq t < \infty; & U(x,0) = U_*^0(x), 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (1.2.9)$$

де $U_0^*(t)$ та $U_*^0(x)$ – обмежені, достатньо гладкі та узгоджені (спряжені) у точці $(0,0)$ функції.

Розв’язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді:

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + \dots + \varepsilon^n U_n(x,t) + R(x,t,\varepsilon).$$

Знайдемо умови, при яких дана функція буде двічі неперервно диференційованою: а) в усій області G ; б) всюди в G за винятком деякого околу характеристики $t = f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v^2(\tilde{x})}$.

Розв'язок $U_0(x, t)$ відповідної виродженої задачі

$$U_0(x, t) = \begin{cases} U_0^*(f^{-1}(f(x)-t)), & t \leq f(x), \\ U_*^0(t-f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

де f^{-1} – функція обернена до функції f .

Очевидно, що для неперервності $U_0(x, t)$ необхідно вимагати неперервності функцій $U_0^*(x)$ і $U_*^0(t)$ та рівності їх вздовж характеристики $t=f(x)$, тобто:

$$U_0^*(0) = U_*^0(0). \quad (1.2.10)$$

Враховуючи нескінченну диференційованість функції $v^2(\tilde{x})$ та формули

$$U_{0x}(x, t) = \begin{cases} U_0^{*'}(f^{-1}(f(x)-t)) \frac{v^2(f^{-1}(f(x)-t))}{v^2(x)}, & t \leq f(x), \\ U_*^{0'}(t-f(x))(-v^{-2}(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

$$U_{0t}(x, t) = \begin{cases} -v^2(f^{-1}(f(x)-t))U_0^{*'}(f^{-1}(f(x)-t)), & t \leq f(x), \\ U_*^{0'}(t-f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

$$U_{0xx}(x, t) = \begin{cases} U_0^{*''}(f^{-1}(f(x)-t)) \frac{v^4(f^{-1}(f(x)-t))}{v^4(x)} + \frac{U_0^{*'}(p)}{v^2(x)} (2v(p)v'(p)v^2(p) - v^2(p)v(x)v'(x)), & t \leq f(x), \quad p = f^{-1}(f(x)-t), \\ U_*^{0'}(t-f(x)) \left(-\frac{1}{v^2(x)} \right) + U_*^{0'}(t-f(x)) \frac{2v(x)v'(x)}{v^4(x)}, & t > f(x), \end{cases}$$

для неперервності перших похідних функції $U_0(x, t)$ приходимо до наступних умов:

$$U_*^0(t), U_0^*(x) \in C_{(0, \infty)}^{(1)}; U_*^{0'}(0) = -v^2(0)U_0^{*'}(0), \quad (1.2.11)$$

а для неперервності $U_{0xx}(x, t)$ –

$$U_*^0(t), U_0^*(x) \in C_{(0, \infty)}^{(2)}; U_*^{0''}(0) = v^2(0)(v^2(0)U_*^{0''}(0))'. \quad (1.2.12)$$

Аналогічно приходимо до висновку, що для неперервності $U_{0xxx}(x, t)$ та $U_{0xxxx}(x, t)$ відповідно необхідно вимагати:

$$U_*^0(t), U_0^*(x) \in C_{(0, \infty)}^{(3)}; U_*^{0'''(0)} = -v^2(0)(v^2(0)(v^2(0)U_*^{0'''}(0))'), \quad (1.2.13)$$

$$U_*^0(t), U_0^*(x) \in C_{(0, \infty)}^{(4)}; U_*^{0''''(0)} = v^2(0)(v^2(0)(v^2(0)(v^2(0)U_*^{0''''(0)}))'). \quad (1.2.14)$$

Тепер легко бачити, що для неперервності n -тої похідної функції $U_0(x, t)$ за змінною x необхідними є умови:

$$U_*^0(t), U_0^*(x) \in C_{(0, \infty)}^{(n)}; U_*^{0^{(n)}}(0) = (-1)^n v^2(0)(U_0^{*^{(n-1)}}(0))',$$

$$(U_*^{0'}(0) = -v^2(0)U_0^{*'}(0), n=1, 2, \dots).$$

Зазначимо, що умови (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) забезпечують неперервність функції $U_1(x, t)$. А для існування та неперервності першої похідної від даної функції, тобто:

$$U_{1x}(x,t) = \begin{cases} \int_0^t g'_x(f^{-1}(f(x)+\tilde{t}-t), \tilde{t}) \frac{v^2(f^{-1}(f(x)+\tilde{t}-t))}{v^2(x)} d\tilde{t}, & t \leq f(x), \\ \frac{1}{v^2(x)} g'_x(\tilde{x}, f(\tilde{x})-f(x)+t) - \\ - \int_0^t \frac{g'_x(\tilde{x}, (f(\tilde{x})-f(x)+t), \tilde{t})}{v^2(\tilde{x})} \frac{v^2(\tilde{x})}{v^2(x)} d\tilde{x}, & t > f(x), \end{cases}$$

вимагатимемо неперервність першої похідної (за змінною x) функції $g(x,t)$ (що рівносильно вимозі неперервності третьої похідної функції $U_0(x,t)$). Отже, знову приходимо до умови (1.2.13). Аналогічно, для неперервності другої похідної функції $U_1(x,t)$ приходимо до умов (1.2.14).

Таким чином, із вище описаного, а також із принципу максимуму для параболічних задач справедливою є теорема.

Теорема 1.1. *Якщо функції $U_*^0(x)$, $U_0^*(t)$ задовольняють умови (1.2.10) – (1.2.14), то розв'язок задачі (1.2.9) знаходиться з точністю $O(\varepsilon^2)$,*

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + O(\varepsilon^2).$$

Припустимо, що функції $U_*^0(x)$, $U_0^*(t)$ є чотири рази неперервно диференційованими, а в кутовій точці виконуються умови

$$U_*^0(0) = U_0^*(0); U_*^{0'}(0) = -v^2(0)U_0^{*'}(0); U_*^{0m}(0) = v^2(0)(v^2(0)U_0^{*'}(0))'. \quad (1.2.15)$$

Тоді функція $U_1(x,t)$ є неперервною в G і диференційованою всю-

ди в G за винятком деякого околу вздовж характеристики $t=f(x)$ (тобто поверхня $U=U_1(x,t)$ над даною характеристикою, взагалі кажучи, має “рубець”). Побудуємо згладження $\tilde{U}_1(x,t)$ цієї функції аналогічно [33–36], а саме:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(x,t) = & \frac{1}{2}(1-\Phi(\theta)) \int_0^t g(f^{-1}(f(x)+\tilde{t}-t), \tilde{t}) d\tilde{t} + \\ & + \frac{1}{2}(1+\Phi(\theta)) \int_0^x \frac{1}{v^2(\tilde{x})} g(\tilde{x}, f(\tilde{x})-f(x)+t) d\tilde{x}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Phi(\theta) = \int_0^\theta e^{-\tau^2} d\tau, \quad \theta = \frac{t-f(x,t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Проблема нев'язки, внесеної у початкову та граничну умови внаслідок згладження функції $U_1(x,t)$, може бути усунена шляхом побудови функції $S(x,t) = \varepsilon^{3/2} \cdot S^*(x,t)$, аналогічно п. 1.2.1.

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема 1.2. *Якщо функції $U_*^0(x)$, $U_0^*(t)$ є чотири рази неперервно диференційованими і задовольняють умови (1.2.15), то*

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon \tilde{U}_1(x,t) + \varepsilon^{3/2} \cdot S^*(x,t) + O(\varepsilon^2).$$

Далі наведемо результати числових експериментів одержаних на основі виведених вище формул.

1. В області G_ε обмеженій ортогональними в точках перетину дугами кіл $(x+a_0)^2 + y^2 = r_0^2$, $(x+a_*)^2 + y^2 = r_*^2$, $x^2 + y^2 = r_0^{*2}$ розглянемо

ідеальне поле, породжене умовами $\phi|_{(x+a_0)^2+y^2=r_0^2}=0$, $\phi|_{(x+a_*)^2+y^2=r_*^2}=1$, $\psi|_{y=-\sqrt{r_0^2-x^2}}=0$, $\psi|_{y=\sqrt{r_0^2-x^2}}=Q$. Використовуючи розроблений метод розв'язання крайових задач на конформні та квазіконформні відображення нами побудовано динамічну сітку, знайдено величини Q та ν . Результати розрахунків при $a_0=-2.36$, $a_*=2.36$, $r_0=0.81$, $r_*=1.6$, $r_0^*=4$ зображені у табл. 1.1 і на рис. 1.2 та 1.3.

На даному фільтраційному фоні розглянемо тепер процес конвективної дифузії, що у відповідній області комплексного потенціалу G_w .

Таблиця 1.1. Результати розрахунків фільтрації.

№	m × n	k_M	k_Q	k_D	Q	ε_*	$O(h ^2)$
1	22 × 22	765	141	374	1.16858	2.3E-4	5.4E-3

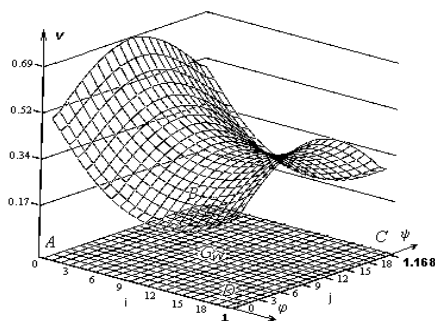
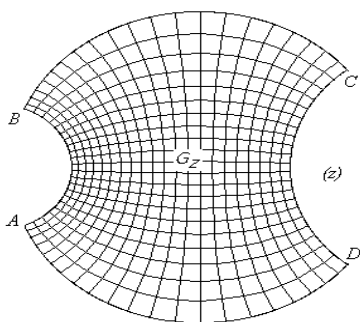


Рис. 1.2. Гідродинамічна сітка в області G_z при розбитті 22×22 .

Рис. 1.3. Величина швидкості в області G_z при розбитті 22×22 .

Приклад 1. На рис. 1.4 та 1.5 зображено результати числових розрахунків $\tilde{U}_0(\varphi, \psi) = \exp(-\varphi)$, $\tilde{U}_1(\psi, t) = 1$, $\tilde{U}_2(\psi, t) = \exp(-(1+t))$, $\tilde{U}_3(\varphi, t) = \exp(-x(1+t))$, $\tilde{U}_4(\varphi, t) = \exp(-x(1+t))$: розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж ліній течії $\psi = 0.334$, $\psi = 0.556$ в моменти часу $t = 0$, $t = 1.6$, $t = 5.57$, $t = 16.73$ зображено на рис. 1.4 (криві 1-4 відповідно); розподіл значень функції c в моменти часу $t = 1.6$, $t = 5.57$ вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi = 0$, $\varphi = 0.476$, $\varphi = 0.714$, $\varphi = 1$ зображено на рис. 1.5 (криві 1-4 відповідно).

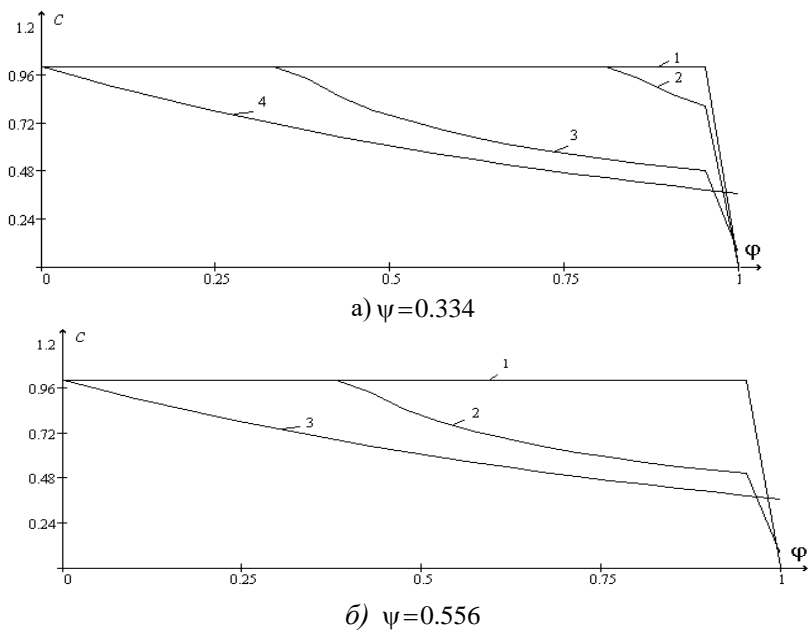
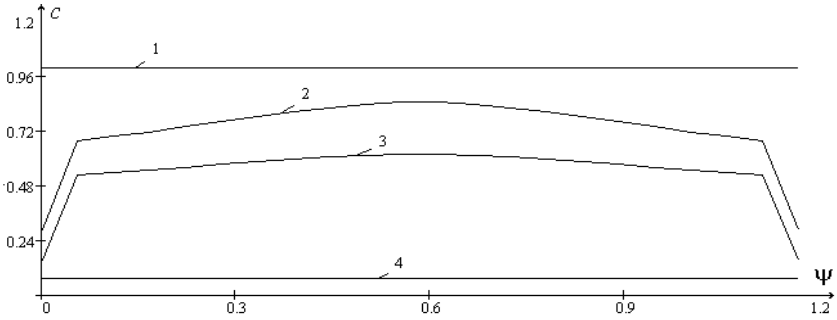
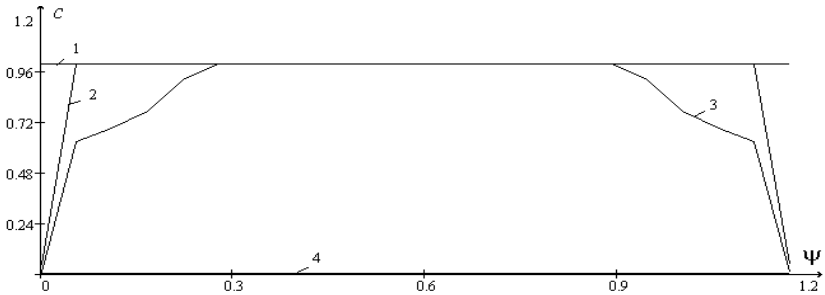


Рис. 1.4. Розподіл величини концентрації вздовж ліній течії.



а) $t=1.6$

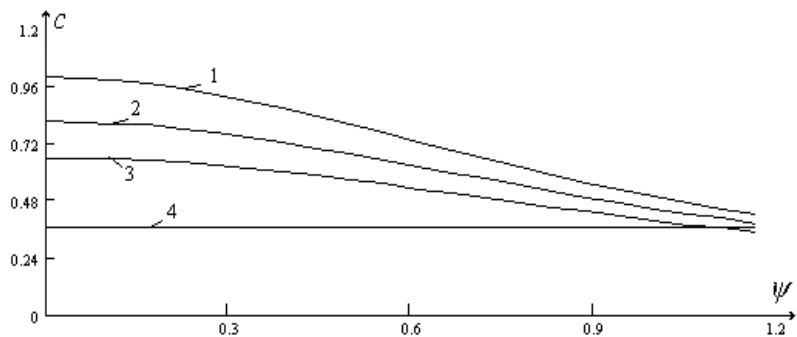


б) $t=5.57$

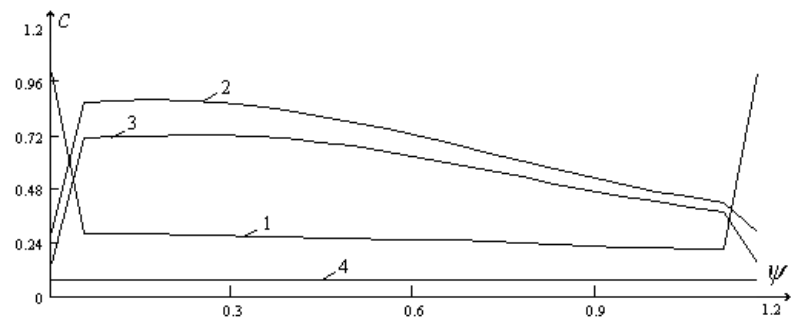
Рис. 1.5. Розподіл концентрації вздовж еквіпотенціальних ліній.

Приклад 2. На рис. 1.6 та 1.7 зображені аналогічні результати за умов $\tilde{U}_0(\varphi, \psi) = (1 + \varphi^2 + \psi^2)^{-1}$, $\tilde{U}_1(\psi, t) = (1 + t^2 + \psi^2)^{-1}$, $\tilde{U}_2(\psi, t) = (2 + t^2 + \psi^2)^{-1}$, $\tilde{U}_3(\varphi, t) = (1 + \varphi^2 + t^2)^{-1}$, $\tilde{U}_4(\varphi, t) = (2 + \varphi^2 + t^2)^{-1}$.

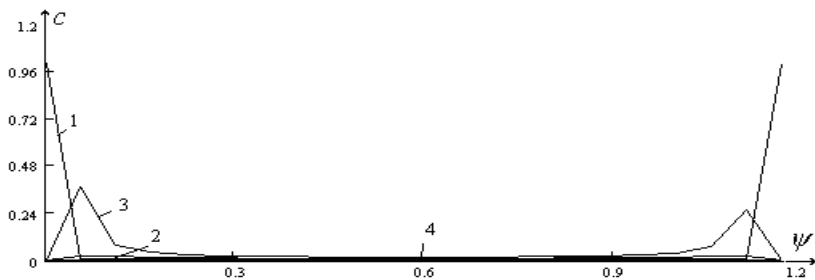
Приклад 3. На рис. 1.8 та 1.9 зображені аналогічні результати за умов $\tilde{U}_0(\varphi, \psi) = \exp(-x - y)$, $\tilde{U}_1(\psi, t) = \exp(-y + t)$, $\tilde{U}_2(\psi, t) = \exp(-(1 - t + y))$, $\tilde{U}_3(\varphi, t) = \exp(-x + t)$, $\tilde{U}_4(\varphi, t) = \exp(-x - 1.169 + t)$.



a) $t=0$

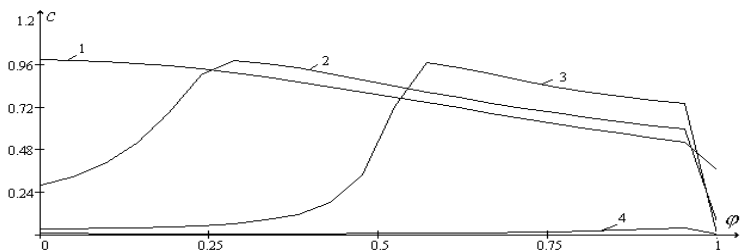


б) $t=1.6$

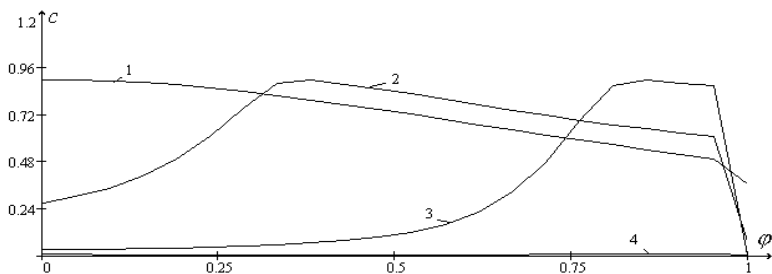


в) $t=11.6$

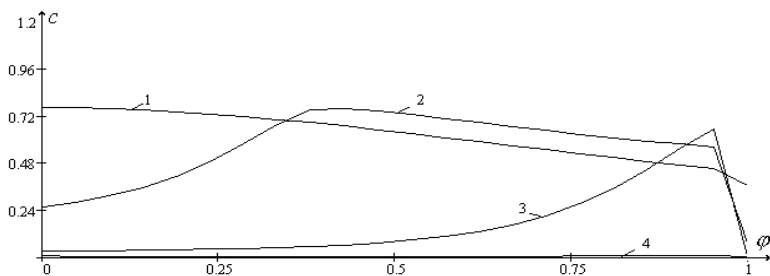
Рис. 1.6. Розподіл концентрації вздовж еквіпотенціальних ліній при $\varphi=0$, $\varphi=0.476$, $\varphi=0.714$, $\varphi=1$ (криві 1-4 відповідно).



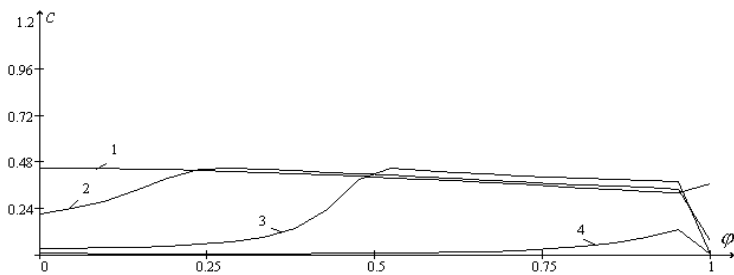
а) $\psi=0.111$



б) $\psi=0.334$

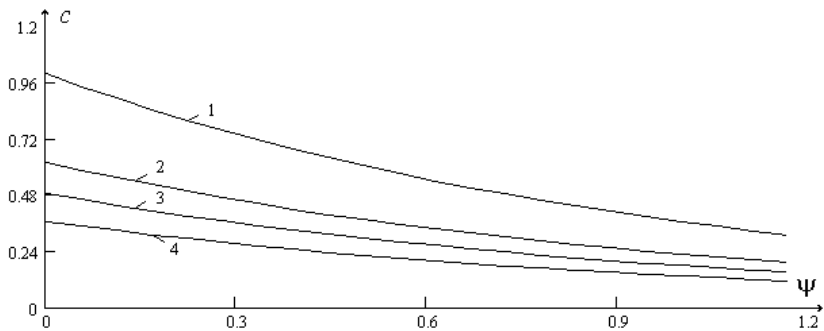


в) $\psi=0.556$

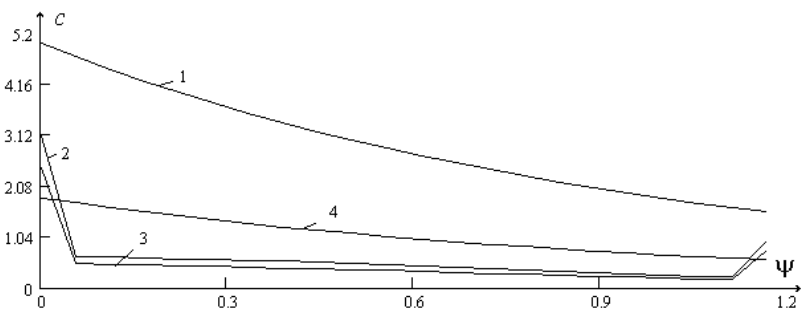


д) $\psi=1.113$

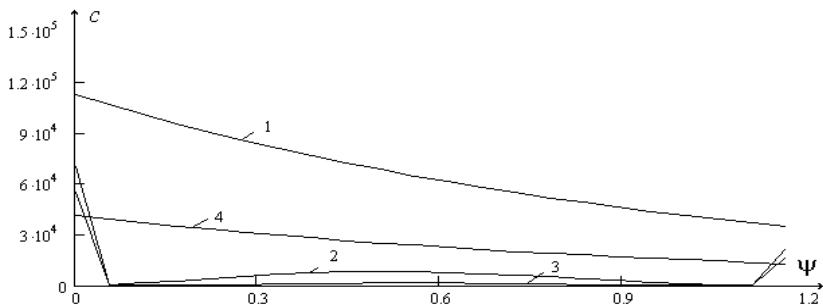
Рис. 1.7. Розподіл концентрації вздовж лінії течії при $t=0$, $t=1.6$, $t=5.57$, $t=16.73$ (криві 1-4 відповідно).



a) $t=0$



б) $t=1.6$



с) $t=11.6$

Рис. 1.8. Розподіл концентрації вздовж еквіпотенціальних ліній при $\varphi=0$, $\varphi=0.476$, $\varphi=0.714$, $\varphi=1$ (криві 1-4 відповідно).

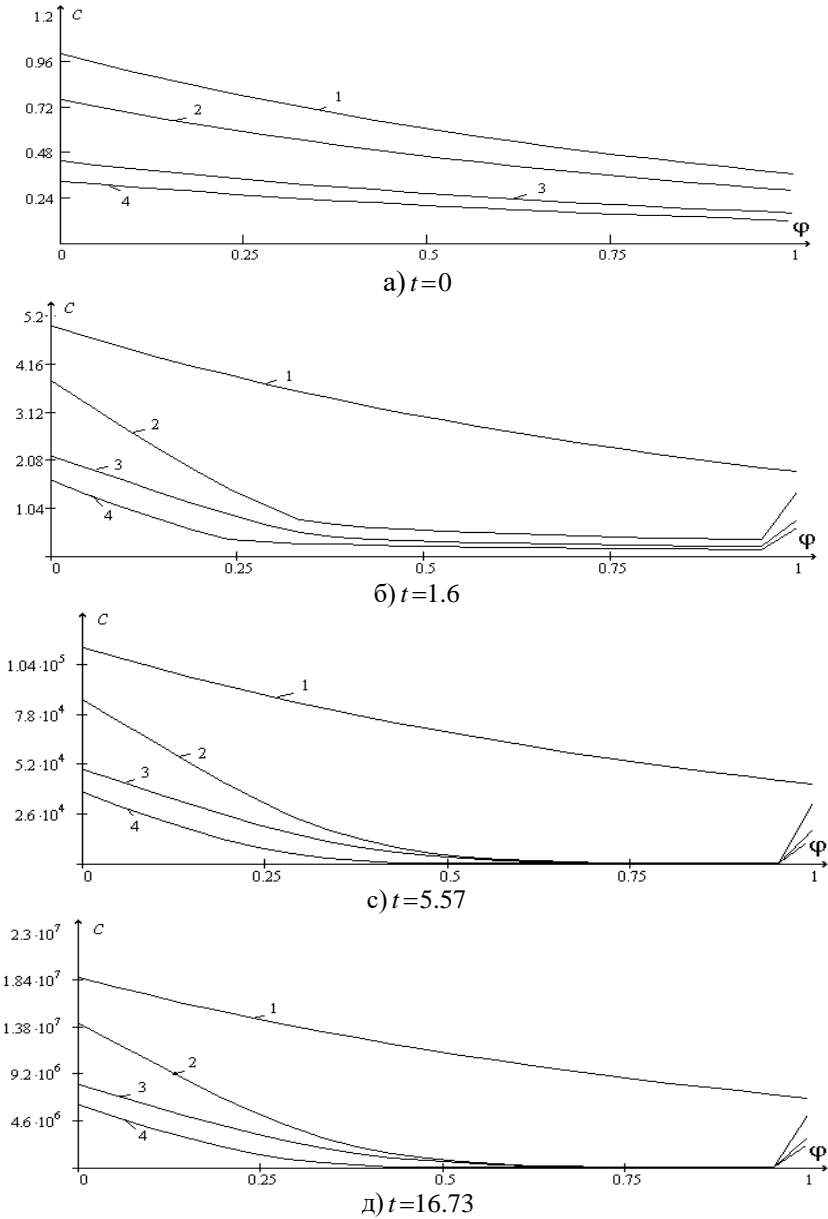


Рис. 1.9. Розподіл концентрації вздовж ліній течії при $\psi=0.111$, $\psi=0.334$, $\psi=0.556$, $\psi=1.113$ (криві 1-4 відповідно).

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”

2.1. Сингулярні збурення в моделях процесів типу “конvekція-дифузія” для чотирикутних криволінійних областей

2.1.1. Моделювання нелінійних процесів екоенергосистем з урахуванням зворотного впливу

Розглянемо сингулярно збурений процес масопереносу забруднюючої речовини при фільтрації в чотирикутній криволінійній області у випадку, коли забруднення концентрації c в даній точці (x, y) здійснює зворотній вплив на коефіцієнт дифузії через деякий момент часу τ . Зазначимо, що під сингулярно збуреним процесом ми розуміємо такий процес, в якого хоча б одна із його складових превалує над найбільш розподіленою в просторі або часі компонентою. Отже, для області $G=G_z \times (0, \infty)$, де $G_z=ABCD$ – однозв’язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими $AB=\{z=x+iy: f_1(x, y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x, y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x, y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x, y)=0\}$ (рис. 1.1, а), розглянемо наступну модельну задачу конвективної дифузії із запізненням [11, 13, 42]:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \varepsilon \cdot h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + \varepsilon \cdot h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial y} \right) - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.1.1)$$

$$c|_{AB} = c_*(M, t), \quad c|_{CD} = c^*(M, t), \quad c|_{AD} = c_{**}(M, t), \quad c|_{BC} = c^{**}(M, t),$$

$$c(M, \tilde{t}) = c_0^0(M, \tilde{t}) \quad (-\tau \leq \tilde{t} \leq 0), \quad (2.1.2)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*,$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta}|_{BC} = \frac{d\varphi}{d\eta}|_{DA} = 0, \quad Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy. \quad (2.1.3)$$

Тут M , η – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої, $c(x, y, t)$ – шукана концентрація розчинної речовини в точці (x, y) у момент часу t , $\tau > 0$ – запізнення, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , ε – малий параметр, $h, c_*, c^*, c_{**}, c^{**}, c_0^0$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема в кутових точках) області G . Крім цього вважаємо, що функція $c_0^0(\varphi, \psi, t)$ при $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $c = c(x, y, t)$ при $t = \tau n$ ($n=1, 2, \dots$) [33].

Припустимо, що задача (2.1.3), шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_w = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), ε

розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$.

Тоді, здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi, \psi)$, $y=y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (2.1.1) та умовах (2.1.2), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left((1 + \varepsilon h(c(\varphi, \psi, t - \tau))) v^2(\varphi, \psi) \cdot (c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) + \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \times \right. \\ & \quad \left. \times (c_{\varphi} h_{\varphi} + c_{\psi} h_{\psi}) \right) - v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{\varphi} = c_t, \\ & c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad c(\varphi, 0, t) = c_{**}(\varphi, t), \\ & c(\varphi, Q, t) = c^{**}(\varphi, t), \quad c(\varphi, \psi, \tilde{t}) = c_0^0(\varphi, \psi, \tilde{t}), \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Задачу із запізненням τ (2.1.4) на кожному із часових проміжків $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n=1, 2, \dots$ зведемо до наступних задач без запізнення:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left((1 + \varepsilon h_{n\tau}) \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot (c_{\varphi\varphi}^{[n]} + c_{\psi\psi}^{[n]}) + \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \times \right. \\ & \quad \left. \times (c_{\varphi}^{[n]} h_{n\tau\varphi} + c_{\psi}^{[n]} h_{n\tau\psi}) \right) - v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{\varphi}^{[n]} = c_t^{[n]}, \\ & c^{[n]}(\varphi_*, \psi, t) = c_*^{[n]}(\psi, t), \quad c^{[n]}(\varphi^*, \psi, t) = c_*^{[n]}(\psi, t), \\ & c^{[n]}(\varphi, 0, t) = c_{**}^{[n]}(\varphi, t), \quad c^{[n]}(\varphi, Q, t) = c^{**[n]}(\varphi, t), \\ & c^{[n]}(\varphi, \psi, (n-1)\tau) = w_n(\varphi, \psi, (n-1)\tau), \quad h_{n\tau}(\varphi, \psi, t) = \\ & = h(c^{[n]}(\varphi, \psi, t - \tau)) = h(c^{[n-1]}(\varphi, \psi, t - \tau)) = w_n(\varphi, \psi, t - \tau), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

де $w_n(\varphi, \psi, t) = c^{[n-1]}(\varphi, \psi, t)$, $c^{[0]}(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, 0)$, $n = \overline{1, \infty}$,

$t \in [n\tau, (n+1)\tau]$.

Розв'язок задач (2.1.5) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$c^{[n]}(\varphi, \psi, t) = (c_0^{[n]}(\varphi, \psi, t) + c_1^{[n]}(\varphi, \psi, t)\varepsilon) + \sum_{i=0}^2 \pi_i^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)\varepsilon^i + \\ + \sum_{i=0}^2 \tilde{\pi}_i^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, t)\varepsilon^{i/2} + \sum_{i=0}^2 \tilde{\tilde{\pi}}_i^{[n]}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, t)\varepsilon^{i/2} + R^{[n]}(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.1.6)$$

де $R^{[n]}(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – залишковий член, $c_i^{[n]}(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, 1}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $c_0^{[n]}$ – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $c_1^{[n]}$ – поправка, що враховує вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки); $\pi_i^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)$ – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\tilde{\pi}_i^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, t)$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i^{[n]}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, t)$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень” (c^* , c_{**} , c^{**}), $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні регуляризувачі перетворення.

Підставивши (2.1.6) в (2.1.5) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання, аналогічно до [33–36] для знаходження функцій $c_0^{[n]}$, $c_1^{[n]}$ приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_0^{[n]}_{\varphi} + c_0^{[n]}_t = 0, & c_0^{[n]}(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \\ c_0^{[n]}(\varphi, \psi, (n-1)\tau) = w_n(\varphi, \psi, (n-1)\tau) = \bar{w}_n(\varphi, \psi), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot c_1^{[n]}_{\varphi} + c_1^{[n]}_t = v^2(\varphi, \psi) \cdot (c_0^{[n]}_{\varphi\varphi} + c_0^{[n]}_{\psi\psi}), \\ c_1^{[n]}(\varphi, \psi, 0) = 0, & c_1^{[n]}(\varphi_*, \psi, t) = 0. \end{cases}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0^{[n]}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \bar{w}_n(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$c_1^{[n]}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g^{[n]}(s, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(s, \psi))}{v^2(s, \psi)} ds, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_{(n-1)\tau}^t g^{[n]}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$ від точки $(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатно визначена), $g^{[n]}(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \times$

$$\times \left(\frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial \psi^2} \right).$$

Функції типу пограншару [46 – 48] $\pi^{[n]} = \sum_{i=0}^2 \pi_i^{[n]} \varepsilon^i$ призначені

для усунення нев'язок, внесених побудованою регулярною частиною $c^{[n]} = \sum_{i=0}^1 c_i^{[n]} \varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку

$\varphi = \varphi^*$ (тобто, повинна виконуватись умова:

$(c^{[n]} + \pi^{[n]})|_{\varphi=\varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^2)$). Для їх знаходження маємо задачу:

$$\pi_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]} + \pi_{i\tilde{\varphi}}^{[n]} = d_i(\tilde{\varphi}, \psi, t); \quad \pi_i^{[n]} \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, \quad \pi_i^{[n]}(0, \psi, t) = p_i(\psi, t), \quad i = \overline{0, 2},$$

де

$$\begin{aligned} d_0(\tilde{\varphi}, \psi, t) &= 0, \quad d_1(\tilde{\varphi}, \psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot (\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) \times \\ &\quad \times h_{n\tau}(\varphi^*, \psi, t) \cdot \pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)), \\ d_2(\tilde{\varphi}, \psi, t) &= v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot (\pi_{1t}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) + \\ &\quad + (h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*, \psi, t) \cdot v^2(\varphi^*, \psi) + 2v(\varphi^*, \psi) \cdot v_{\tilde{\varphi}}(\varphi^*, \psi) \cdot h_{n\tau}(\varphi^*, \psi, t)) \times \\ &\quad \times \tilde{\varphi} \cdot \pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*, \psi, t) \pi_{0\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - \\ &\quad - v^2(\varphi^*, \psi) h_{n\tau}(\varphi^*, \psi, t) \pi_{1\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) \pi_{0\psi\psi}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)), \\ p_1(\psi, t) &= 0, \quad p_2(\psi, t) = 0, \quad p_0(\psi, t) = c^*(\psi, t) - c^{[n]}(\varphi^*, \psi, t). \end{aligned}$$

Аналогічно до [46 – 49], в результаті розв'язання даних задач,

маємо:

$$\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) = (c^*(\psi, t) - c^{[n]}(\varphi^*, \psi, t)) \cdot e^{-\tilde{\varphi}};$$

$$\pi_1^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) = -\tilde{\varphi} \cdot v^{-2}(\varphi^*, \psi) (\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) -$$

$$\begin{aligned}
& -v^2(\varphi^*, \psi) \cdot h_{n\tau}(\varphi^*, \psi, t) \pi_{0\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t); \\
& \pi_2^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) = -\tilde{\varphi} \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \cdot (h_{n\tau}(\varphi^*, \psi, t) \times \\
& \times (\pi_{0\tau}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - l(\varphi^*, \psi, t) \pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)) - \pi_{0\psi\psi}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - \\
& -v^2(\varphi^*, \psi) h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*, \psi, t) \cdot \pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - v^{-2}(\varphi^*, \psi) e^{-\tilde{\varphi}} (\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^2 / 2) \times \\
& \times (\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) \cdot l'_\varphi(\varphi^*, \psi, t) - v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot (\pi_{0H}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t) - \\
& - l(\varphi^*, \psi, t) \pi_{0\tau}^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)) - v^2(\varphi^*, \psi) h_{n\tau\tau}(\varphi^*, \psi, t) \pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi}, \psi, t)); \\
& l(\tilde{\varphi}, \psi, t) = v^2(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot h_{n\tau}(\tilde{\varphi}, \psi, t).
\end{aligned}$$

Функції $\tilde{\pi}_i^n(\varphi, \tilde{\psi}, t) = \sum_{i=0}^2 \tilde{\pi}_{i/2}^{(n)} \varepsilon^{i/2}$, $\tilde{\pi}_i^n(\varphi, \tilde{\psi}, t) = \sum_{i=0}^2 \tilde{\pi}_{i/2}^{(n)} \varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення нев'язок в околах $\psi=0$, $\psi=Q$ відповідно. Крім цього, функції $\tilde{\pi}_i^{(n)}$, $\tilde{\pi}_i^{(n)}$ повинні бути функціями типу пограншару стосовно змінних $\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}$: $\tilde{\pi}_i^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0$, $\tilde{\pi}_i^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0$, тобто дані функції повинні бути близькими до нуля поза деяким околom $\psi=0$, $\psi=Q$. Для їх знаходження маємо такі задачі:

$$\begin{cases}
\left\{ \begin{aligned}
v^2(\varphi, 0) \tilde{\pi}_{0\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, 0) \tilde{\pi}_{0\varphi}^{(n)} &= \tilde{\pi}_{0\tau}^{(n)}, \quad \tilde{\pi}_{0\tau}^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \\
\tilde{\pi}_0^{(n)}(\varphi, 0, t) &= c_{**}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, 0, t) - \pi^{(n)}(\varphi, 0, t);
\end{aligned} \right. \\
\left\{ \begin{aligned}
v^2(\varphi, 0) \tilde{\pi}_{1/2\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, 0) \tilde{\pi}_{1/2\varphi}^{(n)} &= \tilde{\pi}_{1/2\tau}^{(n)} - \tilde{\psi} \frac{2v'(\varphi, 0)}{v(\varphi, 0)} \tilde{\pi}_{0\tau}^{(n)}, \\
\tilde{\pi}_{1/2}^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{\pi}_{1/2}^{(n)}(\varphi, 0, t) &= 0;
\end{aligned} \right.
\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)\tilde{\pi}_{1\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, 0)\tilde{\pi}_{1\varphi}^{(n)} = \tilde{\pi}_{1t}^{(n)} - \tilde{q}^{(n)}, \\ \tilde{\pi}_1^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \tilde{\pi}_1^{(n)}(\varphi, 0, t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{0\varphi}^{(n)} = \tilde{\pi}_{0t}^{(n)}, \tilde{\pi}_0^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \\ \tilde{\pi}_0^{(n)}(\varphi, Q, t) = c^{**}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, Q, t) - \pi^{(n)}(\varphi, Q, t) - \tilde{\pi}^{(n)}(\varphi, Q, t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{1/2\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{1/2\varphi}^{(n)} = \tilde{\pi}_{1/2t}^{(n)} + \tilde{\psi} \frac{2v'(\varphi, Q)}{v(\varphi, Q)} \tilde{\pi}_{0t}^{(n)}, \\ \tilde{\pi}_{1/2}^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \tilde{\pi}_{1/2}^{(n)}(\varphi, Q, t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{1\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} + v^2(\varphi, Q)\tilde{\pi}_{1\varphi}^{(n)} = \tilde{\pi}_{1t}^{(n)} - \tilde{q}^{(n)}, \\ \tilde{\pi}_1^{(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \tilde{\pi}_1^{(n)}(\varphi, Q, t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{(n)} = & -\tilde{\psi}^2 \left(v'^2(\varphi, 0) + v''(\varphi, 0)v(\varphi, 0) \right) \frac{\tilde{\pi}_{0t}^{(n)}}{v^2(\varphi, 0)} - 2\tilde{\psi}v'(\varphi, 0) \times \\ & \times \left(\frac{\tilde{\pi}_{1/2t}^{(n)}}{v(\varphi, 0)} - \tilde{\psi} \left(2v(\varphi, 0)v'(\varphi, 0) \right) \frac{\tilde{\pi}_{0t}^{(n)}}{v^3(\varphi, 0)} \right) - v^2(\varphi, 0) \cdot \left(\tilde{\pi}_{0\varphi\varphi}^{(n)} - h_{\pi\pi}(\varphi, 0, t)\tilde{\pi}_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{(n)} = & -\tilde{\psi}^2 \left(v'^2(\varphi, Q) + v''(\varphi, Q)v(\varphi, Q) \right) \frac{\tilde{\pi}_{0t}^{(n)}}{v^2(\varphi, Q)} - 2\tilde{\psi}v'(\varphi, Q) \times \\ & \times \left(\frac{\tilde{\pi}_{1/2t}^{(n)}}{v(\varphi, Q)} + \tilde{\psi} \left(2v(\varphi, Q)v'(\varphi, Q) \right) \frac{\tilde{\pi}_{0t}^{(n)}}{v^3(\varphi, Q)} \right) - \\ & - v^2(\varphi, Q) \cdot \left(\tilde{\pi}_{0\varphi\varphi}^{(n)} - h_{\pi\pi}(\varphi, Q, t)\tilde{\pi}_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що тут, при знаходженні функцій $\tilde{\pi}_i^n(\varphi, \tilde{\psi}, t)$,

$\tilde{\pi}_i^n(\varphi, \tilde{\psi}, t)$ [91, 92], приходимо до розв'язання крайових задач для

рівнянь виду $\alpha(\varphi)\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}-\delta(\varphi)\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=\sigma(t)\frac{\partial\Pi}{\partial t}+g(\varphi,\eta,t)$, які за допомогою заміни $f(s)=f(\varphi)-t$ зводяться до рівняння з сталими коефіцієнтами вигляду $a(s)\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}=\frac{\partial\Pi}{\partial t}+g_0(s,\eta,t)$, де s – параметр.

2.1.2. Дослідження процесів, що описуються сингулярно збуреними інтегро-диференціальними рівняннями

Дослідимо сингулярно збурений процес масопереносу забруднюючої речовини при фільтрації в чотирикутній криволінійній області у випадку, коли на величину коефіцієнта дифузії у даній точці (x, y) у даний момент часу t вносять впливи величини концентрацій, що мали місце в усі попередні моменти часу. Для цього, розглянемо таку нелінійну [46] модельну задачу конвективної дифузії для області $G=G_z \times (0, \infty)$ (див. п. 2.1.1):

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\left(1 + \mu \int_0^t l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) (c_{xx}(x, y, t) + c_{yy}(x, y, t)) + \right. \\ & \left. \mu \left(\int_0^t (l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}))_x d\tilde{t} \cdot c_x(x, y, t) + \int_0^t (l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}))_y d\tilde{t} \cdot c_y(x, y, t) \right) \right) - \\ & - v_x(x, y) c_x(x, y, t) - v_y(x, y) c_y(x, y, t) = c_t(x, y, t), \quad (2.1.7) \\ & c \Big|_{AB} = c_*(M, t), \quad c \Big|_{CD} = c^*(M, t), \quad c \Big|_{AD} = c_{**}(M, t), \end{aligned}$$

$$c|_{AD} = c^{**}(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad (2.1.8)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad (2.1.9)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної у фільтраційній течії речовини в точці (x, y) в момент часу t , $l(x, y, t)$ – деяка вагова обмежена функція, що характеризує вплив забруднення на його дифузійну провідність, M – біжуча точка відповідної кривої, n - зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon = \mu/k$, k - задане додатне дійсне число, ε ($\varepsilon > 0$) - малий параметр, φ, v_x, v_y , - відповідно потенціал і компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_0^0(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, - досить гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

Як і в попередньому пункті, припускаємо, що задача фільтрації (2.1.9) розв'язана, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (2.1.7) і умовах (2.1.8), приходимо до відповідної дифузійної задачі для області G_w :

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left(c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi} + \varepsilon k \cdot \int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{c}) d\tilde{t} (c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) + \varepsilon k \left(c_\varphi \int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{c}_\varphi) d\tilde{t} + \right. \right.$$

$$+c_{\varphi} \int_0^t (\tilde{l}_{\varphi} \cdot \tilde{c}) d\tilde{t} + c_{\psi} \int_0^t (\tilde{l}_{\psi} \cdot \tilde{c}_{\psi}) d\tilde{t} + c_{\psi} \int_0^t (\tilde{l}_{\psi} \cdot \tilde{c}) d\tilde{t} \Big) - v^2(\varphi, \psi) c_{\varphi} = c_i, \quad (2.1.10)$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad c(\varphi, Q_*, t) = c_{**}(\psi, t),$$

$$c(\varphi, Q^*, t) = c^{**}(\psi, t), \quad c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi).$$

Тут і надалі введені позначення $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), \tilde{t})$.

Розв'язок c даної задачі з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді такого асимптотичного ряду [91, 92]:

$$c(\varphi, \psi, t) = c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\varphi, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \Gamma_i(\varphi, \mu, t) + R_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.1.11)$$

де R_n – залишковий член, $c_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправка на виході фільтраційного потоку з даного пласта G_z), $P_i(\varphi, \eta, t)$, $\Gamma_i(\varphi, \mu, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = Q^*$, $\psi = Q_*$ (відповідно поправки до розв'язку в околах ліній течії BC і AD), $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = (Q^* - \psi) \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = (\psi - Q_*) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги).

У результаті підстановки (2.1.11) у (2.1.10) і виконання стан-

дартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо такі задачі для знаходження головної частини $c_0(\varphi, \psi, t)$ розв'язку і поправок $c_i(\varphi, \psi, t)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{ii}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = h_i(\varphi, \psi), c_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i(\psi, t), i = \overline{0, 1}, \end{cases}$$

$$g_0(\varphi, \psi, t) = 0, \quad g_1(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) (c_{0\varphi\varphi} + c_{0\psi\psi}),$$

$$h_0(\varphi, \psi) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad h_1(\varphi, \psi) = 0, \quad b_0(\psi, t) = c_*(\psi, t), \quad b_1(\psi, t) = 0,$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{ii}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = 0, c_i(\varphi_*, \psi, t) = 0, i = \overline{2, n}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_i(\varphi, \psi, t) = & v^2(\varphi, \psi) \left(c_{(i-1)\varphi\varphi} + c_{(i-1)\psi\psi} + k \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-2} \left(\int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{c}_j) d\tilde{t} (c_{(i-2-j)\varphi\varphi} + c_{(i-2-j)\psi\psi}) \right) \right) + \right. \\ & + \sum_{j=0}^{i-2} \left(c_{j\varphi} \int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{c}_{(i-2-j)\varphi}) d\tilde{t} \right) + \sum_{j=0}^{i-2} \left(c_{j\psi} \int_0^t (\tilde{l}_\varphi \cdot \tilde{c}_{(i-2-j)}) d\tilde{t} \right) + \\ & \left. + \sum_{j=0}^{i-2} \left(c_{j\psi} \int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{c}_{(i-2-j)\psi}) d\tilde{t} \right) + \sum_{j=0}^{i-2} \left(c_{j\psi} \int_0^t (\tilde{l}_\psi \cdot \tilde{c}_{i-2-j}) d\tilde{t} \right) \right). \end{aligned}$$

У результаті їх розв'язку маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $i=\overline{1, n}$, $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(s, \tilde{\psi}) ds$ – час проходження виділеною часткою уздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$, від точки $(\varphi_*, \tilde{\psi})$ до точки $(\varphi, \tilde{\psi})$, f^{-1} – функція обернена до функції f відносно змінної φ (зауважимо, що така функція існує, оскільки v^{-2} – нескінченно диференційована, обмежена, додатно визначена функція).

Функція $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i \varepsilon^i$ призначена для усунення “неузгодженості”, внесеної побудованою регулярною частиною $c = \sum_{i=0}^n c_i \varepsilon^i$ асимптотики, в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційного потоку), тобто, повинна виконуватися умова: $(c + \Pi)|_{\varphi = \varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^{n+1})$. Для її знаходження маємо задачу:

$$\Pi_{i\xi\xi} + \Pi_{i\xi} = d_i(\xi, \psi, t); \quad \Pi_i \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$\Pi_i(0, \psi, t) = p_i(\psi, t), \quad i = \overline{0, n+1},$$

де

$$\begin{aligned} d_0(\xi, \psi, t) &= 0, \quad d_1(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot \Pi_{0t}(\xi, \psi, t) - \\ &- k \cdot \left(\Pi_{0\xi\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l}(\varphi^*, \psi, \tilde{t}) \cdot \tilde{\Pi}_0) d\tilde{t} + \Pi_{0\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l}(\varphi^*, \psi, \tilde{t}) \cdot \tilde{\Pi}_{0\xi}) d\tilde{t} \right) \right), \right. \\ d_2(\xi, \psi, t) &= v^{-2}(\varphi^*, \psi) \left(\Pi_{1t} + 2v v' \xi (\Pi_{1\xi} + \Pi_{1\xi\xi}) \right) - \Pi_{0\psi\psi} - \\ &- k \Pi_{1\xi\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l}(\varphi^*, \psi, \tilde{t}) \cdot \tilde{\Pi}_0) d\tilde{t} + k \Pi_{0\xi\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l}'_\xi \xi \cdot \tilde{\Pi}_0) d\tilde{t} - k \Pi_{0\xi\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{\Pi}_1) d\tilde{t} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\nu\nu'\xi k}{\nu^{-2}(\varphi^*, \psi)} \left(\Pi_{0\xi\xi} \int_0^t (\tilde{l}\tilde{\Pi}_0) d\tilde{t} + \Pi_{0\xi} \left(\int_0^t (\tilde{l} \cdot \tilde{\Pi}_{0\xi}) d\tilde{t} \right) - k\Pi_{1\xi} \int_0^t (\tilde{l}\tilde{\Pi}_{0\xi}) d\tilde{t} + \right. \\
& \quad \left. + k\Pi_{0\xi} \int_0^t (\tilde{l}'_\xi \tilde{\xi} \tilde{\Pi}_{0\xi}) d\tilde{t} - k\Pi_{0\xi} \int_0^t (\tilde{l}\tilde{\Pi}_{1\xi}) d\tilde{t} + k\Pi_{0\xi} \int_0^t (\tilde{l}_* \tilde{\Pi}_0) d\tilde{t} \right), \\
d_i(\xi, \psi, t) = & \nu^{-2}(\varphi^*, \psi) \left(\Pi_{(i-1)t} - \sum_{j=1}^i V_j \Pi_{(i-j)\xi\xi} - \sum_{j=1}^i V_j \Pi_{(i-j)\xi} - \right. \\
& - \sum_{j=0}^{i-2} V_j \Pi_{(i-2-j)\psi\psi} - k \sum_{u=0}^{i-1} V_j \int_0^t \tilde{L}_l \tilde{\Pi}_{m\psi} d\tilde{t} \Pi_{(i-1-u)\xi\xi} - k \sum_{u=0}^{i-3} V_j \int_0^t \tilde{L}_l \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-3-u)\psi\psi} - \\
& - k \sum_{u=0}^{i-1} V_j \int_0^t \tilde{L}_l \tilde{\Pi}_{m\xi} d\tilde{t} \Pi_{(i-1-u)\xi} - k \sum_{u=0}^{i-2} V_j \int_0^t \tilde{L}_{*l} \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-2-u)\xi} - \\
& \left. - k \sum_{u=0}^{i-3} V_j \int_0^t \tilde{L}_l \tilde{\Pi}_{m\psi} d\tilde{t} \Pi_{(i-3-u)\psi} - k \sum_{u=0}^{i-3} V_j \int_0^t \tilde{L}_{l\psi} \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-3-u)\psi} \quad (i=\overline{3, n+1}). \right)
\end{aligned}$$

Тут V_j , L_l , L_{*l} – коефіцієнти при відповідних степенях ε розкладу функцій $\nu^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$, $l(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$ і $l_\psi(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$ в ряди Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, а $u = l + j + m$.

Функції типу пограншару $P(\varphi, \eta, t) = \sum_{i=0}^{n+1} P_i \varepsilon^{i/2}$,

$\Gamma(\varphi, \mu, t) = \sum_{i=0}^{n+1} \Gamma_i \varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення “неузгодженості” в

околі граничних ліній течії $\psi = Q^*$, $\psi = Q_*$ відповідно. Зокрема, для знаходження $P_i(\varphi, \eta, t)$ [33] (функції $\Gamma_i(\varphi, \mu, t)$ знаходимо аналогічно), у результаті виконання процедури прирівнювання [46 – 49] приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q^*)P_{0\eta\eta} + v^2(\varphi, Q^*)P_{0\varphi} = P_{0r}, \\ P_0(\varphi, Q^*, t) = c^*(\varphi, t) - W(\varphi, Q^*, t), \quad P_0(\varphi, Q^*, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \\ v^2(\varphi, Q^*)P_{i\eta\eta} + v^2(\varphi, Q^*)P_{i\varphi} = P_{it} - M_i(\varphi, \psi, t), \\ P_i(\varphi, Q^*, t) = 0, \quad P_i(\varphi, Q^*, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} W(\varphi, Q^*, t) &= \left(c_0(\varphi, Q^*, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(\varphi, Q^*, t) \right) + \sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i(\xi, Q^*, t) \varepsilon^i, \\ M_i(\varphi, \psi, t) &= I(2, i) \sum_{j=0}^{i-2} V_j^* P_{(i-2-j)\varphi\varphi} + I(1, i) \left(\sum_{j=1}^i V_j^* P_{(i-j)\eta\eta} + \sum_{j=1}^i V_j^* P_{(i-j)\varphi} \right) + \\ &+ I(4, i) k \left(\sum_{h=0}^{i-4} V_j^* \int_0^t \tilde{L}_l^* \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-4-h)\varphi\varphi} + \sum_{h=0}^{i-4} V_j^* \int_0^t \tilde{L}_{l\varphi}^* \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-4-h)\varphi} + \right. \\ &+ \left. \sum_{h=0}^{i-4} V_j^* \int_0^t \tilde{L}_l^* \tilde{\Pi}_{m\varphi} d\tilde{t} \Pi_{(i-4-h)\varphi} \right) + I(2, i) k \left(\sum_{h=0}^{i-2} V_j^* \int_0^t \tilde{L}_l^* \tilde{\Pi}_m d\tilde{t} \Pi_{(i-2-h)\eta\eta} + \right. \\ &+ \left. \sum_{h=0}^{i-2} V_j^* \int_0^t \tilde{L}_l^* \tilde{\Pi}_{m\eta} d\tilde{t} \Pi_{(i-2-h)\eta} \right) + I(3, i) k \sum_{h=0}^{i-3} V_j^* \int_0^t L_{*l}^* \tilde{\Pi}_{m\eta} d\tilde{t} \Pi_{(i-3-h)\eta} \quad (i = \overline{1, n+1}). \end{aligned}$$

Тут V_j^* , L_l^* , L_{*l}^* – коефіцієнти при відповідних степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу функцій $v^2(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta)$, $l(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, t)$ і $l_{\psi}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, t)$ в ряди

$$\text{Тейлора в околі } \psi = Q^*, \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } b \geq a, \\ 0, & \text{якщо } b < a \end{cases} \quad (a, b \in \square), \quad h = l + j + m.$$

2.1.3. Конвективно-дифузійний перенос у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації

Дослідимо сингулярно збурений процес масопереносу забрунюючої речовини при фільтрації в чотирикутній криволінійній області у випадку, коли інтенсивність проникнення розчинних речовин у рідину залежить від шуканої концентрації і описується многочленною залежністю. Для цього в області $G=G_z \times (0, \infty)$, де $G_z=ABCD$ – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (див. п.2.1.1) розглянемо нелінійну модельну задачу конвективної дифузії:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial c}{\partial x} \left(\left(a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s c^s \right) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial c}{\partial y} \left(\left(a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s c^s \right) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.1.12)$$

$$c|_{AB} = c_*(M, t), \quad c|_{CD} = c^*(M, t), \quad c|_{AD} = c_{**}(M, t), \\ c|_{BC} = c^{**}(M, t), \quad c(M, \tilde{t}) = c_0^0(M, \tilde{t}), \quad (2.1.13)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*,$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy. \quad (2.1.14)$$

Тут λ – довільне натуральне число, M , n – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої, $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x, y) в момент часу t , φ, v_x, v_y – відповідно потенціал

та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , ε – малий параметр, c_* , c^* , c_{**} , c^{**} , c_0^0 – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема в кутових точках) області G . Крім цього, вважаємо, що функція $c_0^0(\varphi, \psi, t)$ при $t=0$ задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $c=c(x, y, t)$ [33].

Припустивши, що задача (2.1.14) розв'язана, та здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi, \psi)$, $y=y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (2.1.12) і умовах (2.1.13), аналогічно до п.2.1.1, приходимо до відповідної дифузійної задачі для області G_w :

$$\begin{aligned} & \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left(\left(a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s c^s \right) \cdot (c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) + \right. \\ & \left. + \left(\varepsilon a_1 + \sum_{s=2}^{\lambda} s \varepsilon^s a_s c^{s-1} \right) (c_{\varphi}^2 + c_{\psi}^2) \right) - v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{\varphi} = c_t, \\ & c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \\ & c(\varphi, \varrho_*, t) = c_{**}(\varphi, t), \quad c(\varphi, \varrho^*, t) = c^{**}(\varphi, t), \quad c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Розв'язок задачі (2.1.15) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned} c(\varphi, \psi, t) = & c_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon c_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \Pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + \\ & + \sum_{i=0}^2 P_i(\varphi, \eta, t) \varepsilon^{i/2} + \sum_{i=0}^2 \Gamma_i(\varphi, \mu, t) \varepsilon^{i/2} + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

де $c_i(\varphi, \psi, t)$ ($i=\overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: c_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); c_i – поправки, які враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки), $R(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – залишковий член, $\Pi_i(\xi, \psi, t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$, $P_i(\varphi, \eta, t)$, $\Gamma_i(\varphi, \mu, t)$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень” (c^* , c_{**} , c^{**}), $\xi=\frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{\psi-Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\frac{Q^*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, – відповідні регуляризуючі перетворення.

Підставивши (2.1.16) в (2.1.15) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання, аналогічно до [47], для знаходження функцій c_i приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{0\varphi} + c_{0t} = 0, \\ c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), c_0(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{1\varphi} + c_{1t} = g(\varphi, \psi, t), \\ c_1(\varphi, \psi, 0) = 0, c_1(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

де $g(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) a_0 \left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial \psi^2} \right)$.

В результаті їх розв’язання маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_* (\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ c_0^0 (f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$c_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g(s, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(s, \psi))}{v^2(s, \psi)} ds, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$ від точки $(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$, f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ .

Функції типу пограншару $\Pi = \sum_{i=0}^2 \Pi_i \varepsilon^i$ призначені для усунення неув'язок, внесених побудованою регулярною частиною $\bar{c} = \sum_{i=0}^1 c_i \varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi = \varphi^*$. Для їх знаходження маємо задачу:

$$\begin{cases} a_0 \Pi_{0\xi\xi} + \Pi_{0\xi} = 0, \quad \Pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\ \Pi_0(0, \psi, t) = c^*(\psi, t) - c_0(\varphi_*, \psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \Pi_{1\xi\xi} + \Pi_{1\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) d_1(\xi, \psi, t), \\ \Pi_1(0, \psi, t) = -c_1(\varphi_*, \psi, t), \quad \Pi_1(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \Pi_{2\xi\xi} + \Pi_{2\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) d_2(\xi, \psi, t), \\ \Pi_2(0, \psi, t) = 0, \quad \Pi_2(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} d_1(\xi, \psi, t) &= \frac{\partial \Pi_0}{\partial t} - v^2(\varphi^*, \psi) a_1 \Pi_0 \Pi_{0\xi\xi} - v^2(\varphi^*, \psi) a_1 \Pi_{0\xi}^2, \\ d_2(\xi, \psi, t) &= \Pi_{1t} + \frac{2v'\xi d_1(\xi, \psi, t)}{v(\varphi_*, \psi)} - v^2(\varphi_*, \psi) a_1 \Pi_0 \Pi_{1\xi\xi} + \\ &+ 2vv'\xi a_1 (\Pi_0 \Pi_{0\xi\xi} + \Pi_{0\xi}^2) - v^2(\varphi_*, \psi) (a_2 \Pi_{0\xi\xi} (\Pi_0^2 + 2\Pi_0 c_0) + \\ &+ a_1 \Pi_{0\xi\xi} \Pi_1 + \Pi_{0\psi\psi} + 2a_1 \Pi_{1\xi}^2 + 2a_2 \Pi_{0\xi}^2 \Pi_0). \end{aligned}$$

Ці задачі розв'язуються аналогічно до [33], зокрема:

$$\begin{aligned} \Pi_0(\xi, \psi, t) &= \left(c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{\frac{-\xi}{a_0}}, \\ \Pi_1(\xi, \psi, t) &= -c_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{\frac{-\xi}{a_0}} - a_0 f_1 e^{\frac{-\xi}{a_0}} - \frac{a_0^2}{2} f_2 \left(e^{\frac{-\xi}{a_0}} - e^{\frac{-2\xi}{a_0}} \right), \end{aligned}$$

де $f_1 = \frac{(c_t^* - c_{0t})}{v^2(\varphi^*, \psi)}$, $f_2 = -\frac{a_1}{a_0^2} (c_t^* - c_{0t})^2$.

Функція $P(\varphi, \eta, t) = \sum_{i=0}^2 P_i \varepsilon^{i/2}$ призначена для усунення неузго-

джень в околах граничних ліній течії $\psi = Q_*$. Для її знаходження в результаті проведення стандартної процедури прирівнювання при-
ходимо до таких задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{0\eta\eta} + P_{0\varphi}) = P_{0r}, P_0(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \\ P_0(\varphi, Q_*, t) = c^{**}(\varphi, t) - c_0(\varphi, Q_*, t) - \Pi_0(\varphi, Q_*, t), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) = P_{1r} + U_1(\varphi, \eta, t), \\ P_1(\varphi, Q_*, t) = 0, P_1(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{2\eta\eta} + P_{2\varphi}) = P_{2r} + U_2(\varphi, \eta, t), \\ P_2(\varphi, Q_*, t) = -c_1 - \Pi_1, P_2(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{array} \right.$$

$$U_1(\varphi, \eta, t) = -v^{-2}(\varphi, Q_*)P_{0r},$$

$$U_2(\varphi, \eta, t) = -2v'v^{-1}\eta(P_{1r} + U_1) - (v\nu'' + v'^2)v^{-2}P_{0r} - v^2(\varphi, Q_*) \times \\ \times (a_0 P_{0\varphi\varphi} + a_1 P_0 P_{0\eta\eta} + a_1 (P_{0\eta}^2 + 2(P_{0\eta} \Pi_0(\xi, Q_*, t) + P_0 c_0(\varphi, Q_*, t))).$$

Задачі для погранфункцій $\Gamma(\varphi, \mu, t) = \sum_{i=0}^2 \Gamma_i \varepsilon^{i/2}$ записуються

аналогічно.

2.1.4. Результати числових експериментів

Наведемо деякі результати розрахунку описаних вище сингулярно збурених процесів типу “конвекція-дифузія” на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками z_1 та z_2 (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \ln((z - z_1)/(z - z_2))$ [30], при фіксованих φ_* , φ^* , Q .

1. Результати числових розрахунків процесу конвективної дифузії на основі моделі із запізненням (п. 2.1.1) отримано при $z_1=0$, $z_2=4$, $\varphi_*=-1.5$, $\varphi^*=1.5$, $AD=\{z:\psi(x,y)=2\pi/3\}$, $BC=\{z:\psi(x,y)=4\pi/3\}$. На рис. 2.1-2.2 зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку [41, 82] в G_z : $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 10$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 20$, $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw)(\overline{dz/dw}) \right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту [46] конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k=\overline{1,4}$ при $t_1=0.3$, $t_2=0.898$, $t_3=1.645$, $t_4=2.426$ (криві 1-4 відповідно).

Розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, t_*)$ розчинної речовини при $t = 2.447$, $\tau=1.817$, $h(c(\varphi, \psi, t)) = c(\varphi, \psi, t)$, $c_0^0(\varphi, \psi) = (1 + \varphi^2 + \psi^2)^{-1}$, $c_*(\varphi, t) = (3.25 + t + \psi^2)^{-1}$, $c^*(\varphi, t) = (3.25 + \psi^2)^{-1}$, $c_{**}(\varphi, t) = \left(1 + \varphi^2 + t(1/2 - x/3) + (\psi_1)^2 \right)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, t) = \left(1 + \varphi^2 + t(1/2 - x/3) + (\psi_{11})^2 \right)^{-1}$ зображено на рис. 2.3. А на рис. 2.4 зображено розподіл концентрації речовини вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = \varphi_6$ в момент часу $t = 1.81727$ в залежності від значень малого параметра ε , який, зокрема, є ілюстрацією рівномірного прямування розв'язку поставленої сингулярно збуреної задачі до розв'язку відповідної виродженої задачі.

2. Результати числових розрахунків нелінійного процесу

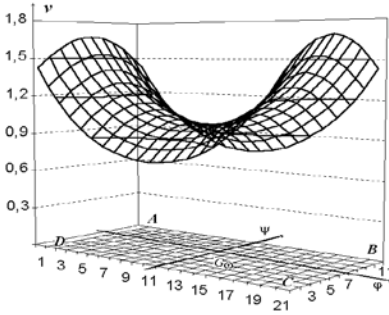


Рис. 2.1. Розподіл швидкості фільтрації

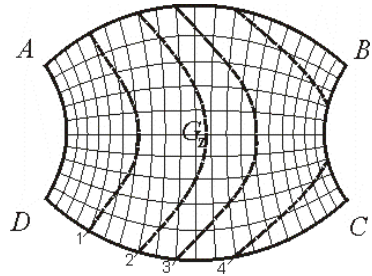


Рис. 2.2. Фізична область G_z

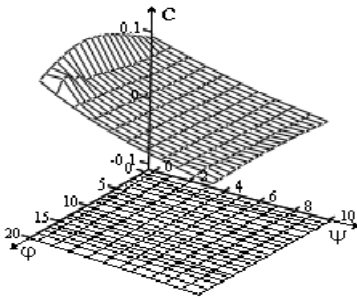


Рис. 2.3. Розподіл концентрації забруднень

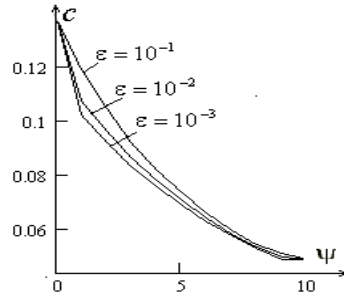


Рис. 2.4. Вплив малого параметра на розподіл концентрації забруднень

“конвекція-дифузія” на основі моделі описаної в п. 2.1.2 отримано при $z_1=0$, $z_2=4$, $\varphi_*=-1.4$, $\varphi^*=1.4$, $AD=\{z:\psi(x,y)=5\pi/6\}$, $BC=\{z:\psi(x,y)=3\pi/2\}$. На рис. 2.5, а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z : $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i^{df}=\varphi_*+((\varphi^*-\varphi_*)\cdot i)/20$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j^{df}=(Q_*\cdot j)/10$, $i=\overline{0,20}$, $j=\overline{0,10}$, величину швидкості фільтрації

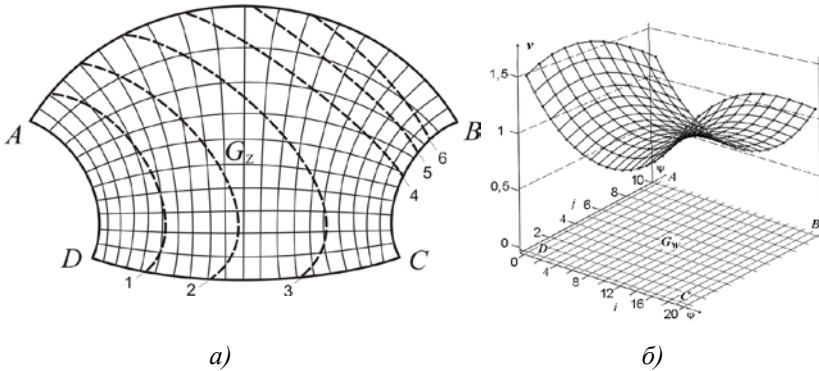
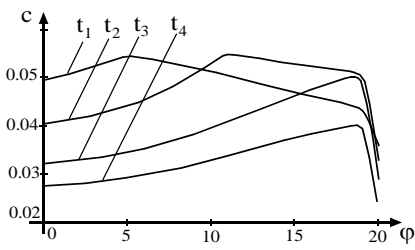


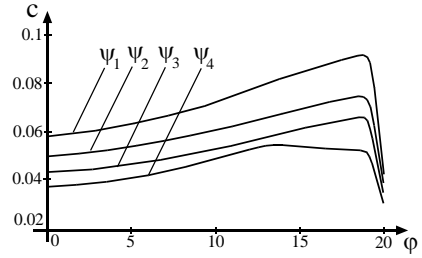
Рис. 2.5. Фізична область G_z (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б)

$v = \left((dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k = \overline{1,6}$ при $t_1 = 0.3492$, $t_2 = 0.8882$, $t_3 = 1.6592$, $t_4 = 2.6492$, $t_5 = 3.7584$, $t_6 = 4.8258$ (криві 1-6 відповідно).

Розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, t)$ розчинної G_w речовини при $\varepsilon = 0.01$, $k = 1$, $c_0^0(\varphi, \psi) = ((\varphi + 1.4)^2 + \psi^2)^{-1}$, $c_*(\psi, t) = (3 \cdot t + \psi^2)^{-1}$, $c^*(\psi, t) = (3 \cdot t + (2.8)^2 + \psi^2)^{-1}$, $c_{**}(\varphi, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (5\pi/6)^2)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, t) = ((\varphi + 1.4)^2 + 3 \cdot t + (3\pi/2)^2)^{-1}$ в моменти часу $t_1 = 0.592$, $t_2 = 2.131$, $t_3 = 4.308$, $t_4 = 6.068$ вздовж лінії течії $\psi = 4.284$ та вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -0.28$ зображено на рис. 2.6, а) та рис. 2.7, а) відповідно. На рис. 2.6, б) зображено розподіл концентрації розчинної речовини в момент часу $t = 2.649$ вздовж ліній течії $\psi_1 = 3.037$, $\psi_2 = 3.456$, $\psi_3 = 3.875$, $\psi_4 = 4.294$, а на рис. 2.7, б) –

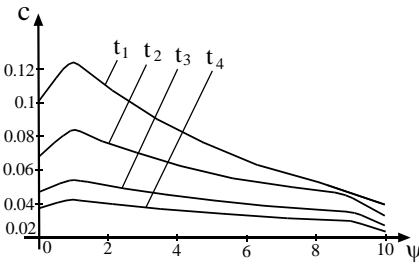


a)

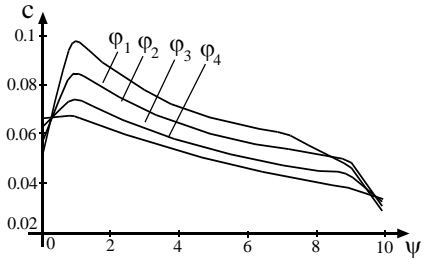


б)

Рис. 2.6. Розподіл концентрації речовини вздовж лінії течії $\psi=4.284$ (а) у різні моменти часу та в момент часу $t=2.649$ (б) вздовж різних ліній течії



a)



б)

Рис. 2.7. Розподіл концентрації речовини вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi=-0.28$ (а) у різні моменти часу та в момент часу $t=2.649$ (б) вздовж різних еквіпотенціальних ліній

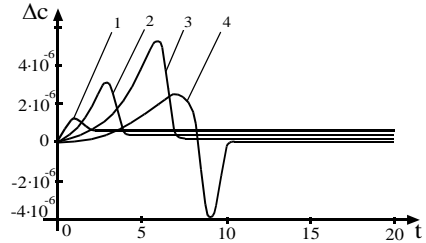
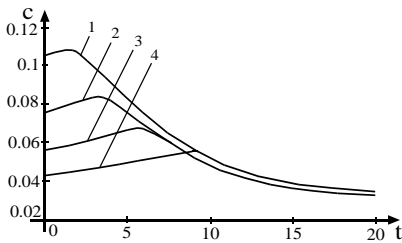


Рис. 2.8. Зміна концентрації речовини з часом у фіксованих точках (φ_i, ψ_i)

вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1 = -0.84$, $\varphi_2 = -0.28$, $\varphi_3 = 0.28$, $\varphi_4 = 0.84$. Зміну концентрації речовини з часом у фіксованих точках (φ_i, ψ_i) ($i = \overline{1, 4}$) зображено на рис. 2.8, а) (криві 1-4 відповідно), а на рис. 2.8, б) – відповідні різниці Δc між даними значеннями концентрації та її значеннями при $k=0$.

2.2. Сингулярно збурені моделі процесів конвективної дифузії для многозв'язних областей

2.2.1. Нелінійні задачі конвективної дифузії у двозв'язних областях

Розглянемо особливості моделювання деяких нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній, $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 2.9, а), зосередивши увагу на відмінності відповідних їм задач від аналогічних задач для однозв'язних чотирикутних криволінійних областей.

Для області G модельну задачу конвективної дифузії із записом запишемо так:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \varepsilon \cdot h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + \varepsilon \cdot h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) -$$

$$-v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, \tilde{t}) = c_0^0(M, \tilde{t}) \quad (-\tau \leq \tilde{t} \leq 0),$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy.$$

Тут φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , ε – малий параметр, M – біжуча точка відповідної кривої, $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x, y) в момент часу t , $\tau > 0$ – запізнення, h, c_*, c^*, c_0^0 – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G . Крім цього вважаємо, що функція $c_0^0(\varphi, \psi, t)$ при $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $c = c(x, y, t)$ при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \dots$).

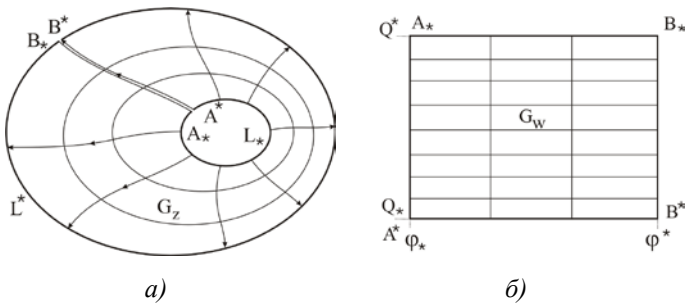


Рис. 2.9. Фізична двов'язна область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б).

Нелінійна модельна інтегро-диференціальна (див. п. 2.1.2) задача конвективної дифузії для області G матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\left(1 + \mu \int_0^t l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) (c_{xx}(x, y, t) + c_{yy}(x, y, t)) + \right. \\ & \left. + \mu \left(\int_0^t (l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}))_x d\tilde{t} c_x(x, y, t) + \int_0^t (l(x, y, \tilde{t}) c(x, y, \tilde{t}))_y d\tilde{t} c_y(x, y, t) \right) \right) - \\ & - v_x(x, y) c_x(x, y, t) - v_y(x, y) c_y(x, y, t) = c_t(x, y, t), \\ & c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M, 0), \\ & (v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \end{aligned}$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної у фільтраційній течії речовини в точці (x, y) в момент часу t , $l(x, y, t)$ – деяка вагова обмежена функція, $\varepsilon = \mu / k$, k – задане додатне дійсне число, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_0^0(M, t)$, – досить гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

У випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації відповідна задача прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{\partial c}{\partial x} \left(\left(a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s c^s \right) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial c}{\partial y} \left(\left(a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s c^s \right) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \\ & c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M, 0), \end{aligned}$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L'} -v_y dx + v_x dy.$$

Тут λ – довільне натуральне число, a_s ($s = \overline{1, \lambda}$) – довільні дійсні числа, $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x, y) в момент часу t , ε – малий параметр, c_*, c^*, c_0^0 – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

Для області G розглянемо наступну модельну задачу конвективної дифузії із запізнюючим аргументом:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((h(c(x, y, t - \tau))) \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.2.1)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, \tilde{t}) = c_0^0(M, \tilde{t}) \quad (-\tau \leq \tilde{t} \leq 0), \quad (2.2.2)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L'} -v_y dx + v_x dy, \quad (2.2.3)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x, y) в момент часу t , M, n – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої, ε – малий параметр, $\tau > 0$ – запізнення, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z . $h(c(x, y, t)), c_*(M, t), c^*(M, t), c_0^0(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема в кутових

точках) області G . Крім цього вважаємо, що функція $c_0^0(x, y, t)$ при $t=-\tau$ та $t=0$ задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $c=c(x, y, t)$ при $t=\tau k$ ($k=1, 2, \dots$).

Побудуємо асимптотичне розв'язання розв'язку даної задачі (зауважимо, що всі інші поставлені вище задачі розв'язуватимуться аналогічно).

Припустимо, що задача (2.2.3), шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, де $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$ – розріз двозв'язної області G_z уздовж однієї з ліній розділу течії, що визначається в процесі розв'язання [43–44], а $G_w = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 2.9, б), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (2.2.1) та умовах (2.2.2), приходимо до відповідної дифузійної задачі для області G_w :

$$\begin{aligned} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \cdot \left(h(c(\varphi, \psi, t - \tau)) \cdot (c_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) + c_{\varphi}(\varphi, \psi, t) \times \right. \\ \left. \times h_{\varphi}(\varphi, \psi, t - \tau) + c_{\psi}(\varphi, \psi, t) h_{\psi}(\varphi, \psi, t - \tau) \right) - \\ - v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{\varphi}(\varphi, \psi, t) = c_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.2.4) \\ c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \end{aligned}$$

$$c(\varphi, \psi, \tilde{t}) = c_0^0(\varphi, \psi, \tilde{t}), \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0. \quad (2.2.5)$$

Розв'язок задачі із запізненням [65] τ (2.2.4), (2.2.5) шукаємо як об'єднання розв'язків задач без запізнення на кожному із часових проміжків $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k=1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \cdot & \left(h_{k\tau}(\varphi, \psi, t) \cdot \left(c_{\varphi\varphi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) + c_{\psi\psi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) \right) + \left(c_{\varphi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times h_{k\tau\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{\psi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) h_{k\tau\psi}(\varphi, \psi, t) \right) \right) - \\ & - v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{\varphi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) = c_t^{[k]}(\varphi, \psi, t), \\ & c^{[k]}(\varphi, \psi, (k-1)\tau) = \gamma_k(\varphi, \psi, (k-1)\tau), \\ & c^{[k]}(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c^{[k]}(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

де

$$\begin{aligned} h_{k\tau}(\varphi, \psi, t) &= h(c^{[k]}(\varphi, \psi, t - \tau)) = h(\gamma_k(\varphi, \psi, t - \tau)), \\ \gamma_k(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} c^{[k-1]}(\varphi, \psi, t), & k=2, 3, \dots, \\ c_0^0(\varphi, \psi, t), & k=1. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок кожної із періодичних щодо змінної ψ задач (2.2.6) з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned} c^{[k]}(\varphi, \psi, t) &= \left(c_0^{[k]}(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i c_i^{[k]}(\varphi, \psi, t) \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{N+1} \Pi_i^{[k]}(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + R^{[k]}(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

де $c_i^{[k]}(\varphi, \psi, t)$ ($i=0, \overline{N}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $c_0^{[k]}(\varphi, \psi, t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $c_i^{[k]}(\varphi, \psi, t)$ ($i=1, \overline{N}$) – поправки, які враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки); $\Pi_i^{[k]}(\xi, \psi, t)$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$ – змінна розтягу, $R^{[k]}(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – залишковий член.

Підставивши (2.2.7) в (2.2.6) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання членів при однакових степенях ε для знаходження функцій $c_0^{[k]}(\varphi, \psi, t)$ та $c_i^{[k]}(\varphi, \psi, t)$ ($i=1, \overline{N}$), приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_0^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_0^{[k]}{}_t(\varphi, \psi, t) = 0, \\ c_0^{[k]}(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \\ c_0^{[k]}(\varphi, \psi, (k-1)\tau) = \overline{\gamma}^{[k]}(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_i^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_i^{[k]}{}_t(\varphi, \psi, t) = g_i^{[k]}(\varphi, \psi, t), \\ c_i^{[k]}(\varphi, \psi, (k-1)\tau) = \overline{\gamma}_i^{[k]}(\varphi, \psi), \\ c_i^{[k]}(\varphi_*, \psi, t) = 0. \end{cases}$$

Тут

$$g_i^{[k]}(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left(h_{k\tau}(\varphi, \psi, t) \cdot \left(c_{i-1\varphi\varphi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) + c_{i-1\psi\psi}^{[k]}(\varphi, \psi, t) \right) + \right.$$

$$+c_{i-1\varphi}^{[k]}(\varphi, \psi, t)h_{k\tau\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{i-1\psi}^{[k]}(\varphi, \psi, t)h_{k\tau\psi}(\varphi, \psi, t),$$

$$\bar{\gamma}^{[k]}(\varphi, \psi) = \begin{cases} c_0^{[k-1]}(\varphi, \psi, (k-1)\tau), & k=2, 3, \dots, \\ c_0^0(\varphi, \psi, 0), & k=1, \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_i^{[k]}(\varphi, \psi) = \begin{cases} c_i^{[k-1]}(\varphi, \psi, (k-1)\tau), & k=2, 3, \dots, \\ 0, & k=1. \end{cases}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0^{[k]}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \bar{\gamma}^{[k]}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$c_i^{[k]}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i^{[k]}(s, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(s, \psi))}{v^2(s, \psi)} ds, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_{(k-1)\tau}^t g_i^{[k]}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi, \tilde{t}) d\tilde{t} + \bar{\gamma}_i^{[k]}(\varphi, \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$ від точки

$(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$, f^{-1} – функція обер-

нена до функції f стосовно змінної φ .

Функція типу пограншару $\Pi^{[k]} = \sum_{i=0}^{N+1} \Pi_i^{[k]}(\xi, \psi, t) \varepsilon^i$ усуває нев'язки, внесені побудованою регулярною частиною $\bar{c}^{[k]} = \sum_{i=0}^N c_i^{[k]} \varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi = \varphi^*$ (а саме, повинна виконуватись умова: $\bar{c}^{[k]} + \Pi^{[k]} \Big|_{\varphi = \varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^{N+1})$). Для знаходження функцій $\Pi_i^{[k]}(\xi, \psi, t)$ $i = \overline{0, N+1}$ маємо задачу:

$$\begin{cases} h_{k\tau} \Pi_{0\xi\xi}^{[k]} + \Pi_{0\xi}^{[k]} = 0, \\ \Pi_0^{[k]}(0, \varphi, t) = c^*(\psi, t) - c_0^{[k]}(\varphi^*, \psi, t), \quad \Pi_0^{[k]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \left(h_{k\tau} \Pi_{1\xi\xi}^{[k]} + \Pi_{1\xi}^{[k]} \right) = \Pi_{0t}^{[k]} + v^2(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \times \\ \times h_{k\tau\xi}(\varphi^*, \psi, t) \cdot \Pi_{0\xi\xi}^{[k]} + v^2(\varphi^*, \psi) \cdot h_{k\tau\varphi}(\varphi^*, \psi, t) \cdot \Pi_{0\xi}^{[k]}, \\ \Pi_1^{[k]}(0, \varphi, t) = -c_1^{[k]}(\varphi^*, \psi, t), \quad \Pi_1^{[k]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \left(h_{k\tau} \Pi_{i\xi\xi}^{[k]} + \Pi_{i\xi}^{[k]} \right) = d_i^{[k]}, \\ \Pi_i^{[k]}(0, \varphi, t) = \zeta_i^{[k]}, \quad \Pi_i^{[k]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad i = \overline{2, N+1}, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

де

$$\zeta_i^{[k]} = \begin{cases} -c_i^{[k]}(\varphi^*, \psi, t), & \text{якщо } i = \overline{2, N}, \\ 0, & \text{якщо } i = N+1, \end{cases}$$

$$d_i^{[k]}(\xi, \psi, t) = \frac{\partial \Pi_{i-1}^{[k]}}{\partial t} - \sum_{l+j=1}^i \left(V_l \cdot H_{k\tau j} \frac{\partial^2 \Pi_{i-(j+l)}^{[k]}}{\partial \xi^2} \right) - \sum_{l+j=0}^{i-2} \left(V_l \cdot H_{k\tau j} \frac{\partial^2 \Pi_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial \psi^2} \right) +$$

$$+ \sum_{l+j=0}^{i-1} \left(V_l \cdot \left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \varphi} \right)_j \frac{\partial \Pi_{i-1-(j+l)}^{[k]}}{\partial \xi} \right) - \sum_{l+j=0}^{i-2} \left(V_l \cdot \left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \psi} \right)_j \frac{\partial \Pi_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial \psi} \right) - \sum_{l=1}^i \left(V_l \cdot \frac{\partial \Pi_{i-l}^{[k]}}{\partial \xi} \right),$$

$H_{k\tau j}$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \varphi} \right)_j$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \psi} \right)_j$ – коефіцієнти при j -тих степенях ε в роз-

кладі $h_{k\tau}(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi, t)$, $h_{k\tau\varphi}(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi, t)$, $h_{k\tau\psi}(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi, t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, V_l – коефіцієнт при l -тому степені ε в розкладі $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Розв’язок задач (2.2.8) – (2.2.10) шукаємо аналогічно [33]. Зокрема:

$$\Pi_0^{[k]}(\xi, \psi, t) = \left(c^*(\psi, t) - c_0^{[k]}(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*, \psi, t)},$$

$$\Pi_1^{[k]}(\xi, \psi, t) = -\xi \cdot \left(K_1^{[k]}(\psi, t) + K_2^{[k]}(\psi, t) \cdot \left(h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*, \psi, t) + \xi/2 \right) \right) \cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*, \psi, t)},$$

де

$$K_1^{[k]}(\psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot \left(\frac{\partial c^*(\psi, t)}{\partial t} - \frac{\partial c_0(\varphi^*, \psi, t)}{\partial t} - \frac{\partial h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*, \psi, t)}{\partial t} \times \right. \\ \left. \times \left(c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \right) - \frac{h_{k\tau\varphi}(\varphi^*, \psi, t)}{h_{k\tau}(\varphi^*, \psi, t)} \left(c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t) \right), \\ K_2^{[k]}(\psi, t) = \xi \frac{\partial h_{k\tau}(\varphi^*, \psi, t)}{\partial \xi} \cdot h_{k\tau}^{-2}(\varphi^*, \psi, t) \cdot \left(c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t) \right).$$

Отже, тепер можемо зробити висновок, що розв’язок поставлених вище задач відрізняється від аналогічних задач для однопоз’язних чотирикутних криволінійних областей наявністю “пері-

одичності” замість бокових поправок.

2.2.2. Моделювання процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” у тризв’язних областях

2.2.2.1. Процеси конвективної дифузії у випадках переважання їх конвективних складових над дифузійними

Розглянемо модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації в тризв’язній області G_z , обмеженій замкнутими гладкими контурами L_* , L_0 , L^* (рис. 2.10, а):

$$\varepsilon(c_{xx} + c_{yy}) - v_x \cdot c_x - v_y \cdot c_y = c_t, \quad z = x + iy \in G_z, \quad 0 < t < \infty; \quad (2.2.11)$$

$$c|_{L_*} = c_*(P, t), \quad c|_{L_0} = c^0(P, t), \quad c|_{L^*} = c^*(P, t), \quad c|_{t=0} = c_0^0(x, y); \quad (2.2.12)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi^*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \iint_{L_0} -v_y dx + v_x dy = 0, \quad (2.2.13)$$

де P – біжуча точка границі даної області ($P \in \partial G_z = L_* \cup L_0 \cup L^*$), $0 < \varphi_* < \varphi^* < \varphi^* < \infty$, ε – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр), c_* , c^* , c^0 , c_0^0 – задані достатньо гладкі функції, що узгоджені між собою здовж ребер паралелепіпеда $G_z \times (0, \infty)$, $c^0(x, y, t) = c_+^0(x, y, t)$, якщо $\varphi_n(x, y) < 0$, $c^0(x, y, t) = c_-^0(x, y, t)$, якщо $\varphi_n(x, y) \geq 0$, $n = n(P)$ – зовнішня нормаль до контуру L_0 . На рис. 2.10, б) зображена відповідна область комплексного потенціалу G_w

[41], де $w = \phi + i\psi$, $\psi = \psi(x, y)$ функція течії (комплексно спряжена з функцією $\phi(x, y)$). Припускаємо також деяку узгодженість умов на контурах L_* і L_0 , а саме функція c_0 повинна бути такою, щоб розв'язок відповідної (2.2.11), (2.2.12) виродженої задачі був досить гладким уздовж ліній розділу течії, що можливо, наприклад, за умови миттєвого природного (обумовленого значеннями $\psi \in [Q^*, Q_*]$) проходження частинок через басейн, обмежений останнім контуром.

Якщо шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$, де $\Gamma = F^* K^* \cup K^* E^*$ – розріз трив'язної області G_z уздовж однієї з ліній розділу течії, що знаходиться в процесі розв'язання, задача фільтрації (2.2.13) розв'язана, зокрема – знайдені поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ і невідомі параметри Q_* , Q^* (відповідно повна витрата і величина перетоку між контурами L_* і L^*), тоді в області

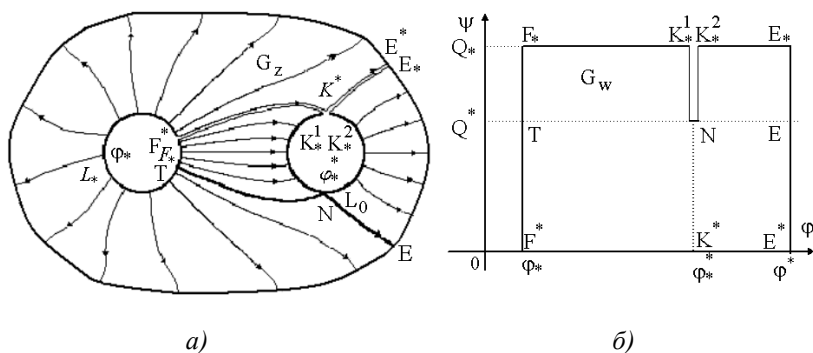


Рис. 2.10. Фізична область (а) і відповідна область комплексного потенціалу (б)

G_w (при переході від змінних (x, y) до змінних (φ, ψ)) задача (2.2.11), (2.2.12) прийме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon v^2(\varphi, \psi)(c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi)c_{\varphi} = c_t, \\ (\varphi, \psi, t) \in G_w^*(0, \infty) = \Omega, \quad v^2(\varphi, \psi) = (z'_w \bar{z}'_w)^{-1}, \\ c(\varphi_*, \psi, t) = c^0(\psi, t) = \begin{cases} c_+^0(\psi, t), \varphi = \varphi_*^+ = \varphi_*^* + 0, \\ c_-^0(\psi, t), \varphi = \varphi_*^- = \varphi_*^* - 0, \end{cases} \\ c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), t \in (0, \infty), \psi \in (0, Q_*), \\ c(\varphi, 0, t) = c(\varphi, Q_*, t), c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \\ c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t). \end{array} \right.$$

Розв'язок даної періодичної щодо змінної ψ задачі шукаємо у вигляді:

$$c = (c_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i + R_n, \quad (2.2.14)$$

де $R_n = O(\varepsilon^{n+1})$ – залишковий член, P_i, P_i – пограншарові поправки відповідно в околах ділянок $\{w: \varphi = \varphi_*^-, Q^* < \psi < Q_*\}$, $\varphi = \varphi^*$ границі G_w . У результаті підстановки (2.2.14) у (2.2.11) і стандартної процедури прирівнювання одержимо такі задачі для знаходження головної частини $c_0(\varphi, \psi, t)$ розв'язку і поправок $c_i(\varphi, \psi, t)$, $i = \overline{1, n}$:

$$v^2(\varphi, \psi)c_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0t}(\varphi, \psi, t) = 0,$$

$$c_0(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), t \in (0, \infty), \psi \in (0, Q_*),$$

$$c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \varphi \in (\varphi_*, \infty), \psi \in (0, Q_*),$$

$$c_0(\varphi_*, \psi, t) = c_+^*(\psi, t), t \in (0, \infty), \psi \in (Q^*, Q_*);$$

$$v^2(\varphi, \psi) c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{ii}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t),$$

$$c_i(\varphi_*, \psi, t) = 0, t \in (0, \infty), \psi \in (0, Q_*),$$

$$c_i(\varphi, \psi, 0) = 0, \varphi \in (\varphi_*, \infty), \psi \in (0, Q_*),$$

$$c_i(\varphi_*, \psi, t) = 0, t \in (0, \infty), \psi \in (Q^*, Q_*),$$

$$g_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} g_{*i}(\varphi, \psi, t) = \left[v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c_{i-1(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1(1)}}{\partial \psi^2} \right), (\varphi, \psi) \in G_{w(1)}, \right. \\ \left. g_i^*(\varphi, \psi, t) = \left[v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c_{i-1(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1(2)}}{\partial \psi^2} \right), (\varphi, \psi) \in G_{w(2)}, \right. \end{cases}$$

$$G_{\omega(2)} = \{ (\varphi, \psi) : \varphi_*^* < \varphi < \infty, Q^* < \psi < Q_* \}, G_{\omega(1)} = G'_{\omega(1)} \cup G''_{\omega(1)} = \\ = \{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, Q^* < \psi < Q_* \} \cup \{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \infty, 0 < \psi \leq Q^* \}.$$

Використовуючи метод характеристик, одержимо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), \quad t \leq f_1(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ &c_*(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), \quad t > f_1(\varphi, \psi), (\varphi, \psi) \in G_{w(1)}, \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} &c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), \quad t \leq f_2(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ &c_+^*(\psi, t - f_2(\varphi, \psi)), \quad t > f_2(\varphi, \psi), (\varphi, \psi) \in G_{w(2)}; \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{*i}(\tilde{\varphi}, \psi, f_1(\varphi, \psi) + t - f_1(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t > f_1(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_{*i}(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq f_1(\varphi, \psi), \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{g_i^*(\tilde{\varphi}, \psi, f_2(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f_2(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t > f_2(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_i^*(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq f_2(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Функції Π_i , P_i , що служать для врахування процесів, обумовлених граничними умовами вздовж відповідних ділянок $\varphi = \varphi_*^*$, $\varphi = \varphi^*$ границі області G_w (виходу фільтраційного потоку), шукаємо аналогічно [33].

Лінію фронту (розділу зон впливу початкової і граничної умов) у фіксований момент часу t знаходимо в результаті розв'язку

$$\text{рівняння } t = f(\varphi, \psi), \text{ де } f(\varphi, \psi) = \begin{cases} f_1(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_{\omega(1)}, \\ f_2(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_{\omega(2)}. \end{cases}$$

2.2.2.2. Процеси типу “фільтрація-конвекція” з умовами усереднення

Розглянемо тепер випадок, коли гранична умова на контурі L_0 певним чином залежить від зміни концентрації у відповідному басейні внаслідок взаємовпливу характеристик процесів у внутрішності L_0 і пористого середовища. Для спрощення викладок дослі-

димо лише фільтраційно-конвективну взаємодію, яку у тривзв'язній криволінійній області G_z (рис. 2.11, а) опишемо нелінійною моделлю задачею [49]:

$$v = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } v = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0,$$

$$v_x \cdot c_x + v_y \cdot c_y - c_t = 0, \quad (x, y, t) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (2.2.15)$$

$$c|_{t=0, (x, y) \in G_z} = c_0^0(x, y),$$

$$c|_{L_* \times (0, \infty)} = c_*(x, y, t), \quad c|_{L_0^* \times (0, \infty)} = \lambda \cdot \ell^{-1} \iint_{L_0^0} c(x, y, t) ds, \quad (2.2.16)$$

де $c_*(x, y, t)$, $c_0^0(x, y)$ – задані досить гладкі та узгоджені на $(\partial G_z, 0)$ функції, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал швидкості фільтрації $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$, $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$, $L_0 = L_0^0 \cup L_0^*$,

$$L_0^* = \{z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} > 0\}, \quad L_0^0 = \{z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} \leq 0\}, \quad n - \text{вектор внутрішньої нормалі до } \partial G_z, \quad \ell - \text{довжина ділянки } L_0^*.$$

Значення потенціалу φ_0 на “контурі-поповнювачі” L_0 є таким, що

$$\iint_{L_0^0} -v_y dx + v_x dy > 0. \quad \text{Друга із умов (2.2.16) (умова усереднення) означає, що басейн, обмежений контуром } L_0, \text{ миттєво розчиняє та перерозподіляє речовину, яка поступає до нього через ділянку } L_0^0, \text{ а, отже, має місце її рівномірний розподіл вздовж } L_0^*.$$

Коефіцієнт λ характеризує ступінь поглинання басейном забруднень (поповнен-

ня при $\lambda > 1$). Відповідна область комплексного потенціалу G_w зображена на рис. 2.11, б), де $w = w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ – комплексний потенціал течії, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії. Щодо шуканих параметрів Q_0^*, Q_*^0, Q_*^* (відповідно величин перетоків: від L_0 до L^* ; від L_* до L_0 , від L_* до L^* , де $Q_0^* - Q_*^0 = \int_{L_0} -v_y dx + v_x dy$, $Q_*^* + Q_0^* = \int_{L_0^*} -v_y dx + v_x dy$, $-Q_*^* - Q_*^0 = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$), відомо лише, що $Q_0^* > Q_*^0$. Аналогічно

[45] розріз $\Gamma = AB \cup BC$ ($A \in L_*$, $B \in L_0$, $C \in L^*$) трив'язної області G_z умовно вибираємо уздовж однієї з ліній розділу течії та знаходимо в процесі розв'язання задачі.

У роботі [45] шляхом побудови наближеного конформного відображення області G_w на вихідну область $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ при відповідності кутових точок знайдено характеристичну функцію течії $z = z(w) = x(\varphi, \psi) + i\psi(\varphi, \psi)$, невідомі параметри Q_0^*, Q_*^0, Q_*^* , координати вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ відповідні вузлам (φ_i, ψ_j) кусково-рівномірної сітки в області комплексного потенціалу G_w (рівномірної в кожній з підобластей $G_w^1 = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi < Q_*^0\}$, $G_w^2 = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_w^3 = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_w^4 = \{w = \varphi + i\psi: \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$ даної області).

Тепер, відповідно до формули для обчислення вектора швид-

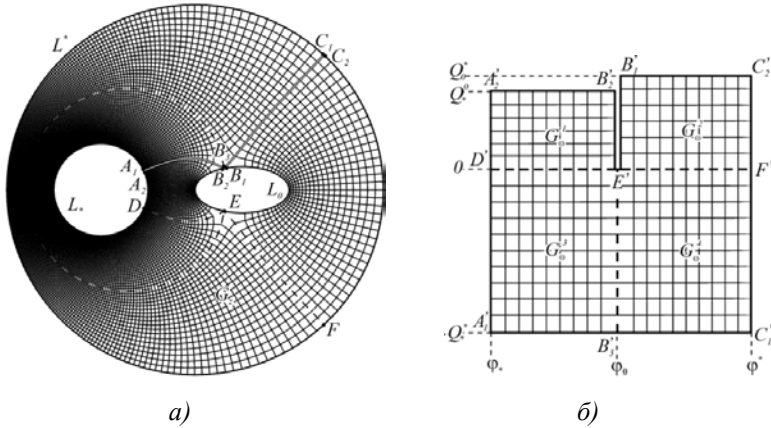


Рис.2.11. Фізична область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w

кості даного поля $\vec{v} = \frac{dw}{dz} = \left(\frac{dz}{dw} \right)^{-1}$, у внутрішніх вузлах динамічної

сітки одержимо: $v_{xi,j} = v_x(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j} - x_{i,j})\Delta\psi$,

$v_{yi,j} = v_y(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j} - y_{i,j})\Delta\psi$, де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j}) \times$

$\times (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})$, $v_{i,j} = \sqrt{v_{xi,j}^2 + v_{yi,j}^2}$. Здійснивши

заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (2.2.15) і умовах (2.2.16), приходимо до відповідної періодичної задачі конвективно-но масопереносу для області G_w :

$$v^2(\varphi, \psi) \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (\varphi, \psi, t) \in \Omega = G_w \times (0, \infty);$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_w; \quad c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad t \geq 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0;$$

$$c(\varphi_0^+, \psi, t) = \frac{\lambda \int_0^{\varphi_0^+} c(\varphi_0^-, \psi, t) d\psi}{Q_0^*}, \quad 0 < \psi \leq Q_0^*, \quad \varphi_0^+ = \varphi_0 + 0, \quad \varphi_0^- = \varphi_0 - 0.$$

Згідно з методом характеристик, її розв'язок запишемо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t \leq f_1(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ c_*(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), & t > f_1(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4; \\ c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t \leq f_2(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \\ \frac{\lambda \int_0^{\varphi_0^+} c(\varphi_0^-, \psi, t - f_2(\varphi, \psi)) d\psi}{Q_0^*}, & t > f_2(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^2, \end{cases}$$

де f_1^{-1} , f_2^{-1} – функції, обернені відповідно до функцій f_1 , f_2 щодо змінної φ (такі функції існують, оскільки f_1 , f_2 є монотонно зростаючими та неперервно диференційованими функціями щодо даної змінної). Зауважимо, що змінна ψ тут фігурує як параметр.

Лінію фронту конвективного переносу (розділу зон впливу початкової і граничної умов) у фіксований момент часу t знаходимо в результаті розв'язання рівняння $t = f(\varphi, \psi)$, де

$$f(\varphi, \psi) = \begin{cases} f_1(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ f_2(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^2. \end{cases}$$

Для наближеного обчислення виразів $f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t, \psi)$, $f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t, \psi)$ (у тому числі для обернення відповідних визначених інтегралів із змінною верхньою границею) використовуємо підхід, запропонований Бомбою А. Я. [33]. А саме, провівши дискретизацію часу t , наприклад, за формулою $t_k = \Delta t \cdot k$, $k=0, 1, 2, \dots$, $0 < \Delta t < \infty$, використовуючи метод трапецій обчислення визначених інтегралів і метод хорд розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо (з метою спрощення запису розв'язків розглянемо випадок $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$):

$$c(\varphi_i, \psi_j, t_k) = \begin{cases} (\varphi_r + (\varphi_{r+1} - \varphi_r)(t_r^0 - t_r)(t_{r+1} - t)^{-1}, \psi_j), & t_k \leq f(\varphi_i, \psi_j), \\ c_*(\psi_j, t_k - t_j), & t_k > f(\varphi_i, \psi_j), \\ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ c_0^0(\varphi_r + (\varphi_{r+1} - \varphi_r)(t_r^* - t_r)(t_{r+1} - t_r)^{-1}, \psi_j), & t_k \leq f(\varphi_i, \psi_j), \\ Q_0^{*-1} \cdot \lambda \sum_{q=m_1+1}^{m_1+m_2} (c(\varphi_0^-, \psi_q, t_k - f(\varphi_i, \psi_j)) \cdot (\psi_q - \psi_{q-1})), & t_k > f(\varphi_i, \psi_j), \\ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^2, \end{cases}$$

$$\text{де } \psi_q = \begin{cases} -Q_*^* + Q_*^* \cdot q / m_1, & \text{при } 0 \leq q \leq m_1, \\ Q_*^0 \cdot q / m_2, & \text{при } m_1 < q \leq m_2, \end{cases} \quad m_1, m_2 \in N, \quad \varphi_r = f_1^{-1}(t_r),$$

$$\varphi_{r+1} = f_1^{-1}(t_{r+1}), \quad t_r < t_r^0 = f_1(\varphi_i, \psi_j) - t_k < t_{r+1}, \quad \text{при } (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4,$$

$$\varphi_r = f_2^{-1}(t_r), \quad t_r < t_r^* = f_2(\varphi_i, \psi_j) - t_k < t_{r+1}, \quad \varphi_{r+1} = f_2^{-1}(t_{r+1}) \quad \text{при } (\varphi, \psi) \in G_\omega^2.$$

2.2.3. Моделювання процесів конвективної дифузії у чотирих зв'язних областях

Розглянемо модельну задачу конвективної дифузії при фільтрації в нескінченній області (пористому пласті) G_z скінченної комплексної площини (z) , обмеженій трьома замкнутими гладкими контурами L_1, L_2, L_3 , у випадку, коли конвективний механізм масопереносу превалює над дифузійним:

$$\varepsilon(c_{xx} + c_{yy}) - v_x c_x - v_y c_y = c_t, \quad (2.2.17)$$

$$c|_{L_i} = c_i^*(P, t), \quad c(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad c|_{t=0} = c_0^0(x, y), \quad (2.2.18)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad} \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_i} = \varphi_i, \quad \iint_{L_i} -v_y dx + v_x dy = Q_i, \quad (2.2.19)$$

де $i = \overline{1, 3}$, $0 < Q_i < \infty$, $\varphi \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, P – біжуча точка відповідної ділянки границі даної області ($P \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$), $z = x + iy \in G_z$, $0 < t < \infty$, $(x, y, t) \in G_z \times (0, \infty)$, ε – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр), φ_i – задані значення потенціалу $\varphi(x, y)$ на граничних екіпотенціальних лініях ($-\infty < \varphi_i < \infty, i = \overline{1, 3}$), $c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_0^0$ – задані достатньо гладкі та узгоджені функції [34].

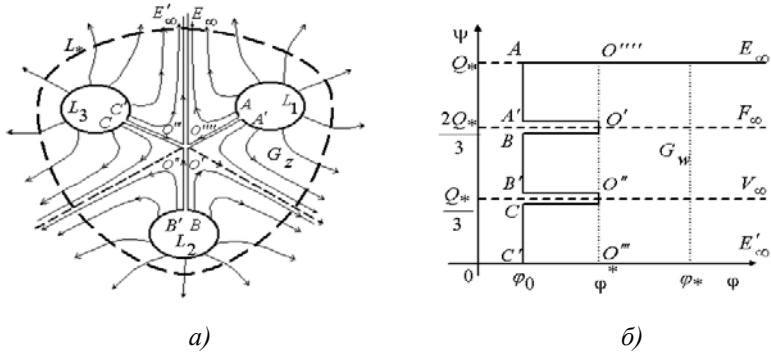


Рис. 2.12. Фізична чотирирів'язна область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w

Розглянемо випадок $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_0$ (тоді $Q_{AA'} = Q_{BB'} = Q_{CC'} = Q_*/3$). Фізична область фільтрації G_z , на фоні якої відбувається конвективно-дифузійне перенесення частинок, зображена на рис. 2.12, а). На рис. 2.12, б) зображено відповідну область комплексного потенціалу G_w , де $w = \varphi + i\psi$, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до функції $\varphi = \varphi(x, y)$). Припустимо, що задача (2.2.19), з використанням конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$. Тоді, шляхом переходу від змінних (x, y) до (φ, ψ) області комплексного потенціалу G_w , задачу (2.2.17)-(2.2.18) зведемо до відповідної періодичної задачі:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi)(c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi)c_{\varphi} = c_t, \quad (\varphi, \psi, t) \in G_w \times (0, \infty) = \Omega, \quad \overset{df}{}$$

$$c(\varphi_1, \psi, t) = c^*(\psi, t) = \begin{cases} c_1^*(\psi, t), & \frac{2Q_*}{3} < \psi \leq Q_*, t \in (0, \infty), \\ c_2^*(\psi, t), & \frac{Q_*}{3} < \psi \leq \frac{2Q_*}{3}, t \in (0, \infty), \\ c_3^*(\psi, t), & 0 \leq \psi \leq \frac{Q_*}{3}, t \in (0, \infty), \end{cases}$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad c(\varphi^*, 0, t) = c(\varphi^*, \frac{Q_*}{3}, t) = c(\varphi^*, \frac{2Q_*}{3}, t) = c(\varphi^*, Q_*, t),$$

$$c|_{AO} = c|_{A'O'}, \quad c|_{BO'} = c|_{B'O''}, \quad c|_{CO''} = c|_{C'O''}, \quad c|_{OE_\infty} = c|_{O''E'_\infty}, \quad (2.2.20)$$

причому $v^2(\varphi, \psi) = \vec{v} \vec{v} = v_x^2 + v_y^2$.

У випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов, зокрема, при виконанні умов $c|_A = c|_{C'}$, $c|_{A'} = c|_B$, $c|_{B'} = c|_C$, розв'язок задачі (2.2.20) шукаємо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \left(c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i \right) + r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.2.21)$$

де $r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – залишковий член, $c_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики: c_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (задачі конвективного переносу); c_1, \dots, c_n – поправки, що враховують вплив дифузії.

Здійснивши підстановку (2.2.21) в (2.2.20) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій $c_i(\varphi, \psi, t)$ приходимо до та-

ких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)c_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0r}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ c_0(\varphi_1, \psi, t) = c^*(\psi, t), \\ c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \varphi \in (\varphi_1, \infty), \psi \in (0, Q_*), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{ir}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ g_i(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \psi^2} \right), (\varphi, \psi) \in G_w, \\ c_i(\varphi_1, \psi, t) = 0, t \in (0, \infty), \psi \in (0, Q_*), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = 0, \varphi \in (\varphi_*, \infty), \psi \in (0, Q_*). \end{cases}$$

В результаті їх розв'язання матимемо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ c_1^*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ (\varphi, \psi) \in G_{w(1)}, \\ c_0^2(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ c_2^*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ (\varphi, \psi) \in G_{w(2)}, \\ c_0^3(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ c_3^*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ (\varphi, \psi) \in G_{w(3)}, \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} K_i^1(\varphi, \psi, t), & (\varphi, \psi) \in G_{w(1)}, \\ K_i^2(\varphi, \psi, t), & (\varphi, \psi) \in G_{w(2)}, \\ K_i^3(\varphi, \psi, t), & (\varphi, \psi) \in G_{w(3)}, \end{cases}$$

$$K_i^j(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{g_{ji}(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_{ji}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$, від точки $(\varphi_0, \tilde{\psi})$ до точки $(\varphi, \tilde{\psi})$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{v^2}$ – неперервно диференційована, обмежена, додатно визначена),

$$g_{ki}(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial \psi^2} \right), \quad (\varphi, \psi) \in G_{w(k)}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$G_w = G_{w(1)} \cup G_{w(2)} \cup G_{w(3)}, \quad G_{w(1)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_1 \leq \varphi < \infty, 2 \cdot 3^{-1} Q_* < \psi \leq Q_*\},$$

$$G_{w(2)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_1 \leq \varphi < \infty, 3^{-1} Q_* < \psi \leq 2 \cdot 3^{-1} Q_*\},$$

$$G_{w(3)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_1 \leq \varphi < \infty, 0 \leq \psi \leq 3^{-1} Q_*\}.$$

Якщо фізична область G_z обмежена зовнішнім контуром L_* ,

де $\varphi|_L = \varphi_*$, то задавши додаткову умову $c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t)$ на цьому контурі, розв'язок задачі (2.2.20) шукатимемо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \left(c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i \right) + \pi(\varphi, \psi, t) + r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.2.22)$$

де $\pi(\varphi, \psi, t)$ – функція типу пограншару в околі $\varphi = \varphi_*$, яка служить для врахування дифузійних процесів вздовж границі виходу фільтраційного потоку і знаходиться аналогічно роботі [34].

Всюди в області $\Omega^* = \Omega \setminus (\Omega_0 \times (0, t^*))$, де t^* довільне додатне дійсне число, Ω_0 – об'єднання довільних околів точок O', O'', O''', O'''' – образів точки $O \in G_z$ (де швидкість перетворюється в нуль), має місце така оцінка залишкового члена асимптотичного ряду (2.2.22):

$$|r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (2.2.23)$$

Дійсно, в результаті проведеної процедури прирівнювання, для оцінки R_n маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \cdot (r_{n\varphi\varphi} + r_{n\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) \cdot r_{n\varphi} &= r_{nt} + \varepsilon^{n+1} \cdot r_n^*(\varphi, \psi, t) + r_n^{**}(\varphi, \psi, t, \varepsilon); \\ r_n(\varphi_0, \psi, t, \varepsilon) &= 0, \quad r_n(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R_n(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

де, в силу достатньої гладкості та сильної узгодженості початкової та граничних умов, R_n^* – неперервна та рівномірно обмежена в G функція, $r_n^{**} = O(\varepsilon^{n+1})$. Отже, на основі принципу максимуму для па-

раболічних рівнянь, приходимо до оцінки (2.2.23).

У випадку недостатньої узгодженості функцій $c_1^*(\varphi, \psi, t)$, $c_2^*(\varphi, \psi, t)$, $c_3^*(\varphi, \psi, t)$ проведемо процедуру згладження відповідних негладкостей вздовж ліній течії $\psi_0=0$ ($\psi_3=Q_*$), $\psi_1=\frac{Q_*}{3}$, $\psi_2=\frac{2Q_*}{3}$.

Розв'язок даної задачі у цьому випадку шукаємо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \tilde{c}_0(\varphi, \psi, t) + s_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \tilde{c}_1(\varphi, \psi, t) + s_1(\varphi, \psi, t) + \\ + \pi(\varphi, \psi, t) + r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon),$$

де

$$\tilde{c}_0(\varphi, \psi, t) = 3^{-1} \left(\bar{c}_0(\varphi^*, \psi_0, t) + \bar{c}_0(\varphi^*, \psi_1, t) + \bar{c}_0(\varphi^*, \psi_2, t) \right) \times \\ \times (1 - \Phi(K(\varphi, \psi))) + \bar{c}_0(\varphi, \psi, t) \cdot \Phi(K(\varphi, \psi)), \\ K(\varphi, \psi) = \left(\sqrt{(\varphi - \varphi_*)^2 + (\psi - \psi_0)^2} \cdot (\psi - \psi_1)^2 \cdot (\psi - \psi_2)^2 \cdot (\psi - \psi_3)^2 \right) \varepsilon^{-1}, \\ \bar{c}_0(\varphi, \psi, t) = c_0^1(\varphi, \psi, t) \cdot (1 - D_1((\psi - \psi_0)(\psi - \psi_1)) \cdot \Phi(K_0(\varphi, \psi)) \cdot \Phi(K_1(\varphi, \psi))) 2^{-1} + \\ + c_0^2(\varphi, \psi, t) \cdot (1 - D_2((\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)) \cdot \Phi(K_1(\varphi, \psi)) \cdot \Phi(K_2(\varphi, \psi))) 2^{-1} + c_0^3(\varphi, \psi, t) \times \\ \times (1 - D_3((\psi - \psi_2)(\psi - \psi_3)) \cdot \Phi(K_0(\varphi, \psi)) \cdot \Phi(K_2(\varphi, \psi))) 2^{-1}, \\ K_0(\varphi, \psi) = \left(\sqrt{(\psi - \psi_1)^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi - \psi_1)^2 + (\varphi - \varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*) \right) \varepsilon^{-1}; \\ K_1(\varphi, \psi) = \left(\sqrt{(\psi - \psi_2)^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi - \psi_2)^2 + (\varphi - \varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*) \right) \varepsilon^{-1}; \\ K_2(\varphi, \psi) = \left(\sqrt{(\psi - \psi_0)^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi - \psi_0)^2 + (\varphi - \varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*) \right) \varepsilon^{-1} \times \\ \times \left(\sqrt{(\psi - \psi_3)^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} \cdot \varepsilon^{-1} + \left(\sqrt{(\psi - \psi_3)^2 + (\varphi - \varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*) \right) \varepsilon^{-1} \right);$$

$$\Phi(\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta} e^{-\frac{s^2}{2}} ds; D_1(\Theta) = D_3(\Theta) = \begin{cases} 1, & \Theta > 0 \\ -1, & \Theta \leq 0 \end{cases}; D_2(\Theta) = \begin{cases} 1, & \Theta \geq 0 \\ -1, & \Theta < 0 \end{cases}.$$

Для знаходження функції $s_0(\varphi, \psi, t) = s_{00}(\varphi, \psi, t) + \sqrt{\varepsilon} \cdot s_{01}(\varphi, \psi, t)$

маємо задачу:

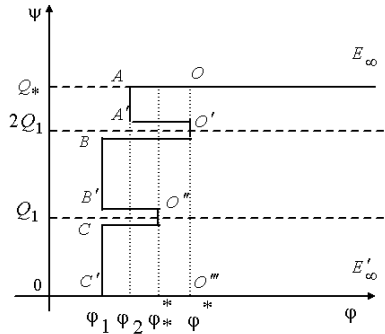
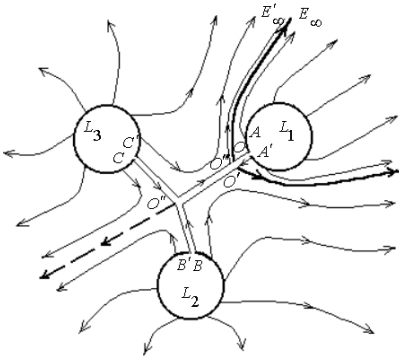
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) (\tilde{c}_0 + s_0)_{\varphi\varphi} + (\tilde{c}_0 + s_0)_{\psi\psi} - v^2(\varphi, \psi) (\tilde{c}_0 + s_0)_{\varphi} = (\tilde{c}_0 + s_0)_t, \\ \tilde{c}_0 + s_0|_{t>0, \varphi=0} = \begin{cases} c_1(\psi, t), & 2 \cdot 3^{-1} Q_* < \psi \leq Q_*, \\ c_2(\psi, t), & 3^{-1} Q_* < \psi \leq 2 \cdot 3^{-1} Q_*, \\ c_3(\psi, t), & 0 \leq \psi \leq 3^{-1} Q_*, \end{cases} \quad \tilde{c}_0 + s_0|_{t=0, \varphi>0} = c_0^0(\varphi, \psi). \end{array} \right.$$

Згладження регулярної поправки c_1 асимптотики та побудова функції $s_1(\varphi, \psi, t)$ проводяться аналогічно.

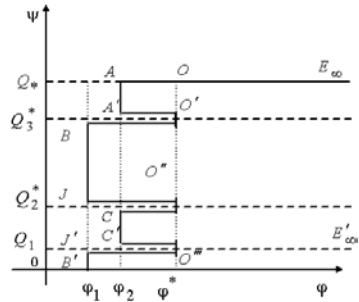
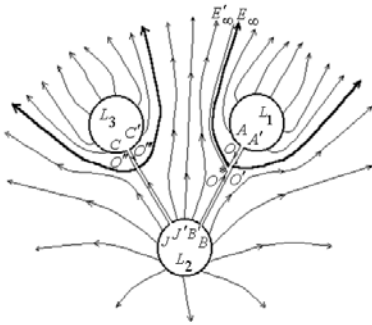
В залежності від співвідношення заданих значень граничних потенціалів φ_i на контурах L_i (а, отже, й витрат Q_1, Q_2, Q_3), можливі різні випадки формування течії в області G_z та відповідних областей комплексного потенціалу G_w . Запропонований вище підхід знаходження побудови асимптотики розв'язку вище поставленої задачі можна поширити і на випадки, коли $Q_{AA'} < Q_{BB'} = Q_{CC'}$, $Q_{AA'} = Q_{CC'} < Q_{BB'}$, $Q_{AA'} < Q_{CC'} < Q_{BB'}$ (рис. 2.13, а)-в) відповідно).

2.2.4. Результати числових експериментів

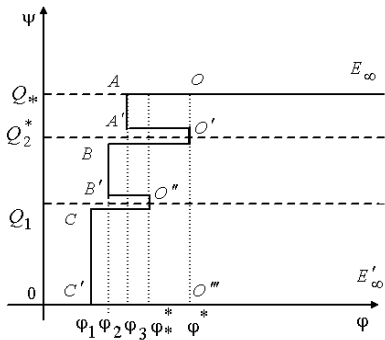
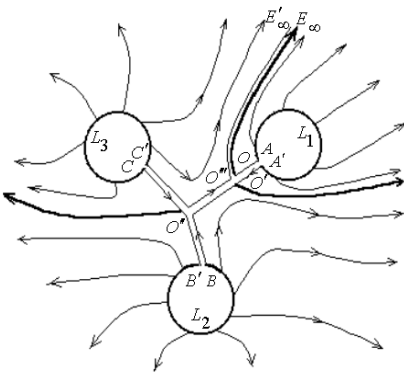
Наведемо результати розрахунку процесу “конвекція-дифузія” із запізненням (див. п. 2.2.1) на ідеальному фільтраційно-



a)



б)



в)

Рис. 2.13. Основні випадки формування течії у чотирив'язній області

му фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-1.6$, $\varphi^*=-0.6$.

На рис.2.14, а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z :

$\varphi(x, y)=\bar{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)i)/10$, $\psi(x, y)=\bar{\psi}_j = (Q_*j)/30$, $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,30}$, величину швидкості фільтрації $v=((dz/dw)\overline{(dz/dw)})^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) , та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi)=t_k, k=\overline{1,5}$, при $t_1=0.219$, $t_2=0.945$, $t_3=2.449$, $t_4=5.938$,

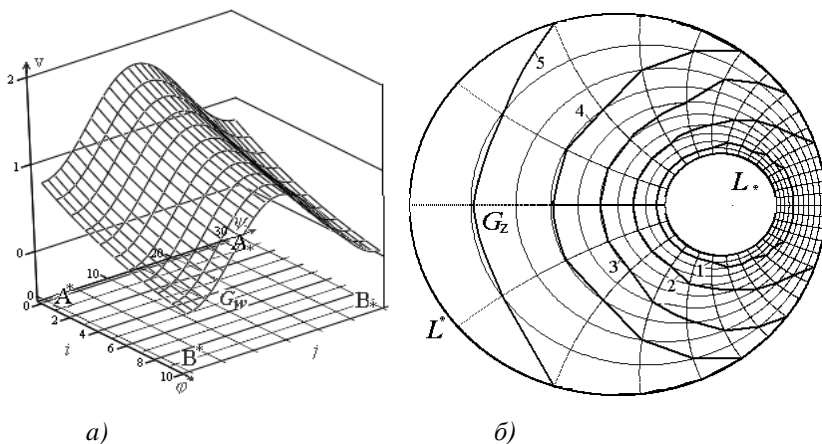


Рис. 2.14. Величина швидкостей над полем комплексного потенціалу G_w (а) та відповідна динамічна сітка G_z із лініями фронту конвективного переносу (б).

$t_5=15.594$ (криві 1 – 5 відповідно).

Розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, t)$ розчинної речовини при $\tau=0.28$, $h(c(\varphi, \psi, t))=2 \cdot c(\varphi, \psi, t)$, $c_0^0(\varphi, \psi)=10^{-2} e^{\sin(\psi/2)} / (\varphi+2)$, $c_*(\psi, t)=10^{-2} e^{\sin(\psi/2)} e^{t/10} / 0.4$, $c^*(\psi, t)=10^{-2} e^{\sin(\psi/2)} e^{t/2} / 1.4$, над полем комплексного потенціалу G_w в моменти часу $t_1=0.07$, $t_2=0.162$, $t_3=0.33$, $t_4=0.56$ зображено на рис. 2.15, а)-г) відповідно.

На рис. 2.11, а) зображена динамічна сітка фільтраційного потоку для поставленої в п. 2.2.2.1 задачі при: $L_*=\{x+iy: x=x_*(t)=-2+\cos(t), y=y_*(t)=\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^*=\{x+iy: x=x^*(t)=4\cos(t), y=y^*(t)=4\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0=\{x+iy: x=x_0(t)=1+\cos(t), y=y_0(t)=\sin(t)/2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $\varphi_*=0$, $\varphi_0=0.6$, $\varphi^*=1$. Розподіл швидкості уздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1^*=0$, $\varphi_2^*=0.2$, $\varphi_3^*=0.4$, $\varphi_4^*=0.6$, $\varphi_5^*=0.8$, $\varphi_6^*=0.9$, $\varphi_7^*=1$ зображено на рис. 2.16. Лінії фронту в моменти часу $t_1^*=0.801$, $t_2^*=1.605$, $t_3^*=3.175$, $t_4^*=7.756$, $t_5^*=16.174$, $t_6^*=26.430$ зображені на рис. 2.17. Розподіли конвективної складової концентрації розчинної речовини при $c_0^0(\varphi, \psi)=10^{-1} e^{-\varphi}$, $c_*(\psi, t)=0.1$, $c_+(\psi, t)=0.052$ уздовж вказаних вище еквіпотенціальних ліній у різні моменти часу представлені на рис. 2.18.

Розподіли концентрації розчинної речовини задачі з п. 2.2.2.2 при $c_0^0(\varphi, \psi)=10^{-1} e^{-\varphi}$, $c_*(\psi, t)=0.15$, $\lambda=1$ уздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1^*=0$, $\varphi_2^*=0.2$, $\varphi_3^*=0.4$, $\varphi_4^*=0.6$, $\varphi_5^*=0.8$, $\varphi_6^*=0.9$,

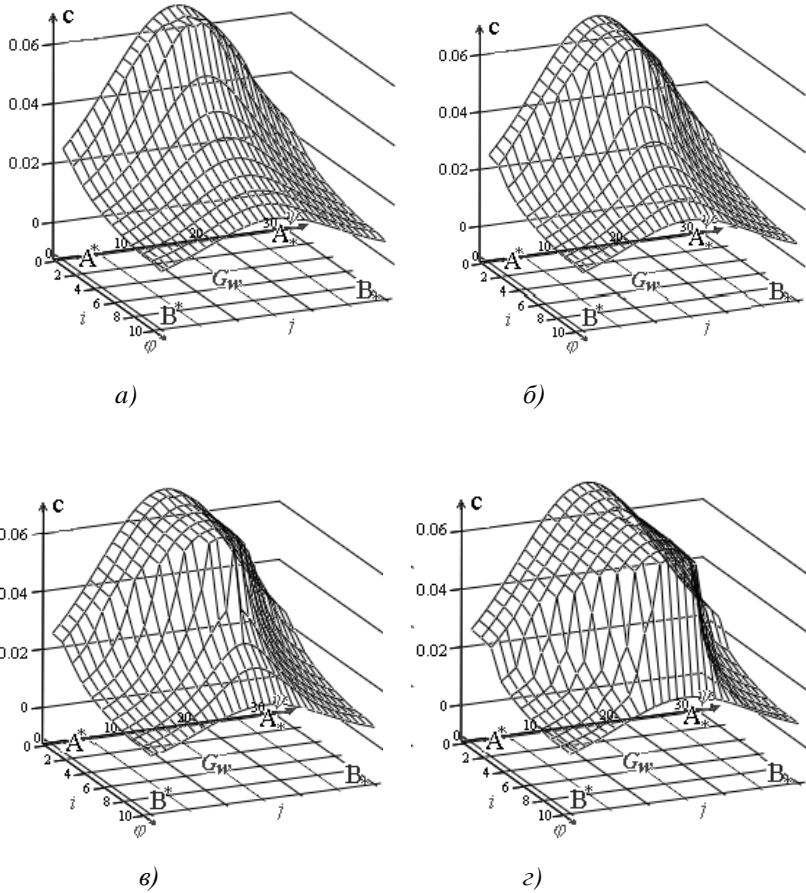


Рис.2.15. Розподіл концентрації забруднюючої речовини над полем комплексного потенціалу.

$\varphi_7^* = 1$ у різні моменти часу представлені на рис. 2.19. Звідки бачимо, що процес швидкого перемішування (усереднення) розчинної речовини та поповнення течії (на $Q_0^* - Q_*^0$) басейном, обмеженим контуром L_0 , приводить до суттєвого зменшення забруднень поза

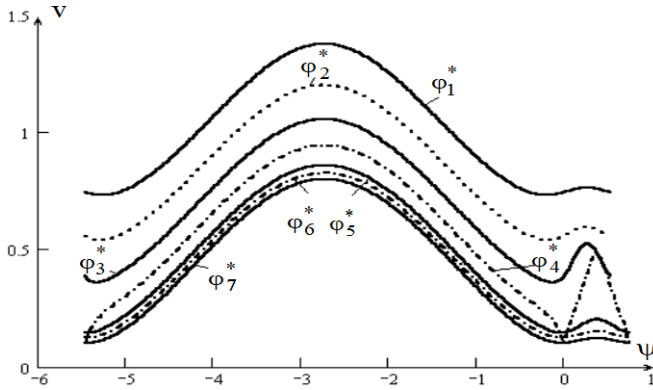


Рис. 2.16 Розподіл швидкості фільтрації

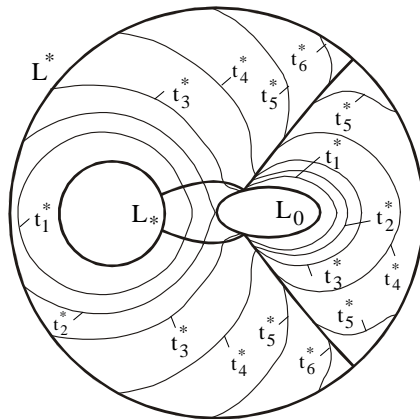


Рис.2.17. Лінії фронту конвективного переносу

даним басейном.

Для задачі з п. 2.2.3 розглянемо плоске ідеальне поле на площині $z=x+iy$, породжене трьома особливими точками – витоками $z=z_1, z_2, z_3$ однакової інтенсивності $Q=Q_*/3$ (кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від двох інших і належить колу $|z|=1$)

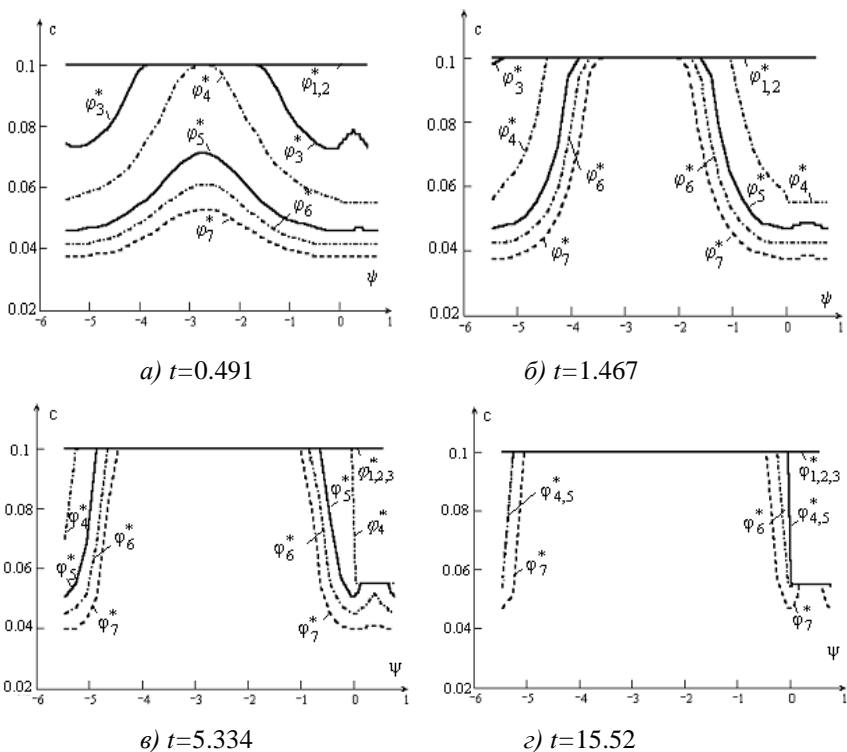


Рис. 2.18. Розподіл концентрації забруднюючої речовини

і точкою стоку $z=\infty$. Комплексний потенціал такого поля запишемо у вигляді:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_1) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_2) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_3) = \frac{Q}{2\pi} \ln((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)).$$

Звідси

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{(z-z_2)(z-z_3) + (z-z_1)(z-z_3) + (z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

(зокрема $\bar{v}(z)=0$),

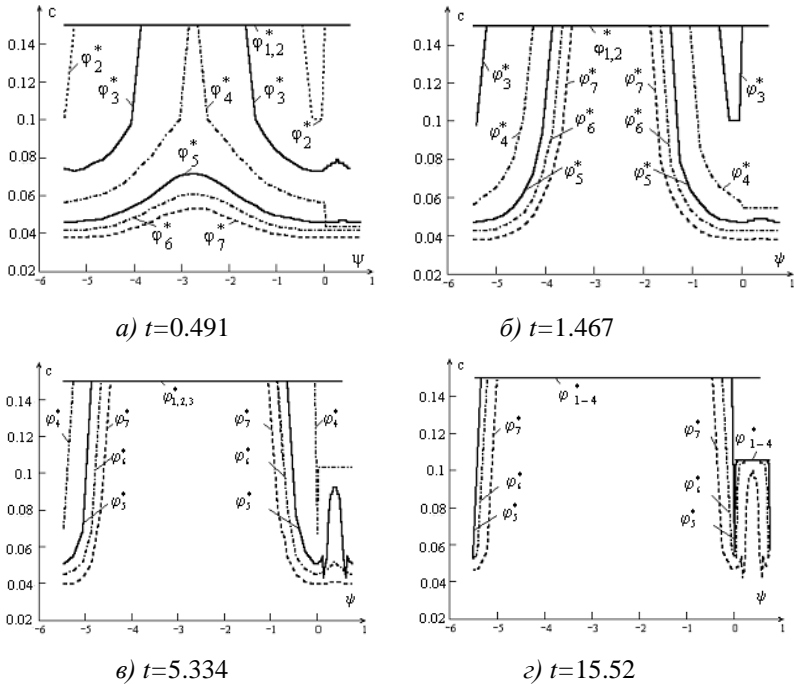


Рис. 2.19 Розподіл концентрації забруднюючої речовини

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y) = & (Q/4\pi) \ln \left((M(x, y) \cdot (x - x_3) - N(x, y) \cdot (y - y_3))^2 + \right. \\
 & \left. + (M(x, y) \cdot (y - y_3) + N(x, y) \cdot (x - x_3))^2 \right), \tag{2.2.24}
 \end{aligned}$$

причому $\varphi(0, 0) = \varphi^* = 0$,

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y) = & \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{M(x, y)(y - y_3) + N(x, y)(x - x_3)}{N(x, y)(x - x_3) + N(x, y)(y - y_3)} + \right. \\
 & \left. + S(M(x, y)(x - x_3) + N(x, y)(y - y_3), M(x, y)(y - y_3) + N(x, y)(x - x_3)) \right),
 \end{aligned}$$

де

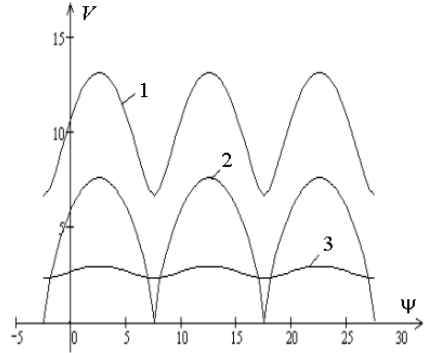
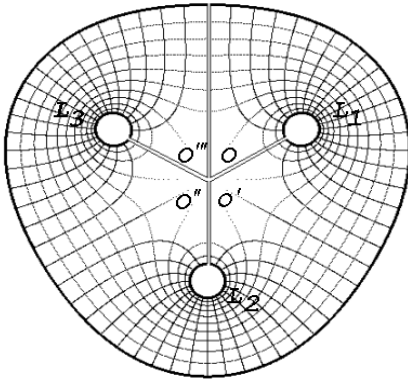


Рис. 2.20. Динамічна сітка Рис. 2.21. Розподіл швидкостей $V=|\vec{v}|$

$$M(x, y) = (x - x_1)(x - x_2) - (y - y_1)(y - y_2), \quad N(x, y) = (x - x_2)(y - y_1) - (y - y_2)(x - x_1), \quad x_k + y_k \cdot i = z_k, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$S(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ \pi, & \text{при } x < 0, \\ 2\pi, & \text{при } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Поклавши в (2.2.24) $\varphi = \varphi_0 < \varphi^*$, знайдемо рівняння відповідних басейнів витoku навколо точок z_1, z_2, z_3 :

$$(M(x, y) \cdot (x - x_3) - N(x, y) \cdot (y - y_3))^2 + (M(x, y) \cdot (y - y_3) + N(x, y) \cdot (x - x_3))^2 = \exp(4\pi\varphi_0 / Q) \quad (2.2.25)$$

(тут крива шостого порядку (2.2.25) розкладається на три замкнені криві 2-го порядку).

Відповідну динамічну сітку $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_l, \quad \psi(x, y) = \overline{\psi}_j,$ при

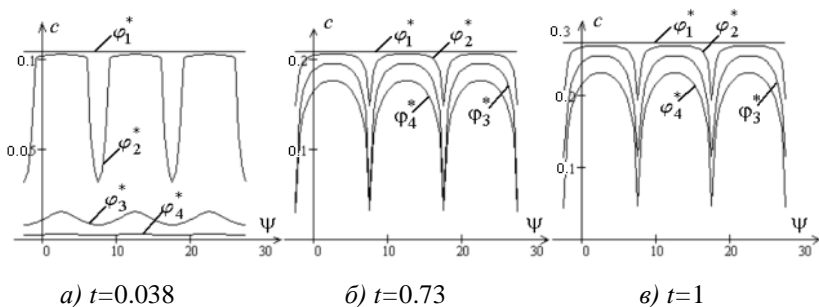


Рис. 2.22. Розподіл концентрації забруднюючої речовини.

$z_1 = -i$, $z_2 = \sqrt{3}/2 + i/2$, $z_3 = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $\varphi_0 = -1.2$, $\varphi_* = 2.8$, $Q = 10$, $l = \overline{1,10}$, $j = \overline{1,60}$, $\bar{\varphi}_l = \varphi_0 + ((\varphi_* - \varphi_0)l)/10$, $\bar{\psi}_j = (Q_*j)/60$ зображено на рис. 2.20. Розподіл швидкостей вздовж еквіпотенціальних ліній при $\varphi = \varphi_0, \varphi^*, \varphi_*$ зображено на рис. 2.21 (криві 1-3 відповідно). Ілюстрації розподілу концентрації розчинної речовини при $c_0^0(\varphi, \psi) = 10^{-1} e^{-(\varphi+1.2)}$, $c_1(\psi, t) = c_2(\psi, t) = c_3(\psi, t) = 10^{-1} e^t$ вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1^* = -1.2$, $\varphi_2^* = 0$, $\varphi_3^* = 1.6$, $\varphi_4^* = 2.8$ подано на рис. 2.22.

2.3. Просторові сингулярно збурені задачі типу “фільтрація-конвекція-дифузія”

2.3.1. Просторові задачі конвективного переносу (метод характеристик)

Наведемо розв’язки декількох типів задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку, які представ-

ляють як самостійне значення (при розв'язанні задач типу конвективного масопереносу), так і допоміжне (при побудові асимптотичних розв'язків сингулярно збурених задач типу “дифузія-конвекція-фільтрація”).

1. Розв'язок рівняння з розділеними змінними

$$a_1(x)a_2(y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x)b_2(y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = g(x, y),$$

у першому координатному куті при умовах

$$u|_{x=0, y>0} = \varphi(y), \quad u|_{x>0, y=0} = \psi(x),$$

методом характеристик, аналогічно [34–36], отримаємо у вигляді

$$u(x, y) = \begin{cases} e^{-\int_0^x \frac{c(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))}{a_1(\bar{x})a_2(\bar{y}(\bar{x}))} d\bar{x}} (\varphi(f_2^{*-1}(f_2^*(y)) - f_1^*(x))) + \\ + \int_0^x e^{-\int_0^{\bar{x}} \frac{c(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))}{a_1(\bar{x})a_2(\bar{y}(\bar{x}))} d\bar{x}} \frac{g(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))}{a_1(\bar{x})a_2(\bar{y}(\bar{x}))} d\bar{x} \text{ при } y > f^*(x), \\ e^{-\int_0^y \frac{c(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y})}{b_1(\bar{x}(\bar{y}))b_2(\bar{y})} d\bar{y}} (\psi(f_1^*(f_1^*(x)) - f_2^*(y))) + \\ + \int_0^y e^{-\int_0^{\bar{y}} \frac{c(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y})}{b_1(\bar{x}(\bar{y}))b_2(\bar{y})} d\bar{y}} \frac{g(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y})}{b_1(\bar{x}(\bar{y}))b_2(\bar{y})} d\bar{y} \text{ при } y < f^*(x), \end{cases}$$

де $f_1^*(x) = \int_0^x \frac{b_1(\bar{x})}{a_1(\bar{x})} d\bar{x}$, $f_2^*(y) = \int_0^y \frac{a_2(\bar{y})}{b_2(\bar{y})} d\bar{y}$, $y = f^*(x) \equiv f_2^{*-1}(f_1^*(x))$, f_2^{*-1}

– функція обернена до f_2^* .

2. Аналогічно отримаємо розв'язок такої кутової задачі:

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(x, y, t)u = g(x, y, t);$$

$$u|_{x=0, y>0, t>0} = h_1(y, t), \quad u|_{x>0, y=0, t>0} = h_2(x, t), \quad u|_{x>0, y>0, t=0} = h_3(x, y)$$

у вигляді:

$$u = \left[\begin{aligned} & e^{-\int_0^x \frac{p(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{t}(\bar{x}))}{a(\bar{x})} d\bar{x}} (h_1(f_2^{-1}(f_2(y) - f_1(x)); f_3^{-1}(f_3(t) - f_1(x))) + \\ & + \int_0^x e^{\int_0^{\bar{x}} \frac{p(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{t}(\bar{x}))}{a(\bar{x})} d\bar{x}} \frac{g(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{t}(\bar{x}))}{a(\bar{x})} d\bar{x}), \quad f_2(y) > f_1(x), f_3(t) > f_1(x); \\ & e^{-\int_0^y \frac{p(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y}, \bar{t}(\bar{y}))}{b(\bar{y})} d\bar{y}} (h_2(f_1^{-1}(f_1(x) - f_2(y)); f_3^{-1}(f_3(t) - f_2(y))) + \\ & + \int_0^y e^{\int_0^{\bar{y}} \frac{p(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y}, \bar{t}(\bar{y}))}{b(\bar{y})} d\bar{y}} \frac{g(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y}, \bar{t}(\bar{y}))}{b(\bar{y})} d\bar{y}), \quad f_1(x) > f_2(y), f_3(t) > f_2(y); \\ & e^{-\int_0^t \frac{p(\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t}), \bar{t})}{c(\bar{t})} d\bar{t}} (h_3(f_1^{-1}(f_1(x) - f_3(t)); f_2^{-1}(f_2(y) - f_3(t))) + \\ & + \int_0^t e^{\int_0^{\bar{t}} \frac{p(\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t}), \bar{t})}{c(\bar{t})} d\bar{t}} \frac{g(\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t}), \bar{t})}{c(\bar{t})} d\bar{t}), \quad f_1(x) > f_3(t), f_2(y) > f_3(t); \end{aligned} \right.$$

$$\text{де } f_1(x) = \int_0^x \frac{d\bar{x}}{a(\bar{x})}, \quad f_2(y) = \int_0^y \frac{d\bar{y}}{b(\bar{y})}, \quad f_3(t) = \int_0^t \frac{d\bar{t}}{c(\bar{t})}.$$

3. Аналогічно отримуємо розв'язок задачі Коші для такого лінійного диференціального рівняння з чотирма змінними:

$$a_1(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_3(x_3) \frac{\partial u}{\partial x_3} + a_4(x_4) \frac{\partial u}{\partial x_4} +$$

$$+a(x_1, x_2, x_3, x_4)u = g(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$u|_{x_4=0} = \varphi_4(x_1, x_2, x_3),$$

у вигляді

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{-\int_0^{x_4} \frac{a(\bar{x}_1(\bar{x}_4), \bar{x}_2(\bar{x}_4), \bar{x}_3(\bar{x}_4), \bar{x}_4)}{a_4(\bar{x}_4)} d\bar{x}_4} \times$$

$$\times \left(\int_0^{x_4} e^{\int_0^{\bar{x}_4} \frac{a(\bar{x}_1(\bar{x}_4), \bar{x}_2(\bar{x}_4), \bar{x}_3(\bar{x}_4), \bar{x}_4)}{a_4(\bar{x}_4)} d\bar{x}_4} \cdot \frac{g(\bar{x}_1(\bar{x}_4), \bar{x}_2(\bar{x}_4), \bar{x}_3(\bar{x}_4), \bar{x}_4)}{a_4(\bar{x}_4)} d\bar{x}_4 + \right.$$

$$\left. + \varphi_4 \left(f_1^{-1}(f_1(x_1) - f_4(x_4)), f_2^{-1}(f_2(x_2) - f_4(x_4)), f_3^{-1}(f_3(x_3) - f_4(x_4)) \right) \right).$$

2.3.2. Просторові задачі конвективно-дифузійного переносу при плоскій фільтрації

Дослідимо просторовий сингулярно збурений процес конвективної дифузії при фільтрації у плоскому криволінійному пласті. Для цього розв'яжемо модельну задачу конвективної дифузії для області $G = G_z \times (0, \infty)$, $G_z = G_z \times (0, T)$, де G_z ($\tilde{z} = x + iy$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими

$$AB = \{\tilde{z} = x + iy: f_1(x, y) = 0\}, \quad BC = \{\tilde{z}: f_2(x, y) = 0\},$$

$$CD = \{\tilde{z}: f_3(x, y) = 0\}, \quad DA = \{\tilde{z}: f_4(x, y) = 0\} \text{ (рис. 2.23, а):}$$

$$\vec{v} = -\chi \text{ grad } h, \quad \text{div } T \vec{v} = 0, \quad u_x = v_x c - D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad u_y = v_y c - D \frac{\partial c}{\partial y},$$

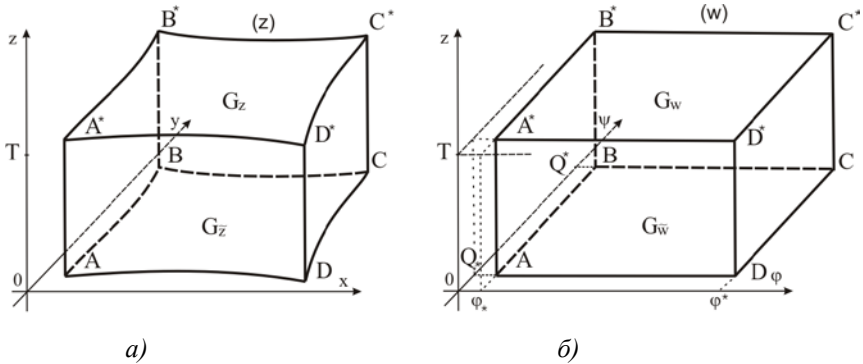


Рис. 2.23. Плоский фон для просторової “конвекції-дифузії” (просторова фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б))

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (x, y, z, t) \in G, \quad 0 \leq z \leq T, \quad 0 < t < \infty, \quad (2.3.1)$$

$$c \Big|_{ABB^*A^*} = c_*(M, t), \quad c \Big|_{CDD^*C^*} = c^*(M, t), \quad c \Big|_{ADD^*A^*} = c_{**}(M, t), \quad c \Big|_{BCC^*B^*} = c^{**}(M, t),$$

$$c \Big|_{ABCD} = c_{**}^*(M, t), \quad c \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = c_{**}^{**}(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad (2.3.2)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi \Big|_{ABB^*A^*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD^*C^*} = \varphi^*,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{ADD^*A^* \cup A^*D^*C^*B^* \cup B^*C^*CB \cup ADCB} = 0, \quad (2.3.3)$$

де $c=c(x, y, z, t)$ – концентрація розчинної речовини у точці (x, y, z) в момент часу t , n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, T – потужність проникного пласту, $h=h(x, y)$ – напір в точці $\tilde{z}=x+iy$, ε – коефіцієнт конвективної дифузії, χ – коефіцієнт фільтрації, M

– біжуча точка відповідної поверхні, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, u_x, u_y, u_z – компоненти масової швидкості, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_0^0(M)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_{**}^*(M, t)$, $c_*^{**}(M, t)$ – достатньо гладкі функції і узгоджені між собою на ребрах (гранях) області G .

Нехай задача (2.3.3) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_w = G_w \times (0, T)$, $G_w = \{\tilde{w} = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 2.23, б), є розв'язаною. Параметр $Q^z = T \cdot Q = T \cdot \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z) знаходиться в процесі розв'язку даної задачі. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $z = z$, $t = t$ у рівнянні (2.3.1) та умовах (2.3.2), приходимо до відповідної дифузійної задачі для області G_w :

$$\varepsilon \left(q^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + q^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - \frac{q^2(\varphi, \psi)}{T} \frac{\partial c}{\partial \varphi} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.3.4)$$

$$c(\varphi_*, \psi, z, t) = c_*(\psi, z, t), \quad c(\varphi^*, \psi, z, t) = c^*(\psi, z, t),$$

$$c(\varphi, Q_*, z, t) = c_{**}(\varphi, z, t), \quad c(\varphi, Q^*, z, t) = c^{**}(\varphi, z, t),$$

$$\begin{aligned}
c(\varphi, \psi, 0, t) &= c_{**}^*(\varphi, \psi, t), \quad c(\varphi, \psi, T, t) = c_*^{**}(\varphi, \psi, t), \\
c(\varphi, \psi, z, 0) &= c_0^0(\varphi, \psi, z), \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

де $\bar{q} = T \cdot \bar{v}$ – фільтраційна витрата, $Q = Q^* - Q_*$.

Розв'язок c поставленої задачі (2.3.4) (2.3.5) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді такого асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned}
c(\varphi, \psi, z, t) &= c_0(\varphi, \psi, z, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(\varphi, \psi, z, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, z, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\varphi, \eta, z, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \Gamma_i(\varphi, \mu, z, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} F_i(\varphi, \psi, \gamma, t) + \\
&\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} H_i(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_n(\varphi, \psi, z, t, \varepsilon), \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

де R_n – залишковий член, $c_i(\varphi, \psi, z, t)$, ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: c_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу), c_1, \dots, c_n – поправки, що враховують вклад дифузії всюди в даній області (за винятком деякої її приграничної зони), $\Pi_i(\xi, \psi, z, t)$, ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $P_i(\varphi, \eta, z, t)$, $\Gamma_i(\varphi, \mu, z, t)$, $F_i(\varphi, \psi, \gamma, t)$, $H_i(\varphi, \mu, \alpha, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$, $z = 0$, $z = T$, що враховують вплив бічних джерел забруднень, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = (\psi - Q_*) \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = (Q^* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\gamma = z \cdot \varepsilon^{-1/2}$,

$\alpha=(T-z)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги).

Після підстановки (2.3.6) в (2.3.4) – (2.3.5) та застосування стандартної процедури прирівнювання, для знаходження функцій c_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \frac{q^2(\varphi,\Psi)}{T}\cdot c_{i\varphi}(\varphi,\Psi,z,t)+c_{iz}(\varphi,\Psi,z,t)=g_i(\varphi,\Psi,z,t), \\ c_i(\varphi,\Psi,z,0)=h_i(\varphi,\Psi,z), c_i(\varphi_*,\Psi,z,t)=b_i(\Psi,z,t), \end{cases}$$

$$g_0(\varphi,\Psi,t)=0, h_0(\varphi,\Psi,z)=c_0^0(\varphi,\Psi,z), b_0(\Psi,z,t)=c_*(\Psi,z,t),$$

$$h_i(\varphi,\Psi,z)=0, b_i(\Psi,z,t)=0,$$

$$g_i(\varphi,\Psi,z,t)=q^2(\varphi,\Psi)(c_{i-1\varphi\varphi}+c_{i-1\Psi\Psi})+c_{i-1zz}, i=\overline{1,n}.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(\varphi,\Psi,z,t)=\begin{cases} c_*(\Psi,z,t-f(\varphi,\Psi)), t\geq f(\varphi,\Psi), \\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\Psi)-t,\Psi),\Psi,z,t), t<f(\varphi,\Psi), \end{cases}$$

$$c_i(\varphi,\Psi,z,t)=\begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} Tq^{-2}(\tilde{\varphi},\Psi)\cdot g_i(\tilde{\varphi},\Psi,z,f(\tilde{\varphi},\Psi)+t-f(\varphi,\Psi))d\tilde{\varphi}, t\geq f(\varphi,\Psi), \\ \int_0^t g_i(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\Psi)-t,\Psi),\Psi,z,\tilde{t})d\tilde{t}, t<f(\varphi,\Psi), \end{cases}$$

де $i=\overline{1,n}$, $f(\varphi,\tilde{\Psi})=T\int_{\varphi_*}^{\varphi} q^{-2}(s,\tilde{\Psi})ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x,y,z)=\tilde{\Psi}$, $Q_*\leq\tilde{\Psi}\leq Q^*$, $z(x,y,z)=\tilde{z}$, $0\leq\tilde{z}\leq T$), від екіпо-

тенціальної поверхні $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція q^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатно визначена).

Функція $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i \varepsilon^i$ призначена для усунення нев'язки, внесеної побудованою регулярною частиною $c = \sum_{i=0}^n c_i \varepsilon^i$, в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто повинна виконуватись умова: $(c + \Pi)|_{\varphi=\varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^{n+1})$. Для знаходження цієї функції маємо задачу:

$$q^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi\xi}(\xi, \psi, z, t) + \frac{q^2(\varphi^*, \psi)}{T} \Pi_{i\xi}(\xi, \psi, z, t) = d_i(\xi, \psi, z, t),$$

$$\Pi_i \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Pi_i(0, \psi, z, t) = p_i(\psi, z, t), \quad i = \overline{0, n+1},$$

де

$$d_0(\xi, \psi, z, t) = 0, \quad d_1(\xi, \psi, z, t) = \Pi_{0t}(\xi, \psi, z, t),$$

$$d_2(\xi, \psi, z, t) = f_1(\psi, z, t) e^{-\frac{\xi}{T}} + f_2(\psi, z, t) \xi e^{-\frac{\xi}{T}},$$

$$f_1(\psi, z, t) = \frac{-\partial c^*(\varphi^*, \psi, z, t)}{\partial t} - q^2(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial z^2},$$

$$f_2(\psi, z, t) = 2q^{-1}(\varphi^*, \psi) q'(\varphi^*, \psi) \frac{\partial \Pi_0}{\partial t} - T q^{-2}(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial t^2},$$

$$p_0(\psi, z, t) = c^*(\psi, z, t) - c_0(\varphi^*, \psi, z, t), \quad p_j(\psi, z, t) = -c_j(\varphi^*, \psi, z, t), \quad j = \overline{1, n},$$

$$p_{n+1}(\psi, z, t) = 0, \quad d_i(\xi, \psi, z, t) = \Pi_{(i-1)t} - \sum_{j=1}^i V_j \Pi_{(i-j)\xi\xi} - \\ - T^{-1} \sum_{j=1}^i V_j \Pi_{(i-j)\xi} - \sum_{j=0}^{i-2} V_j \Pi_{(i-j-2)\psi\psi} - \Pi_{(i-2)zz} \quad (i = \overline{3, n+1}),$$

V_j – коефіцієнти при ε^j ряду Тейлора функції $q^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$.

В результаті розв'язання даних задач маємо:

$$\begin{aligned} \Pi_0(\xi, \psi, z, t) &= (c^*(\psi, z, t) - c_0(\varphi^*, \psi, z, t)) \cdot e^{-\frac{\xi}{T}}, \\ \Pi_1(\xi, \psi, z, t) &= -c_1(\varphi^*, \psi, z, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{T}} - \frac{T\xi}{q^2(\varphi^*, \psi)} \frac{\partial \Pi_0}{\partial t}, \\ \Pi_2(\xi, \psi, z, t) &= -c_2(\varphi^*, \psi, z, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{T}} - T^2 \xi e^{-\frac{\xi}{T}} (f_1 + f_2) - 2^{-1} T f_2 \xi^2 e^{-\frac{\xi}{T}}, \\ \Pi_i(\xi, \psi, z, t) &= p_i(\psi, z, t) e^{-\frac{\xi}{T}} + \sum_{j=1}^{i+1} s_{i,j}(\psi, z, t) \xi^j e^{-\frac{\xi}{T}}, \quad i = \overline{3, n+1}, \end{aligned}$$

де всі $s_{i,j}$ виражаються через складові d_j .

Функції типу пограншару $P(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{i=0}^{n+1} P_i \varepsilon^{i/2}$,

$\Gamma(\varphi, \mu, z, t) = \sum_{i=0}^{n+1} \Gamma_i \varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення неузгодженостей в

околах $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$ відповідно. Для знаходження $P_i(\varphi, \eta, z, t)$ в результаті проведення стандартної процедури прирівнювання [34–36] приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} q^2(\varphi, Q_*) P_{0\eta\eta} - T^{-1} q^2(\varphi, Q_*) P_{0\varphi} = P_{0t}, \\ P_0(\varphi, Q_*, z, t) = c_{**}(\varphi, z, t) - c_0(\varphi, Q_*, z, t), \quad P_0(\varphi, \eta, z, t) \xrightarrow[\eta \rightarrow \infty]{} 0, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q^2(\varphi, Q_*)P_{i\eta\eta} + T^{-1}q^2(\varphi, Q_*)P_{i\varphi} = P_{it} - M_i(\varphi, \eta, z, t), i = \overline{1, n+1}, \\ P_i(\varphi, \eta, z, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, P_i(\varphi, Q_*, z, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -c_{i-i/2}(\varphi, Q_*, z, t), \text{ якщо } i \text{ парне.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Тут $M_i(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{j=0}^i V_{*j} P_{(i-j)\eta\eta} + \sum_{j=0}^i T^{-1} V_{*j} P_{(i-j)\varphi} + I(i, 2) \sum_{j=0}^{i-2} V_{*j} P_{(i-2-j)\varphi\varphi} + I(i, 2) P_{(i-2)z}$, де V_{*j} – коефіцієнти при $\varepsilon^{j/2}$ розкладу функції

$$q^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta + Q_*) \text{ в ряд Тейлора в околі } \psi = Q_*, I(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ якщо } a \geq b, \\ 0 \text{ якщо } a < b. \end{cases}$$

Задачі для знаходження функцій $\Gamma_i(\varphi, \mu, z, t) = \sum_{i=0}^{n+1} \Gamma_i \varepsilon^{i/2}$,

$$F(\varphi, \psi, \gamma, t) = \sum_{i=0}^{n+1} F_i \varepsilon^{i/2}, H(\varphi, \psi, \alpha, t) = \sum_{i=0}^{n+1} H_i \varepsilon^{i/2} \text{ (останні дві призна-}$$

чені для усунення неузгодженостей в околах $z=0, z=T$ відповідно) отримуємо аналогічно:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{0\gamma\gamma} - T^{-1}q^2(\varphi, \psi)F_{0\varphi} = F_{0t}, \\ F_0(\varphi, \psi, 0, t) = c_{**}^*(\varphi, \psi, t) - c_0(\varphi, \psi, 0, t), F_0(\varphi, \psi, \gamma, t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0, \end{array} \right.$$

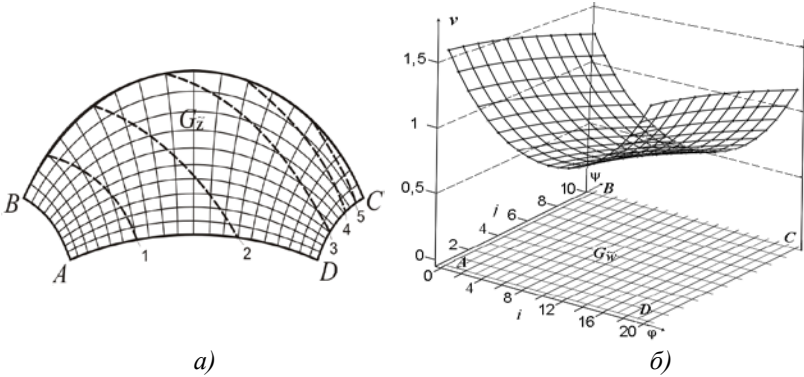
$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i\gamma\gamma} - T^{-1}q^2(\varphi, \psi)F_{i\varphi} = F_{it} - I(i, 2)q^2(\varphi, \psi)(F_{i-2\varphi\varphi} + F_{i-2\psi\psi}), i = \overline{1, n+1}, \\ F_i(\varphi, \psi, \gamma, t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0, F_0(\varphi, \psi, 0, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -c_{i-i/2}(\varphi, \psi, 0, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{0\gamma\gamma} - T^{-1}q^2(\varphi, \psi)H_{0\varphi} = H_{0t}, \\ H_0(\varphi, \psi, T, t) = c_{**}^*(\varphi, \psi, t) - c_0(\varphi, \psi, T, t), F_0(\varphi, \psi, \alpha, t) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \end{array} \right.$$

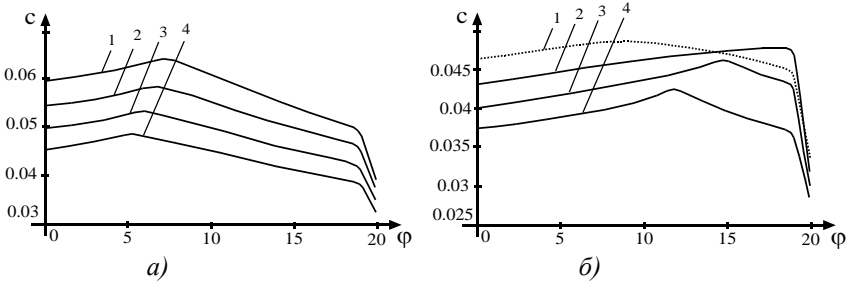
$$\left\{ \begin{array}{l} H_{i\gamma\gamma} - T^{-1} q^2(\varphi, \psi) H_{i\varphi} = H_{ii} - I(i, 2) q^2(\varphi, \psi) (H_{i-2\varphi\varphi} + H_{i-2\psi\psi}), \quad i=\overline{1, n+1}, \\ H_i(\varphi, \psi, \alpha, t) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \quad H_i(\varphi, \psi, T, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \text{ непарне,} \\ -c_{i-i/2}(\varphi, \psi, T, t), & \text{якщо } i \text{ парне.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Наведемо результати розрахунку просторового процесу типу “конвекція-дифузія” на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi) \times \ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-1.5$, $\varphi^*=1.5$, $AD=\{z:\psi(x, y)=7\pi/6\}$, $BC=\{z:\psi(x, y)=3\pi/2\}$. На рис. 2.24, а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y)=\overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 20$, $\psi(x, y)=\overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 10$, $i=\overline{0, 20}$, $j=\overline{0, 10}$, величину швидкості фільтрації $v=((dz/dw)(\overline{dz/dw}))^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi)=t_k$, $k=\overline{1, 5}$ при $t_1=0.5579$, $t_2=1.6349$, $t_3=3.2639$, $t_4=4.9997$, $t_5=6.2778$ (криві 1-5 відповідно).

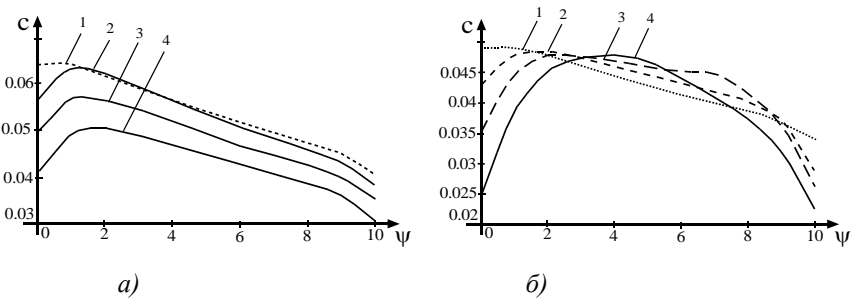
Розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, z, t)$ розчинної речовини при $\varepsilon=0.01$, $T=1$, $c_0^0(\varphi, \psi, z)=((\varphi+1.5)^2 + \psi^2 + z^2)^{-1}$, $c_*(\varphi, z, t)=(2 \cdot t + \psi^2 + z^2)^{-1}$, $c^*(\varphi, z, t)=(2 \cdot t + 9 + \psi^2 + z^2)^{-1}$, $c_{**}(\varphi, z, t)=((\varphi+1.5)^2 + z^2 + 2 \cdot t + (7\pi/6)^2)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, z, t)=((\varphi+1.5)^2 + z^2 + 2 \cdot t + (3\pi/2)^2)^{-1}$,



а) б)
 Рис. 2.24. Лінії фронту (а) та величина швидкості (б)



а) б)
 Рис. 2.25. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж лінії $\{(\varphi, \psi_i, \hat{z}) = \bar{\psi}; \hat{z} = 0.2, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$, $i = \overline{1, 4}$, $\psi_1 = 3.875$, $\psi_2 = 4.084$, $\psi_3 = 4.294$, $\psi_4 = 4.503$ в моменти часу $t = 0.85$ (а) та $t = 3.264$ (б)



а) б)
 Рис. 2.26. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж лінії $\{(\varphi_i, \psi, \hat{z}) = \bar{\varphi}; \hat{z} = 0.2, Q_* \leq \psi \leq Q^*\}$, $i = \overline{1, 4}$, $\varphi_1 = -0.9$, $\varphi_2 = -0.15$, $\varphi_3 = 0.45$, $\varphi_4 = 1.2$ в моменти часу $t = 0.85$ (а) та $t = 3.264$ (б)

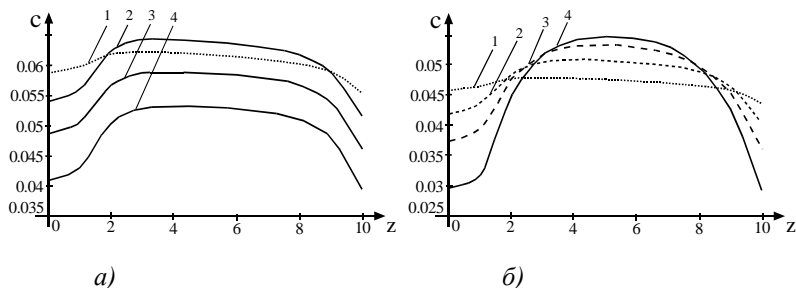


Рис. 2.27. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж ліній $\{(\varphi_i, \hat{\psi}, z) = \tilde{\varphi}; \hat{\psi} = 3.875, 0 \leq z \leq T\}$, $i=1,4$, $\varphi_1 = -0.9$, $\varphi_2 = -0.15$, $\varphi_3 = 0.45$, $\varphi_4 = 1.2$ в моменти часу $t=0.85$ (а) та $t=3.264$ (б)

$$c_{**}^*(\varphi, \psi, t) = ((\varphi + 1.5)^2 + \psi^2 + 2 \cdot t)^{-1}, \quad c_*^{**}(\varphi, \psi, t) = ((\varphi + 1.5)^2 + \psi^2 + 2 \cdot t + 1)^{-1}$$

вздовж характерних ліній течії та горизонтальних та вертикальних екіпотенціальних ліній зображено на рис. 2.25-2.27.

2.3.3. Просторові аналоги конформних відображень і сингулярно збурені задачі конвективної дифузії

Побудуємо просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник та, на цій основі, одержимо асимптотичний розклад розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії в криволінійному паралелепіеді. З цією метою, для криволінійного паралелепіеда (рис. 2.28) $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмеженого двома екіпотенціальними поверхнями $AA_*B_*B = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $CC_*D_*D = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: g_*(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: g^*(x, y, z) = 0\}$,

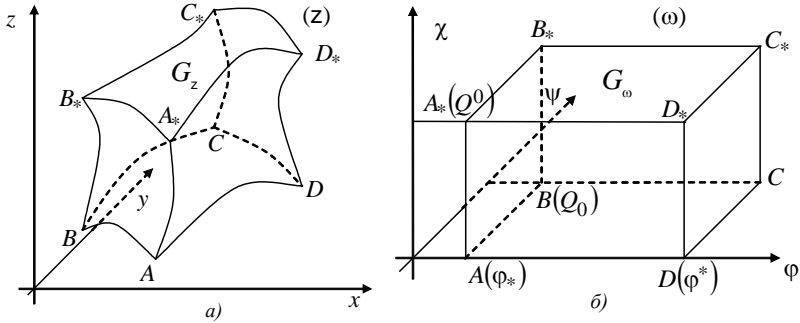


Рис. 2.28. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (б).

$ADD_*A_* = \{z: g_0(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: g^0(x, y, z) = 0\}$ (гладкими, взаємно ортогональними між собою), розглянемо модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad \varepsilon \cdot \Delta c - \nabla c \cdot \vec{v} = \sigma(t) c_t, \\ (x, y, z, t) \in G = G_z \times (0, \infty); \quad (2.3.7)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{ADD_*A_* \cup A_*D_*C_*B_* \cup B_*C_*CB \cup ADCB} = 0; \quad (2.3.8)$$

$$c|_{ABB_*A_*} = c_*(M, t), \quad c|_{CDD_*C_*} = c^*(M, t), \quad c|_{ADD_*A_*} = c_0(M, t), \\ c|_{BCC_*B_*} = c^0(M, t), \quad c|_{ABCD} = c_{00}(M, t), \quad c|_{A_*D_*C_*B_*} = c^{00}(M, t); \quad (2.3.9)$$

$$c(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z), \quad (2.3.10)$$

де $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – вектор, а $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$) в точці $Z = (x, y, z)$,

$c=c(x, y, z, t)$ – концентрація розчинних у фільтраційному потоці речовин у точці Z в момент часу t , ε – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр), $\sigma(t)$ – пористість, M – біжуча точка відповідної поверхні, c_* , c^* , c_0 , c^0 , c_{00} , c^{00} , c_0^0 – задані достатньо гладкі, сильно узгоджені (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв’язку із заданою точністю) між собою в околах ребер та кутових точок паралелепіпеда $G \in R^4$ функції.

Просторовий аналог конформного відображення будуємо так. Увівши пару функцій $\psi=\psi(x, y, z)$, $\chi=\chi(x, y, z)$ (“просторово комплексно спряжених” із функцією $\varphi=\varphi(x, y, z)$) таких, що $\text{grad } \psi(x, y, z) \cdot \text{grad } \chi(x, y, z)=0$ та $\text{grad } \varphi(x, y, z)=\text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \chi(x, y, z)$, аналогічно до [95], замість крайової задачі фільтрації (2.3.7) – (2.3.8) прийдемо до задачі на відображення (назвемо його просторово конформним) області G_z на відповідну область $G_\omega=\{\omega=(\varphi, \psi, \chi): \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0\}$, де $Q=Q_0Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії (Q_0, Q^0 – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні прошки):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0; \end{cases} \quad (2.3.11)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_s A_s} = \varphi^*, & \varphi|_{DCC_s D_s} = \varphi^*, & \psi|_{ADD_s A_s} = 0, \\ \psi|_{BCC_s B_s} = Q_0, & \chi|_{ADCB} = 0, & \chi|_{A_s D_s C_s B_s} = Q^0. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Тут, як і в плоскій теорії потенціальних полів, отриману в результаті розв'язку задачі (2.3.11) – (2.3.12) функцію $\omega = \omega(\mathbf{z}) = \omega(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$ назвемо комплексним потенціалом, а обернену їй функцію $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\omega) = \mathbf{z}(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi))$ – характеристичною функцією течії. При цьому зауважимо, що ми в даній роботі, поки-що, відмовляємось від записів виду $\omega = \varphi + i\psi + j\chi$, оскільки не встановлювались відповідні алгебраїчні аналогії.

Обернена до (2.3.11) – (2.3.12) задача на просторове конформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ (при невідомих значеннях параметрів Q_0, Q^0) має вигляд:

$$\begin{aligned} I(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) & \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right), \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} I(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) & \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned}
I(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) & \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = \\
& = \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) - \\
& - \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right),
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) \times \\
& \times \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0;
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\begin{cases}
f_*(x(\varphi_*, \psi, \chi), y(\varphi_*, \psi, \chi), z(\varphi_*, \psi, \chi)) = 0, \\
f^*(x(\varphi^*, \psi, \chi), y(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi)) = 0, \\
g_*(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\
g^*(x(\varphi, \psi, Q^0), y(\varphi, \psi, Q^0), z(\varphi, \psi, Q^0)) = 0, \\
g_0(x(\varphi, 0, \chi), y(\varphi, 0, \chi), z(\varphi, 0, \chi)) = 0, \\
g^0(x(\varphi, Q_0, \chi), y(\varphi, Q_0, \chi), z(\varphi, Q_0, \chi)) = 0,
\end{cases} \tag{2.3.17}$$

де I – якобіан відповідного перетворення.

Припустимо, що просторова задача (2.3.16) – (2.3.17) є розв’язаною (нами розроблений алгоритм наближеної побудови відповідної динамічної сітки в області G_z , що відповідає рівномірній ортогональній сітці області G_ω , але, в силу громіздкості викладок тут його приводити не будемо). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$ у рівнянні (2.3.7) та умовах (2.3.9), (2.3.10), приходимо до відповідної дифузійної задачі для об-

ласті $G_\omega \times (0, \infty)$:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi, \chi) \cdot (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi} + u_{\chi\chi}) - v^2(\varphi, \psi, \chi) \cdot u_\varphi = u_t$$

$$(v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2); \quad (2.3.18)$$

$$u(\varphi_*, \psi, \chi, t) = u_*(\psi, \chi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, \chi, t) = u^*(\psi, \chi, t),$$

$$u(\varphi, 0, \chi, t) = u_0^*(\varphi, \chi, t), \quad u(\varphi, Q_0, \chi, t) = u_*^0(\varphi, \chi, t),$$

$$u(\varphi, \psi, 0, t) = u_{00}(\varphi, \psi, t), \quad u(\varphi, \psi, Q^0, t) = u^{00}(\varphi, \psi, t), \quad (2.3.19)$$

$$u(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi, \chi), \quad (2.3.20)$$

де $u(\varphi, \psi, \chi, t) = c(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t)$, інші функції (u_*, u^*, \dots) – інтерпретуються аналогічно. Асимптотика її розв'язку будуватиметься аналогічно до відповідного плоского випадку. А саме, розв'язок сингулярно збуреної мішаної задачі (2.3.18) – (2.3.19) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(\varphi, \psi, \chi, t) = \left(u_0(\varphi, \psi, \chi, t) + \sum_{i=1}^n u_i(\varphi, \psi, \chi, t) \varepsilon^i \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) \cdot \varepsilon^i + \sum_{i=0}^n \tilde{\pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \chi, t) \varepsilon^{i/2} + \sum_{i=0}^n \tilde{\tilde{\pi}}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \chi, t) \varepsilon^{i/2} + \quad (2.3.21)$$

$$+ \sum_{i=0}^n \bar{\pi}_i(\varphi, \psi, \bar{\chi}, t) \varepsilon^{i/2} + \sum_{i=0}^n \bar{\bar{\pi}}_i(\varphi, \psi, \bar{\bar{\chi}}, t) \varepsilon^{i/2} + R_n(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon),$$

де $R_n(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon)$ – залишковий член, $u_i(\varphi, \psi, \chi, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: u_0 – розв'язок відповід-

ної виродженої задачі (конвективного переносу); u_1, \dots, u_n – поправки, що враховують вклад дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\pi_i(\bar{\varphi}, \psi, \chi, t)$ – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\tilde{\pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \chi, t)$, $\bar{\pi}_i(\varphi, \psi, \bar{\chi}, t)$, $\bar{\bar{\pi}}_i(\varphi, \psi, \bar{\bar{\chi}}, t)$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_0$, $\chi = 0$, $\chi = Q^0$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень” (u_0 , u^0 , u_{00} , u^{00}), $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\chi} = \frac{Q_0 - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\bar{\chi} = \frac{\chi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\chi}} = \frac{Q^0 - \chi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [34], після підстановки (2.3.21) в (2.3.18) – (2.3.20) та застосування стандартної процедури прирівнювання, для знаходження функцій u_i приходимо до таких задач:

$$v^2(\varphi, \psi, \chi) \cdot u_{i\varphi} + u_{it} = h_i(\varphi, \psi, \chi, t), \quad u_i(\varphi_*, \psi, \chi, t) = \tilde{c}_{i*}(\psi, \chi, t),$$

$$u_i(\varphi, \psi, \chi, 0) = \tilde{c}_{i0}^0(\varphi, \psi, \chi),$$

де $h_0 = 0$, $\tilde{c}_{0*} = u_*$, $\tilde{c}_{00}^0 = u_0^0$, $h_{i+1} = v^2(u_{i\varphi\varphi} + u_{i\psi\psi} + u_{i\chi\chi})$, $\tilde{c}_{(i+1)*} = 0$, $\tilde{c}_{(i+1)0}^0 = 0$ ($i = 0, \dots, n-1$). В результаті їх розв’язання маємо

$$u_0(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, \chi, t - f(\varphi, \psi, \chi)), & t \geq f(\varphi, \psi, \chi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \chi) - t), \psi, \chi), & t < f(\varphi, \psi, \chi), \end{cases} \quad (2.3.22)$$

де $f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\chi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\chi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж лінії течії, як перетину двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $\chi(x, y, z) = \bar{\chi}$, від екіпотенціальної поверхні $s = \varphi_*$ до екіпотенціальної поверхні $s = \varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{v^2}$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена),

$$u_i(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{h_i(s, \psi, \chi, t - f(\varphi, \psi, \chi) + f(s, \psi, \chi))}{v^2(s, \psi, \chi)} ds, \\ t \geq f(\varphi, \psi, \chi), \\ \int_0^t h_i(f(\varphi, \psi, \chi) - t + \tilde{t}, \psi, \chi, \tilde{t}) d\tilde{t}, \\ t < f(\varphi, \psi, \chi), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Зазначимо, що функція $\pi = \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i \varepsilon^i$ тут, як і для аналогічного двовимірного випадку, призначена для усунення нев'язки, внесеної побудованою регулярною частиною $u = \sum_{i=0}^n u_i \varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi = \varphi^*$ (а саме, повинна виконуватись умова: $u + \pi|_{\varphi=\varphi^*} = u^* + O(\varepsilon^{n+1})$) та повинна задовольняти даному рів-

нянню із точністю $O(\varepsilon^{n+1})$). Крім цього, функції π_i повинні бути функціями типу пограншару стосовно змінної $\tilde{\varphi}$: $\pi_i \xrightarrow[\tilde{\varphi} \rightarrow \infty]{} 0$, тобто дані функції повинні бути близькими до нуля поза деяким околом $\varphi = \varphi^*$. Для їх знаходження маємо задачу:

$$\begin{cases} \pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \pi_{0\tilde{\varphi}} = 0, \\ \pi_0(\varphi_*, \psi, \chi, t) = u^*(\psi, \chi, t) - u_0(0, \psi, \chi, t), \quad \pi_0 \xrightarrow[\tilde{\varphi} \rightarrow \infty]{} 0; \\ \pi_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \pi_{i\tilde{\varphi}} = d_i(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t), \quad \pi_i(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) \xrightarrow[\tilde{\varphi} \rightarrow 0]{} 0, \quad i = \overline{1, n+1}, \\ \pi_i(0, \psi, \chi, t) = -u_i(0, \psi, \chi, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \pi_{n+1}(0, \psi, \chi, t) = 0, \end{cases}$$

де $d_i(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t)$ виражаються через $\pi_j(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t)$ і їх похідні по φ та t ($j < i$).

Аналогічно до [33], в результаті розв'язання даних задач, маємо:

$$\begin{aligned} \pi_0(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) &= (u^*(\psi, \chi, t) - u_0(0, \psi, \chi, t)) \cdot e^{\tilde{\varphi}}; \\ \pi_i(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) &= \sum_{j=0}^{i+1} \alpha_{i,j}(\psi, \chi, t) \tilde{\varphi}^j e^{\tilde{\varphi}}, \quad i = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

де всі $\alpha_{i,j}$ виражаються через $\alpha_{k,j}$ ($k < i$) і граничні умови.

Аналогічно [46], при знаходженні функцій $\tilde{\pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \chi, t)$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \chi, t)$, $\bar{\pi}_i(\varphi, \psi, \bar{\chi}, t)$, $\bar{\bar{\pi}}_i(\varphi, \psi, \bar{\bar{\chi}}, t)$ приходимо до розв'язання

крайових задач для рівнянь виду $a(x, y, t)(u_{xx} - u_y) = u_t + b(x, y, t)$.

Теорема 2.1. *В довільній замкненій області $G^{t_0} = \bar{G}_\omega \times [0, t_0]$, де $0 < t_0 < \infty$, має місце така оцінка залишкового члена асимптотичного ряду (2.3.21):*

$$|R_n(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (2.3.24)$$

Доведення: У результаті проведеної процедури прирівнювання для оцінки R_n маємо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon v^2(\varphi, \psi, \chi) \cdot (R_{n\varphi\varphi} + R_{n\psi\psi} + R_{n\chi\chi}) - v^2(\varphi, \psi, \chi) \cdot R_{n\varphi} = R_{nt} + \\ & + \varepsilon^{n+1} \cdot R_n^*(\varphi, \psi, \chi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}, \bar{\chi}, t) + R_n^{**}(\varphi, \psi, \chi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}, \bar{\chi}, t, \varepsilon); \\ & R_n(\varphi^*, \psi, \chi, t, \varepsilon) = 0, \quad R_n(\varphi, 0, \chi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R_n(\varphi_*, \psi, \chi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ & R_n(\varphi, Q_0, \chi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R_n(\varphi_*, \psi, 0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ & R_n(\varphi, \psi, Q^0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R_n(\varphi, \psi, \chi, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

де, в силу достатньої гладкості та сильної узгодженості початкової та граничних умов R_n^* – неперервна та рівномірно обмежена в G функція, $R_n^{**} = O(\varepsilon^{n+1})$. Отже, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь приходимо до оцінки (2.3.24).

РОЗДІЛ 3. СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МОДЕЛІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН”

3.1. Асимптотичне наближення розв’язків сингулярно збурених крайових задач процесів конвективної гетеродифузії

Розглянемо процес конвективної гетеродифузії для області $G = G_z \times (0, \infty)$ (G_z ($z = x + iy$) – двовз’язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішнім та $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішнім (рис. 3.1, а)), який описується такою модельною задачею :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \\ & -v_x(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} - \varepsilon^* a_1(x, y) \cdot c(x, y, t) + \\ & + a_2(x, y) \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_3 \left(\frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_4 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \varepsilon^* a_1(x, y) \cdot c(x, y, t) - a_2(x, y) \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad u|_{L_*} = u_*(M, t),$$

$$u|_{L^*} = u^*(M, t), \quad u(M, 0) = u_0^0(M), \quad (3.1.3)$$

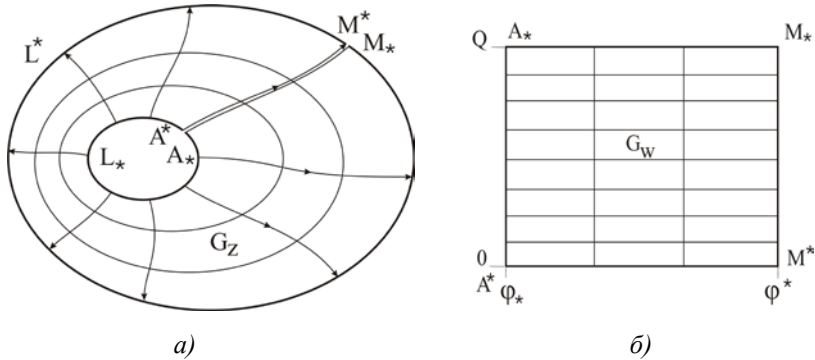


Рис. 3.1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (3.1.4)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , $u(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини на поверхні скелету (у зв'язаних зі скелетом поляризованих шарах води), M – біжуча точка відповідної кривої, $\varepsilon_1 = k_1 \varepsilon$, $\varepsilon_2 = k_2 \varepsilon$, $\varepsilon_3 = k_3 \varepsilon$, $\varepsilon_4 = k_4 \varepsilon$, $\varepsilon^* = k^* \varepsilon$, де k_1, k_2, k_3, k_4, k^* – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (що характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в середовищі G_z , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $a_1(x, y), a_2(x, y)$ – концентраційні коефіцієнти інтенсивності процесів переходу з одного виду міграції на інший [3–5, 101–103], $a_i(x, y) > a \gg \varepsilon$ ($i=1, 2$), $c_*(M, t), c^*(M, t)$,

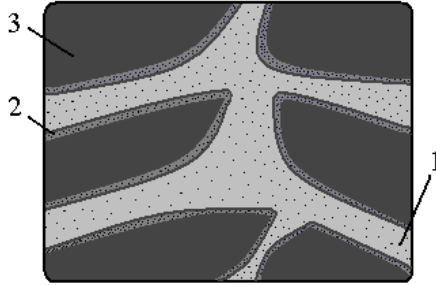


Рис. 3.2. Структура малого елемента пористого середовища:
 1 - водний поровий розчин; 2 - адсорбований на скелеті ґрунту шар води;
 3 - скелет ґрунту.

$c_0^0(M, t)$, $u_*(M, t)$, $u^*(M, t)$, $u_0^0(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

Дана модель враховує той факт, що частинки розчинної речовини одного сорту у межах виділеного фізично малого елемента ґрунту можуть знаходитись на поверхні скелету чи бути у поровій рідині (рис.3.2) (за умови локальної рівноваги стосовно переходів домішкових частинок між адсорбованим на скелеті ґрунту шаром рідини та скелетом [3, 4, 50, 52]), причому явища конвекції та сорбції переважають над іншими складовими процесу.

Вважаючи, що шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), задача (3.1.4) є розв’язаною, здійснимо заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (3.1.1), (3.1.2) та умовах (3.1.3). В результаті отримаємо відповідну “гетеродифузійну” задачу для області G_w :

$$\begin{aligned} & \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left(k_1 \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) + \right. \\ & \left. + k_2 \left(\frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) \right) - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} \\ & - \varepsilon \cdot k^* a_1(\varphi, \psi) \cdot c(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi) \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left(k_3 \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) + k_4 \left(\frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) \right) + \\ & + \varepsilon \cdot k^* a_1(\varphi, \psi) \cdot c(\varphi, \psi, t) - a_2(\varphi, \psi) \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.1.6) \end{aligned}$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi),$$

$$u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi). \quad (3.1.7)$$

Розв'язок (c, u) цієї періодичної щодо змінної ψ задачі з точністю $O(\varepsilon^n)$ (для спрощення викладок покладемо $n=2$) шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$c(\varphi, \psi, t) = c_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon c_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + R_2^1(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} u(\varphi, \psi, t) = & u_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon u_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} P_i(\eta, \psi, t) + \\ & + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \Gamma_i(\mu, \psi, t) + R_2^2(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \end{aligned}, \quad (3.1.9)$$

де R_2^1, R_2^2 – залишкові члени, $c_i(\varphi, \psi, t)$, $u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i=0,1$) – члени

регулярної частини асимптотики, $P_i(\xi, \psi, t)$, $P_i(\eta, \psi, t)$ ($i=0,3$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_z), $\Gamma_i(\mu, \psi, t)$ $i=0,3$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi_*$ (поправки на вході L_* в G_z), $\xi=\frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{\varphi^*-\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\frac{\varphi-\varphi_*}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Після підстановки (3.1.8) та (3.1.9) у (3.1.5), (3.1.6) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_i(\varphi, \psi, t)$, $u_i(\varphi, \psi, t)$, $i=0,1$ та оцінки залишкових членів:

$$\begin{cases} u_{0t}(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi) \cdot u_0(\varphi, \psi, t) = 0, \\ u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{0t}(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) = g_1(\varphi, \psi, t), \\ c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), c_0(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1t}(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi) \cdot u_1(\varphi, \psi, t) = g_2(\varphi, \psi, t), \\ u_1(\varphi, \psi, 0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{1t}(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{1\varphi}(\varphi, \psi, t) = g_3(\varphi, \psi, t), \\ c_1(\varphi, \psi, 0) = 0, c_1(\varphi^*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

де

$$g_1(\varphi, \psi, t) = a_2(\varphi, \psi) \cdot u_0(\varphi, \psi, t), \quad g_2(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (k_3(c_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) + k_4(u_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t))) + \\
& \quad + k^* a_1(\varphi, \psi) \cdot c_0(\varphi, \psi, t), \quad g_3(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \times \\
& \times (k_1(c_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) + k_2(u_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t))) - \\
& \quad - k^* a_1(\varphi, \psi) \cdot c_0(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi) \cdot u_1(\varphi, \psi, t).
\end{aligned}$$

В результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = u_0^0(\varphi, \psi) \cdot \exp(-a_2(\varphi, \psi) \cdot t),$$

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_1(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi} + \\ + c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), \quad t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t} + \\ + c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), \quad t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \int_0^t g_2(\varphi, \psi, t) \cdot \exp(a_2(\varphi, \psi) \cdot t) d\tilde{t} \cdot \exp(-a_2(\varphi, \psi) \cdot t),$$

$$c_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_3(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, \quad t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_3(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки

вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$, від точки $(\varphi_*, \tilde{\psi})$ до точки $(\varphi, \tilde{\psi})$, f^{-1} –

функція обернена до функції f стосовно змінної φ .

Для функцій $\Pi = \sum_{i=0}^2 \Pi_i \varepsilon^i$, $P = \sum_{i=0}^2 P_{i/2} \varepsilon^{i/2}$, $\Gamma = \sum_{i=0}^2 \Gamma_{i/2} \varepsilon^{i/2}$, які призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c = \sum_{i=0}^1 c_i \varepsilon^i$, $u = \sum_{i=0}^1 u_i \varepsilon^i$ в околах ділянок $\varphi = \varphi^*$, $\varphi = \varphi_*$, повинні виконуватись умови: $(c + \Pi)|_{\varphi = \varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^2)$, $(u + P)|_{\varphi = \varphi^*} = u^* + O(\varepsilon^2)$, $(u + \Gamma)|_{\varphi = \varphi_*} = u_* + O(\varepsilon^2)$. Знаходимо їх у явному вигляді в результаті розв'язання таких задач:

$$k_1 \Pi_{i\xi\xi} + \Pi_{i\xi} = d_i(\xi, \psi, t); \quad \Pi_i \rightarrow 0, \quad \Pi_i(0, \psi, t) = p_i(\psi, t), \quad i = \overline{0, 2};$$

$$P_{ii} - k_4 v^2(\varphi^*, \psi) P_{i\eta\eta} + a_2(\varphi^*, \psi) P_i = \alpha_i(\eta, \psi, t),$$

$$P_i \rightarrow 0, \quad P_i(0, \psi, t) = \gamma_i(\psi, t), \quad i = \overline{0, 3};$$

$$\Gamma_{ii} - k_4 v^2(\varphi_*, \psi) \Gamma_{i\mu\mu} + a_2(\varphi_*, \psi) \Gamma_i = \beta_i(\mu, \psi, t),$$

$$\Gamma_i \rightarrow 0, \quad \Gamma_i(0, \psi, t) = \rho_i(\psi, t), \quad i = \overline{0, 3};$$

де

$$d_0(\xi, \psi, t) = 0, \quad \alpha_0(\eta, \psi, t) = 0, \quad \beta_0(\mu, \psi, t) = 0,$$

$$p_0(\psi, t) = c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t), \quad \gamma_0(\psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t),$$

$$\rho_0(\psi, t) = u_*(\psi, t) - u_0(\varphi_*, \psi, t), \quad p_1(\psi, t) = -c_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$\gamma_1(\psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad \rho_1(\psi, t) = -u_1(\varphi_*, \psi, t), \quad p_2(\psi, t) = 0,$$

$$\gamma_2(\psi, t) = 0, \quad \rho_2(\psi, t) = 0, \quad \gamma_3(\psi, t) = 0, \quad \rho_3(\psi, t) = 0,$$

$$d_1(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot \left(\Pi_{0r}(\xi, \psi, t) - a_2(\varphi^*, \psi) \cdot (\Gamma(\varphi^*, \psi, t) + P(\varphi^*, \psi, t)) \right),$$

$$d_2(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot \left(\Pi_{1r}(\xi, \psi, t) + 2v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot d_1(\xi, \psi, t) - \right. \\ \left. - k_1 v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) - k_2 \left(\Gamma_{\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi, t) + P_{\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi, t) + \Gamma_{\psi\psi}(\varphi^*, \psi, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + P_{\psi\psi}(\varphi^*, \psi, t) \right) + k^* a_1(\varphi^*, \psi) \Pi_0(\xi, \psi, t) + a_{2\xi}(\varphi^*, \psi) \xi (P(\varphi^*, \psi, t) + \right. \\ \left. + \Gamma(\varphi^*, \psi, t)) - a_2(\varphi^*, \psi) (P_\xi(\varphi^*, \psi, t) \xi + \Gamma_\xi(\varphi^*, \psi, t) \xi) \right),$$

$$\alpha_1(\eta, \psi, t) = a_{2\eta}(\varphi^*, \psi) \eta P_0 - 2k_4 v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\eta(\varphi^*, \psi) \cdot \eta \cdot P_{0\eta\eta}(\eta, \psi, t),$$

$$\alpha_2(\eta, \psi, t) = v^2(\varphi^*, \psi) (k_3(\Pi_{0\varphi\varphi} + \Pi_{0\psi\psi}) + k_4 P_{0\psi\psi}) + k_4 (v(\varphi^*, \psi) v_{\eta\eta}(\varphi^*, \psi) + \\ + v_\eta^2(\varphi^*, \psi)) \eta^2 P_{0\eta\eta} - 2k_4 v(\varphi^*, \psi) v_\eta(\varphi^*, \psi) \eta P_{1\eta\eta} + \\ + k^* a_1(\varphi^*, \psi) \Pi_0 + a_{2\eta}(\varphi^*, \psi) \eta P_1 - 2^{-1} a_{2\eta\eta}(\varphi^*, \psi) \eta^2 P_0,$$

$$\alpha_3(\eta, \psi, t) = k_4 (-2v(\varphi^*, \psi) v_\eta(\varphi^*, \psi) \mu P_{2\eta\eta} + (v(\varphi^*, \psi) v_{\eta\eta}(\varphi^*, \psi) + \\ + v_\mu^2(\varphi^*, \psi)) \eta^2 P_{1\eta\eta} - 6^{-1} (v_{\eta\eta\eta} v + 3v_{\eta\eta} v_\eta) \eta^3 P_{0\eta\eta} + k_4 v^2(\varphi^*, \psi) P_{1\psi\psi} - \\ - 2k_4 v(\varphi^*, \psi) v_\eta(\varphi^*, \psi) \eta P_{0\psi\psi} - a_{2\eta}(\varphi^*, \psi) \eta P_2 - 2^{-1} a_{2\eta\eta}(\varphi^*, \psi) \eta^2 P_1 - \\ - 6^{-1} a_{2\eta\eta\eta}(\varphi^*, \psi) \eta^3 P_0 - k_3 v^2(\varphi^*, \psi) \eta (\Pi_{0\varphi\varphi_\eta} + \Pi_{0\psi\psi_\eta}) - 2k_3 v(\varphi^*, \psi) \times \\ \times v_\eta(\varphi^*, \psi) \eta (\Pi_{0\varphi\varphi} + \Pi_{0\psi\psi}) - k^* \eta (a_1(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\eta} - a_{1\eta}(\varphi^*, \psi) \Pi_0),$$

$$\beta_1(\mu, \psi, t) = a_{2\mu}(\varphi^*, \psi) \mu \Gamma_0 + 2k_4 v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\mu(\varphi^*, \psi) \cdot \mu \cdot \Gamma_{0\mu\mu}(\mu, \psi, t),$$

$$\beta_2(\mu, \psi, t) = k_4 v^2(\varphi^*, \psi) \Gamma_{0\psi\psi} + k_4 \left(v(\varphi^*, \psi) v_{\mu\mu}(\varphi^*, \psi) + v_\mu^2(\varphi^*, \psi) \right) \times \\ \times \mu^2 \Gamma_{0\mu\mu} + 2k_4 v(\varphi^*, \psi) v_\mu(\varphi^*, \psi) \mu \Gamma_{1\mu\mu} - a_{2\mu}(\varphi^*, \psi) \mu \Gamma_1 - 2^{-1} a_{2\mu\mu}(\varphi^*, \psi) \mu^2 \Gamma_0.$$

$$\beta_3(\mu, \psi, t) = k_4 (2v(\varphi^*, \psi) v_\mu(\varphi^*, \psi) \mu \Gamma_{2\mu\mu} + (v(\varphi^*, \psi) v_{\mu\mu}(\varphi^*, \psi) + v_\mu^2(\varphi^*, \psi)) \mu^2 \Gamma_{1\mu\mu} +$$

$$+6^{-1}(v_{\mu\mu\mu}v+3v_{\mu\mu}v_{\mu})\mu^3\Gamma_{0\mu\mu}+v^2(\varphi_*,\psi)\Gamma_{1\psi\psi}+2v(\varphi_*,\psi)v_{\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_{0\psi\psi}-$$

$$-a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_2-2^{-1}a_{2\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^2\Gamma_1-6^{-1}a_{2\mu\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^3\Gamma_0.$$

Для знаходження залишкових членів масмо задачу:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_1\left(\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=$$

$$=\frac{\partial R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial t}-b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_3\left(\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+k_4\left(\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)+\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)-$$

$$-a_2(\varphi,\psi)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial R_2^2(x,y,t)}{\partial t}-b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,Q,t,\varepsilon)=$$

$$=R_2^i(\varphi,0,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0,$$

де

$$b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=\Pi_{2t}-k_1v^2(c_{1\varphi\varphi}+c_{1\psi\psi})-k_2v^2(u_{1\varphi\varphi}+u_{1\psi\psi})+$$

$$\begin{aligned}
& +k^* K_1 c_1 - k_1 v^2 (\varphi^*, \psi) \Pi_{1\psi\psi} - \varepsilon k_1 v^2 \Pi_{2\psi\psi} + 2\nu v'_\xi \xi k_1 (\Pi_{0\psi\psi} + \\
& + \Pi_{2\xi\xi} + \varepsilon^2 \Pi_{2\psi\psi} + \varepsilon \Pi_{1\psi\psi}) + 2\nu v'_\xi \xi \Pi_{2\xi} - \xi^2 (v''v + v'^2) \times \\
& \times (\Pi_{1\xi} + \varepsilon \Pi_{2\xi}) - K'_{1\xi} v'_\xi \xi k^* (\Pi_0 + \varepsilon \Pi_1) + v^2 \xi k_2 (P_{\varphi\varphi_\xi} (\varphi^*, \psi, t) + \\
& + P_{\psi\psi_\xi}) + 2\nu v'_\xi \xi k_2 (P_{\varphi\varphi} - \varepsilon \xi P_{\varphi\varphi_\xi} + P_{\psi\psi} - \varepsilon \xi P_{\psi\psi_\xi}) - \\
& - K'_{2\xi} \xi^2 P'_\xi (\varphi^*, \psi, t) + v^2 \xi k_2 (\Gamma_{\varphi\varphi_\xi} (\varphi^*, \psi, t) + \Gamma_{\psi\psi_\xi}) + \\
& + 2\nu v'_\xi \xi k_2 (\Gamma_{\varphi\varphi} - \varepsilon \xi \Gamma_{\varphi\varphi_\xi} + \Gamma_{\psi\psi} - \varepsilon \xi \Gamma_{\psi\psi_\xi}) - K'_{2\xi} \xi^2 \Gamma'_\xi, \\
& b_2 (\varphi, \psi, t, \varepsilon) = -\eta^3 \sigma^{-1} (v''v + 3v''v') (\sqrt{\varepsilon} k_3 (\Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{\psi\psi}) + \\
& + k_4 (\sqrt{\varepsilon} P_{\psi\psi} + P_{\eta\eta} + \sqrt{\varepsilon} P_{2\eta\eta} + \varepsilon P_{3\eta\eta}) + \eta^2 (v''v + v'^2) (k_3 (\Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{\psi\psi}) + \\
& + k_4 (P_{\psi\psi} + P_{2\eta\eta} + \sqrt{\varepsilon} P_{3\eta\eta})) - 2\nu v' \eta (k_3 (\sqrt{\varepsilon} (\Pi_{1\varphi\varphi} + \Pi_{1\psi\psi}) + \\
& + \varepsilon^{3/2} (\Pi_{2\varphi\varphi} + \Pi_{2\psi\psi})) + k_4 (P_{3\eta\eta} + P_{1\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon} P_{2\psi\psi} + \varepsilon P_{3\psi\psi})) + \\
& + v^2 (k_3 (\Pi_{1\varphi\varphi} + \Pi_{1\psi\psi} + \varepsilon (\Pi_{2\varphi\varphi} + \Pi_{2\psi\psi})) + k_4 (P_{2\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon} P_{3\psi\psi})) - \\
& - k^* \eta^3 K''_{1\eta\eta} \sqrt{\varepsilon} \Pi + k^* \eta^2 K''_{1\eta\eta} \Pi - k^* \eta K'_{1\eta} (\sqrt{\varepsilon} \Pi_1 + \varepsilon^{3/2} \Pi_2) + \\
& + k^* K_1 (\Pi_1 + \varepsilon \Pi_2) + \eta^3 K''_{2\eta\eta} (P_1 + \sqrt{\varepsilon} P_2 + \varepsilon P_3) - \eta^2 K''_{2\eta} (P_2 + \\
& + \sqrt{\varepsilon} P_3) + \eta K'_{2\eta} P_3 + k_4 \mu^3 \sigma^{-1} (v''v + 3v''v') (\sqrt{\varepsilon} \Gamma_{\psi\psi} + \Gamma_{\mu\mu} + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_{2\mu\mu} + \\
& + \varepsilon \Gamma_{3\mu\mu}) + k_4 \mu^2 (v''v + v'^2) (\Gamma_{\psi\psi} + \Gamma_{2\mu\mu} + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_{3\mu\mu}) + \\
& + 2\nu v' \mu k_4 (\Gamma_{3\mu\mu} + \Gamma_{1\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_{2\psi\psi} + \varepsilon \Gamma_{3\psi\psi}) + v^2 k_4 (\Gamma_{2\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_{3\psi\psi}) + \\
& + \mu^3 K''_{2\mu\mu} (\Gamma_1 + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_2 + \varepsilon \Gamma_3) - \mu^2 K''_{2\mu} (\Gamma_2 + \sqrt{\varepsilon} \Gamma_3) + \mu K'_{2\mu} \Gamma_3.
\end{aligned}$$

Вимагаючи достатню гладкість початкової та граничних умов

і коефіцієнтів системи рівнянь (3.1.1), (3.1.2) (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно) та їх узгодженість вздовж ребер $L_* \times 0$, $L^* \times 0$ паралелепіпеда $\bar{G}_T = \bar{G}_z \times [0, T]$ ($[0, T]$ – фіксований проміжок часу), на основі принципу максимуму переконуємось у справедливості такого твердження:

$$R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad (i=1, 2, (\varphi, \psi, t) \in \bar{G}_T).$$

3.2. Сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін” у випадку малого масообміну

3.2.1. Нелінійні моделі процесів типу “конвекція-дифузія” з урахуванням масообміну породженого взаємодією забруднюючих речовин

Розглянемо модельну задачу конвективної дифузії [62] для області $G = G_z \times (0, \infty)$ (див. п. 3.1), де G_z ($z = x + iy$) – двозв’язна криволінійна область (рис. 3.1, а):

$$D \left(\frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} - k_1 \cdot c(x, y, t) \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.2.1)$$

$$D^* \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} -$$

$$-v_y(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} - k_2 \cdot c(x, y, t) \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.2.2)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M),$$

$$u|_{L_*} = u_*(M, t), \quad u|_{L^*} = u^*(M, t), \quad u(M, 0) = u_0^0(M), \quad (3.2.3)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*. \quad (3.2.4)$$

Тут $c(x, y, t)$ та $u(x, y, t)$ – відповідно концентрації двох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , M – біжуча точка відповідної кривої, $D = a \cdot \varepsilon$, $D^* = a^* \cdot \varepsilon$, $k_1 = k_1^* \cdot \varepsilon$, $k_2 = k_2^* \cdot \varepsilon$, де k_1^* , k_2^* , a , a^* – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_0^0(M, t)$, $u_*(M, t)$, $u^*(M, t)$, $u_0^0(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

Така модель описує процес руху частинок двох сортів взаємодіючих між собою розчинних у фільтраційному середовищі речовин, коли кожна з них при такій взаємодії втрачає (наприклад, під дією певної хімічної реакції) свої частинки. Тут k_i^* (k_2^*) – деякий коефіцієнт, що характеризує інтенсивність зменшення концентрації c (u) однієї речовини внаслідок взаємодії з іншою, причому $k_i^*(x, y) > k^* \gg \varepsilon$, $i = \overline{1, 2}$.

Аналогічно до п. 3.2.1 вважаємо, що задача фільтрації (3.2.4) є розв'язаною, зокрема, відомим є поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi, \psi)$, $y=y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (3.2.1), (3.2.2) та умовах (3.2.3), приходимо до відповідної задачі для області G_w (рис. 3.1, б):

$$\varepsilon \cdot a \cdot v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} - \varepsilon \cdot k_1^* \cdot c(\varphi, \psi, t) \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \quad (3.2.5)$$

$$\varepsilon \cdot a^* \cdot v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} - \varepsilon k_2^* \cdot c(\varphi, \psi, t) \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \quad (3.2.6)$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \\ u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi). \quad (3.2.7)$$

Розв'язок (c, u) задачі (3.2.5)-(3.2.7) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$c(\varphi, \psi, t) = c_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 c_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, t) + R_2^1(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.2.8)$$

$$u(\varphi, \psi, t) = u_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 u_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, t) + R_2^2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.2.9)$$

де R_2^1, R_2^2 – залишкові члени, $c_i(\varphi, \psi, t), u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i=\overline{0,1}$) – члени

відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: c_0 , u_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); c_1 , u_1 – відповідні поправки, що враховують “вклад” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони), $\Pi_i(\xi, \psi, t)$, $P_i(\xi, \psi, t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$, $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$.

Після підстановки (3.2.8) та (3.2.9) в (3.2.5) – (3.2.6) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій c_i та u_i ($i=\overline{0,1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{it}(\varphi, \psi, t) = \gamma_i(\varphi, \psi, t), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = h_i(\varphi, \psi), c_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i(\psi, t), \\ u_i(\varphi, \psi, 0) = l_i(\varphi, \psi), u_i(\varphi_*, \psi, t) = p_i(\psi, t), \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$$g_0(\varphi, \psi, t) = 0, \quad \gamma_0(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0(\varphi, \psi) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad l_0(\varphi, \psi) = u_0^0(\varphi, \psi),$$

$$h_1(\varphi, \psi) = 0, \quad b_0(\psi, t) = c_*(\psi, t), \quad p_0(\psi, t) = u_*(\psi, t), \quad l_1(\varphi, \psi) = 0,$$

$$b_1(\psi, t) = 0, \quad p_1(\psi, t) = 0, \quad g_1(\varphi, \psi, t) = av^2(\varphi, \psi)(c_{i-1\varphi} + c_{i-1\psi\psi}) - k_1^* c_0 u_0,$$

$$\gamma_1(\varphi, \psi, t) = a^* v^2(\varphi, \psi)(u_{i-1\varphi} + u_{i-1\psi\psi}) - k_2^* c_0 u_0.$$

У результаті їх розв’язання маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \quad (3.2.12)$$

$$c_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot \gamma_1(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t \gamma_1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(s, \tilde{\psi}) ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$ від еквіпотенціальної лінії $s = \varphi_*$ до $s = \varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ .

Функції $\Pi = \sum_{i=0}^2 \Pi_i \varepsilon^i$, $P = \sum_{i=0}^2 P_i \varepsilon^i$, які призначені для усунення

неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами

$c = \sum_{i=0}^1 c_i \varepsilon^i$, $u = \sum_{i=0}^1 u_i \varepsilon^i$ в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$, знаходимо за умов:

$(c + \Pi)|_{\varphi=\varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^2)$, $(u + P)|_{\varphi=\varphi^*} = u^* + O(\varepsilon^2)$, в результаті розв'язку

наступних задач:

$$a \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi}(\xi, \psi, t) = d_i(\xi, \psi, t),$$

$$a^* \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (P_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) P_{i\xi}(\xi, \psi, t) = d^*_i(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_i \rightarrow 0, P_i \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \Pi_i(0, \psi, t) = q_i(\psi, t),$$

$$P_i(0, \psi, t) = q_i^*(\psi, t), \quad i = \overline{0, 2},$$

де

$$\begin{aligned} q_0(\psi, t) &= c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t), \quad q_0^*(\psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ q_1(\psi, t) &= -c_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^*(\psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_2(\psi, t) = 0, \quad q_2^*(\psi, t) = 0, \\ d_0(\xi, \psi, t) &= d_0^*(\xi, \psi, t) = 0, \quad d_1(\xi, \psi, t) = \Pi_{0r}(\xi, \psi, t), \quad d_1^*(\xi, \psi, t) = P_{0r}(\xi, \psi, t), \\ d_2(\xi, \psi, t) &= \Pi_{lr}(\xi, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) \times \\ &\times (\Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + k_1^* \Pi_0(\xi, \psi, t) P_0(\xi, \psi, t)) + v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \times \\ &\times \xi \Pi_{0r}(\xi, \psi, t) + k_1^*(c_0 P_0 + u_0 \Pi_0), \\ d_2^*(\xi, \psi, t) &= P_{lr}(\xi, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) (P_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + k_2^* \Pi_0(\xi, \psi, t)) \times \\ &\times P_0(\xi, \psi, t) + v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi P_{0r}(\xi, \psi, t) + k_2^*(c_0 P_0 + u_0 \Pi_0). \end{aligned}$$

Розв'язки цих задач мають вигляд:

$$\Pi_0(\xi, \psi, t) = (c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t)) \cdot e^{-\frac{\xi}{a}},$$

$$P_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \cdot e^{-\frac{\xi}{a}},$$

$$\Pi_1(\xi, \psi, t) = -c_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{a}} - \frac{a \xi \Pi_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$P_1(\xi, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{a}} - \frac{\xi P_{0r}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)},$$

$$\Pi_2(\xi, \psi, t) = \frac{a}{2} \zeta_2(\psi, t) \left(e^{-\frac{2\xi}{a}} - e^{-\frac{\xi}{a}} \right) - \xi e^{-\frac{\xi}{a}} (\zeta_3(\psi, t) +$$

$$\begin{aligned}
& +a\zeta_1(\psi,t)-\xi^2 e^{\frac{-\xi}{a}} \zeta_1(\psi,t)/2, \\
P_2(\xi,\psi,t) & =\frac{a^*}{2}\zeta_2^*(\psi,t)\left(e^{\frac{-2\xi}{a^*}}-e^{\frac{-\xi}{a^*}}\right)-\xi e^{\frac{-\xi}{a^*}}(\zeta_3^*(\psi,t)+ \\
& +a^*\zeta_1^*(\psi,t))-\xi^2 e^{\frac{-\xi}{a^*}} \zeta_1^*(\psi,t)/2,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\zeta_1(\psi,t) & =\frac{2v'_\xi(\varphi^*,t)}{v^3(\varphi^*,t)}\left(c_t^*(\psi,t)-c_{0t}(\varphi^*,\psi,t)\right)-v^{-4}(\varphi^*,t)\left(c_{tt}^*(\psi,t)-\right. \\
& -c_{0tt}(\varphi^*,\psi,t)), \quad \zeta_2(\psi,t)=k_1^*\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right), \\
\zeta_3(\psi,t) & =-v^{-2}(\varphi^*,\psi)c_{1t}(\varphi^*,\psi,t)-a\left(c_{\psi v}^*(\psi,t)-c_{0\psi v}(\varphi^*,\psi,t)\right)+ \\
& k_1^*\left(u_0(\varphi,\psi,t)\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)-c_0(\varphi,\psi,t)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\right), \\
\zeta_1^*(\psi,t) & =\frac{2v'_\xi(\varphi^*,t)}{v^3(\varphi^*,t)}\left(u_t^*(\psi,t)-u_{0t}(\varphi^*,\psi,t)\right)-v^{-4}(\varphi^*,t)\left(u_{tt}^*(\psi,t)-\right. \\
& -u_{0tt}(\varphi^*,\psi,t)), \quad \zeta_2^*(\psi,t)=k_2^*\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right), \\
\zeta_3^*(\psi,t) & =-v^{-2}(\varphi^*,\psi)u_{1t}(\varphi^*,\psi,t)-a\left(u_{\psi v}^*(\psi,t)-u_{0\psi v}(\varphi^*,\psi,t)\right)+ \\
& k_2^*\left(u_0(\varphi,\psi,t)\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)-c_0(\varphi,\psi,t)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{aligned}
\varepsilon a v^2(\varphi,\psi)\left(R_{2\varphi\varphi}^1(\varphi,\psi,t)+R_{2\psi\psi}^1(\varphi,\psi,t)\right)-v^2(\varphi,\psi)R_{2\varphi}^1(\varphi,\psi,t)- \\
-\varepsilon\cdot k_1^*\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=R_{2t}^1(\varphi,\psi,t)-b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \cdot a^* \cdot v^2(\varphi, \psi)(R_{2\varphi\varphi}^2(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^2(\varphi, \psi, t)) - v^2(\varphi, \psi)R_{2\varphi}^2(\varphi, \psi, t) - \\
& - \varepsilon \cdot k_2^* \cdot R_2^1(\varphi, \psi, t)R_2^2(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^2(\varphi, \psi, t) - b_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\
& R_2^i(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, 2}).
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
& b_1(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = av^2(c_{1\varphi\varphi} + c_{1\psi\psi}) - k_1^*c_1u_0 - k_1^*c_0u_1 - \varepsilon k_1^*c_1u_1 - \\
& + 2avn_\xi \xi \Pi_{2\xi\xi} + av^2(\Pi_{1\psi\psi} + \Pi_{2\psi\psi}\varepsilon) - 2avn_\xi(\xi \Pi_{0\psi\psi} + \xi \Pi_{1\psi\psi}\varepsilon + \Pi_{2\psi\psi}\varepsilon^2) + \\
& + a((v''v + v'^2)/2)\xi^2(\Pi_{1\xi\xi} + \Pi_{2\xi\xi}\varepsilon + \Pi_{0\psi\psi}\varepsilon + \Pi_{1\psi\psi}\varepsilon^2 + \Pi_{2\psi\psi}\varepsilon^3) - \\
& - 2vn_\xi \xi \Pi_{2\xi} + ((v''v + v'^2)/2)\xi^2(\Pi_{1\xi} + \Pi_{2\xi}\varepsilon) - k_1^*(\Pi_0P_1 + \Pi_0P_2\varepsilon + \\
& \Pi_1P_0 + \Pi_1P_1\varepsilon + \Pi_1P_2\varepsilon^2 + \Pi_2P_0\varepsilon + \Pi_2P_1\varepsilon^2 + \Pi_2P_2\varepsilon^3) - k_1^*(c_0(P_1 + P_2\varepsilon) + \\
& + u_0(\Pi_1 + \Pi_2\varepsilon) + c_1(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2) + u_1(\Pi_0 + \Pi_1\varepsilon + \Pi_2\varepsilon^2)), \\
& b_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = a^*v^2(u_{1\varphi\varphi} + u_{1\psi\psi}) - k_2^*c_1u_0 - k_2^*c_0u_1 - \varepsilon k_2^*c_1u_1 - \\
& - 2a^*vn_\xi \xi P_{2\xi\xi} + a^*v^2(P_{1\psi\psi} + P_{2\psi\psi}\varepsilon) - 2a^*vn_\xi(\xi P_{0\psi\psi} + \xi P_{1\psi\psi}\varepsilon + P_{2\psi\psi}\varepsilon^2) + \\
& + a^*((v''v + v'^2)/2)\xi^2(P_{1\xi\xi} + P_{2\xi\xi}\varepsilon + P_{0\psi\psi}\varepsilon + P_{1\psi\psi}\varepsilon^2 + P_{2\psi\psi}\varepsilon^3) - \\
& - 2vn_\xi \xi P_{2\xi} + ((v''v + v'^2)/2)\xi^2(P_{1\xi} + P_{2\xi}\varepsilon) - k_2^*(\Pi_0P_1 + \Pi_0P_2\varepsilon + \\
& + \Pi_1P_0 + \Pi_1P_1\varepsilon + \Pi_1P_2\varepsilon^2 + \Pi_2P_0\varepsilon + \Pi_2P_1\varepsilon^2 + \Pi_2P_2\varepsilon^3) - k_2^*(c_0(P_1 + P_2\varepsilon) + \\
& + u_0(\Pi_1 + \Pi_2\varepsilon) + c_1(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2) + u_1(\Pi_0 + \Pi_1\varepsilon + \Pi_2\varepsilon^2)).
\end{aligned}$$

Аналогічно до 3.1 встановлюється оцінка залишкових членів:

$$R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad (i = \overline{1, 2}, (\varphi, \psi, t) \in G).$$

3.2.2. Моделювання процесів конвективної дифузії за умов лінійної залежності інтенсивності масообміну від концентрацій двох сортів забруднюючих речовин

Для двозв'язної області G (див. п. 3.1) розглянемо сингулярно збурену задачу:

$$D \left(\frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} - k_1 \cdot c(x, y, t) + k_2 \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.2.14)$$

$$D^* \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + k_3 \cdot c(x, y, t) - k_4 \cdot u(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.2.15)$$

$$c \Big|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c \Big|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M),$$

$$u \Big|_{L_*} = u_*(M, t), \quad u \Big|_{L^*} = u^*(M, t), \quad u(M, 0) = u_0^0(M), \quad (3.2.16)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi \Big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad (3.2.17)$$

що описує процес конвективної дифузії речовин двох сортів за умов малого масообміну, інтенсивність якого залежить від концентрацій розчинних (забруднюючих) речовин. Тут $c(x, y, t)$ та $u(x, y, t)$ – концентрації двох сортів розчинних речовин, M – біжуча точка відповідної кривої, $D = a \cdot \varepsilon$, $D^* = a^* \cdot \varepsilon$, $k_1 = k_1^* \cdot \varepsilon$, $k_2 = k_2^* \cdot \varepsilon$,

$k_3 = k_3^* \cdot \varepsilon$, $k_4 = k_4^* \cdot \varepsilon$, де k_1^* , k_2^* , k_3^* , k_4^* , a , a^* – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_0^0(M, t)$, $u_*(M, t)$, $u^*(M, t)$, $u_0^0(M, t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G .

На відміну від випадку, описаного в 3.2.1, тут частинки одного сорту речовини можуть (наприклад, під дією певних хімічних реакцій) ставати частинками іншого сорту, причому k_1^* , k_2^* , k_3^* , k_4^* – концентраційні коефіцієнти інтенсивності процесів переходу з одного сорту речовини в інший (див., напр., [103]), $k_i^*(x, y) > k^* \gg \varepsilon$ ($i = \overline{1, 4}$).

Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (3.2.14), (3.2.15) та умовах (3.2.16) (як і раніше, вважаємо, що розв'язок задачі (3.2.17) відомий), приходимо до відповідної задачі для області G_w :

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \cdot a \cdot v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) - \\
 & - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} - \varepsilon \cdot k_1^* \cdot c(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot k_2^* \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \quad (3.2.18) \\
 & \varepsilon \cdot a^* \cdot v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) -
 \end{aligned}$$

$$-v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} + \varepsilon \cdot k_3^* \cdot c(\varphi, \psi, t) - \varepsilon \cdot k_4^* \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \quad (3.2.19)$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi),$$

$$u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi). \quad (3.2.20)$$

Розв'язок (c, u) (3.2.18) – (3.2.20) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$c(\varphi, \psi, t) = c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(\varphi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + R_{n+1}^1(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.2.21)$$

$$u(\varphi, \psi, t) = u_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i u_i(\varphi, \psi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, t) + R_{n+1}^2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (3.2.22)$$

де R_{n+1}^1, R_{n+1}^2 – залишкові члени, $c_i(\varphi, \psi, t), u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, t), P_i(\xi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$.

Після підстановки (3.2.21) та (3.2.22) в (3.2.18) – (3.2.19) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій c_i та u_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{it}(\varphi, \psi, t) = \gamma_i(\varphi, \psi, t), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = h_i(\varphi, \psi), c_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i(\psi, t), \\ u_i(\varphi, \psi, 0) = l_i(\varphi, \psi), u_i(\varphi_*, \psi, t) = p_i(\psi, t), \end{cases} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} g_0(\varphi, \psi, t) = 0, \quad \gamma_0(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0(\varphi, \psi) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad l_0(\varphi, \psi) = u_0^0(\varphi, \psi), \\ b_0(\psi, t) = c_*(\psi, t), \quad p_0(\psi, t) = u_*(\psi, t), \quad h_i(\varphi, \psi) = 0, \quad l_i(\varphi, \psi) = 0, \\ g_i(\varphi, \psi, t) = av^2(\varphi, \psi) (c_{i-1\varphi\varphi} + c_{i-1\psi\psi}) - k_1^* c_{i-1} + k_2^* u_{i-1}, \quad b_i(\psi, t) = 0, \\ \gamma_i(\varphi, \psi, t) = a^* v^2(\varphi, \psi) (u_{i-1\varphi\varphi} + u_{i-1\psi\psi}) + k_3^* c_{i-1} - k_4^* u_{i-1}, \quad p_i(\psi, t) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

У результаті їх розв'язання для $i = \overline{1, n}$ маємо:

$$\begin{aligned} c_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ u_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot \gamma_i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t \gamma_i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \end{aligned}$$

c_0 та u_0 – представляються відповідно формулами (3.2.11), (3.2.12).

Функції $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i \varepsilon^i$, $P = \sum_{i=0}^{n+1} P_i \varepsilon^i$ знаходимо аналогічно до п. 3.2.1.

3.2.3. Асимптотичне наближення розв'язку нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії

Для області $G=G_z \times (0, \infty)$ (див. п. 3.1), розглянемо таку модельну нелінійну сингулярно збурену крайову задачу для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням малого масообміну:

$$\bar{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \bar{v} = 0, \quad \varphi|_{L_x} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*; \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \cdot (C_{1xx}(x, y, t) + C_{1yy}(x, y, t)) - v_x(x, y) \cdot C_{1x}(x, y, t) - \\ & - v_y(x, y) \cdot C_{1y}(x, y, t) - \varepsilon \cdot a_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t) \times \\ & \quad \times C_2(x, y, t) \cdot C_3(x, y, t) = C_{1t}(x, y, t), \\ & \varepsilon \cdot (C_{2xx}(x, y, t) + C_{2yy}(x, y, t)) - v_x(x, y) \cdot C_{2x}(x, y, t) - \\ & - v_y(x, y) \cdot C_{2y}(x, y, t) + \varepsilon \cdot b_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t) \cdot C_2(x, y, t) - \\ & - \varepsilon \cdot b_2(x, y, t) \cdot C_2(x, y, t) \cdot C_3(x, y, t) = C_{2t}(x, y, t), \\ & \varepsilon \cdot (C_{3xx}(x, y, t) + C_{3yy}(x, y, t)) - v_x(x, y) \cdot C_{3x}(x, y, t) - \\ & - v_y(x, y) \cdot C_{3y}(x, y, t) + \varepsilon \cdot d_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t) \times \\ & \quad \times C_2(x, y, t) \cdot C_3(x, y, t) = C_{3t}(x, y, t); \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

$$C_j|_{L_x} = c_{j^*}(M, t), \quad C_j|_{L^*} = c_j^*(M, t), \quad (3.2.29)$$

$$C_j(x, y, 0) = c_j^0(x, y), \quad j = \overline{1, 3}. \quad (3.2.30)$$

Тут $\bar{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$ – вектор, а $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал швидкості фільтрації ($\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$) в точці (x, y) , $C_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) – концентрації розчинних в потоці речо-

вин в точці (x, y) в момент часу t ; $a_1(x, y, t)$, $b_1(x, y, t)$, $b_2(x, y, t)$, $d_1(x, y, t)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують вплив забруднення на його дифузійну проникність, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), M – довільна точка відповідної поверхні, $c_{j*}(M, t)$, $c_j^*(M, t)$, $c_j^0(x, y)$ ($j = \overline{1, 3}$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та вздовж усіх ребер області G .

Нехай задача (3.2.27) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$, де $G_w = \{w = (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \varrho_* < \psi < \varrho^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 3.1, б) є розв’язаною. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $t = t$ у рівнянні (3.2.18) та умовах (3.2.19), (3.2.20), приходимо до відповідної дифузійної задачі для області G_w :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{1\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v^2(\varphi, \psi) C_{1\varphi}(\varphi, \psi, t) - \\ - \varepsilon \cdot a_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t) \cdot C_3(\varphi, \psi, t) = C_{1r}(\varphi, \psi, t), \\ \varepsilon \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{2\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{2\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v^2(\varphi, \psi) C_{2\varphi}(\varphi, \psi, t) + \\ + \varepsilon \cdot b_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t) - \varepsilon \cdot b_2(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t) \times \\ \times C_3(\varphi, \psi, t) = C_{2r}(\varphi, \psi, t), \\ \varepsilon \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{3\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{3\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - v^2(\varphi, \psi) C_{3\varphi}(\varphi, \psi, t) + \\ + \varepsilon \cdot d_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t) \cdot C_3(\varphi, \psi, t) = C_{3r}(\varphi, \psi, t), \end{array} \right. \quad (3.2.31)$$

$$\begin{aligned} C_j(\varphi_*, \psi, t) &= c_{j*}(\psi, t), \quad C_j(\varphi^*, \psi, t) = c_j^*(\psi, t), \\ C_j(\varphi, \psi, 0) &= c_j^0(\varphi, \psi), \quad j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Розв’язок $C_j(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) задачі (3.2.31), (3.2.32) з точніс-

тю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C_j(\varphi, \psi, t) = C_{j,0}(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i C_{j,i}(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_{j,i}(\xi, \psi, t) + R_{j,n}(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3.2.33)$$

де $R_{j,n}(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – залишкові члени, $C_{j,i}(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\Pi_{j,i}(\xi, \psi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi^*$, $\xi = (\varphi - \varphi^*) \cdot \varepsilon^{-1}$.

У результаті підстановки (3.2.33) в (3.2.31) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо наступні задачі для знаходження головних частин $C_{j,0}(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) розв'язку і поправок $C_{j,i}(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 3}$):

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{j,0\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{j,0t}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ C_{j,0}(\varphi, \psi, 0) = c_j^0(\varphi, \psi), \quad C_{j,0}(\varphi^*, \psi, t) = c_{j^*}(\psi, t), \quad j = \overline{1, 3}, \\ \begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{j,i\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{j,it}(\varphi, \psi, t) = g_{j,i}(\varphi, \psi, t), \\ C_{j,i}(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad C_{j,i}(\varphi^*, \psi, t) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, 3}, \end{cases} \end{cases}$$

де

$$g_{1,i}(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{1,i-1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{1,i-1\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) - a_1(\varphi, \psi, t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{m=0}^{i-1-k} C_{1,k}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{1,m}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{1,i-1-k-m}(\varphi, \psi, t),$$

$$\begin{aligned}
g_{2,i}(\varphi, \psi, t) &= v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{2,i-1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{2,i-1\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) + \\
&+ b_1(\varphi, \psi, t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} C_{1,k}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{2,i-1-k}(\varphi, \psi, t) - b_2(\varphi, \psi, t) \times \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{i-1} C_{2,k}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{3,i-1-k}(\varphi, \psi, t), \\
g_{3,i}(\varphi, \psi, t) &= v^2(\varphi, \psi) \cdot (C_{3,i-1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{3,i-1\psi\psi}(\varphi, \psi, t)) + \\
&+ d_1(\varphi, \psi, t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{m=0}^{i-1-k} C_{1,k}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{2,m}(\varphi, \psi, t) \cdot C_{3,i-1-k-m}(\varphi, \psi, t).
\end{aligned}$$

Їх розв'язки мають вигляд:

$$\begin{aligned}
C_{j,0}(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} c_{j^*}(t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ c_j^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi)), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\
C_{j,i}(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}(s, \psi, f(s, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v^2(s, \psi)} ds, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_{j,i}(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi). \end{cases}
\end{aligned}$$

Функції $\Pi_j = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_{j,i}$ ($j = \overline{1,3}$) призначені для усунення

нев'язок, що вносяться побудованими регулярними частинами аси-

мптотики $C_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot C_{j,i}$ ($j = \overline{1,3}$), в околах точок (φ_*, ψ) , а отже,

обов'язковим є виконання наступних умов:

$(C_j + \Pi_j)|_{\varphi=\varphi_*} = c_j^* + O(\varepsilon^{n+1})$ ($j = \overline{1,3}$). Для їх знаходження матимемо

задачі:

$$\begin{cases} \Pi_{j,0\xi\xi} + \Pi_{j,0\xi} = 0, \quad j = \overline{1,3}, \\ \Pi_{j,0}(\xi, \psi, t) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad \Pi_{j,0}(0, \psi, t) = c_j^*(\psi, t) - C_{j,0}(\varphi^*, \psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_{j,i\xi\xi} + \Pi_{j,i\xi} = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot (\Pi_{j,i-1t} - q_{j,i}(\xi, \psi, t)), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{1,3}, \\ \Pi_{j,i}(\xi, \psi, t) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad \Pi_{j,i}(0, \psi, t) = -C_{j,i}(\varphi^*, \psi, t), \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} q_{1,1}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{1,0\xi} - \Pi_{1,0\xi\xi}), \\ q_{2,1}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{2,0\xi} - \Pi_{2,0\xi\xi}), \\ q_{3,1}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{3,0\xi} - \Pi_{3,0\xi\xi}), \\ q_{1,2}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{1,1\xi} - \Pi_{1,1\xi\xi}) - \\ &\quad - (v_\xi^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi) \cdot v_{\xi\xi}(\varphi^*, \psi)) \cdot \xi^2 \cdot (\Pi_{1,0\xi} - \Pi_{1,0\xi\xi}) + \\ &\quad - a_1(\varphi^*, \psi, \chi) \cdot \Pi_{1,0} \cdot \Pi_{2,0} \cdot \Pi_{3,0}, \\ q_{2,2}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{2,1\xi} - \Pi_{2,1\xi\xi}) - \\ &\quad - (v_\xi^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi) \cdot v_{\xi\xi}(\varphi^*, \psi)) \cdot \xi^2 \cdot (\Pi_{2,0\xi} - \Pi_{2,0\xi\xi}) + \\ &\quad + b_1(\varphi^*, \psi) \cdot \Pi_{1,0} \cdot \Pi_{2,0} - b_2(\varphi^*, \psi) \cdot \Pi_{2,0} \cdot \Pi_{3,0}, \\ q_{3,2}(\xi, \psi, t) &= 2 \cdot v(\varphi^*, \psi) \cdot v_\xi(\varphi^*, \psi) \cdot \xi \cdot (\Pi_{3,1\xi} - \Pi_{3,1\xi\xi}) - \\ &\quad - (v_\xi^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi) \cdot v_{\xi\xi}(\varphi^*, \psi)) \cdot \xi^2 \cdot (\Pi_{3,0\xi} - \Pi_{3,0\xi\xi}) + \\ &\quad + d_1(\varphi^*, \psi) \cdot \Pi_{1,0} \cdot \Pi_{2,0} \cdot \Pi_{3,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{1,i}(\xi, \psi, t) &= \sum_{l=0}^{i-1} V_{*l} (P_{1,l\xi} - P_{1,l\xi\xi}) - \sum_{l=0}^{i-2} A_{*l} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1-k} P_{1,k} P_{2,m} P_{3,l-1-k-m}, \\
q_{2,i}(\xi, \psi, t) &= \sum_{l=0}^{i-1} V_{*l} (P_{2,l\xi} - P_{2,j\xi\xi}) + \sum_{l=0}^{i-2} B_{1*l} \sum_{k=0}^{l-1} P_{1,k} P_{2,l-1-k} - \\
&\quad - \sum_{l=0}^{i-2} B_{2*l} \sum_{k=0}^{l-1} P_{2,k} P_{3,l-1-k}, \\
q_{3,i}(\xi, \psi, t) &= \sum_{l=0}^{i-1} V_{*l} (P_{3,l\xi} - P_{3,l\xi\xi}) + \sum_{l=0}^{i-2} D_{1*l} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1-k} P_{1,k} P_{2,m} P_{3,l-1-k-m},
\end{aligned}$$

$i = \overline{3, n+1}$, V_{*l} , A_{1*l} , B_{1*l} , B_{2*l} і D_{1*l} – коефіцієнти при ε розкладу функцій $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$, $a_1(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$, $b_1(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$, $b_2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$ і $d_1(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

3.3. Моделювання процесу очищення стічних вод на каркасно- засипних фільтрах

3.3.1. Математичне моделювання процесів фільтрування рідин з домішками без урахування дифузії

Незважаючи на велику кількість досліджень, присвячених питанню фільтрування малоконцентрованих суспензій активного мулу, до цього часу механізм фільтрування активного мулу і деструкції органічних речовин залишається неповністю з'ясованим. Це пояснюється складністю прямого визначення ряду параметрів,

наприклад, таких, як: питомий об'єм активного мулу у фільтруючому завантаженні, швидкості окислення органічних речовин і ін. Відсутність цих даних не дає змоги повною мірою використовувати можливості, які закладені у фільтрувальному методі доочищення.

Моделюванням процесу доочистки стічних вод при фільтруванні через двошарове завантаження займались такі відомі вчені, як Мінц Д.М., Шехтмак Ю.М., Веригін М.М., Родзіллер Й.Д. і Комунар Г.М. [62, 105]. Проте деякі важливі компоненти процесу очистки забруднених вод в їх моделях залишилися неврахованими. Зокрема, не враховується втрата концентрації забруднень водою, недосконало встановлений зв'язок між кількостями накопичених у фільтрі відкладень та завислих речовин, що вилучаються із забрудненої рідини.

Розглянемо наступну модельну задачу процесу очищення стічних вод [64] на двошаровому каркасно-засипному фільтрі, що враховує поставлені вище запити:

$$v(x) \cdot c_x + \gamma(x) \cdot F(x, t) + c_t = 0, \quad (3.3.1)$$

$$u_t - \gamma(x) \cdot F(x, t) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$F(x, t) = \begin{cases} c(x, t), & \text{якщо } c(x, t) < c_*^* - u(x, t), \\ c_*^* - u(x, t), & \text{якщо } c(x, t) \geq c_*^* - u(x, t), \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$c|_{x=x_*} = c_*(t), \quad c|_{t=0} = c_0^0(x), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (3.3.4)$$

де $0 < x_* \leq x \leq x^* < \infty$, $\ell = x^* - x_*$ – висота фільтру, $0 < t < \infty$, $c(x, t)$ – концентрація забруднюючої речовини у воді, що фільтрується, $u(x, t)$ –

концентрація забруднень, що залишаються в фільтрі, $\gamma(x)$ – функція швидкості масообміну (описує швидкість масообміну у першому (гравійному) та другому (гравійно-піщаному) шарі, c_*^* – концентрація граничного насичення, c_* , c_0^0 – задані достатньо гладкі, узгоджені між собою в точці $(x_*, 0)$ функції. Функція $F(x, y)$ встановлює зв'язок між концентраціями $c(x, t)$ та $u(x, t)$ (зокрема залежність між кількостями вилучених із рідини та осілих у фільтрі забруднень). Зазначимо, що ураховання додаткових умов $c_*^* = u(x^*, t)$, $c_{**} = c(x^*, t)$ дозволяє знайти відповідно час повного забруднення фільтру та час роботи фільтру, за який концентрація забруднень на виході із нього не перевищуватиме c_{**} .

Відшукування розв'язку задачі (3.3.1) – (3.3.4) зведемо до розв'язування наступних $m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) задачі відповідно на проміжках часу $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, $n = \overline{0, m}$ (стала m визначається в процесі розв'язування задачі в залежності від виконання додаткових умов), τ – стала, вибір якої залежить від наперед заданої точності розв'язку:

$$v(x) \cdot c_{nx} + \gamma(x) \cdot F_n(x, t) + c_{nt} = 0, \quad u_{nt} - \gamma(x) \cdot F_n(x, t) = 0,$$

$$F_n(x, t) = \begin{cases} c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau), & \text{якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) < c_*^* - u(x, t - \tau), \\ c_*^* - u(x, t - \tau), & \text{якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) \geq c_*^* - u(x, t - \tau), \end{cases}$$

$$c|_{x=x_*} = c_*(t), \quad c|_{t=n\tau} = \begin{cases} c_0^0(x), & \text{якщо } n=0, \\ c_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases} \quad u|_{t=n\tau} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=0, \\ u_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

де $f^{-1}(x)$ – обернена до $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$ функція. Їх розв’язки мають

вигляд:

$$u_n(x, t) = \gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + u_{n-1}(x, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + c_{n-1}(f^{-1}(f(x) - t), (n-1)\tau), & t \leq f(x), \\ -\int_{x_*}^x \frac{\gamma(s) F_n(x, s)}{v(s)} ds + c_*(t - f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

Для числової реалізації розв’язку вихідної задачі згідно отриманих формул пропонується такий алгоритм:

1. Задаємо граничну $c_*(t)$ та початкову $c_0^0(x)$ умови, функцію швидкості масообміну, концентрацію граничного насичення, сталу K , сталу ε (точність), задаємо кількість l вузлів розбиття відрізка $[x_*, x^*]$. Робимо наступне присвоєння: $m=0$, де m (лічильник).

2. Знаходимо вузли розбиття за формулою $x_i = x_* + (x^* - x_*)i/l$, $i = \overline{0, l}$. Фіксуємо сталу $\tau = f(x_1 - x_0)$, $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

3. Знаходимо розв’язок задачі в момент часу $n\tau$, $n=1$ за формулами:

$$F_1(x) = \begin{cases} c_0^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, 0), \\ c_*^* - u(x, 0), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, 0), \end{cases}$$

$$u_1(x_i, \tau) = \gamma(x_i)F_1(x_i)\tau,$$

$$c_1(x_i, \tau) = \begin{cases} -\gamma(x)F_1(x_i)\tau + c_0^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau)), & i > 0, \\ c_*(\tau), & i = 0. \end{cases}$$

4. Перевіряємо виконання умови $c_1(x^*, \tau) \geq K$: якщо вона виконується, то переходимо до пункту 7; інакше – робимо наступне присвоєння: $n = n + 1$.

5. Знаходимо розв'язок задачі в момент часу $n\tau$ за формулами:

$$F_n(x) = \begin{cases} c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \\ c_*^* - u(x, (n-1)\tau), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \end{cases}$$

$$u_n(x_i, n\tau) = \gamma(x_i)F_n(x_i)\tau + u_{n-1}(x_i, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x_i, n\tau) = \begin{cases} -\gamma(x)F_n(x_i)\tau + c_{n-1}(f^{-1}(f(x_i) - \tau), (n-1)\tau), & i > 0, \\ c_*(n\tau), & i = 0. \end{cases}$$

6. Переходимо до пункту 4.

7. Якщо $m = 0$ то змінній R_1 присвоюємо значення $n\tau$ (час ефективної роботи фільтру), здійснюємо присвоєння $m = m + 1$, $l = l + 1$, переходимо до пункту 2. Якщо $m \neq 0$, то змінній R_2 присвоюємо значення $n\tau$.

8. Якщо $|R_1 - R_2| < \varepsilon$, то R_2 – час ефективної роботи фільтру, інакше – здійснюємо присвоєння: $R_1 = R_2$, $l = l + 1$. Переходимо до пункту 2.

Зауважимо, що в процесі виконання даного алгоритму отримується розподіл концентрації забруднень у воді, що фільтрується, в моменти часу τ , а також розподіл концентрації забруднень, які осідають у фільтрі.

3.3.2. Закономірності фільтрування з урахуванням дифузії

На основі відомої моделі Мінца побудуємо та дослідимо нову нелінійну модель процесу очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах, яка враховує малу поздовжню дифузію.

Розглянемо спочатку випадок нескінченного фільтра. Вихідна система рівнянь фільтрування з відповідними додатковими умовами має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

$$c|_{x=0} = c_{bx}(t), \quad c|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \quad \rho|_{t=0} = \rho_{bx}(x),$$

$$\rho|_{x=0} = e^{-\alpha t} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \quad (3.3.6)$$

де $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$, $c(x,t)$ – концентрація домішок у рідині, що фільтрується, $\rho(x,t)$ – концентрація осаду у завантаженні, $c_{bx}(x)$ – концентрація завислих домішкових частинок на вході фільтра;

$\rho_{bx}(x)$ – початковий розподіл осаду у завантаженні; β – коефіцієнт захоплених за одиницю часу домішкових частинок, α – коефіцієнт відірваних за той же час частинок осаду; v – швидкість фільтрування, D, D_* – коефіцієнт дифузії, де $D=b\varepsilon, D_*=b_*\varepsilon, 0<b\leq 1, 0<b_*\leq 1,$ ε – малий параметр.

Перше рівняння (3.3.5) (рівняння балансу) описує закон збереження маси і враховує явище поздовжньої дифузії, друге (рівняння кінетики) – відображає той факт, що швидкість росту щільності насичення завантаження осадом ($\partial\rho/\partial t$) дорівнює різниці маси βc захоплених за одиницю часу домішкових частинок і маси $\alpha\rho$ відірваних за той же час частинок осаду, а також враховує дифузю осаду у завантаженні.

Розв’язки системи (3.3.5) за умов (3.3.6) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + R_1(x,t,\varepsilon), \\ \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t) + R_2(x,t,\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

де R_1, R_2 – відповідні залишкові члени рядів (3.3.7), $c_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: c_0, ρ_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі, $c_1, \dots, c_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ – поправки, що враховують вклад дифузії вздовж фільтру.

Після підстановки (3.3.7) в (3.3.5) та застосування стандарт-

ної процедури прирівнювання, для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i=0, n$) приходимо до задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0 - \alpha \rho_0, \\ c_0|_{x=0} = c_{bx}(t), & c_0|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \\ \rho_0|_{t=0} = \rho_{bx}(x), & \rho_0|_{x=0} = e^{-\alpha x} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \end{cases} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = \Psi_i, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - \alpha \rho_i + \Phi_i, \\ c_i|_{x=0} = 0, & c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (3.3.9)$$

де $\Psi_i(x, t) = \frac{\partial^2 c_{i-1}(x, y)}{\partial x^2}$, $\Phi_i(x, t) = \frac{\partial^2 \rho_{i-1}(x, y)}{\partial x^2}$ $i=1, 2, \dots$

Відшукування розв'язку задачі (3.3.8) зводиться до розв'язування рівнянь

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \quad (3.3.10)$$

з додатковими умовами (3.3.6).

З (3.3.10), (3.3.6) методом Рімана знаходимо $c_0(x, t)$ та $\rho_0(x, t)$:

$$c_0(x, t) = e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(c_{bx}(0) I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} x t} \right) + \frac{\alpha}{v} \int_0^x I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} (x - \xi) \tau} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \rho_{bx}(\xi) e^{\frac{\beta\xi}{v}} d\xi + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v} x(t-\eta)} \right) \left[\frac{dc_{bx}(\eta)}{d\eta} + \alpha c_{bx}(\eta) \right] d\eta, \\ \rho_0(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(\rho_{bx}(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v} xt} \right) + \frac{\beta}{v} \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta x}{v} (t-\eta)} \right) \times \right. \\ & \left. \times c_{bx}(\eta) d\eta + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta t}{v} (x-\xi)} \right) \left[\frac{d\rho_{bx}(\xi)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} \rho_{bx}(\xi) \right] d\xi \right). \end{aligned}$$

З системи (3.3.9) отримаємо задачі для знаходження $c_i(x,t), \rho_i(x,t)$ ($i=1,2,\dots$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \alpha \Psi_i - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \Psi_i \right) &= 0, \\ c_i|_{x=0} = 0, c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Розв'язуючи (3.3.11) методом Рімана, одержимо рекурентні формули для визначення $c_i(x,t)$ і $\rho_i(x,t)$:

$$\begin{aligned} c_i(x,t) &= \frac{e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t}}{vb} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v} (x-\xi)(t-\eta)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^3 c_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) d\eta d\xi, \\ \rho_i(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v} (x-\xi)(t-\eta)} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\beta}{\nu} \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) d\eta d\xi.$$

На виході $x=L$ фільтра $[0, L]$ задаємо умови швидкого відведення забруднень (умови Веригіна): $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$.

Розв'язок $c(x, t)$ і $\rho(x, t)$ задачі (3.3.5), (3.3.6) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$c(x, t) = c_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t) + R_1(x, t, \varepsilon), \quad (3.3.12)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\mu, t) + R_2(x, t, \varepsilon), \quad (3.3.13)$$

де $\Pi_i(\xi, t)$, $P_i(\mu, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару, що враховують дані умови в околі $x=L$ ($\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$). Для знаходження цих функцій маємо задачу:

$$b \Pi_{i\xi\xi} + \nu \Pi_{i\xi} = I(i) P_{i-1t} + I(i) \varepsilon^{i/2} P_{it} + I(i+1) P_{it}, \quad \Pi_i \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_{i\xi}(L, t) = K_i(t);$$

$$b_* P_{i\mu\mu} - \alpha P_i - P_{it} = -\beta M(i) \Pi_{i-1}, \quad P_i \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad P_{i\mu}(L, t) = H_i(t);$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{парне}, \\ 1, & a - \text{непарне}, \end{cases} \quad M(a) = \begin{cases} 1, & a - \text{парне}, \\ 0, & a - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & i = n+1, \\ -c_{i\xi}(L, t), & i = 0, \dots, n, \end{cases} \quad H_i(t) = \begin{cases} 0, & i = n+1, \\ -\rho_{i\mu}(L, t), & i = 0, \dots, n, \end{cases}$$

розв'язки яких отримуються в явному вигляді та з використанням числових методів.

Для знаходження залишкових членів маємо задачу порядку $O(\varepsilon^{n+1})$ малості:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + v \frac{\partial R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - b\varepsilon \frac{\partial^2 R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \varepsilon^{n+1} b \frac{\partial^2 c_n}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - \beta R_1(x,t,\varepsilon) + \alpha R_2(x,t,\varepsilon) - b_*\varepsilon \frac{\partial^2 R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \\ = \varepsilon^{n+1} (\beta \Pi_{n+1} + b_* \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2}), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_1(0,t,\varepsilon) = R_1(L,t,\varepsilon) = R_1(x,0,\varepsilon) = R_2(0,t,\varepsilon) = R_2(L,t,\varepsilon) = \\ = R_2(x,0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Вимагаючи достатню гладкість початкової та граничних умов і коефіцієнтів системи рівнянь (3.3.5) та їх узгодженість у точці $x=L$, на основі принципу максимуму переконуємось у справедливості такого твердження: $R_i(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ ($i=1,2$).

3.4. Математичне моделювання масопереносу забруднень в ґрунтах з урахуванням природного самоочищення

За останні десятиріччя суттєво зросла кількість твердих побутових відходів (ТПВ). Причому у системі управління відходами, депонування ТПВ на полігонах і звалищах є одним із найбільш розповсюджених способів їх знешкодження. Однак такі полігони і

звалища часто самі стають джерелами забруднення, що зумовлює необхідність розробки нових підходів і методологій їх проектування.

У товщі ТПВ протікають процеси біохімічного розкладу органічної частини відходів, у результаті чого утворюються біогаз і фільтрат, який містить розчинні, завислі чи осідаючі токсичні компоненти. Закономірності утворення та руху біогазу і фільтрату у товщі полігонів та звалищ, а також за межами їх розташування у даний час вивчені недостатньо, що пов'язано зі складністю і тривалістю отримання достовірних експериментальних результатів.

Розвиток теоретичних методів прогнозування масопереносу фільтрату у товщі полігону та за його межами у загальному випадку є необхідною умовою подальшого прогресу в області знешкодження відходів і, особливо, технологій депонування ТПВ.

Для моделювання розкладів ТПВ і опису типових процесів, які при цьому відбуваються, зазвичай використовують рівняння першого порядку [14]. Пропонована нижче модель ґрунтується на таких припущеннях: розклад полімерів і метаногенез розглядаються як основні процеси розкладу ТПВ; концентрації ТПВ, леткі жирні кислоти і біомаса метаногенних мікроорганізмів є основними невідомими моделі. Їх природну взаємодію у деякому пористому пласті G_z ($z=x+iy$) (двоzv'язній криволінійній області, обмеженій двома замкненими гладкими контурами $L_*=\{z: f_*(x,y)=0\}$ та $L^*=\{z: f^*(x,y)=0\}$ (рис. 3.1, а)) опишемо в області $G=G_z \times (0, \infty)$ модельною задачею трикомпонентного конвективного масоперено-

су з урахуванням масообміну із запізненням:

$$\bar{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \bar{v} = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} v_x(x, y) \cdot C_{1x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{1y}(x, y, t) + C_{1t}(x, y, t) = \\ = -a_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau), \\ v_x(x, y) \cdot C_{2x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{2y}(x, y, t) + C_{2t}(x, y, t) = \\ = b_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) - b_2(x, y, t) \times \\ \times C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} v_x(x, y) \cdot C_{3x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{3y}(x, y, t - \tau) + C_{3t}(x, y, t) = \\ = d_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau); \\ C_j|_{L_*} = c_j^*(M, \tilde{t}), \quad C_j(x, y, \tilde{t}) = c_j^0(x, y, \tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq \tau \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Тут $\varphi = \varphi(x, y)$, $\bar{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$ – відповідно потенціал та вектор швидкості фільтрації в точці (x, y) ($\bar{v} > v_* \gg \varepsilon$, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$), $C_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) – концентрації розчинних речовин, $\tau > 0$ – запізнення, $a_1(x, y, t)$, $b_1(x, y, t)$, $b_2(x, y, t)$, $d_1(x, y, t)$ – концентраційні коефіцієнти (неперервні обмежені функції), які характеризують інтенсивність розкладання ГПВ, їх поширення порами ґрунту у вигляді ЛЖК і накопичення біомаси метаногенних мікроорганізмів, що супроводжується вивільненням метану $C_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$), M – довільна точка відповідної поверхні, $c_j^*(M, t)$, $c_j^0(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та вздовж усіх ребер області G . Крім цього вважаємо, що функції

$c_j^0(x, y, t)$ ($j=1,3$) при $t=0$ та $t=\tau$ задовольняють необхідні умови гладкості розв'язків $C_j(x, y, t)$ ($j=1,3$) при $n\tau < t \leq (n+1)\tau$ ($n=1,2,\dots$).

Нехай задача (3.4.1) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$, де $G_w = \{w=(\varphi, \psi): \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 3.1, б) є розв'язаною. Здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi, \psi)$, $y=y(\varphi, \psi)$, $t=t$ у рівнянні (3.4.2) та умовах (3.4.3), приходимо до відповідної конвективної задачі із запізненням для області G_w :

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{1\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{1t}(\varphi, \psi, t) = -a_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t-\tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t-\tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t-\tau), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{2\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{2t}(\varphi, \psi, t) = b_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t-\tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t-\tau) - b_2(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t-\tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t-\tau), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{3\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{3t}(\varphi, \psi, t) = d_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t-\tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t-\tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t-\tau), \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

$$C_j(\varphi_*, \psi, t) = c_j^*(\psi, t), \quad C_j(\varphi, \psi, \tilde{t}) = c_j^0(\varphi, \psi, \tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq \tau \quad (j=1,3). \quad (3.4.5)$$

Задачу із запізненням (3.4.4), (3.4.5) на кожному із часових проміжків $(n\tau, (n+1)\tau]$, $n=1, \overline{m}$ зведемо до наступних m задач без запізнення:

$$v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{j\varphi}^{(n)}(\varphi, \psi, t) + C_{jt}^{(n)}(\varphi, \psi, t) = g_j^{(n)}(\varphi, \psi, t) \quad (j=1,3);$$

$$C_j^{(n)}(\varphi_*, \psi, t) = c_j^*(\psi, t), \quad C_j^{(n)}(\varphi, \psi, n\tau) = q_j^{(n)}(\varphi, \psi, n\tau),$$

$$q_j^{(n)}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_j^0(\varphi, \psi, t), & 0 \leq t \leq \tau, & n=1, \\ C_j^{(n-1)}(\varphi, \psi, t), & (n-1)\tau < t \leq n\tau, & n > 1, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} g_1^{(n)}(\varphi, \psi, t) &= -a_1(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=1}^3 q_i^{(n)}(\varphi, \psi, t - \tau), \quad g_2^{(n)}(\varphi, \psi, t) = \\ &= b_1(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=1}^2 C_i^{(n)}(\varphi, \psi, t - \tau) - b_2(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=2}^3 C_i^{(n)}(\varphi, \psi, t - \tau), \\ g_3^{(n)}(\varphi, \psi, t) &= d_1(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=1}^3 q_i^{(n)}(\varphi, \psi, t - \tau). \end{aligned}$$

У результаті їх розв'язання матимемо:

$$C_j^{(n)}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_j^0(\varphi, \psi, t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ C_j^{(n)}(\varphi, \psi, t), & n\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad n = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$C_j^{(n)}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -\int_{n\tau}^t g_j^{(n)}(f^{-1}(\psi, h + f(\varphi, \psi) - t), \psi, h) dh + q_j^{(n)}(\varphi, \psi, n\tau), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ -\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_j^{(n)}(s, \psi, f(s, \psi) - f(\varphi, \psi) + t)}{v^2(s, \psi)} ds + c_j^*(\psi, t), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \psi)}$ – час проходження відповідної частинки від

точки (φ_*, ψ) до точки (φ, ψ) , f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ .

3.5. Результати обчислювальних експериментів

Наведемо результати розрахунку [70, 73] процесу типу “конвекція-дифузія”, розглянутого в п. 3.2.1, на ідеальному плоскопаралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витоку та втоку однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\times \ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-2.7$, $\varphi^*=-1.5$, $AD=\{z:\psi(x,y)=0\}$, $BC=\{z:\psi(x,y)=2\pi\}$.

На рис. 3.3 та рис. 3.4 зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z :

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i \stackrel{df}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 10, \quad \psi(x,y)=\overline{\psi}_j \stackrel{df}{=} (Q_* \cdot j) / 20, \quad i=\overline{0,10}, \\ j=\overline{0,20}, \quad \text{поверхню величин швидкості фільтрації}$$

$v=\left((dz/dw)\overline{(dz/dw)}\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi)=t_k$, $k=\overline{1,4}$ при $t_1=0.035$, $t_2=1.098$, $t_3=0.213$, $t_4=0.432$ (криві 1-4 відповідно).

Розподіл концентрацій $c(\varphi, \psi, t)$, $u(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин (згідно п. 3.2.1) при $\varepsilon=0.01$, $a=1$, $a^*=2$, $k_1^*=k_3^*=10$, $k_2^*=k_4^*=1$, $c_0^0(\varphi, \psi)=(1+(\varphi+2.7)^2 + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $c_*^0(\varphi, \psi)=(1+t + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $c^*(\varphi, t)=(2.44+t + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $u_0^0(\varphi, \psi)=(2+(\varphi+2.7)^2 + \cos((\psi+\pi)/2)/2)^{-1}$, $u_*(\varphi, t)=(2+t + \cos((\psi+\pi)/2)/2)^{-1}$,

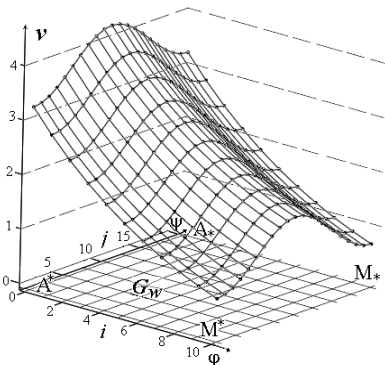


Рис. 3.3. Поле швидкостей над областю комплексного потенціалу G_w

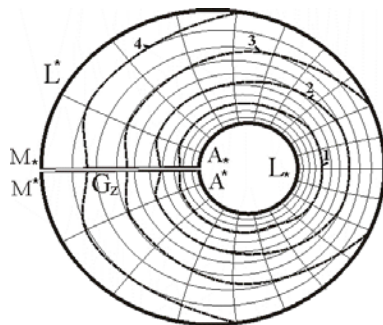
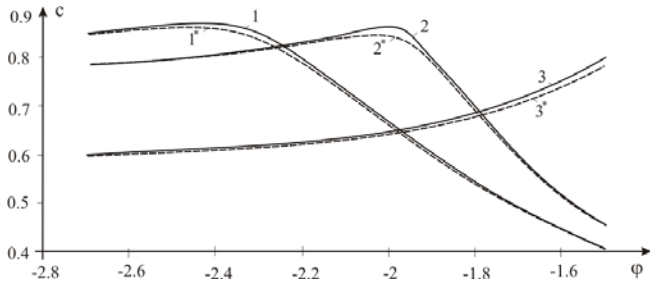
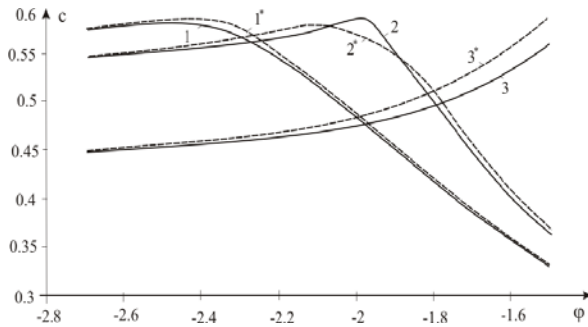


Рис. 3.4 Фізична область G_z

$u^*(\psi, t) = (3.44 + t + \cos((\psi + \pi)/2)/2)^{-1}$ зображено на рис. 3.5-3.7. Так, на рис. 3.5 зображено регулярні частини $c_0, c_0 + \varepsilon c_1$ а) та $u_0, u_0 + \varepsilon u_1$ б) (криві 1-3 та 1*-3* відповідають моментам часу $t_1 = 0.0359, t_2 = 0.1265, t_3 = 0.5236$ та лінії течії $\psi = 1, 256$) розв'язку поставленої задачі. На рис. 3.6 зображено розподіл концентрації розчинних речовин c (криві 1-3) та u (криві 1*-3*) вздовж лінії течії $\psi_5 = 1.57$ (а) та вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -1.86$ (б) відповідно у моменти часу $t_1 = 0.0131, t_2 = 0.1265, t_3 = 0.5236$. На рис. 3.7 зображено залежність розподілу концентрації розчинної речовини c а) та u б) від коефіцієнта дифузії вздовж лінії течії $\psi = 0, 628$ в момент часу $t = 0.5236$ при $\varepsilon_1 = 0,001, \varepsilon_2 = 0,004, \varepsilon_3 = 0,007, \varepsilon_4 = 0,01, \varepsilon_5 = 0,015, \varepsilon_6 = 0,017$ (криві 1-6 відповідно). Такі ж залежності для концентрацій c та u розчинних речовин зображено відповідно на



а)



б)

Рис. 3.5. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

рис. 3.7 в) та на рис. 3.7 г) вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -1.86$ в момент часу $t = 0.2613$.

Розподіл концентрацій $c(\varphi, \psi, t)$, $u(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин (задача п. 3.2.2) при $a = a^* = 1$, $c_0^0(\varphi, \psi) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $c_*(\psi, t) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \times e^{-t} \cdot 3^{-1}$, $c^*(\psi, t) = 0.5 + \sin(\psi + \pi/6) \cdot e^{-2t} (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$, $u_0^0(\varphi, \psi) = 0.5 + \cos(\psi + \pi/2) \cdot (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $u_*(\psi, t) = 0.5 + \cos(\psi + \pi/2) \cdot e^{-t} \cdot 3^{-1}$,

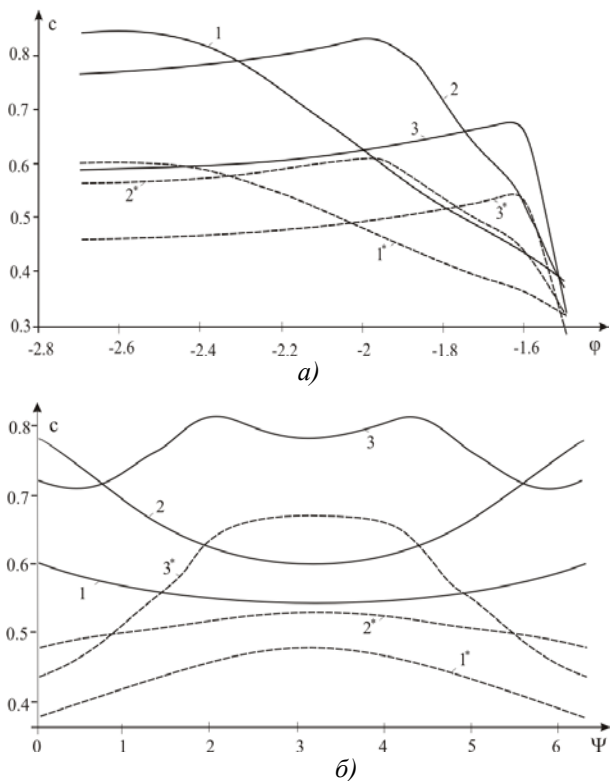


Рис. 3.6. Розподіл концентрації забруднюючих речовин в різні моменти часу вздовж фіксованої лінії течії (а) та еквіпотенціальної лінії (б).

$u^*(\psi, t) = 0.5 + \cos(\psi + \pi/2) \cdot e^{-2t} \times (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}$ зображено на рис. 3.8-3.11. Так, на рис. 3.8 зображено регулярні частини c_0 , $c_0 + \varepsilon c_1$ а) та u_0 , $u_0 + \varepsilon u_1$ б) (криві 1–3 та 1*–3* відповідають моментам часу $t_1 = 0.0537$, $t_2 = 0.1265$, $t_3 = 0.5236$ та лінії течії $\psi = 1,57$) розв’язку поставленої задачі при $\varepsilon = 0.05$, $k_1^* = k_2^* = 10$, а на рис. 3.9 зображено розподіл концентрації розчинних речовин c (криві 1*–3*) та u

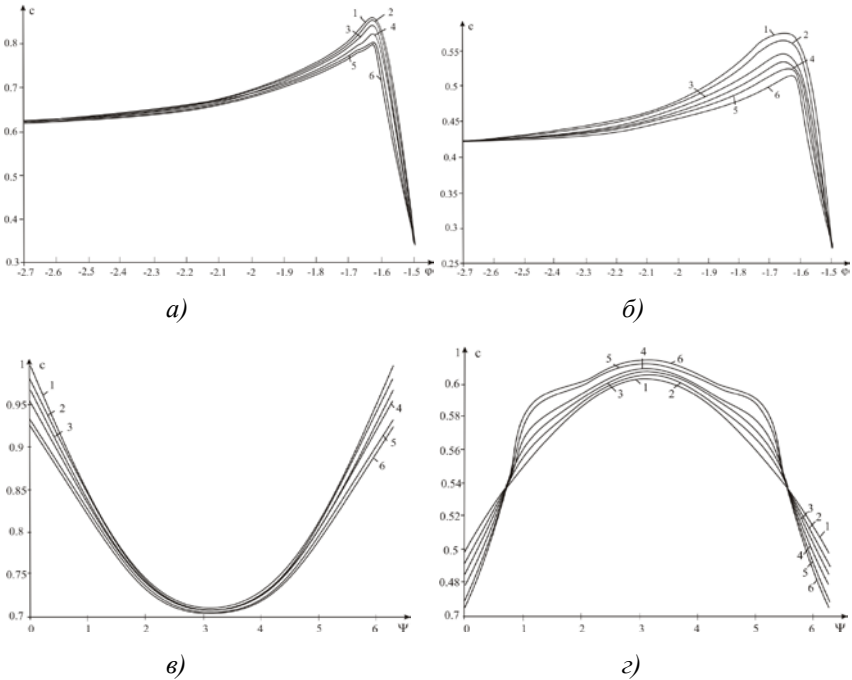


Рис. 3.7. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини від коефіцієнта дифузії

(криві 1–3) вздовж лінії течії $\psi=0.9424$ (а) та вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi=-1.98$ (б) відповідно у моменти часу $t_1=0.0131$, $t_2=0.1265$, $t_3=0.5236$. На рис. 3.10 зображено залежність розподілу концентрації розчинної речовини c а) та u б) від коефіцієнта дифузії вздовж лінії течії $\psi=0,9424$ в момент часу $t=0.1265$ при $\varepsilon_1=0,01$, $\varepsilon_2=0,05$, $\varepsilon_3=0,075$, $\varepsilon_4=0,1$ (криві 1-4 відповідно). Вплив масообміну на розподіл концентрації c (вздовж лінії течії $\psi=2.513$ в момент часу $t=0.37$) зображено на рис. 3.11 при $\varepsilon=0.01$,

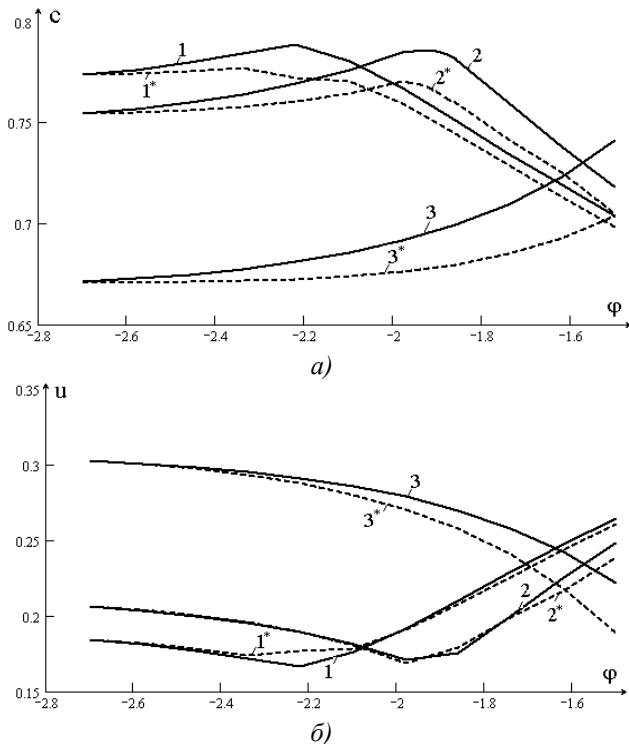


Рис. 3.8. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

$k_1^* = 0, 5, 10, 20$ (криві 1-4 відповідно).

Наведемо результати розрахунку описаного в п. 3.2.3 процесу “конвекції-дифузії” на ідеальному фільтраційному фоні, породженому особливими точками $z_1=0$ і $z_2=4$ (відповідно витоку і втоку однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$ при $\varphi_*=-3$, $\varphi^*=-1.8$. На рис. 3.12, а), б) зображені рівномірна сітка області комплексного

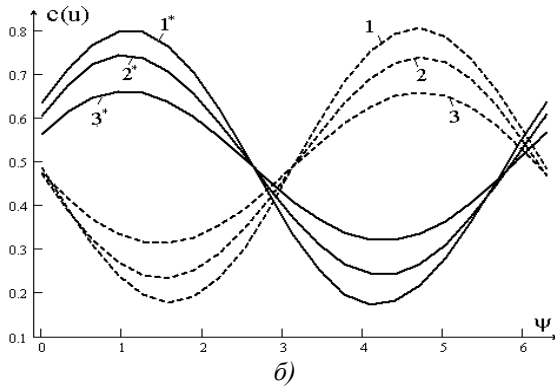
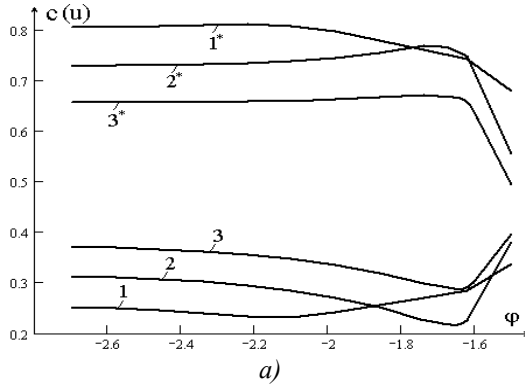


Рис.3.9. Розподіл концентрації забруднюючих речовин

потенціалу G_w та відповідна динамічна сітка в G_z :

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_i = \overline{\varphi}_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 10, \quad \psi(x, y) = \overline{\psi}_j = (\overline{Q}_* \cdot j) / 20, \quad i = \overline{0, 10},$$

$j = \overline{0, 20}$, поверхня величин швидкості фільтрації

$$v = \left((dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2} \text{ у вузлах } (\varphi_i, \psi_j) \text{ та лінії фронту конвекти-$$

вного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k = \overline{1, 4}$ при $t_1 = 0.01761$, $t_2 = 0.04814$,

$t_3 = 0.10219$, $t_4 = 0.20055$ (криві 1-4 відповідно).

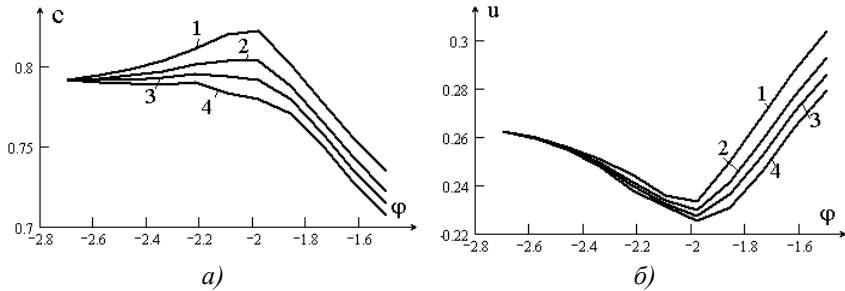


Рис. 3.10. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини від коефіцієнта дифузії

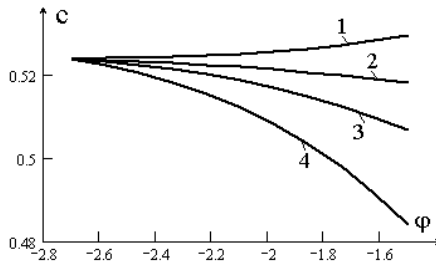
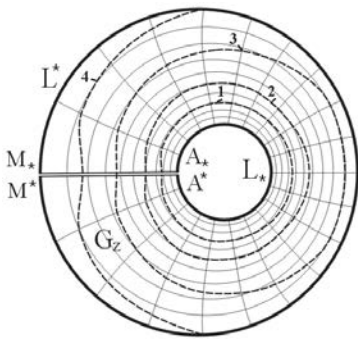
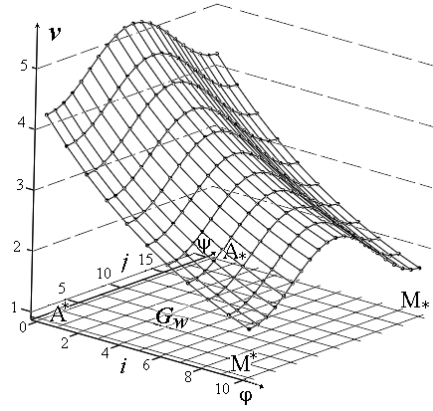


Рис. 3.11. Вплив масообміну на розподіл концентрації c

На рис. 3.13 зображено розподіл концентрацій $C_j(\varphi, \psi, t)$ ($j=\overline{1,3}$) розчинних речовин для лінійної ($a_1(\varphi, \psi, t)=b_1(\varphi, \psi, t)=b_2(\varphi, \psi, t)=d_1(\varphi, \psi, t)=0$) та нелінійної моделей процесу (відповідно суцільна та штрихова лінії), що ілюструє їх взаємовплив, при $\varepsilon=0.01$, $a_1(\varphi, \psi, t)=5000 \exp(-(t^2+2\cdot t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1))$, $b_1(\varphi, \psi, t)=100 \times \exp(-(t^2+1)/(\varphi^2+\psi^2+1))$, $b_2(\varphi, \psi, t)=200 \cdot \exp(-(t^2+t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1))$, $d_1(\varphi, \psi, t)=1500 \exp(-(t^2+1)/(\varphi^2+\psi^2+1))$, $c_1^0(\varphi, \psi)=0.5/(\varphi^2+(\psi-\pi)^2+1)$, $c_2^0(\varphi, \psi)=0.1 \cdot \exp(-1/(\varphi^2+(\psi-\pi/2)^2+1))$, $c_3^0(\varphi, \psi)=0.1 \times$



а)



б)

Рис. 3.12. Фізична область G_z (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б).

$$\begin{aligned} & \times \exp(-1/(\varphi^2 + (\psi - \pi)^2 + 1)), \quad c_{1*}(\psi, t) = 0.5 / ((\psi - \pi)^2 + t + 10), \quad c_1^*(\psi, t) = \\ & = 0.5 / ((\psi - \pi)^2 + t + 4.24), \quad c_{2*}(\psi, t) = 0.1 \cdot \exp(-(t^2 + t + 1) / ((\psi - \pi/2)^2 + 10))^{-1}, \\ & c_2^*(\psi, t) = 0.1 \cdot \exp(-(t^2 + t + 1) / ((\psi - \pi/2)^2 + 4.24)), \quad c_{3*}(\psi, t) = 0.1 \times \\ & \times \exp(-(t^2 + 1) / ((\psi - \pi)^2 + 10)), \quad c_3^*(\psi, t) = 0.1 \cdot \exp(-(t^2 + 1) / ((\psi - \pi)^2 + 4.24))^{-1}. \end{aligned}$$

Результати розрахунку, описаного в п. 3.3.1 процесу, отримано при $x_* = -1$, $x^* = 1$, $c_* = 0.99$, $\tau = f(x_1)$, в точках $x_i = x_* + ((x^* - x_*) \cdot i) / n$, $i = 0, n$, $n \in \mathbb{N}$. Крива залежності висоти фільтру і часу ефективної його роботи при $c_{**} = 0.02$, $c_0^0(x) = \text{arctg}(500 \cdot (x+1)) / 9\pi$, $c_*(t) = \text{arctg}(-500t) / 9\pi$, $v(x) = 0.3$, $n = 110$, $\gamma(x) = 2/5 + \text{arctg}(500x) \cdot 4 / (5\pi)$ зображена на рис. 3.14. На рис. 3.15 зображено розподіл концентрації розчинної речовини у

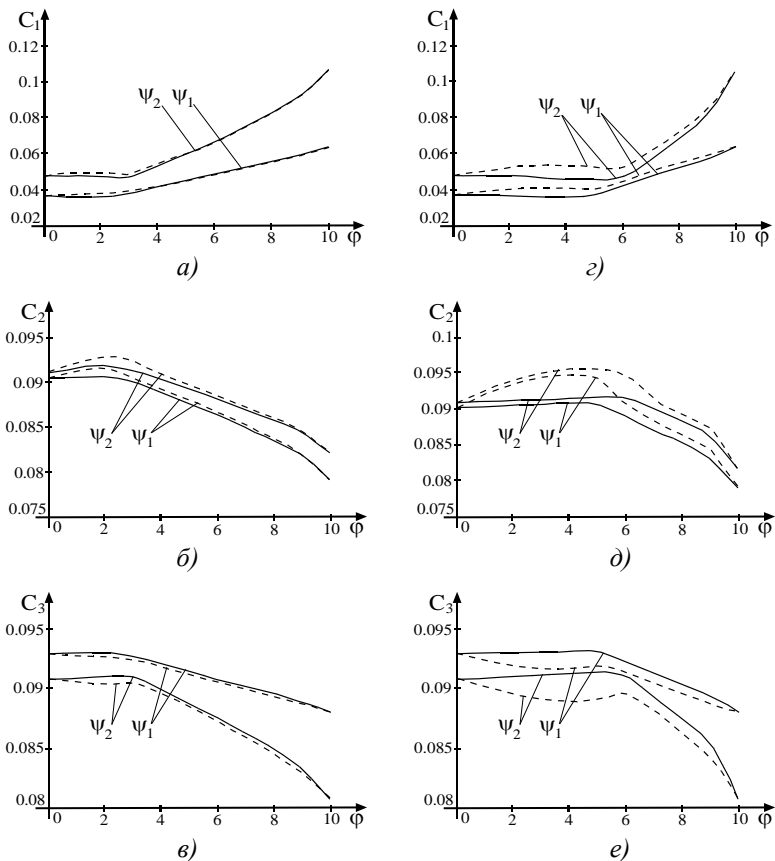


Рис. 3.13. Розподіл концентрацій речовин вздовж лінії течії $\psi_1=1.257$ і $\psi_2=2.513$ в моменти часу $t_1=0.018$ (а, б, в) та $t_2=0.052$ (г, д, е).

воді та забруднень у фільтрі (криві 1–5 та 1*–5*) відповідно в моменти часу $t_1=3.93$, $t_2=6.66$, $t_3=7.87$, $t_4=9.39$, $t_5=11.75$ при $c_{**}=0.1$, $c_0^0(x) = \text{arctg}(500 \cdot (x+1)) / 2\pi$, $c_*(t) = \text{arctg}(-500t) / 2\pi$ (час роботи фільтру $t_p=11.75$). Розподіл концентрації розчинної речо-

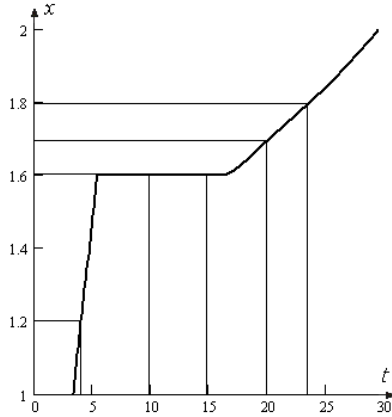


Рис. 3.14. Крива залежності висоти фільтру від часу ефективного роботи.

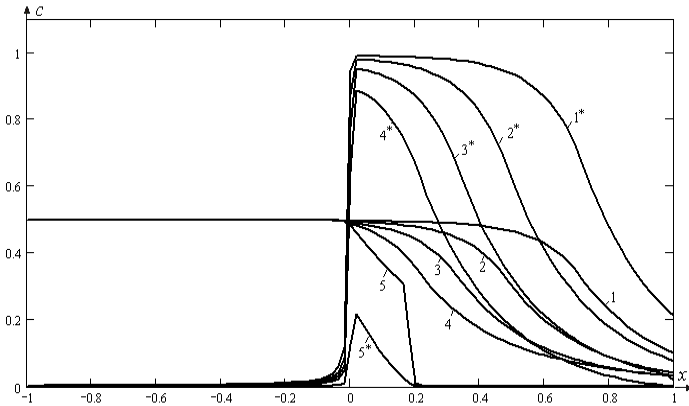


Рис. 3.15. Забруднення фільтру.

вини у воді та забруднень, що залишаються у фільтрі (криві $1^* - 3^*$ та $1 - 3$) відповідно при $\gamma_1(x) = 2/5 + \arctg(500x) \cdot 4/(5\pi)$, $\gamma_2(x) = 1/5 + \arctg(500x) \cdot 2/(5\pi)$, $\gamma_3(x) = 1/14 + \arctg(500x) \cdot 1/(7\pi)$ в момент часу $t = 4.966$ (а) та $t = 3.733$ (б) та $v(x) = 0.4$, $n = 150$ зо-

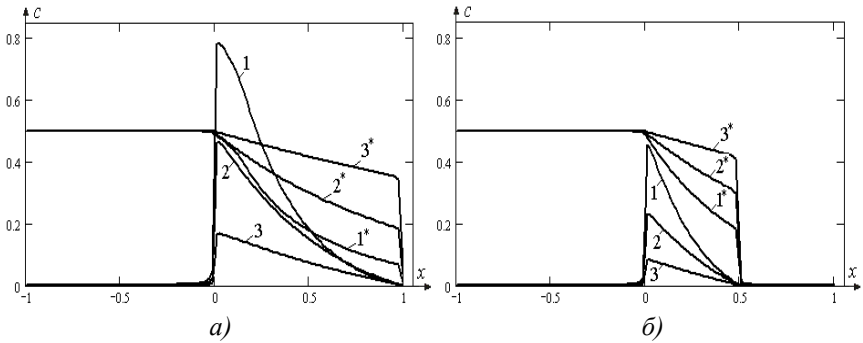


Рис. 3.16. Розподіл концентрацій забруднень у воді та забруднень, що залишаються у фільтрі в моменти часу $t=4.966$ (а) та $t=3.733$ (б)

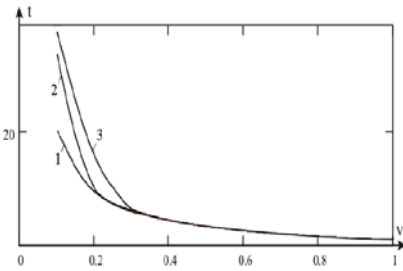


Рис. 3.17 Залежність часу роботи фільтру від швидкості фільтрації.

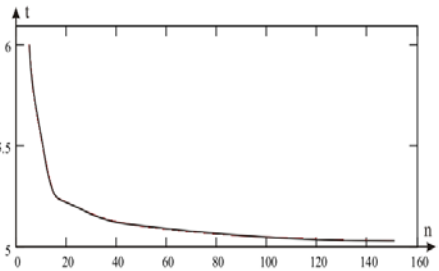


Рис. 3.18. Стабілізація часу роботи фільтру відносно кількості точок розбиття.

бражено на рис. 3.16. Залежність часу роботи фільтру від швидкості фільтрації забруднюючої речовини при $n=80$ і $\gamma_1(x)=1/14+\arctg(500 \cdot x) \cdot 1/(7\pi)$, $\gamma_2(x)=0.1+\arctg(500 \cdot x) \cdot 0.2/\pi$, $\gamma_3(x)=0.2+\arctg(x \cdot 500) \cdot 0.4/\pi$ (криві 1-3 відповідно) проілюстровано на рис. 3.17. Стабілізацію часу роботи фільтру t відносно кількості точок розбиття n зображено на рис. 3.18 при $v(x)=0.4$,

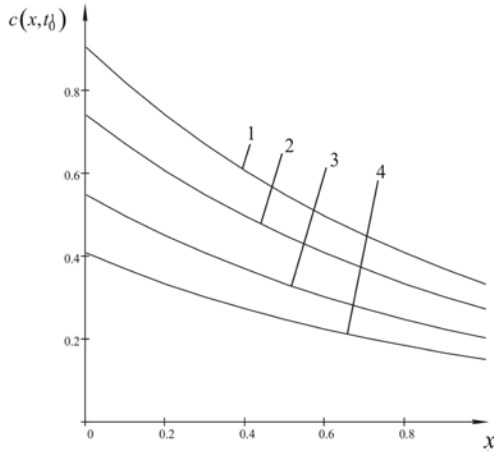


Рис. 3.19. Залежність $c(x, t_0)$ в різні моменти часу.

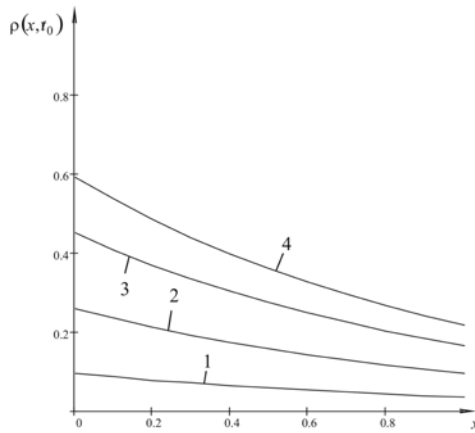


Рис. 3.20. Залежність $\rho(x, t_0)$ в різні моменти часу.

$$\gamma(x) = 0.2 + \operatorname{arctg}(500 \cdot x) \cdot 0.4\pi.$$

Результати розрахунків за формулами (3.3.7) характеристик описаного в п. 3.3.2 процесу при $\rho_{bx}(x) \equiv 0$, $c_{bx}(t) = e^{-t}$, $\beta \approx 1/36c^{-1}$, $a = 1/18000c^{-1}$, $\nu = 1/36mc^{-1}$ наведено на рис. 3.19-3.23. Так, на рис.

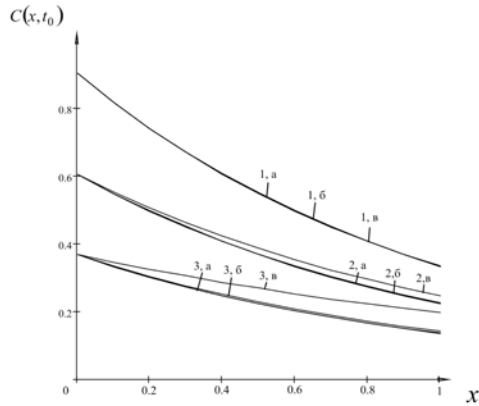


Рис. 3.21. Залежність $c(x, t_0)$ від D .

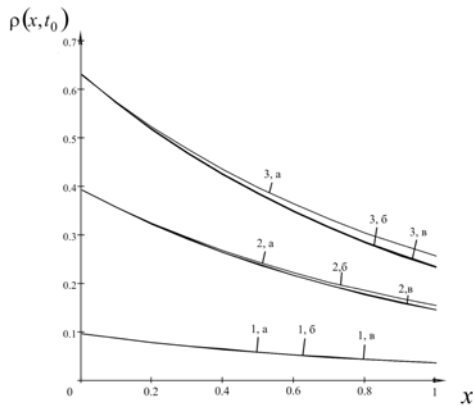


Рис. 3.22. Залежність $\rho(x, t_0)$ від D_* .

3.19, 3.20 зображено розподіл концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ в різні моменти часу при $t_0=0,1$, $t_0=0,3$, $t_0=0,6$, $t_0=0,9$ (криві 1-4 відповідно). На рис. 3.21, 3.22 зображено залежність розподілу концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ від коефіцієнта дифузії при $D=0.0001$ ($D_*=0.0001$) – криві 3.19, а) – в); $D=0.001$ ($D_*=0.001$) – криві 3.20,

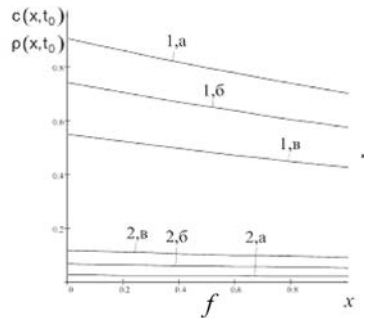
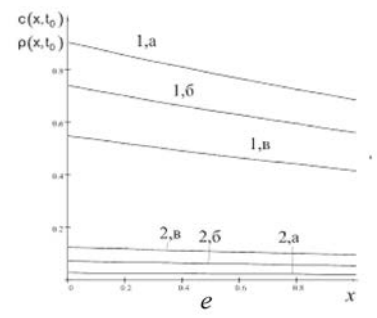
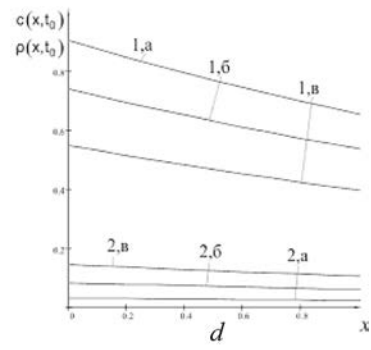
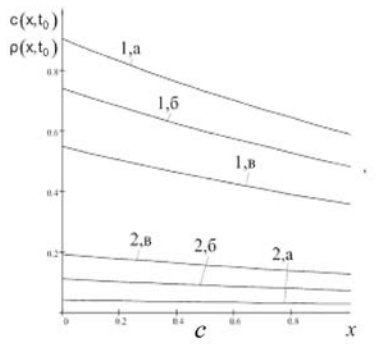
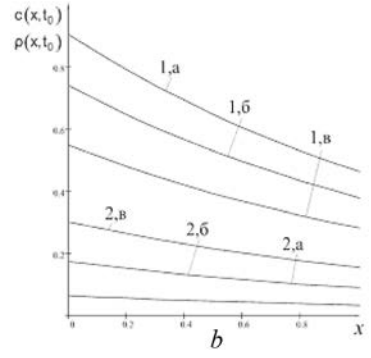
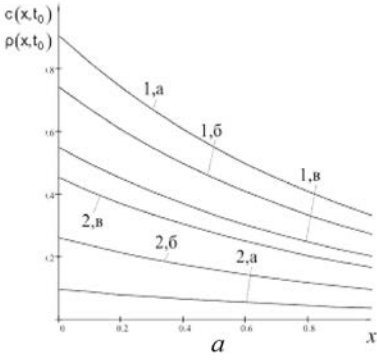
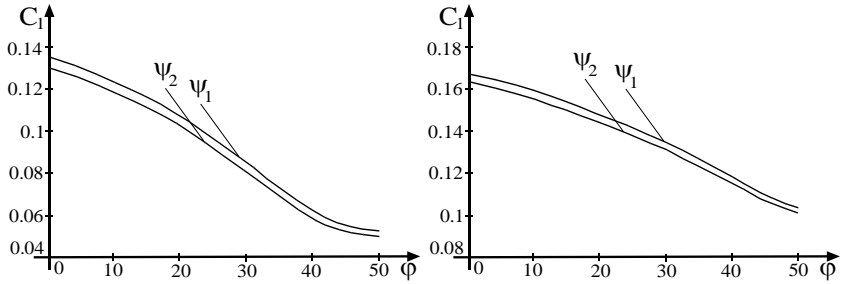


Рис. 3.23. Залежність $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ від β .

а) – в); $D=0.01$ ($D_*=0.01$) - криві 3.21, а) – в).

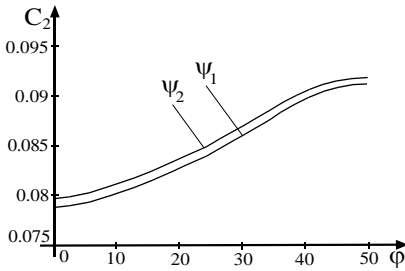
В залежності від вибору фільтруючого матеріалу (коефіцієнт β) отримуємо відповідні розподіли концентрацій при $\beta \approx 0.028$ - рис. 3.23, а), $\beta \approx 0.017$ - рис. 3.23, б), $\beta \approx 0.011$ - рис. 3.23, с), $\beta \approx 0.009$ - рис. 3.23, д), $\beta \approx 0.008$ - рис. 3.23, е), $\beta \approx 0.0073$ - рис. 3.23, ф).

На рис. 3.24 подано результати розрахунку характеристик описаного в п. 3.4 процесу трикомпонентного конвективного масо-переносу з урахуванням масообміну із запізненням на ідеальному фільтраційному фоні, породженого особливими точками $z_1=0$ и $z_2=4$ (відповідно витоку і втоку однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), а саме зображено розподіл концентрацій $C_j(\varphi, \psi, t)$ ($j=\overline{1,3}$) при $a_1(\varphi, \psi, t)=50 \cdot \exp[(t^2+2t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $b_1(\varphi, \psi, t)=\exp[-(t^2+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $b_2(\varphi, \psi, t)=0.5 \exp[-(t^2+t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $d_1(\varphi, \psi, t)=10 \cdot \exp[-(t^2+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $c_1^0(\varphi, \psi, t)=(t^2+1) \times ((\psi-\pi)^2+\varphi^2+5)^{-1}$, $c_1^*(\psi, t)=(t^2+1)/((\psi-\pi)^2+9)$, $c_2^0(\varphi, \psi, t)=0.1 \cdot \exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi/2)^2+\varphi^2+1)]$, $c_2^*(\psi, t)=0.1 \times \exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi/2)^2+5)]$, $c_3^0(\varphi, \psi, t)=0.1 \cdot \exp[-(t^2+1) \times 1/((\psi-\pi)^2+\varphi^2+1)]$, $c_3^*(\psi, t)=0.1 \cdot \exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi)^2+5)]$, $\tau=1.226$.

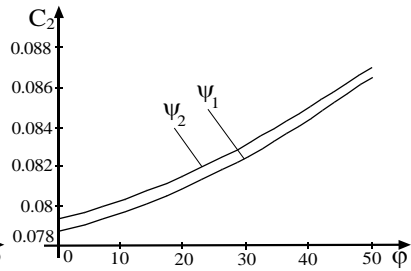


a)

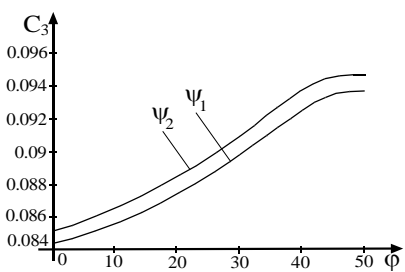
z)



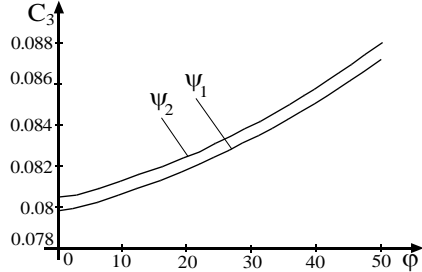
b)



d)



v)



e)

Рис. 3.24. Розподіл концентрацій речовин вздовж лінії течії $\psi_1=1.077$ і $\psi_2=2.154$ в моменти часу $t_1=1.518$ (а, б, в) та $t_2=2.928$ (з, д, е).

РОЗДІЛ 4. СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ І ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА

4.1. Дослідження дифузійних процесів в примежовій області із змінною ділянкою границі та моделювання процесів утворення піщаних хвиль

Відсутність достатньої кількості фактичних даних щодо характеристик процесу розмиву дна русла поблизу головних частин різного роду гідротехнічних споруд та загальні потреби інтенсивного їх будівництва, яке розгорнулось в XIX–XXст. продукувало створення емпіричних залежностей для визначення глибини місцевого розмиву, які, незважаючи на їх неточність та різноманітність, певною мірою задовольняли вимоги проектувальників. Проте використання таких залежностей в практиці будівництва залишали поза увагою такі важливі фактори, як форма вирви розмиву та зони активного відкладення частинок, а також процес їх формування з часом. Накопичення натурних даних та результатів лабораторних досліджень процесу розмиву відкриває шлях до створення придатних для практичних розрахунків математичних моделей, які дозволяють розраховувати як глибину місцевого розмиву, так і форму вирви розмиву, зони відкладення наносів та розвиток процесу у часі. Одним із підходів до такого моделювання є використання відомої дифузійної моделі процесу перенесення дрібних частинок ґрунту турбулентною водною течією, яка була запропонована Маккавєєвим.

Зауважимо, що отримані Маккавеевим розв'язки стосуються розрахунку розподілу дрібних частинок з глибиною на вертикалі за умови стаціонарного режиму наносів, тобто при рівномірному русі частинок і рідини, коли мутність по довжині течії не змінюється. Проте в інженерній практиці частіше приходиться розв'язувати задачі, які пов'язані з нестаціонарним режимом руху наносів, тобто в умовах, коли мутність по довжині течії змінюється. Нестаціонарний режим руху піщаних наносів спостерігається, наприклад, при формуванні на межі розділу двох фаз (рідини і частинок ґрунту, з яких складається дно русла річки) піщаних хвиль. Утворення подібної форми русла пов'язано з впливом на поверхню піщаного дна властивих турбулентному режимові руху рідини крупномасштабних пульсацій, викликаних локально розміщеними вихровими утвореннями. Наявність такого роду утворень призводить до збільшення інтенсивності вимиву частинок ґрунту на одній із ділянок русла в порівнянні з іншими. Вимиті на цій ділянці частинки, переносячись течією, осідають на поверхню дна на деякій відстані від зони їх відриву, утворюючи, при цьому гряди з поперечним вальцем за нею.

Розглянемо процес утворення такої піщаної хвилі в початковий момент часу на невеликій ділянці русла під впливом поодинокого вихрового утворення. Для моделювання цього процесу скористаємось дифузійною теорією, в якій відрив, перенесення та осідання частинок ґрунту під впливом водної течії будемо розглядати як їх дифузію з деяким «фіктивним» коефіцієнтом D' . Вплив крупно

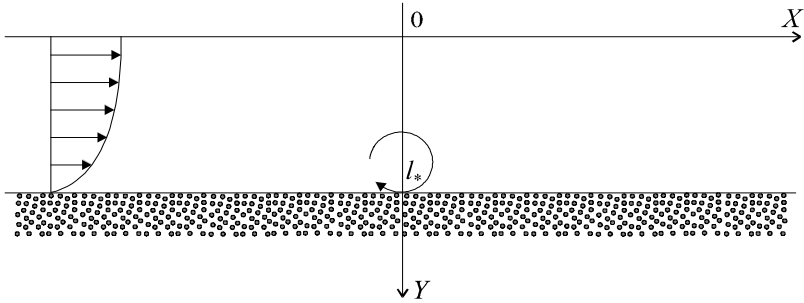


Рис. 4.1. Схема водної течії до моменту утворення піщаної хвилі.

масштабних пульсацій на поверхню дна враховуватимемо змінним по довжині течії коефіцієнтом дифузії. Нехтуючи просторовими ефектами, розглядатимемо процес змулення наносів в області $G = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < l(x, t)\}$ (рис. 4.1), обмеженій горизонтальною лінією $y=0$ (поверхнею рідини) та змінною в часі границею L ($y=l(x, t)$) – межею розділу даної рідини і твердої фази. Вважатимемо також, що перенесення наносів течією, швидкість якої $\vec{V}(u(x, y), v(x, y))$ здійснюється переважно за рахунок конвекції. Внаслідок масопереносу донних частинок через лінію L (поверхню дна), її вигляд з часом змінюється. Характер цієї зміни буде визначений нижче.

Враховуючи вищесказане та нехтуючи гідравлічною крупністю частинок ґрунту, будемо описувати даний процес такою модельною задачею [22–27]:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right) - u(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$c(x, y, 0) = \bar{c}(x, y), \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad c|_{y=l(x,t)} = c_*, \quad (4.2)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація наносів (дифундуючих частинок) у точці (x, y) в момент часу t ; $D' = \varepsilon D(x, y)$ – «фіктивний» коефіцієнт дифузії, який пов'язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину; ε – малий параметр, який характеризує переважання конвективного переносу; $l(x, t)$ – невідома функція, що характеризує положення поверхні дна в даний момент часу, $l(y, t) > 0$.

Зауважимо, що в (4.1) відсутній член $\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} \right)$, яким знехтуємо у порівнянні з членом $\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right)$. Вигляд функції

$D(x, y)$ (рис. 4.2) для такого випадку буде описано нижче.

Розв'язок задачі (4.1)–(4.2) шукатимемо наближено. Для цього проведемо дискретизацію часу t з настільки малим кроком Δt , щоб на кожному із проміжків $[t_k, t_{k+1}]$ можна було б знехтувати зміною границі L і вважатимемо її при $t_k < t < t_{k+1}$ фіксованою – $L = L_k = \{(x, y): y = l(x, t_k)\}$. Знайшовши розв'язок поставленої задачі в області із вже незмінною в часі ділянкою границі L_k , спеціальним чином будемо (як збурення L_k) нове положення кривої $L = L_{k+1}$, яку прийматимемо за наближення границі області для наступного етапу часу.

Вважатимемо, що в початковий момент часу лінія розділу рідкої і твердої фази (поверхня дна) співпадає з прямою $L_0 = \{(x, y):$

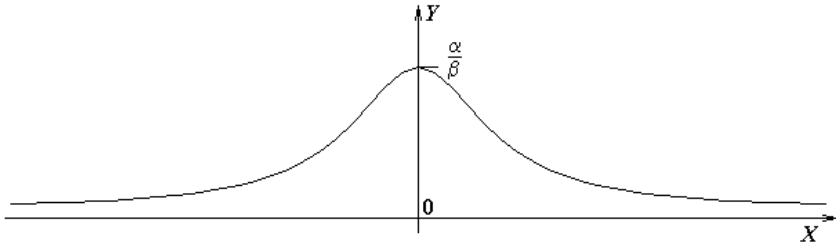


Рис. 4.2. Графік залежності коефіцієнта дифузії $D(x)$ при дослідженні впливу на процес утворення піщаних хвиль поодинокого вихрового утворення.

$y=l(x,t_0)=l_0\}$ (рис. 4.1) і шукатимемо розв'язок задачі (4.1)–(4.2) на першому і наступних часових етапах у відповідних областях $G_k=\{(x,y): -\infty < x < +\infty, 0 < y < l_k\}$ у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_k = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_{ik} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i P_{ik} + R_n, \quad (4.3)$$

де $R_n = O(\varepsilon^{n+1})$ – залишковий член; $P_{jk}(x, \eta, t)$ – примежові функції (η – розтягнута змінна в околі $y=l_k$, яка для першого часового етапу рівна $\eta = \frac{l_0 - y}{\varepsilon}$); $c_{jk}(x, y, t)$ – члени регулярної частини асимптотики [61].

Вважатимемо також, що має місце сильна узгодженість початкової та граничних умов. Тоді, підставляючи ряд $\sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_{ik}$ в рівняння (4.1) і умови (4.2) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε в лівій і правій частині (так, як це зроблено, наприклад, в [33]), отримаємо такі задачі для визначення членів регулярної час-

тини асимптотики на кожному часовому етапі:

$$\begin{cases} u(x, y) \frac{\partial c_{0k}}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial c_{0k}}{\partial y} + \frac{\partial c_{0k}}{\partial t} = 0, \\ c_{0k}(x, y, 0) = \bar{c}_k(x, y); \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} u(x, y) \frac{\partial c_{ik}}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial c_{ik}}{\partial y} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial t} + F_{ik}(x, y, t) = 0, \\ c_{ik}(x, y, 0) = 0; \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\bar{c}_k(x, y) = c_{k-1}(x, y), \quad \bar{c}_0(x, y) = \bar{c}(x, y), \quad (4.6)$$

$$\text{де } F_{ik}(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial c_{i-1,k}}{\partial y} \right).$$

Скориставшись методом характеристик для розв'язання задач (4.4), (4.5), отримаємо вирази для функцій c_i у вигляді:

$$c_{0k} = \bar{c}_k(f_{-1}(f(x, y) - t, g(x, y) - t), g_{-1}(f(x, y) - t, g(x, y) - t)), \quad (4.7)$$

$$f(x, y) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{u(\tilde{x}, y)}, \quad g(x, y) = \int_0^y \frac{d\tilde{y}}{v(x, \tilde{y})}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} c_{ik} = & \int_0^t F_{ik}(f_{-1}(f(x, y) - t + \tilde{t}, g(x, y) - t + \tilde{t}), \\ & g_{-1}(f(x, y) - t + \tilde{t}, g(x, y) - t + \tilde{t})) d\tilde{t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тут f_{-1} і g_{-1} – функції які отримуються в результаті розв'язання сис-

теми рівнянь $\begin{cases} \Theta_1 = f(x, y) \\ \Theta_2 = g(x, y) \end{cases}$ відносно змінних x, y .

Для відшукування примезових функцій $P_{j0}(x, \eta, t)$ розкладемо в

околі $y=l_0$ коефіцієнти $D(x,y)$, $v(x,y)$, $u(x,y)$ в скінченні ряди Тейлора та введемо розтягнуту змінну η . Використовуючи стандартний спосіб прирівнювання [34, 61], отримаємо такі рівняння для визначення функцій $P_{j0}(x,\eta,t)$:

$$D(x,l_0)\frac{\partial^2 P_{0,0}}{\partial \eta^2} + v(x,l_0)\frac{\partial P_{0,0}}{\partial \eta} = 0; \quad (4.10)$$

$$D(x,l_0)\frac{\partial^2 P_{i0}}{\partial \eta^2} + v(x,l_0)\frac{\partial P_{i0}}{\partial \eta} = T_{i0}(x,\eta,t), \quad (i=1,2,\dots), \quad (4.11)$$

де $T_i(x,\eta,t)$ – виражаються певним чином через функції $P_j(x,\eta,t)$ ($j < i$) та їх похідні по x , y , t , а саме:

$$\begin{aligned} T_1(x,\eta,t) = & \frac{\partial P_{0,0}}{\partial t} + u(x,l_0)\frac{\partial P_{0,0}}{\partial x} + D'_y(x,l_0)\eta\frac{\partial^2 P_{0,0}}{\partial \eta^2} + \\ & + D'_y(x,l_0)\frac{\partial P_{0,0}}{\partial \eta} + v'_y(x,l_0)\eta\frac{\partial P_{0,0}}{\partial \eta}; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} T_2(x,\eta,t) = & \frac{\partial P_{1,0}}{\partial t} + u(x,l_0)\frac{\partial P_{1,0}}{\partial x} + D'_y(x,l_0)\eta\frac{\partial^2 P_{1,0}}{\partial \eta^2} + \\ & + D'_y(x,l_0)\frac{\partial P_{1,0}}{\partial \eta} + v'_y(x,l_0)\eta\frac{\partial P_{1,0}}{\partial \eta} - u'_y(x,l_0)\eta\frac{\partial P_{0,0}}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{2}D''_{yy}(x,l_0)\eta^2\frac{\partial^2 P_{0,0}}{\partial \eta^2} - D''_{yy}(x,l_0)\eta\frac{\partial P_{0,0}}{\partial \eta} - \\ & - \frac{1}{2}v''_{yy}(x,l_0)\eta^2\frac{\partial P_{0,0}}{\partial \eta}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

і т.д.

Рівняння (4.10)–(4.11) розв’язуємо при наступних умовах:

$$\begin{aligned} P_{0,0}(x,0,t) &= c_* - c_{0,0}(x,l_0,t); \\ P_{i,0}(x,0,t) &= -c_{i,0}(x,l_0,t), \quad i=\overline{1,n}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$P_{i,0}(x,\eta,t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad i=\overline{0,n}. \quad (4.15)$$

Розв’язки задач (4.10) та (4.11) при умовах (4.14), (4.15) (при $n=1$) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} P_{0,0}(x,\eta,t) &= (c_* - c_{0,0}(x,l_0,t)) \cdot e^{-\frac{v(x,l_0)}{D(x,l_0)}\eta}; \\ P_{1,0}(x,\eta,t) &= (c_* - c_{0,0}(x,l_0,t)) \cdot e^{-\frac{v(x,l_0)}{D(x,l_0)}\eta} \left[\left(\frac{u(x,l_0)v'_x(x,l_0)}{2v(x,l_0)D(x,l_0)} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{v(x,l_0)v'_y(x,l_0)}{2v(x,l_0)D(x,l_0)} + \frac{u(x,l_0)D'_x(x,l_0) - v(x,l_0)D'_y(x,l_0)}{2D^2(x,l_0)} \right) \eta^2 + \\ &+ \left(\frac{2D'_y(x,l_0)}{D(x,l_0)} + \frac{1}{v(x,l_0)(c_* - c_{0,0}(x,l_0,t))} \left(\frac{\partial c_{0,0}(x,l_0,t)}{\partial t} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. u(x,l_0) \frac{\partial c_{0,0}(x,l_0,t)}{\partial x} \right) - \frac{u(x,l_0)v'_x(x,l_0) + v(x,l_0)v'_y(x,l_0)}{v^2(x,l_0)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{u(x,l_0)D'_x(x,l_0)}{v(x,l_0)D(x,l_0)} \right) \eta - \frac{c_{1,0}(x,l_0,t)}{c_{0,0}(x,l_0,t) - c_*} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для коригування границі L (вільної ділянки границі вихідної області) після кожного часового етапу введемо додаткову умову балансу маси наносів, яка пов’язує потік донних частинок ґрунту через вільну ділянку границі та швидкість зміни положення поверхні дна. Така умова має вигляд

$$\left[\varepsilon D(x, y) \frac{\partial c_k(x, y)}{\partial y} - v(x, y) \cdot c_k(x, y) \right]_{y=l(x, t_k)} = c_* \frac{\Delta l(x, t_k)}{\Delta t}, \quad (4.18)$$

де $\Delta l(x, t_k)$ – зміна положення межі L після k -го часового етапу за проміжок часу Δt .

Використовуючи отриманий розв'язок поставленої задачі (4.7)–(4.9), (4.16)–(4.17) та співвідношення (4.18), знаходимо рівняння кривої, що буде відігравати роль фіксованої границі розділу рідкої і твердої фази на проміжку часу $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ за формулою:

$$l(x, t_{k+1}) = l(x, t_k) + \Delta l(x, t_k). \quad (4.19)$$

Розв'язок задачі (4.1)–(4.2) з новою вже криволінійною границею L_{k+1} шукаємо так само, як і в попередньому випадку. При цьому форма запису регулярної частини асимптотики (4.7)–(4.9) залишиться без змін. А при знаходженні примежових функцій P_{ik+1} , перш ніж проводити розтяг в околі кривої L_{k+1} , перейдемо до нових локального характеру змінних (s, r) , де r – довжина перпендикуляра, проведеного з точки (x, y) даної кривої в область, s – довжина дуги кривої $y=l(x, t_{k+1})$ від точки $(0, l(0, t_{k+1}))$ до основи цього перпендикуляра. Співвідношення, які пов'язують координати (x, y) з (s, r) , мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \Phi^{-1}(s) - \frac{l'(\Phi^{-1}(s)) \cdot r}{\sqrt{1 + l'^2(\Phi^{-1}(s))}}, \\ y = l(\Phi^{-1}(s)) - \frac{r}{\sqrt{1 + l'^2(\Phi^{-1}(s))}}, \end{cases} \quad (4.20)$$

де $l(\Phi^{-1}(s))=l(\Phi^{-1}(s), t_{k+1})$; $\Phi(s)$ – функція, обернена до функції

$$s=\Phi(x)=\int_0^x \sqrt{1+l'^2(\tilde{x})} d\tilde{x}.$$

Рівняння (4.1) в нових координатах прийме вид :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[A(s, r) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(A(s, r) D(s, r) \frac{\partial c}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(B(s, r) D(s, r) \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right) + \right. \\ \left. + B(s, r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(A(s, r) D(s, r) \frac{\partial c}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(B(s, r) D(s, r) \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right) \right] + \\ + M(s, r) \frac{\partial c}{\partial r} + N(s, r) \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

де

$$A(s, r) = -\frac{l'(\Phi^{-1}(s))(l'^2(\Phi^{-1}(s))+1)}{(1-l'^2(\Phi^{-1}(s)))\sqrt{l'^2(\Phi^{-1}(s))+1-rl''(\Phi^{-1}(s))}}; \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} B(s, r) = -\frac{\sqrt{(1+l'^2(\Phi^{-1}(s)))^3-rl''(\Phi^{-1}(s))}}{((1-l'^2(\Phi^{-1}(s)))\sqrt{1+l'^2(\Phi^{-1}(s))-rl''(\Phi^{-1}(s))})} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1+l'^2(\Phi^{-1}(s))}}; \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} M(s, r) = \frac{(v(x(s, r), y(s, r))-u(x(s, r), y(s, r)))l'(\Phi^{-1}(s))}{((1-l'^2(\Phi^{-1}(s)))\sqrt{1+l'^2(\Phi^{-1}(s))-rl''(\Phi^{-1}(s))})} \times \\ \times \frac{(1+l'^2(\Phi^{-1}(s)))\sqrt{(1+l'^2(\Phi^{-1}(s)))^3+rl''(\Phi^{-1}(s))}}{\sqrt{1+l'^2(\Phi^{-1}(s))}}; \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} N(s, r) = \frac{(v(x(s, r), y(s, r)))l'(\Phi^{-1}(s))-u(x(s, r), y(s, r))}{((1-l'^2(\Phi^{-1}(s)))\sqrt{1+l'^2(\Phi^{-1}(s))-rl''(\Phi^{-1}(s))})} \times \\ \times (1+l'^2(\Phi^{-1}(s))). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Потрібно зауважити, що у випадку, коли при переході від даної області до наступної з'являються нові ділянки, то функції $D(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ потрібно певним чином довизначити. Зокрема, у випадках, якщо ці функції є аналітичними, то на нових ділянках будемо їх аналітичні продовження.

Аналогічно до попереднього випадку, для заходження примежових функцій P_{ik+1} введемо розтягнуту змінну μ так, що

$$\mu = \frac{r}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial s} \right), \quad (4.26)$$

та розкладемо функції $A(s,r)$, $B(s,r)$, $M(s,r)$, $N(s,r)$ в скінченні ряди Тейлора в околі $r=0$. Використовуючи стандартну процедуру прирівнювання, отримаємо такі рівняння для визначення примежових функцій $P_{i,k+1}$:

$$B^2(s,0)D(s,0) \frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial \mu^2} + M(s,0) \frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial \mu} = 0; \quad (4.27)$$

$$B^2(s,0)D(s,0) \frac{\partial^2 P_{i,k+1}}{\partial \mu^2} + M(s,0) \frac{\partial P_{i,k+1}}{\partial \mu} = T_{i,k+1}(s,\mu,t), \quad (4.28)$$

де $T_{i,k+1}(s,\mu,t)$ – відомі функції, які певним чином виражаються через $P_{j,k+1}(s,\mu,t)$ ($j < i$) та їх похідні. Наприклад:

$$T_{1,k+1}(s,\mu,t) = \frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial t} - 2A(s,0)B(s,0)D(s,0) \frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial s \partial \mu}$$

$$\begin{aligned}
& -(\mu B(s,0)B'_r(s,0)D(s,0)+\mu B^2(s,0)D'_r(s,0))\frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial \mu^2}- \\
& -(B(s,0)B'_r(s,0)D(s,0)+B^2(s,0)D'_r(s,0)+\mu M'_r(s,0))\times \quad (4.29) \\
& \times \frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial \mu}-N(s,0)\frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial s};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{2,k+1}(s,\mu,t)= & \frac{\partial P_{1,k+1}}{\partial t}-A^2(s,0)D(s,0)\frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial s^2}-2A(s,0)\times \\
& \times B(s,0)D(s,0)\frac{\partial^2 P_{1,k+1}}{\partial s\partial \mu}-\mu(2A(s,0)B(s,0)D'_r(s,0)+ \\
& +A(s,0)B'_r(s,0)D(s,0)+A'_r(s,0)B(s,0)D(s,0))\frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial s\partial \mu}- \\
& -(A'_r(s,0)B(s,0)D(s,0)+\mu N'_r(s,0))\frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial s}-N(s,0)\times \\
& \times \frac{\partial P_{1,k+1}}{\partial s}-\mu(B(s,0)B'_r(s,0)D(s,0)+B^2(s,0)D'_r(s,0))\times \\
& \times \frac{\partial^2 P_{1,k+1}}{\partial \mu^2}-(B(s,0)B'_r(s,0)D(s,0)+B^2(s,0)D'_r(s,0)+ \\
& +\mu M'_r(s,0))\frac{\partial P_{1,k+1}}{\partial \mu}-\left(\frac{1}{2}\mu^2 B^2(s,0)D''_{rr}(s,0)+\mu^2 B(s,0)\times \right. \\
& \times B'_r(s,0)D'_r(s,0)+\frac{1}{2}\mu^2 B(s,0)B''_{rr}(s,0)D(s,0))\frac{\partial^2 P_{0,k+1}}{\partial \mu^2}- \\
& -(\mu B^2(s,0)D''_{rr}(s,0)+2\mu B(s,0)B'_r(s,0)D'_r(s,0)+\mu B(s,0)\times \quad (4.30) \\
& \times B''_{rr}(s,0)D(s,0)+\frac{1}{2}\mu^2 M''_{rr}(s,0))\frac{\partial P_{0,k+1}}{\partial \mu};
\end{aligned}$$

і т.д.

Рівняння (4.27)–(4.28) розв'язуємо при умовах :

$$P_{0,k+1}(s, 0, t) = c_* - c_{0,k+1}(l(\Phi^{-1}(s)), \Phi^{-1}(s)); \quad (4.31)$$

$$P_{i,k+1}(s, 0, t) = -c_{i,k+1}(l(\Phi^{-1}(s)), \Phi^{-1}(s)), \quad i = \overline{1, n}; \quad (4.32)$$

$$P_{i,k+1}(s, \mu, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.33)$$

Розв'язки задач (4.27)–(4.28) при умовах (4.31)–(4.33) шукаються аналогічно до попереднього. Наприклад:

$$P_{0,k+1}(s, \mu, t) = (c_* - c_{0,k+1}(l(\Phi^{-1}(s)), \Phi^{-1}(s))) \cdot e^{-\frac{M(s,0)\mu}{B^2(s,0)D(s,0)}}. \quad (4.34)$$

Зауважимо, що, оскільки причиною появи на дні русла піщаних хвиль є великомасштабні пульсації, то вибір функції $D(x, y)$ повинен бути узгодженим з характером зміни такого роду пульсацій. Вплив великомасштабної турбулентності на процес утворення піщаних хвиль детально досліджувався Н.А. Михайловою. Для ілюстрації ж запропонованої методики вважатимемо, що змінний коефіцієнт дифузії описується функцією $D(x) = \frac{\alpha}{\beta + x^2}$, де α, β – деякі числа (коефіцієнти), що відповідає характеру зміни коефіцієнта дифузії для води (рис. 4.2). Покажемо як змінюватиметься межа розділу фаз на початку процесу деформації за настільки малий проміжок часу, щоб можна було знехтувати зміною швидкостей u, v рідини, які приймемо сталими величинами. Будемо вважати також, що в початковий момент часу дно було плоским, тобто $l(x, 0) = l_*$. Тоді, згідно з (4.16)–(4.19) після першого часового етапу матимемо:

$$l(x, t_1) = l_* - \frac{\varepsilon D'(x)v}{uD(x)} = l_* - \frac{2\varepsilon xv}{u(1+x^2)}.$$

З останнього співвідношення видно, що, як і слід було цього чекати, вимивання частинок відбувається в області при $x < 0$, причому інтенсивність вимиву тим більша, чим менше $|x|$, а при $x > 0$ спостерігається зона відкладення частинок. На рис. 4.3 схематично зображено процес формування вирви розмиву та зони активного відкладення наносів в наступні моменти часу (тут масштаб по осі OY збільшено в 3 рази у порівнянні з масштабом по осі OX) для різних значень швидкості набігаючої течії.

Потрібно зауважити, що у випадку, коли великомасштабних пульсацій в течії немає, тобто $D(x) = const$, то, як свідчить аналіз останнього співвідношення, піщані хвилі утворюватись не будуть. Такий випадок відповідає стаціонарному режимові наносів.

Для дослідження впливу на процес утворення піщаних хвиль під впливом двох сусідніх вихрових утворень турбулентної течії задамо коефіцієнт дифузії, аналогічно до попереднього у вигляді функції: $D(x) = \alpha / (\beta + (\gamma - x^2)^2)$ (рис. 4.4). На рис. 4.5 схематично зображено розрахунковий профіль піщаної хвилі для такого випадку.

Зауважимо також, що використання запропонованої методики найбільш ефективно для розрахунку процесу утворення піщаної хвилі в початковий момент часу. Для дослідження ж подальшого формування піщаної хвилі необхідно більш детальне врахування зміни кінематики течії внаслідок зміни конфігурації поверхні дна. Методика такого роду моделювання буде описана нижче.

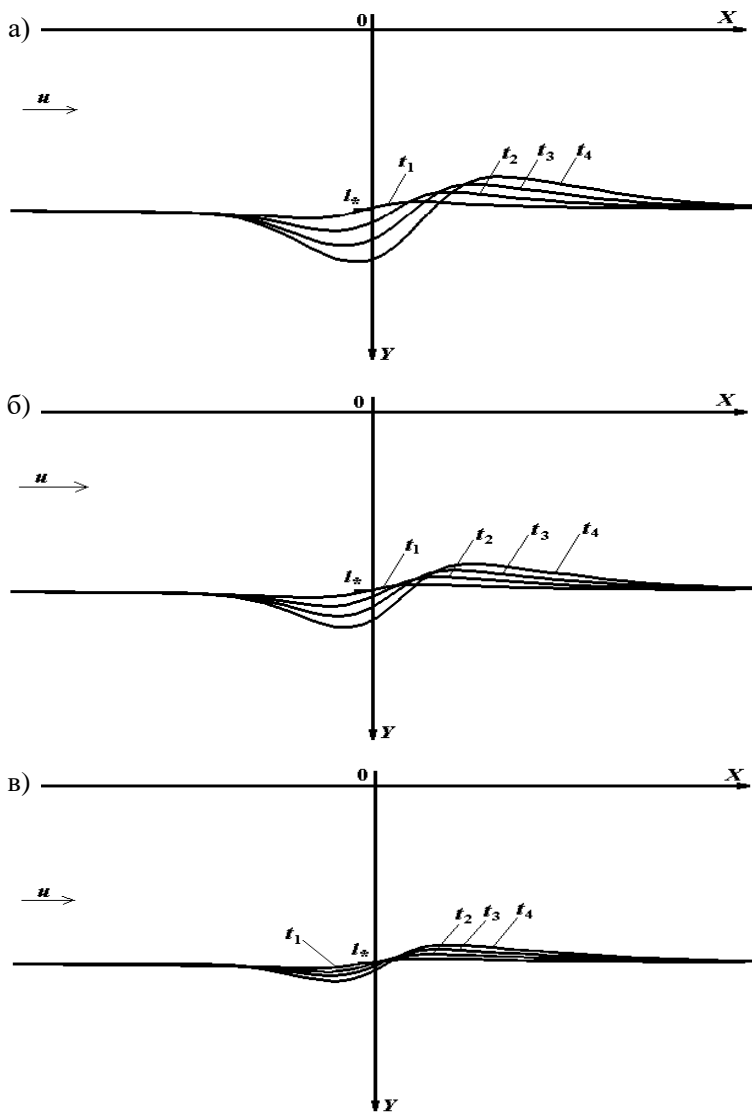


Рис. 4.3. Формування піщаної хвилі під впливом поодинокого вихрового утворення в початкові моменти часу ($t_1=0,3$ с, $t_2=0,6$ с, $t_3=0,9$ с, $t_4=1,2$ с; ґрунт однорідний з діаметром частинок – 2 мм; $l_* = 1$ м) : а) $u=0,75$ м/с; б) $u=0,50$ м/с; в) $u=0,75$ м/с.

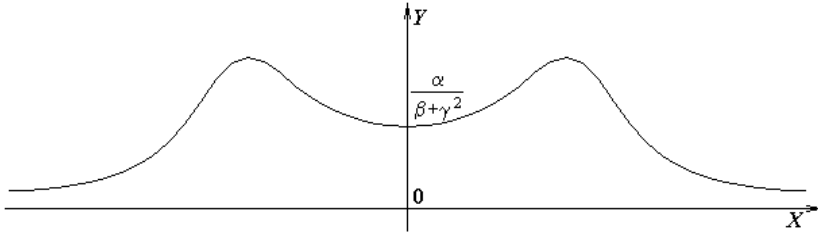


Рис. 4.4. Графік залежності коефіцієнта дифузії $D(x)$ при дослідженні впливу на процес утворення піщаних хвиль двох сусідніх вихрових утворень.

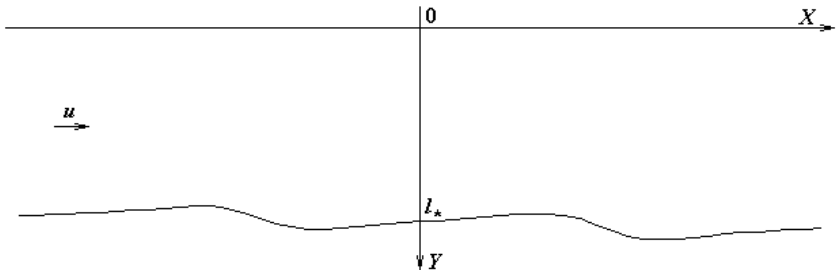


Рис. 4.5. Схематичний профіль піщаної хвилі під впливом поодинокого вихрового утворення в момент часу $t=0,3\text{с}$ при швидкості набігаючої течії $u=0,2\text{ м/с}$ (грунт однорідний з діаметром частинок – 2 мм ; $l_*=1\text{ м}$).

4.2. Математичні моделі дифузійних процесів в областях із вільними межами з урахуванням взаємовпливу зміни геометрії області на кінематичну структуру течії та коефіцієнт дифузії

При використанні дифузійної моделі для розрахунку процесу деформації русла важливим є врахування впливу зміни положення поверхні дна (вільної ділянки границі області) не тільки на коефіцієнт дифузії, але і на розподіл швидкостей в потоці. У випадку, коли зміна положення поверхні дна суттєво впливає на розподіл швид-

костей в потоці, пропонуємо представляти залежність горизонтальної u та вертикальної w складових вектора швидкості $\vec{V}(x, z, t)$ від вільної ділянки границі $L: z=l(x, t)$ у вигляді [24]:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left(\frac{l(x, t) - z}{l(x, t)} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(x, t)}, \\ w(x, z, t) &= u(x, z, t) \frac{l'(x, t)z}{l(x, t)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

де u_0 – швидкість рідини на її поверхні; l_0 – деяке осереднене значення глибини течії; α – досить мале число.

З метою моделювання та дослідження процесу деформації дна русла із врахуванням взаємовпливу зміни геометрії області на кінематичну структуру течії, аналогічно до попереднього випадку, будемо розглядати відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту як їх дифузію в рідину з деяким «фіктивним» коефіцієнтом, в області $G = \{(x, z, t): -\infty < x < +\infty, 0 < z < l(x, t), t > 0\}$, що описується наступною нелінійною сингулярно збуреною модельною задачею [22, 24]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D(V(l(x, z, t))) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - u(l(x, z, t)) \frac{\partial c}{\partial x} - \\ - (w(l(x, z, t)) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$c(x, z, 0) = \bar{c}(x, z); \quad c(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad c(x, z, t)|_{z=l(x, t)} = c_*; \quad (4.37)$$

$$\left(\varepsilon D(V(l(x, z, t))) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(l(x, z, t)) + w_{0n})c \right) \Big|_{z=l(x, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad (4.38)$$

$$l(x,0)=\tilde{l}(x), \quad (4.39)$$

де w_0 – швидкість осідання частинок в стоячій воді; n – одиничний вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину; ε – малий параметр. Тут рівняння (4.38) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі L .

Для відшукування розв'язку вихідної задачі здійснимо перетворення області G , ввівши нові змінні s, r , які пов'язанні із змінними x, z співвідношеннями:

$$s=x, \quad r=\frac{l_0 z}{l(x,t)}. \quad (4.40)$$

При цьому рівняння (4.36), (4.37) та рівності (4.35) перепишуться відповідно у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{l_0^2}{l^2(s,t)} \frac{\partial}{\partial r} \left(D(V(l(s,r,t))) \frac{\partial c}{\partial r} \right) - u(l(s,r,t)) \frac{\partial c}{\partial s} - \\ - \frac{l_0 w_0}{l(s,t)} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$c(s,r,0)=\bar{c}(s,r); \quad c(s,r,t)|_{r=0}=0, \quad c(s,r,t)|_{r=l_0}=c_*; \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} u(s,r,t) = \frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left(\frac{l_0-r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(s,t)}, \\ w(s,r,t) = u(s,r,t) \frac{l'_s(s,t)r}{l_0}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Провівши дискретизацію часу t , шукатимемо розв'язок задачі

(4.41)–(4.42) наближено у вигляді асимптотичного ряду (4.3). З метою зменшення обсягу викладок обмежимося лише нульовим та першим членом асимптотики.

На кожному часовому етапі розв’язок поставленої задачі шукається в області $G_k = \{(s, r, t): -\infty < s < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$. При цьому члени регулярної частини асимптотики запишуться у вигляді:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(s, r), g(s, r) - t - t_k), \\ g_{-1}(f(s, r), g(s, r) - t - t_k)) & \text{при } t < t_k + g(s, r), \\ 0 & \text{при } t > t_k + g(s, r), \end{cases} \quad (4.44)$$

$$f(s, r) = s \frac{w_0}{u_0} + \frac{(l_0(1+\alpha) - r)^{m+1}}{(m+1)l_0^m(1+\alpha)^m}, \quad g(s, r) = \frac{l(s, t_k)r}{l_0 w_0}; \quad (4.45)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(s, r), g(s, r) - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1}(f(s, r), g(s, r) - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (4.46)$$

$$F(s, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); \quad (4.47)$$

$$D_k = D(V(l(s, r, t_k))), \quad c_k = c(s, r, t_k).$$

Функції f_{-1}, g_{-1} отримуються в результаті розв’язання відносно змінних s, r системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \Theta_1 = f(s, r), \\ \Theta_2 = g(s, r). \end{cases} \quad (4.48)$$

Ввівши розтягнуту змінну η ($\eta = (l_0 - r)/\varepsilon$) та використовую-

чи стандартну процедуру прирівнювання, аналогічно до попереднього, знаходимо вирази для примежових функцій $P_{i,k+1}(s,\eta,t)$ на кожному часовому етапі:

$$P_{0,k+1}(s,\eta,t)=(c_*-c_0(s,l_0,t))\cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s,l_0)}\frac{l(s,t_k)}{l_0}\eta}, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(s,\eta,t)= & \left[-c_{1,k+1}(s,l_0,t) + \frac{(c_*-c_{0,k+1}(s,l_0,t))l(s,t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s,l_0)} \times \right. \\ & \times (l'(s,t_k)D_k(s,l_0)u_k(s,l_0) - l(s,t_k)D'_{k_s}(s,l_0)u_k(s,l_0) - \\ & - w_0 l_0 D'_{k_s}(s,l_0))\eta^2 + \frac{1}{l_0 w_0} (u_k(s,l_0)(c_*-c_0(s,l_0,t)) \times \\ & \times \frac{l'(s,t_k)D_k(s,l_0) - l(s,t_k)D'_{k_s}(s,l_0)}{D_k(s,l_0)} + l(s,t_k) \left(\frac{\partial c_{0,k+1}(s,l_0,t)}{\partial t} + \right. \\ & \left. \left. + u_k(s,l_0) \frac{\partial c_{0,k+1}(s,l_0,t)}{\partial s} \right) \right) \eta \left. \right] \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s,l_0)}\frac{l(s,t_k)}{l_0}\eta}, \quad (4.50) \end{aligned}$$

де $u_k = u(l(c(s,r,t_k)))$.

Використовуючи отриманий розв'язок $c(s,r,t)$ та рівність (4.38), визначаємо нове положення границі L_k за формулою:

$$\begin{aligned} l(s,t_{k+1})= & l(s,t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1+l'^2(s,t_k)}} \left\{ \varepsilon D_k(s,r) \left(\frac{\partial c(s,r,t_{k+1})}{\partial s} \times \right. \right. \\ & \times l'(s,t_k) - \frac{l_0}{l(s,t_k)} (1+l'^2(s,t_k)) \frac{\partial c(s,r,t_{k+1})}{\partial r} \left. \right) - (w_0 + \\ & \left. + w(l(c(s,r,t_{k+1}))) - u_k(s,r)l'(s,t_k)c(s,r,t_{k+1})) \right\} \Big|_{r=l_0}. \quad (4.51) \end{aligned}$$

Враховуючи (4.49)–(4.50) матимемо:

$$\begin{aligned}
l(s, t_{k+1}) = & l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1+l'^2(s, t_k)}} \left[-\frac{\varepsilon l_0 (1+l'^2(s, t_k))}{l(s, t_k)} \times \right. \\
& \times D_k(s, l_0) \frac{\partial}{\partial r} (c_0(s, l_0, t_{k+1}) + \varepsilon c_{1,k+1}(s, l_0, t_{k+1})) + w_0 (1 + \\
& + l'^2(s, t_k)) (c_0(s, l_0, t_{k+1}) + \varepsilon c_1(s, l_0, t_{k+1}) - c_*) - w_0 c_* + \\
& + \frac{\varepsilon (1+l'^2(s, t_k))}{w_0} \left(D_k(s, l_0) \left(\frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} + u_k(s, l_0) \times \right. \right. \\
& \times \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial s} \left. \left. \right) + \left(\frac{u_k(s, l_0) l'(s, t_k) D_k(s, l_0)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u_k(s, l_0) l(s, t_k) D'_k(s, l_0)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} \right) (c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})) \right]. \quad (4.52)
\end{aligned}$$

У випадку дрібних частинок ґрунту, коли їх швидкість осідання має такий же порядок малості що і коефіцієнт дифузії, вихідну модельну задачу розглядатимемо у вигляді:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D(x, z, t) \frac{\partial c}{\partial z} - w_0 c \right) - u(x, z, t) \frac{\partial c}{\partial x} - w(x, z, t) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (4.53)$$

$$c(x, z, 0) = \bar{c}(x, z); \quad c(x, z, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad c(x, z, t) \Big|_{z=l(x,t)} = c_*; \quad (4.54)$$

$$\left(\varepsilon D(x, z, t) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(x, z, t) + \varepsilon w_{0n}) c \right) \Big|_{z=l(x,t)} = c_* \frac{dl}{dt}, \quad l(x, 0) = \tilde{l}(x). \quad (4.55)$$

Її розв'язок, аналогічно до попереднього, шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду (4.3), вводячи змінні s, r лише для того, щоб знайти примежові функції $P_{i,k+1}$. При цьому отримаємо:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(x,z), g(x,z)) - t - t_k), \\ g_{-1}(f(x,z), g(x,z)) - t - t_k) & \text{при } t < t_k + g(x,z), \\ 0 & \text{при } t > t_k + g(x,z), \end{cases} \quad (4.56)$$

$$f(x,z) = \ln \frac{l(x,t_k)}{z}, \quad g(x,z) = \frac{1}{u_0 l_0 (1 + l(x,t_k) - z)^m} \int_0^x l(\tilde{x}, t_k) d\tilde{x}, \quad (4.57)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(x,z), g(x,z)) - t - t_k + \tilde{t}), \quad (4.58)$$

$$g_{-1}(f(x,z), g(x,z)) - t - t_k + \tilde{t}, \tilde{t} d\tilde{t},$$

$$F(x,z,t) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(D_k(x,z) \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial z} - w_0 c_{0,k+1} \right), \quad (4.59)$$

$$P_{0,k+1}(s, \eta, t) = (c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})) \cdot e^{-\frac{(w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0)) l(s, t_k)}{D_k(s, l_0)} \frac{1}{l_0} \eta}, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(s, \eta, t) = & \left[\frac{(c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})) l(s, t_k)}{2l_0} \left(-\frac{l'(s, t_k) u_k(s, l_0)}{l_0 D_k(s, l_0)} - \right. \right. \\ & - \frac{D'_{kr}(s, l_0) (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))}{D^2(s, l_0)} - \frac{l'(s, t_k) u'_{ks}(s, l_0)}{D_k(s, l_0)} + \\ & + \frac{w'_{kr}(s, l_0)}{D_k(s, l_0)} + \frac{l'(s, t_k) D_k(s, l_0) - l(s, t_k) D'_{ks}(s, l_0)}{l_0 D_k^2(s, l_0)} + \\ & \left. \left. + \frac{(w'_{ks}(s, l_0) - l''(s, t_k) u_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u'_{ks}(s, l_0)) l(s, t_k)}{l_0 D_k(s, l_0) (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} \right) \right] \eta^2 + \\ & + \left(\frac{l(s, t_k)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} \left(\frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} + u_k(s, l_0) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial s} \right) + (c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})) \left(-\frac{l(s, t_k) w_0}{l_0 D_k(s, l_0)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{w'_{ks}(s, l_0) - l''(s, t_k) u_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u'_{ks}(s, l_0)}{l_0 D_k(s, l_0) (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} l(s, t_k) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l'(s, t_k) D_k(s, l_0) - l(s, t_k) D_k'(s, l_0)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} \\
& - \frac{l'(s, t_k) u_k(s, l_0) D_k(s, l_0)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} + \\
& + \frac{w'_{kr}(s, l_0) - l'(s, t_k) u'_{kr}(s, l_0)}{w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0)} \left. \right) \eta - c_1(s, l_0, t_{k+1}) \Big] \times \\
& \times e^{-\frac{(w_k(s, l_0) - l' u_k(s, l_0)) l(s, t_k)}{D_k(s, l_0) l_0} \eta}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Аналогічно до (4.51), (4.52) відповідно матимемо:

$$\begin{aligned}
l(s, t_{k+1}) = & l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + l'^2(s, t_k)}} \left\{ \varepsilon D_k(s, r) \left(\frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial s} \times \right. \right. \\
& \times l'(s, t_k) - \frac{l_0}{l(s, t_k)} (1 + l'^2(s, t_k)) \frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial r} \Big) - (w_k(s, r) + \\
& \left. \left. + \varepsilon w_0 - u_k(s, r) l'(s, t_k) \right) c(s, r, t_{k+1}) \right\} \Big|_{r=l_0};
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
l(s, t_{k+1}) = & l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_*} \left[-\sqrt{1 + l'^2(s, t_k)} \left(D_k(s, l_0) \left(\frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial r} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon \frac{\partial c_1(s, l_0, t_{k+1})}{\partial r} \right) \frac{\varepsilon l_0}{l(s, t_k)} - (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0)) \times \right. \\
& \left. \times (c_0(s, l_0, t_{k+1}) - \varepsilon c_1(s, l_0, t_{k+1})) - \frac{l'^2(s, t_k)}{\sqrt{1 + l'^2(s, t_k)}} w_k(s, l_0) c_* + \right. \\
& \left. + \frac{l'^2(s, t_k) l'(s, t_k) u_k(s, l_0) c_*}{\sqrt{1 + l'^2(s, t_k)}} + \left(\frac{D_k(s, l_0) l_0 \sqrt{1 + l'^2(s, t_k)}}{l(s, t_k)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{l(s, t_k)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} \left(\frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} + \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial s} \right) \times \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times u_k(s, l_0)) + (c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})) \left(\frac{w'_{kr}(s, l_0) - l'(s, t_k)u'_{kr}(s, l_0)}{w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)} + \right. \\
& + \frac{l'(s, t_k)D_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)D_k(s, l_0)}{l_0(w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0))} - \frac{l(s, t_k)w_0}{l_0D_k(s, l_0)} + \\
& + \frac{(w'_{ks}(s, l_0) - l''(s, t_k)u_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u'_{ks}(s, l_0))l(s, t_k)}{l_0D_k(s, l_0)(w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0))} - \\
& \left. \left. - \frac{l(s, t_k)D'_{ks}(s, l_0)}{l_0(w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0))} \right) \right) - \frac{w_0c_*}{\sqrt{1+l'^2(s, t_k)}} \varepsilon \Bigg\}. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що коефіцієнт дифузії D у багатьох випадках доцільно приймати, згідно з гіпотезою Маккавеева (про коефіцієнт турбулентного обміну), пропорційним деякій степені осередненої швидкості течії [23]

$$D = \chi V^\beta, \tag{4.64}$$

а концентрацію наносів у початковий момент часу, відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних частинок, у вигляді:

$$\bar{c}(x, z) = c_* e^{-\gamma(\tilde{l}(x)-z)}. \tag{4.65}$$

На рис. 4.7. зображено положення поверхні дна у різні моменти часу розрахованих за формулою (4.52) для випадку обтікання водною течією затопленого пагорбка. Початкове положення вільної ділянки границі області моделювалось функцією

$$\tilde{l}(x) = l_0 - \frac{\lambda}{\tau + \mu x}. \tag{4.66}$$

На рис. 4.8. представлений аналогічний розрахунок поверхні дна у випадку обтікання, яка моделювалась функцією

$$\tilde{l}(x) = l_0 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\tau} + \tilde{\mu}x}. \quad (4.67)$$

У випадку різкого пониження дна або втікання до великоїївадин для задання початкового положення дна може бути використана функція

$$\tilde{l}(x) = l_0 \left(\rho + \frac{\Psi}{\pi} \operatorname{arctg}(\rho x) \right). \quad (4.68)$$

Розрахунок зміни положення поверхні дна для такого випадку представлений на рис. 4.9.

Цікавим з точки зору практики є випадок моделювання процесу формування вирви розмиву в часі при виході течії із ділянок, де дно закріплене і не розмивається [23]. Для такого випадку пропонується граничну умову на кривій L задавати таким чином:

$$c(x, z, t) \Big|_{z=l(x,t)} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 < -\xi, \\ c_*(1 + x/\xi), & \text{при } -\xi \leq x \leq 0, \\ c_*, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (4.69)$$

де ξ – деяке мале число.

Тут перехідний прошарок $-\xi \leq x \leq 0$ від закріпленої частини дна до незакріпленої введений для того, щоб задовольнялась умова нерозривності функції $c(x, y, t)$.

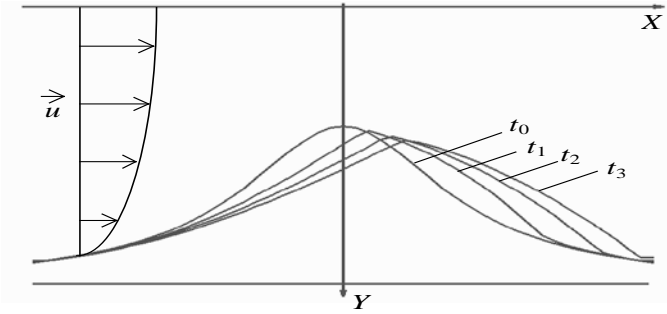


Рис. 4.7. Розвиток процесу розмиву при обтіканні водною течією затопленого пагорбка.

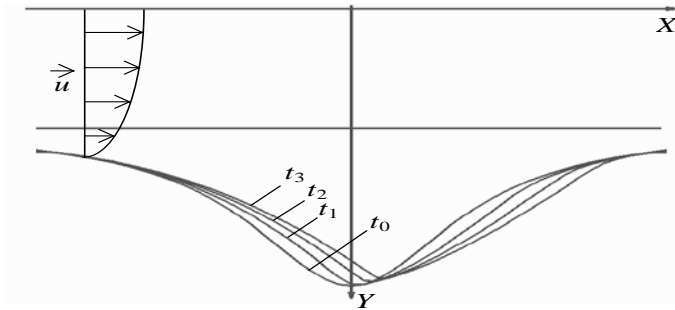


Рис. 4.8. Розвиток процесу розмиву при обтіканні водною течією малої вирви.

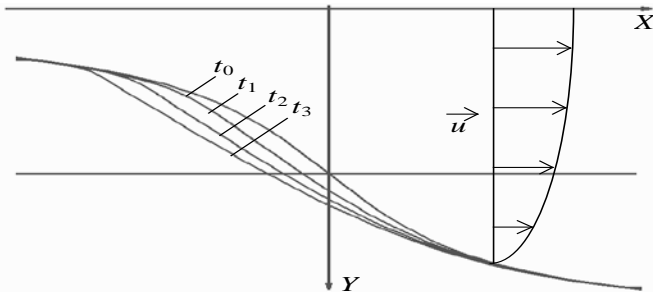


Рис. 4.9. Формування поверхні дна при втіканні водної течії до великої впадини.

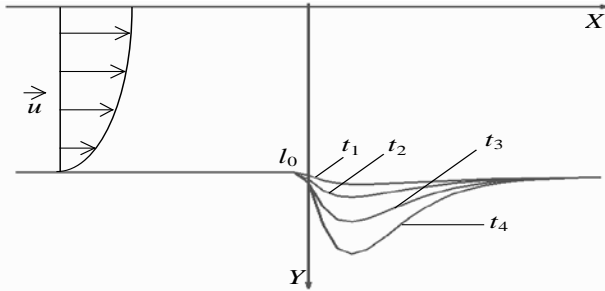


Рис. 4.10. Формування вирви розмиву за ділянкою із закріпленим дном.

Результати розрахунку процесу формування вирви розмиву за представленою вище методикою для такого випадку зображено на рис. 4.10.

4.3. Дослідження процесів деформації дна, що виникають при обтіканні течією незатоплених косо- та нормально розташованих півзагат.

4.3.1. Моделювання процесу розмиву поблизу незатоплених нормально розташованих півзагат.

Питання моделювання процесів деформації дна поблизу незатоплених півзагат, зважаючи на їх поширеність в практиці будівництва берегозахисних гідротехнічних споруд, і по сьогоднішній день залишається досить важливим і актуальним. В даному параграфі представлена методика використання дифузійної теорії змулення наносів в областях із вільними межами для моделювання таких процесів.

Розглядатимемо процес обтікання незатопленої нормально розташованої півзагати водною течією, в якому плановий розподіл швидкості на її поверхні достатньо близький до ідеального і може бути ним замінений. Використовуючи залежність показникового вигляду для розподілу швидкості течії по вертикалі, представлятимемо компоненти швидкості, з врахуванням впливу зміни положення поверхні дна ($z=l(x,y,t)$), у вигляді:

$$u(x, y, z, t) = \frac{u_0(x, y)l_0}{(1+\alpha)^m l(x, y, t)} \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (4.70)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{v_0(x, y)l_0}{(1+\alpha)^m l(x, y, t)} \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (4.71)$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{l_0(l'_x(x, y, t)u_0(x, y) + l'_y(x, y, t)v_0(x, y))}{(1+\alpha)^m l^2(x, y, t)} \times \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m, \quad (4.72)$$

де m – показник параболи; α – досить мале число, яке введено для того, щоб забезпечити ненульові значення компонент швидкості на поверхні рідини; u_0, v_0 – компоненти вектора швидкості фіктивно ідеальної горизонтальної течії на поверхні рідини.

Як і в попередньому випадку, вважатимемо, що відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту під впливом водної течії здійснюється за рахунок їх дифузії у рідину з деяким «фіктивним» коефіцієнтом, змулені ж частинки переносяться течією переважно конвективно. Причому розглядатимемо випадок настільки дрібних на-

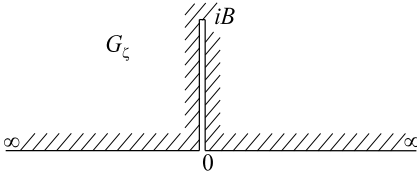


Рис. 4.11. Область G_ζ фіктивно ідеальної горизонтальної течії, що обтікає поперечну півзагату

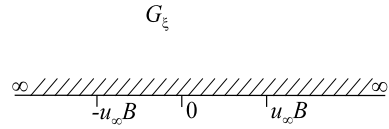


Рис. 4.12. Область G_ξ комплексного потенціалу

носів, щоб можна було знехтувати їх впливом на кінематичні та турбулентні характеристики водної течії, та вважатимемо, що вони рухаються в потоці так само як і частинки рідкої фази.

Якщо ширина течії настільки більша за довжину півзагати, що впливом протилежного берега на поле швидкостей поблизу споруди можна знехтувати, то вирази для компонент швидкості u_0 , v_0 ідеальної горизонтальної течії знайдемо шляхом конформного відображення півплощини з поперечним розрізом (півзагатою) $G_\zeta = \{\zeta = x + iy: -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\} \setminus \{(0, y): 0 < y \leq B\}$ (рис. 4.11) на півплощину (область комплексного потенціалу) $G_\xi = \{\xi = \varphi + i\psi: -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < +\infty\}$ (тут φ , ψ – відповідно потенціал та функція течії даної фіктивно ідеальної горизонтальної течії) (рис. 4.12) [74] при відповідності $\infty \rightarrow \infty$, $iB \rightarrow 0$, $0 \rightarrow \pm u_\infty B$, яке, запишеться у вигляді:

$$\zeta = \frac{\sqrt{\xi^2 - u_\infty^2 B^2}}{u_\infty}, \quad (4.73)$$

де B – довжина півзагати; u_∞ – значення швидкості ідеальної гори-

зонтальної течії при $\xi \rightarrow \infty$.

Використовуючи (4.73) та знаходимо вирази для функцій u_0 , v_0 за формулою [94]

$$u_0 - iv_0 = \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{1}{\frac{d\zeta}{d\xi}} = (u_\infty \sqrt{\xi^2 - u_\infty^2 B^2}) / \xi. \quad (4.74)$$

Розділивши в (4.74) дійсну та уявну частини отримаємо

$$u_0(\varphi, \psi) = \frac{(\varphi^2 + \psi^2 + u_\infty^2 B^2 + \sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - u_\infty^2 B^2)^2 + 4\varphi^2 \psi^2})}{\sqrt{\sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - u_\infty^2 B^2)^2 + 4\varphi^2 \psi^2} - \varphi^2 + \psi^2 + u_\infty^2 B^2}} \times \\ \times \frac{u_\infty \psi}{\sqrt{2(\varphi^2 + \psi^2)}}; \quad (4.75)$$

$$v_0(\varphi, \psi) = \frac{(\varphi^2 + \psi^2 - u_\infty^2 B^2 - \sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - u_\infty^2 B^2)^2 + 4\varphi^2 \psi^2})}{\sqrt{\sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - u_\infty^2 B^2)^2 + 4\varphi^2 \psi^2} - \varphi^2 + \psi^2 + u_\infty^2 B^2}} \times \\ \times \frac{u_\infty \varphi}{\sqrt{2(\varphi^2 + \psi^2)}}; \quad (4.76)$$

Перейдемо від області $G = \{(x, y, z, t): -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty, 0 < z < l(x, y, t), t > 0\} \setminus \{(x, y, z, t): x = 0, 0 < y \leq B, 0 < z < l(x, y, t), t > 0\}$ до відповідної області $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < +\infty, 0 < z < l(\varphi, \psi, t) = l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\}$, обмеженій зверху горизонтальною площиною $z=0$ – поверхнею рідини, береговою стінкою із півзагатою $\{(\varphi, 0, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < z < l(\varphi, 0, t)\}$, вільною поверхнею $L = \{(\varphi, \psi, t): z = l(\varphi, \psi, t)\}$. Тоді, аналогічно до попереднього, приходи-

мо до наступної сингулярної збуреної нелінійної модельної задачі [24–26]:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D(V(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t))) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{(u_0^2(\varphi, \psi) + v_0^2(\varphi, \psi)) l_0}{(1+\alpha)^m l(\varphi, \psi, t)} \times \quad (4.77)$$

$$\times \left(\frac{l(\varphi, \psi, t) - z}{l(\varphi, \psi, t)} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial \varphi} - (w(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t)) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t};$$

$$c(\varphi, \psi, z, t)|_{z=0} = 0, \quad c(\varphi, \psi, z, t)|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_*; \quad (4.78)$$

$$\left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = 0; \quad c(\varphi, \psi, z, 0) = \bar{c}(\varphi, \psi, z); \quad l(\varphi, \psi, 0) = l_0; \quad (4.79)$$

$$\left(\varepsilon D(V(\varphi, \psi, z, l)) \frac{\partial c}{\partial n} - (w_{0n} + V_n(\varphi, \psi, z, l)) c \right) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad (4.80)$$

Концентрацію наносів у початковий момент часу, відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних частинок, задамо у вигляді

$$\bar{c}(\varphi, \psi, z) = c_* e^{\frac{\gamma(l_0 - z)}{\varepsilon}}, \quad (4.81)$$

а коефіцієнт εD приймемо, згідно з гіпотезою Маккавеева про коефіцієнт турбулентного обміну, пропорційним деякій степені швидкості течії [22]

$$\varepsilon D = \chi V^\lambda. \quad (4.82)$$

Тут χ, λ – деякі числа (параметри).

Ввівши нові змінні s, h, r :

$$s=\varphi, \quad h=\psi, \quad r=l_0 z/l(\varphi, \psi, t), \quad (4.83)$$

перепишемо рівняння (4.77)–(4.79) та рівності (4.70)–(4.72) відповідно у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{l_0^2}{l^2(s, h, t)} \frac{\partial}{\partial r} \left(D(V(s, h, r, l(s, h, t))) \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \times \\ \times \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0}{(1 + \alpha)^m l(s, h, t)} \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l(s, h, t)} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t} \end{aligned} \quad ; \quad (4.84)$$

$$c(s, h, r, t) \Big|_{r=0} = c_* e^{-\frac{\gamma l_0}{\varepsilon}} \approx 0, \quad c(s, h, r, t) \Big|_{r=l_0} = c_*, \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \Big|_{h=0} = 0; \quad c(s, h, r, 0) = \bar{c}(s, h, r); \quad (4.86)$$

$$u(s, h, r, t) = \frac{u_0(s, h)}{(1 + \alpha)^m} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(s, h, t)}; \quad (4.87)$$

$$v(s, h, r, t) = \frac{v_0(s, h)}{(1 + \alpha)^m} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(s, h, t)}; \quad (4.88)$$

$$w(s, h, r, t) = \frac{l_0 (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l'_s(s, h, t)}{(1 + \alpha)^m l^2(s, h, t)} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m. \quad (4.89)$$

Продовживши вихідну область G_* симетрично відносно площини $h=0$, аналогічно до того, як це зроблено в § 4.1, шукатимемо розв'язок задачі (4.84)–(4.86) наближено в кожній з областей $G_{*k} = \{(s, h, r, t): -\infty < s < +\infty, -\infty < h < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$ у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_{k+1} = \sum_i^n \varepsilon^i c_{i,k+1} + \sum_i^n \varepsilon^i P_{i,k+1} + n_{k+1} + R_n, \quad (4.90)$$

де Π_{k+1} – примежові функції в околі $r=0$; R_n , $P_{i,k+1}$, $c_{i,k+1}$ – функції аналогічні до (4.3).

Використовуючи представлену в § 4.2 методику асимптотичного наближення розв'язку нелінійних задач конвективної дифузії в областях з вільними межами, отримаємо такі вирази для членів регулярної частини $c_{i,k+1}$ та примежових функцій $P_{i,k+1}$ асимптотики (4.90) на кожному часовому етапі:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k), g_{-1,k}(f(s, h, r), \\ g_k(s, h, r) - t - t_k)), & \text{при } t < t_k + g_k(s, h, r), \\ 0, & \text{при } t > t_k + g_k(s, h, r), \end{cases} \quad (4.91)$$

$$g_k(s, h, r) = \frac{l(s, h, t_k)r}{l_0 w_0}; \quad (4.92)$$

$$f(s, h, r) = \frac{l_0}{(m+1)w_0(1+\alpha)^m} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^{m+1} + \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{u_0^2(\tilde{s}, h) + v_0^2(\tilde{s}, h)}, \quad (4.93)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k + \tilde{t}), \\ g_{-1,k}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (4.94)$$

$$F(s, h, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); \quad D_k = D(V(s, h, r, l)); \quad (4.95)$$

$$P_{0,k+1}(s, h, \eta, t) = (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}, \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
P_{1,k+1}(s, h, \eta, t) = & \left[\frac{(c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t))l(s, h, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, h, l_0)} \left(\frac{D_k(s, h, l_0)}{(1+\alpha)^m} \times \right. \right. \\
& \times \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))l'_s(s, h, t_k)l_0 \alpha^m}{l(s, h, t_k)} - l_0 \alpha^m (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \times \\
& \times \frac{D'_{k_s}(s, h, l_0)}{(1+\alpha)^m} - w_0 l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) \left. \right) \eta^2 + \left(\frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} \times \right. \\
& \times \frac{l_0 \alpha^m (l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D'_{k_s}(s, h, l_0))}{D_k(s, h, l_0)} (c_* - \\
& - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) + \left(\frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m} \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial s} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial t} l(s, h, t_k) \right) \right] \frac{\eta}{l_0 w_0} - c_{1,k+1}(s, h, l_0, t) \left. \right] e^{-\frac{w_0 l(s, h, t_k) \eta}{D_k(s, h, l_0) l_0}}. \quad (4.97)
\end{aligned}$$

де $\eta = (l_0 - r) / \varepsilon$.

Тут наведено тільки нульовий та перший члени асимптотики лише з метою зменшення обсягу викладок, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, знаходяться аналогічно.

Зауважимо, що функції P_{k+1} в даному випадку близькі до нуля і тому будемо відносити їх до залишкового члену R . В загальному ж випадку вони знаходяться аналогічно до того, як це зроблено, наприклад, в роботах [33, 34].

Використовуючи знайдений розв'язок $c_{k+1}(s, h, r, t)$ та рівність (4.80), для визначення нового положення границі L_{k+1} після кожного часового етапу отримаємо формулу:

$$\begin{aligned}
l(s, h, t_{k+1}) = & l(s, h, t_k) + \left[-\frac{\varepsilon l_0 D_k(s, h, l_0)}{l(s, h, t_k)} ((u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \times \right. \\
& \times (l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)) + 1) \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon c_{1, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) + \\
& + c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) - w_0 (1 + (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) (l_s'^2(s, h, t_k) + \\
& + l_h'^2(s, h, t_k))) (c_* - c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) - \varepsilon c_{1, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) - w_0 \times \\
& \times c_* + \frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) (l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k))}{l(s, h, t_k) w_0} (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \times \\
& \times \left(\frac{l_s'(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D_{ks}'(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \times \right. \\
& \times (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) (c_* - c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) + \frac{l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} (u_0^2(s, h) + \\
& \left. + v_0^2(s, h)) \frac{\partial c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})}{\partial s} + l(s, h, t_k) \frac{\partial c_{0, k+1}(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} \right) \times \\
& \times \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) (l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k))}}. \quad (4.98)
\end{aligned}$$

На рис. 4.13 схематично зображено розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу оголовка розташованої під прямим кутом до берегової лінії півзагати в деякий момент часу $t=t_0$ ($t_0=10$ с). Наведена тут конфігурація дна дозволяє наочно продемонструвати можливість розрахунку за представленою вище методикою моделювання процесу деформації русла не лише вирви розмиву, а й зони активного відкладення змулених наносів. Розрахунок проводився вздовж різних ліній течії, починаючи з деякого значення $\psi=\psi_0$, вибір якого здійснювався за умови, що максимальне значення швидкості на цій лінії течії не повинно перевищувати 1,25...1,35 u_∞ .

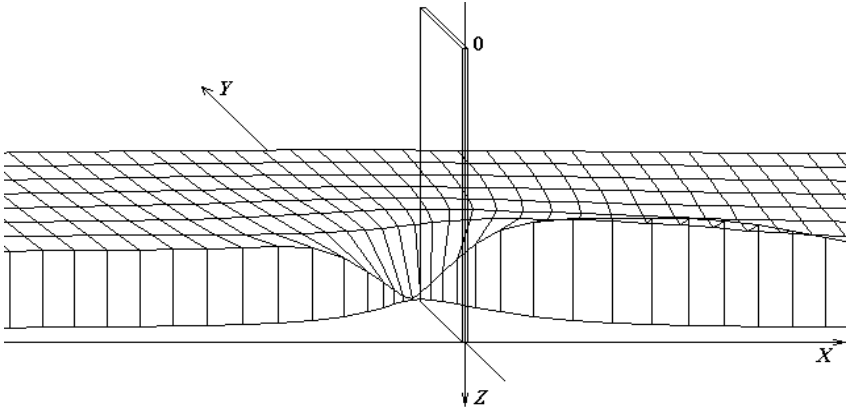


Рис. 4.13. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати ($u_{\infty}=1\text{ м/с}$, $B=1\text{ м}$, $H=1\text{ м}$, ґрунт – однорідний, з діаметром частинок 1 мм).

На рис. 4.14 зображено процес формування поверхні дна з часом вздовж деякої лінії течії (вертикальної поверхні) $\psi=\psi_0$, що перетинає вісь OY в точці $y=B_*$ ($\psi_0=0,5$, $B_*=1,12\text{ м}$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$).

Визначення коефіцієнтів χ та λ , які входять у формулу (4.82), для практичних розрахунків параметрів розмиву здійснюється на основі числових експериментів при різних значеннях цих коефіцієнтів, характеристик течії і русла та подальшим порівнянням і аналізом отриманих результатів з даними відомих експериментальних та натурних досліджень. У розглянутому вище випадку обтікання нормально розташованих незатоплених півзагат показник степеня λ приймався рівним 2, а для визначення коефіцієнта χ отримана залежність

$$\chi=0,016u_{\infty}^{-1,5}d^{-0,46}. \quad (4.99)$$

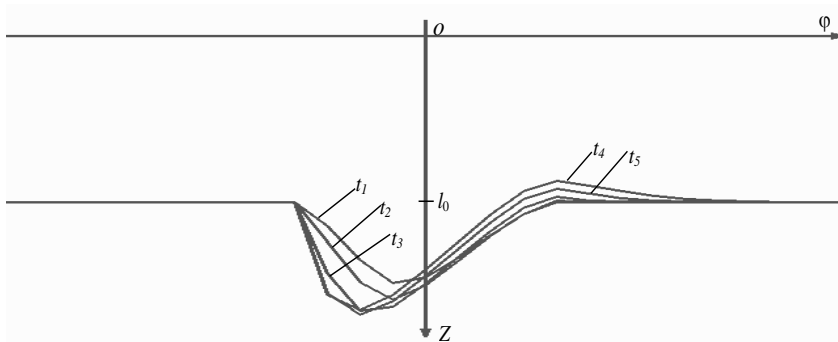


Рис. 4.14. Розвиток процесу розмиву поблизу нормально розташованої півзагати вздовж “випрямленої” лінії течії фіктивно ідеальної горизонтальної течії ($\psi_0=0,5$).

На рис. 4.15 зображені графіки залежності прогнозованої глибини вирви розмиву, які отримані з врахуванням останнього співвідношення, від швидкості набігаючої течії та від діаметрів частинок однорідного ґрунту при $B=1\text{м}$, $H=1\text{м}$. Аналіз наведених тут залежностей вказує на відповідність їх характеру аналогічним залежностям побудованим за даними натурних спостережень, а це, в свою чергу, дозволяє зробити висновок про адекватність побудованої математичної моделі фізичному процесу.

Зауважимо, що використання запропонованої вище методики математичного моделювання процесу деформації дна русла дозволяє не лише проводити розрахунок параметрів розмиву, але й прослідкувати їх розвиток в часі та оцінити швидкість розмиву, що в більшості випадків неможливо при застосуванні емпіричних залежностей. На рис. 4.16. представлено зміну розрахункової глибини вирви розмиву в часі. Як видно з наведеного графіку, швидкість

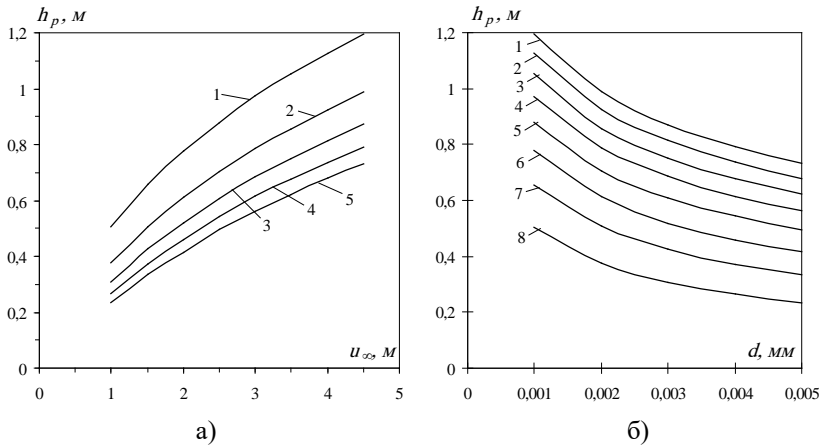


Рис. 4.15. Графіки залежності глибини вирви розмиву поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати ($B=1\text{ м}$, $H=1\text{ м}$) від швидкості набігаючої течії u_∞ (а): 1 – $d=1\text{ мм}$; 2 – $d=2\text{ мм}$; 3 – $d=3\text{ мм}$; 4 – $d=4\text{ мм}$; 5 – $d=5\text{ мм}$; та від діаметра частинок (б): 1 – $u_\infty=4,0\text{ м/с}$; 2 – $u_\infty=3,5\text{ м/с}$; 3 – $u_\infty=3,0\text{ м/с}$; 4 – $u_\infty=2,5\text{ м/с}$; 5 – $u_\infty=2,0\text{ м/с}$; 6 – $u_\infty=1,5\text{ м/с}$; 7 – $u_\infty=1,0\text{ м/с}$; 8 – $u_\infty=0,5\text{ м/с}$.

розмиву максимальна в початкові моменти часу і з часом зменшується до нуля, тобто спостерігається стабілізація процесу розмиву, причому час стабілізації менший при більшій швидкості набігаючої течії, що може бути пояснено більшим транспортом наносів в цьому випадку. Крім того, при великих значеннях швидкості набігаючої течії з деякого моменту часу спостерігається зменшення розрахункової глибини розмиву внаслідок збільшення об'єму змунених наносів, які потрапляють у вирву розмиву.

Зауважимо також, що тут наведено розрахунковий час, який потребує узгодження з реальним часом відповідного фізичного процесу.

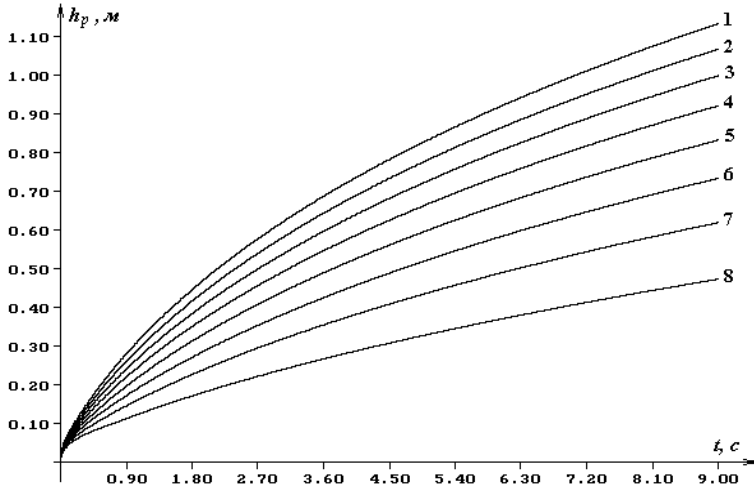


Рис. 4.16. Розвиток процесу розмиву поблизу незатопленої нормально розташованої півзагати ($B=1\text{м}$, $H=1\text{м}$, $d=1\text{мм}$): 1 – $u_\infty=4,5\text{м/с}$; 2 – $u_\infty=4\text{м/с}$; 3 – $u_\infty=3,5\text{м/с}$; 4 – $u_\infty=3\text{м/с}$; 5 – $u_\infty=2,5\text{м/с}$; 6 – $u_\infty=2\text{м/с}$; 7 – $u_\infty=1,5\text{м/с}$; 8 – $u_\infty=1\text{м/с}$.

4.3.2. Дослідження процесу розмиву поблизу нормально розташованих півзагат з урахуванням впливу протилежної берегової лінії.

Розглянемо тепер випадок, коли довжина нормально розташованої незатопленої півзагати співмірна з шириною русла. Компоненти вектора швидкості рідини на поверхні течії u_0 , v_0 , для такого випадку, шукатимемо, аналогічно до попереднього, шляхом конформного відображення смуги з поперечним розрізом (півзагатою) $G_\zeta = \{\zeta = x + iy: -\infty < x < +\infty, 0 < y < H_p\} \setminus \{(0, y): 0 < y \leq B\}$ (рис. 4.15) на смугу (область комплексного потенціалу) $G_\xi = \{\xi = \varphi + i\psi: -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < H_p\}$ (рис. 4.16) [74] при відповідності $\infty \rightarrow \infty$, $iB \rightarrow 0$,

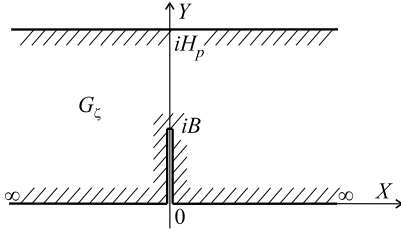


Рис. 4.17. Область G_ζ фіктивно ідеальної горизонтальної течії, що обтікає по перекну півзагату

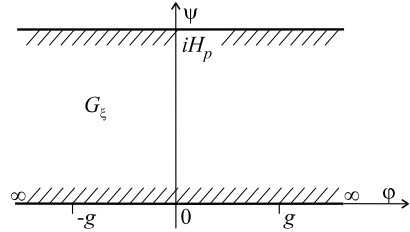


Рис. 4.18. Область G_ζ комплексного потенціалу.

$0 \rightarrow \frac{u_\infty H_p}{\pi} \ln \left(\frac{1 \mp \sin \frac{\pi B}{2H_p}}{1 \pm \sin \frac{\pi B}{2H_p}} \right)$ (тут H_p – ширина русла), яке записується у вигляді:

$$\xi = \frac{2u_\infty H_p}{\pi} \operatorname{arth} \left\{ \cos \frac{\pi B}{2H_p} \sqrt{th^2 \frac{\pi \zeta}{2H_p} + tg^2 \frac{\pi B}{2H_p}} \right\}. \quad (4.100)$$

Використовуючи останню рівність, аналогічно до (4.74), знаходимо співвідношення для визначення компонент швидкості u_0 , v_0 , які після розділення дійсної і уявної частини приймуть вигляд

$$u_0 = \frac{u_\infty}{\cos \frac{\pi B}{2H_p}} \cdot \frac{A_3 A_2 + B_3 B_2}{A_2^2 + B_2^2}; \quad v_0 = -\frac{u_\infty}{\cos \frac{\pi B}{2H_p}} \cdot \frac{A_3 B_2 + B_3 A_2}{A_2^2 + B_2^2}; \quad (4.101)$$

$$A_1 = \frac{e^{\frac{4\pi\varphi}{u_\infty H_p}} - 2e^{\frac{2\pi\varphi}{u_\infty H_p}} (1 - 2\sin^2(\pi\psi/(u_\infty H_p))) + 1}{(e^{\frac{2\pi\varphi}{u_\infty H_p}} + 2e^{\frac{\pi\varphi}{u_\infty H_p}} \cos(\pi\psi/(u_\infty H_p)) + 1)^2} - \sin^2 \frac{\pi B}{2H_p}; \quad (4.102)$$

$$B_1 = \frac{4e^{\frac{\pi\varphi}{u_\infty H_p}} (e^{\frac{2\pi\varphi}{u_\infty H_p}} - 1) \sin(\pi\psi/(u_\infty H_p))}{(e^{\frac{2\pi\varphi}{u_\infty H_p}} + 2e^{\frac{\pi\varphi}{u_\infty H_p}} \cos(\pi\psi/(u_\infty H_p)) + 1)^2}; \quad (4.103)$$

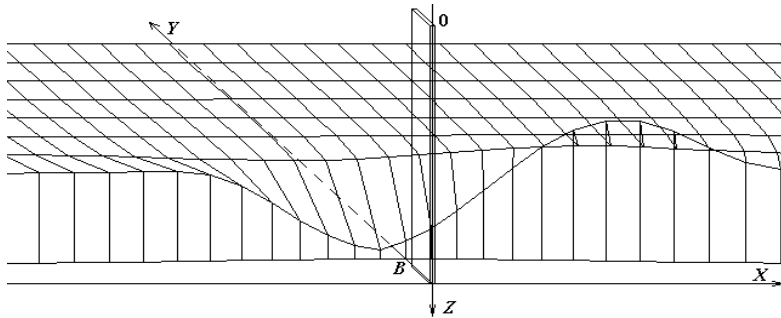


Рис. 4.19. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати у випадку врахування впливу протилежної берегової лінії ($u_{\infty}=1,5\text{м/с}$, $B=1\text{м}$, $B/H_p=0,1$; ґрунт – однорідний, з діаметром частинок 3мм).

$$A_2 = (e^{\frac{2\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} - 1) / (e^{\frac{2\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} + 2e^{\frac{\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} \cos(\pi\psi / (u_{\infty}H_p)) + 1); \quad (4.104)$$

$$B_2 = (2e^{\frac{\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} \sin(\pi\psi / (u_{\infty}H_p))) / (e^{\frac{2\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} + 2e^{\frac{\pi\varphi}{u_{\infty}H_p}} \cos(\pi\psi / (u_{\infty}H_p)) + 1);$$

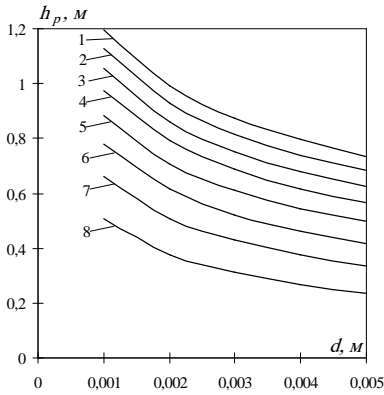
$$A_3 = \sqrt{\frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{2}}; \quad B_3 = \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{2}}; \quad (4.105)$$

Процес конвективної дифузії частинок ґрунту для такого випадку будемо описувати, як і раніше, модельною задачею (4.84)–(4.86) [23] з додатковою граничною умовою

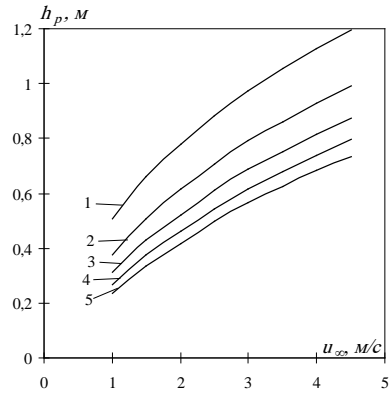
$$\left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=H} = 0, \quad (4.106)$$

розв'язок якої шукається аналогічно до попереднього.

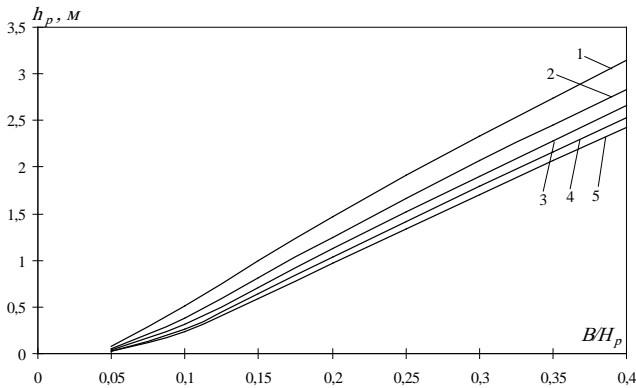
На рис. 4.19 схематично зображено розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу поперечної півзагати у випадку врахуван-



- а) 1 – $u_{\infty}=4,5\text{ м/с}$; 2 – $u_{\infty}=4\text{ м/с}$;
 3 – $u_{\infty}=3,5\text{ м/с}$; 4 – $u_{\infty}=3\text{ м/с}$;
 5 – $u_{\infty}=2,5\text{ м/с}$; 6 – $u_{\infty}=2\text{ м/с}$;
 7 – $u_{\infty}=1,5\text{ м/с}$; 8 – $u_{\infty}=1\text{ м/с}$.



- б) 1 – $d=1\text{ мм}$; 2 – $d=2\text{ мм}$;
 3 – $d=3\text{ мм}$; 4 – $d=4\text{ мм}$;
 5 – $d=5\text{ мм}$.



- в) 1 – $d=1\text{ мм}$; 2 – $d=2\text{ мм}$; 3 – $d=3\text{ мм}$; 4 – $d=4\text{ мм}$; 5 – $d=5\text{ мм}$.

Рис. 4.20. Графіки залежності глибини вирви розмиву поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати у випадку врахування впливу проти-лежної берегової лінії від діаметра частинок однорідного ґрунту (а), від швидкості набігаючої течії u_{∞} (б) ($B=1\text{ м}$, $H=1\text{ м}$, $B/H_p=0,1$) та від відносної ширини перекриття русла (в) ($u_{\infty}=1\text{ м/с}$).

ня впливу протилежної берегової лінії в момент часу $t=10c$.

На основі проведених числових експериментів для такого випадку побудовані графіки залежності розрахункової глибини вирви розмиву h_p від швидкості набігаючої течії u_∞ , діаметра частинок ґрунту d та відносної ширини перекриття русла (B/H_p) , які представлені рис. 4.20.

4.3.3. Моделювання процесу розмиву поблизу незатоплених півзагат, розташованих під кутом до берегової лінії.

Розглянемо процес деформації поверхні дна, який виникає при обтіканні косорозміщених до берегової лінії незатоплених півзагат. Як і в попередньому випадку вважатимемо, що розподіл швидкості течії на поверхні рідини співпадає з ідеальним розподілом і, нехтуючи впливом протилежної берегової лінії, шукатимемо його шляхом конформного відображення півплощини з косим розрізом (півзагатою) (рис. 4.21) на півплощину (рис. 4.22) (область комплексного потенціалу) при відповідності $\infty \rightarrow \infty$, $0 \rightarrow \pm u_\infty B$, $Be^{i\pi\alpha} \rightarrow 0$. Таке відображення має вигляд:

$$\zeta = \frac{1}{u_\infty} (\xi + u_\infty B)^{1-\alpha} (\xi - u_\infty B)^\alpha. \quad (4.107)$$

Компоненти швидкості, при цьому, визначатимуться за формулою:

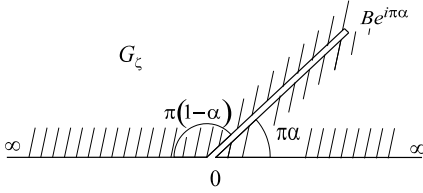


Рис. 4.21. Область G_ζ фіктивно ідеальної горизонтальної течії, що обтікає косорозміжену півзагату

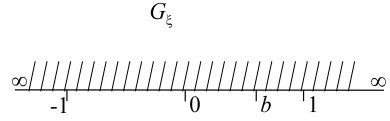


Рис. 4.22. Область G_ζ комплексного потенціалу

$$u_0 - v_0 i = \frac{u_\infty}{(1-\alpha) \left(\frac{\xi - u_\infty B}{\xi + u_\infty B} \right)^\alpha + \alpha \left(\frac{\xi + u_\infty B}{\xi - u_\infty B} \right)^{1-\alpha}}. \quad (4.108)$$

Розділивши дійсну і уявну частини в (4.108), отримаємо:

$$u_0 = \frac{u_\infty (1-\alpha) (r_2 / r_1)^\alpha \cos(\alpha(\beta_2 - \beta_1))}{(1-\alpha)^2 r_1^{-2\alpha} r_2^{2\alpha} + \alpha^2 r_1^{2(1-\alpha)} r_2^{2(\alpha-1)} + 2\alpha(1-\alpha) \cos(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{u_\infty \alpha (r_2 / r_1)^{\alpha-1} \cos((\alpha-1)(\beta_2 - \beta_1))}{(1-\alpha)^2 r_1^{-2\alpha} r_2^{2\alpha} + \alpha^2 r_1^{2(1-\alpha)} r_2^{2(\alpha-1)} + 2\alpha(1-\alpha) \cos(\beta_2 - \beta_1)}; \quad (4.109)$$

$$v_0 = \frac{u_\infty (1-\alpha) (r_2 / r_1)^\alpha \sin(\alpha(\beta_2 - \beta_1))}{(1-\alpha)^2 r_1^{-2\alpha} r_2^{2\alpha} + \alpha^2 r_1^{2(1-\alpha)} r_2^{2(\alpha-1)} + 2\alpha(1-\alpha) \cos(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{u_\infty \alpha (r_2 / r_1)^{\alpha-1} \sin((\alpha-1)(\beta_2 - \beta_1))}{(1-\alpha)^2 r_1^{-2\alpha} r_2^{2\alpha} + \alpha^2 r_1^{2(1-\alpha)} r_2^{2(\alpha-1)} + 2\alpha(1-\alpha) \cos(\beta_2 - \beta_1)}; \quad (4.110)$$

$$r_1 = \sqrt{(\varphi + u_\infty B)^2 + \psi^2}; \quad r_2 = \sqrt{(\varphi - u_\infty B)^2 + \psi^2}; \quad (4.111)$$

$$\beta_1 = \begin{cases} \arctg(\psi / (\varphi + u_\infty B)) & \text{при } \varphi + u_\infty B \geq 0, \\ \arctg(\psi / (\varphi + u_\infty B)) + \pi & \text{при } \varphi + u_\infty B < 0; \end{cases} \quad (4.112)$$

$$\beta_2 = \begin{cases} \arctg(\psi / (\varphi - u_\infty B)) & \text{при } \varphi - u_\infty B \geq 0, \\ \arctg(\psi / (\varphi - u_\infty B)) + \pi & \text{при } \varphi - u_\infty B < 0. \end{cases} \quad (4.113)$$

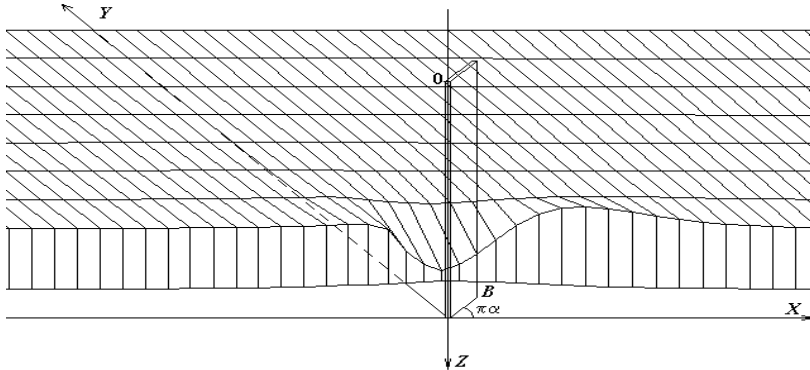


Рис. 4.23. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу косорозміщеної півзагати при куті встановлення $0,3\pi$ ($B=1\text{м}$, $H=1\text{м}$, $u_\infty=1\text{м/с}$, $d=1\text{мм}$).

Як і раніше, для описання процесу відриву, перенесення та відкладання частинок ґрунту у випадку косорозміщених незатоплених півзагат використовується модельна задача (4.84)–(4.86) [22]. Положення поверхні дна після кожного часового етапу шукатиметься, при цьому, із співвідношення (4.98), в якому компоненти швидкості на поверхні рідини u_0 , v_0 знаходяться за формулами (4.109)–(4.112).

Для визначення фіктивного коефіцієнта дифузії, як і у випадку нормально розташованих півзагат, використовується співвідношення (4.82) з врахуванням відповідних зауважень щодо знаходження параметрів χ та λ .

На рис. 4.23 схематично зображено конфігурація поверхні дна поблизу півзагати для такого випадку в деякий момент часу $t=10\text{ с}$ при $u_\infty=1\text{ м/с}$, $B=1\text{ м}$, $\alpha=0,3$, $d=1\text{ мм}$.

За результатами проведених числових експериментів побудо-

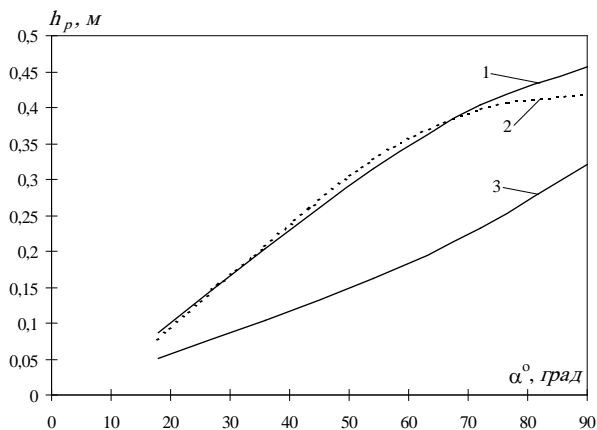


Рис. 4.24. Графіки залежності глибини вихви розмиву поблизу косорозміщеної півзагати ($B=1\text{м}$, $H=1\text{м}$, $u_\infty=1\text{м/с}$, $d=1\text{мм}$) від кута встановлення α при розрахунку за формулами: 1 – Маглакелідзе В.А.; 2 – дифузійна модель; 3 – Руруа Г.Б.

ваний графік залежності розрахункової глибини розмиву поблизу таких споруд від кута їх встановлення, який представлений на рис. 4.24 (2). Тут для порівняння також наведені аналогічні графіки, які отримані за формулами В.А. Маглакелідзе та Г.Б. Руруа.

4.4. Дослідження процесів деформації дна поблизу незатоплених вертикальних циліндричних перешкод (мостових опор).

Розглянемо процес деформації дна, що виникає при обтіканні поодинокі незатопленої циліндричної перешкоди (наприклад, мостової опори) водною течією. Як і у випадку обтікання незатопленої

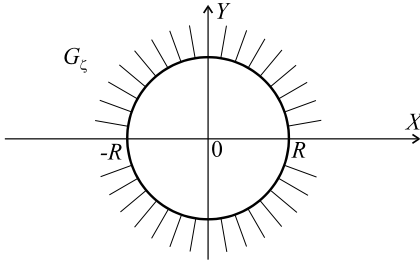


Рис. 4.25. Область G_ζ фіктивно ідеальної горизонтальної течії, що обтікає циліндричну мостову опору.

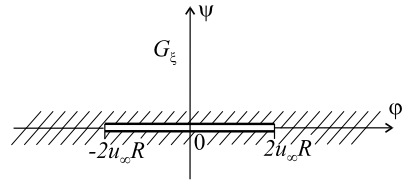


Рис. 4.26. Область G_ξ комплексного потенціалу.

півзагати (див. 4.2) вважатимемо, що розподіл компонентів швидкості течії на поверхні рідини близький до ідеального, а вертикальний розподіл задаватимемо, з врахуванням зміни положення дна ($z=l(x,y,t)$) у вигляді (4.70)–(4.72).

Аналогічно до попереднього, для відшукування значень горизонтальних компонент вектора швидкості фіктивно «ідеальної» течії на поверхні рідини u_0, v_0 скористаємось методом конформного відображення області $G_\zeta = \{\zeta = x + iy: -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\} \setminus \{(x,y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (рис. 4.25) на площину з розрізом $G_\xi = \{\xi = \varphi + i\psi: -\infty < \varphi < +\infty, -\infty < \psi < +\infty\} \setminus \{(\varphi, \psi): \psi = 0, -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R\}$ (рис. 4.26) при відповідності: $-R \rightarrow -2u_\infty R, R \rightarrow 2u_\infty R, \infty \rightarrow \infty$, яке записується у вигляді:

$$\zeta = u_\infty (\xi + R^2 / \xi). \quad (4.114)$$

Тоді, для визначення u_0, v_0 отримаємо такі залежності

$$u_0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = u_\infty \left(1 + \frac{R^2 (y^2(\varphi, \psi) - x^2(\varphi, \psi))}{(x^2(\varphi, \psi) + y^2(\varphi, \psi))^2} \right); \quad (4.115)$$

$$v_0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = -\frac{u_\infty R^2 x(\varphi, \psi) y(\varphi, \psi)}{(x^2(\varphi, \psi) + y^2(\varphi, \psi))^2}, \quad (4.116)$$

де R – радіус перешкоди, а функції $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ знаходяться за формулами

$$x(\varphi, \psi) = \frac{1}{2u_\infty} \left\{ \varphi + \frac{\sqrt{2}\psi\varphi}{\sqrt{\psi^2 - \varphi^2 + 4u_\infty^2 R^2} + \sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - 4u_\infty^2 R^2)^2 + 4\varphi^2\psi^2}} \right\}; \quad (4.117)$$

$$y(\varphi, \psi) = \frac{1}{2u_\infty} \left\{ \psi + \frac{\sqrt{\psi^2 - \varphi^2 + 4u_\infty^2 R^2} + \sqrt{(\varphi^2 - \psi^2 - 4u_\infty^2 R^2)^2 + 4\varphi^2\psi^2}}{2} \right\}. \quad (4.118)$$

Перейшовши від змінних x, y до φ, ψ (відповідно потенціалу та функції течії такого фіктивно ідеальної горизонтальної течії), процес конвективної дифузії частинок ґрунту у рідину розглядати- мемо в області $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < +\infty, 0 < z < l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\} \cup \{(\varphi, \psi, z, t): \psi = 0, -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R, 0 < z < l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\}$, обмеженій зверху горизонтальною площиною $z=0$ – поверхнею рідини, стінкою перешкоди $\{(\varphi, 0, z, t): -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R, 0 < z < l(\varphi, 0, t)\}$ та вільною поверхнею $L = \{(\varphi, \psi, t): z = l(\varphi, \psi, t)\}$, який опишуватимемо

рівнянням (4.77) з початковою умовою (4.79) та граничними умовами на поверхні дна і рідини (4.78), (4.80) [25]. Умову на стінці циліндричної перешкоди запишемо у вигляді:

$$\left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0, -2u_{\infty}R < \varphi < 2u_{\infty}R} = 0. \quad (4.119)$$

Шукаючи розв'язок такої модельної задачі аналогічно до того, як це зроблено для випадку обтікання незатопленої півзагати, для визначення нового положення границі L_{k+1} після кожного часового етапу отримаємо формулу (4.98).

Потрібно сказати, що у випадку обтікання циліндричної перешкоди (мостової опори) процес формування вирви розмиву відрізняється від такого поблизу півзагат. Як і при обтіканні півзагат, розмив починається біля поверхні циліндричної опори з бокових сторін, де найбільші значення осередненої швидкості течії. Проте поглиблення, що утворилися поступово рухаються і з'єднуються згодом перед перешкодою. Таке явище пояснюється тим, що набігаючий потік сповільнюється перед опорою, при цьому енергія його руху переходить в потенціальну, що спричиняє підвищення інтенсивності турбулентності в цій зоні. Тому, у випадку обтікання циліндричних мостових опор використання співвідношення (4.82) для фіктивного коефіцієнта дифузії при моделюванні і дослідженні процесу деформації русла на основі запропонованої вище моделі можливе лише в початковий момент часу. В наступні ж моменти часу необхідно враховувати зону сповільнення та підвищення шви-

дкості течії перед опорою. Тобто фіктивний коефіцієнт дифузії має залежати не тільки від швидкості течії, але і від її градієнту. З іншого боку, виходячи з фізичного змісту розглядуваного процесу, функція εD повинна приймати невід'ємні значення. Виходячи з вище сказаного для фіктивного коефіцієнта дифузії нами пропонується модельне співвідношення:

$$D = \chi \lambda^{\mu V + \beta \frac{\partial V}{\partial \varphi}}, \quad (4.120)$$

де χ , λ , μ , β – деякі числа (параметри).

Зауважимо також, що вибір параметрів χ , λ , μ , β для практичних розрахунків здійснюється аналогічно до того як це зроблено у випадку обтікання незатоплених півзагат шляхом порівняння результатів числових експериментів при різних значеннях цих параметрів з даними експериментальних та натурних досліджень, причому приймались до уваги не лише глибина вирви розмиву, але і її форма. У випадку, що розглядається нами отримані такі значення цих параметрів: $\lambda=2$; $\mu=0,75$; $\beta=1,5$. Для знаходження значень коефіцієнта χ отримана формула

$$\chi = 0,05 R^{3,4} d^{-0,13} e^{1,1 u_\infty}. \quad (4.121)$$

На рис. 4.27 схематично зображено конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної опори в момент часу $t=10$ с при таких вихідних даних: швидкість набігаючої течії – $u_\infty = 1,5$ м/с; радіус опори – $R=1$ м; ґрунт приймався однорідним з діаметром частинок

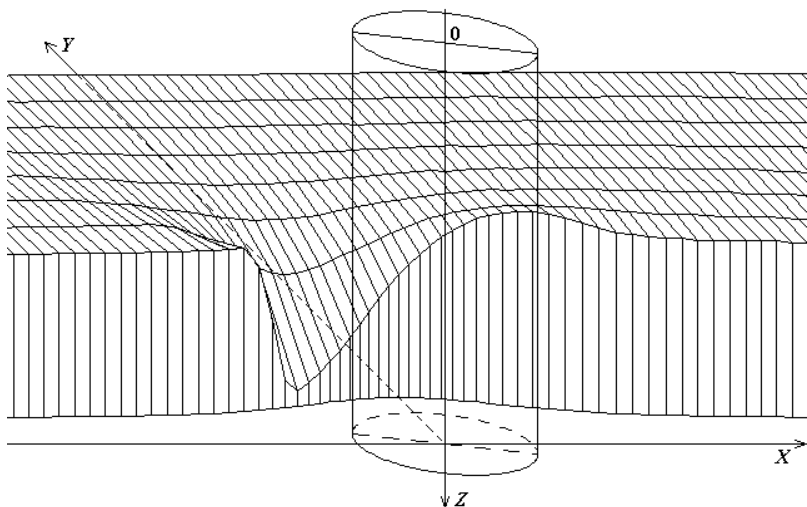


Рис. 4.27. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної перешкоди (мостової опори): $u_{\infty}=1,5\text{ м/с}$, $R=1\text{ м}$, $H=1\text{ м}$; ґрунт – однорідний, з діаметром частинок 2 мм .

2 мм . Аналіз розрахункової форми вирви розмиву вказує на відповідність отриманої конфігурації поверхні дна результатам натурних та експериментальних спостережень: максимальна глибина розмиву розміщена перед опорою, а за нею – зона активного відкладення наносів.

Розвиток процесу розмиву в часі для такого випадку представлений на рис. 4.28. Зауважимо, що при великих значеннях швидкості набігаючої течії з деякого моменту часу спостерігається різке зменшення розрахункової швидкості розмиву за рахунок збільшення концентрації наносів, які транспортуються водною течією.

На основі проведених числових експериментів за представле-

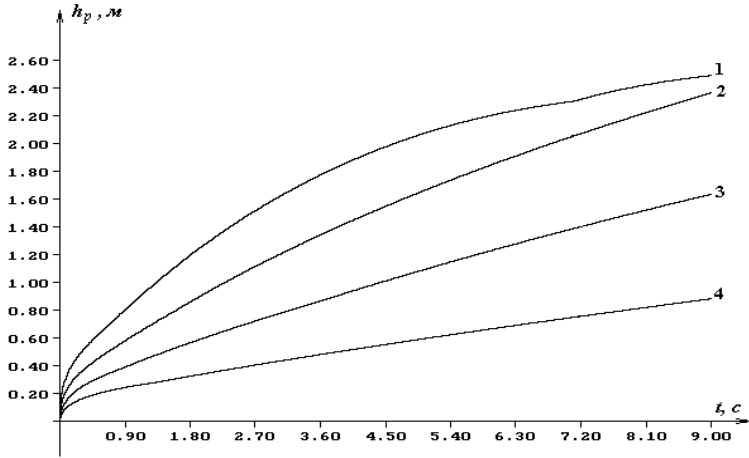


Рис. 4.28. Розвиток процесу розмиву поблизу незатопленої циліндричної перешкоди ($R=1\text{м}$, $H=1\text{м}$, $d=2\text{мм}$): 1 – $u_{\infty}=2,4\text{м/с}$; 2 – $u_{\infty}=1,8\text{м/с}$; 3 – $u_{\infty}=1,2\text{м/с}$; 4 – $u_{\infty}=0,6\text{м/с}$.

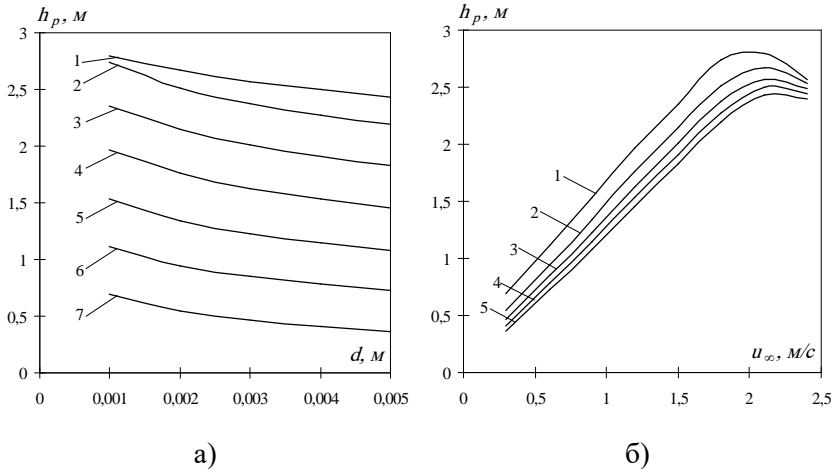


Рис. 4.29. Графіки залежності глибини вирви розмиву поблизу незатопленої циліндричної ($R=1\text{м}$, $H=1\text{м}$) від діаметра частинок (а): 1 – $u_{\infty}=2,1\text{м/с}$; 2 – $u_{\infty}=1,8\text{м/с}$; 3 – $u_{\infty}=1,5\text{м/с}$; 4 – $u_{\infty}=1,2\text{м/с}$; 5 – $u_{\infty}=0,9\text{м/с}$; 6 – $u_{\infty}=0,6\text{м/с}$; 7 – $u_{\infty}=0,3\text{м/с}$, та від швидкості набігаючої течії u_{∞} (б): 1 – $d=1\text{мм}$; 2 – $d=2\text{мм}$; 3 – $d=3\text{мм}$; 4 – $d=4\text{мм}$; 5 – $d=5\text{мм}$.

ною вище методикою побудовані графіки залежності прогнозованої глибини вирви розмиву від діаметрів частинок ґрунту та швидкості набігаючої течії, які представленні на рис. 4.29 (а,б) відповідно. Як вже зазначалось із збільшенням швидкості набігаючої течії при досягненні деякого його значення спостерігається зменшення глибини h_p за рахунок збільшення транспорту наносів. Явище замивання вирви розмиву при збільшенні швидкості набігаючої течії описується в роботах Н.А. Михайлової, В.А. Маглакелідзе, М.М. Журавльова.

ЛІТЕРАТУРА

1. Aronson D.G. Linear parabolic equations containing a small parameter // J.Rational Mech. Anal.- 1956.- №5.- P. 1003-1014.
2. Bobisud L.E. Parabolic Equations with a Small Parameter and discontinuous Data // Journal of mathematical analysis and applications.- 1969.- Volum 26, №1.- P. 208-220.
3. Burak J., Chapla E. Termomechanika przeplywow dyfuzyjnych w przypowierzchniowych warstwach betonu // Zeszyty naukowe politechniki opolskiej. Poland.- Ser. Budownictwo.- 1998.- 42, № 239.- S. 7-19.
4. Burak Y., Chaplia Y., Chernukha O. Mathematical models of admixture migration in ground.- Львів: 1997.- 32с. (Препр. / НАН України. Центр матем. моделювання ІППІММ; 1-97).
5. Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O. Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems / In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).-Gliwice: Polit. Slaska, 1995.-P. 343-351.
6. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon. - Paris, 1856.
7. Eckhaus W. Asymptotic analysis of singular perturbations. - Amsterdam: North-Holland.- 1979.- 286 p.
8. Eckhaus W., DeJager E.M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type // Arch. Rat. Mech. Anal.- 1966.- №23.- P. 26-86.
9. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type.- N.J.:

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

10. Friedrichs K. Asymptotic phenomena I mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995.- 61, №6.- P. 485-504.
11. Grafton R. B. Periodic Solutions of Certain Lienard Equations with Delay // J. Different. Equat. – 1972.–11.– p. 519-529.
12. Haber S., Mauri R. Boundary Conditions for Darcy's Flow Through Porous Media // J. Multiphase Flow.- 1983. - 9, №5. - P.561 - 574.
13. Halanay A., Yorke J.A. Some new results and problems in the theory of differential-delay equations // SIAM Review.–1971. V.13, №1.–P. 5-78.
14. Kaluzhnyi S., Veeken A., Hemelers B. // Wat. Sci. Technol. – 2000. – V. 41 (3). – P. 181.
15. Larry Bobisud (Communicated by A. Erdelvi) Second-Order Linear Parabolic Equations with a Small Parameter // Arch. Rat. Mech. Analysis.- 1968.- №27.- P. 385-397.
16. Levinson N. The first boundary problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // Ann. Of Math.-1950 - 51, №2 .-P.428-445.
17. Lions J.L. Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal. Springer- New York: Verlag Berlin-Heidelberg, 1973.
18. Prandtl L. Über fliissigkeits-bewegung bei Sehr kleiner beibung.- Verhandl. d. III. Jntrn. Math. Kongr. Heidelberg, 1907.
19. Schawab G.O., Fouss J.L. Tile Flow and Surface Runoff for Drain

- age Systems with Corn and Grass Cover // Winter Meeting ASAE.- 1966. - P. 666 - 703.
20. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical Grid Generation // Foundation and Applications. - New York: Elsevier, 1985. - 931 p.
 21. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.- М.: Гостехиздат, 1953.- 616 с.
 22. Барановський С.В. Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 1999.- Т. 4, число 2.- С. 36-40.
 23. Барановський С.В. Про розв'язання одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання розмивів біля оголовків півзагат // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 1999.- Т. 4, число 4.- С. 72-76.
 24. Барановський С.В., Бомба А.Я. Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями // Математичні методи і фізико-механічні поля. - Львів. - 1999. Т. 42, № 2. - С. 46-51.
 25. Барановський С.В., Бомба А.Я. Покрокова асимптотика розв'язку одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях з вільними поверхнями // Сучасні проблеми механіки і математики. - Львів: Вид-во ІППММ НАНУ. - 1998. - С. 157-159.
 26. Барановський С.В., Бомба А.Я. Про асимптотичне наближення

розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях із вільними межами та проблеми моделювання розмивів // Волинський математичний вісник. - 1998. - № 5. - С. 15-20.

27. Барановський С.В., Бомба А.Я., Щодро О.Є. Моделювання і дослідження одного класу сингулярно збурених дифузійних процесів в області із змінною границею // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. – 1996. – №2. – С. 27–32.
28. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // Прикладная математика и механика. - 1953. - Т. 17, №3. - С. 261-274.
29. Бахвалов Н.С. Об асимптотике при малых ε решения уравнения $u_t + (\varphi(u))_x = \varepsilon u_{xx}$ соответствующего волне разрежения // Журн. вычисл. математики и матем. физики.- 1966.- 6, №3.- С. 521-526.
30. Бер Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды.- М.: Мир, 1971.- 452 с.
31. Берман В.С. Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции // Докл. АН СССР.- 1978.- Т.242, №2.- С.265-267.
32. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М.: Физматгиз, 1958.- 408 с.
33. Бомба А.Я. Асимптотический метод решения одного класса сингулярно возмущенных пространственных задач конвектив-

- ной диффузии при фильтрации со свободной поверхностью // В кн.: Теория гидродинамических моделей.- Свердловск, 1988. - С. 76-79.
34. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
35. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
36. Бомба А.Я. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
37. Бомба А.Я., Барановський С.В. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях із вільними межами та проблеми моделювання розмивів // Волинський математичний вісник. - 1998. – Вип. 5. - С. 15-20.
38. Бомба А.Я., Барановський С.В. Про моделювання і дослідження одного класу сингулярно збурених процесів теплопереносу в областях із вільними ділянками їх границь // Крайові задачі термомеханіки. – Київ. – 1996. – Част. 1. – С. 68-73.
39. Бомба А.Я., Барановський С.В., Щодро О.Є. Моделювання і дослідження одного класу сингулярно збурених дифузійних процесів в області із змінною границею // Фізика конденсова-

них високомолекулярних систем. - 1996. - №2. - С. 27-32.

40. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки.- Київ: Наукова думка, 2007. - 264с.
41. Бомба А.Я., Каштан С.С., Скопецкий В.В. Нелинейные обратные краевые задачи на конформные отображения с управляющим потенциалом // Кибернетика и системный анализ.- 2004.- №1. - С.71-79.
42. Бомба А.Я., Климяк Ю.Є., Скопецкий В.В. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” // Доп. НАН України.- 2007.- № 8.- С. 37 -44.
43. Бомба А.Я., Пригорницький Д.А., Присяжнюк И.М. Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №1. - С. 152-159.
44. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. Крайові задачі на конформні відображення для трив'язних областей з потенціалом керування // Доповіді НАН України.– 2004. – №4. – С. 57-63.
45. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецкий В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією // Доповіді НАН України.- 2004. - №3. - С. 62-68.
46. Бомба А.Я., Присяжнюк И.М., Климяк Ю.Е. Численно-асимптотическое приближение решений одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последствием// Компьютерная математика. - 2005. - №3. - С. 3-12.

47. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної гетеродифузії // Математичні методи та фізико-механічні поля.-2005.-48, №3.-С. 54-61.
48. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005. – №3 – С. 60-66.
49. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Задачі типу “фільтрація-конвекція” у трьохзв'язних областях з умовами усереднення // Математичні методи та фізико-механічні поля.-2005.-48, №2.- С. 53-58.
50. Бондарев Э.Н., Николаевский В.Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явлений адсорбции // ПМТФ.- 1962.- №5.- С. 127-134.
51. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопечкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу.- Київ: Наукова думка, 2005. - 282с.
52. Бурак.Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Про вертикальну міграцію радіонуклідів у ґрунті // Доп. НАН України.- 1995.- №11.- С. 34-37.
53. Бутузов В. Ф. Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб.: «Итоги науки».- М.: Матем. анализ.- 1967.- С.5-73.
54. Бутузов В.Ф. Асимптотические решения в сингулярно возму-

щенных задачах типа “реакция-диффузия-перенос” // В кн.: Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. - Рига: Intelstrv, 1990.- С. 18-26.

55. Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.-1975.- 11, №6.- С.1030-1041.
56. Бутузов В.Ф. Угловой погранслои в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. уравнения.- 1975.- 15, №10.- С.1848-1862.
57. Бутузов В.Ф., Мамонов В.М. Процедура згладжування в одній сингулярно збуреній квазілінійній параболічній задачі // Ж. вычислительной матем. и матем. физ.- 1987.- т.27, №3.- С. 391-399.
58. Бутузов В.Ф., Нестеров А.В. Об одной сингулярно возмущенной задаче параболического типа // В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1981. - С. 73-74.
59. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Мир, 1968.- 464 с.
60. Ван-даик Милтон Методы возмущений в механике жидкости.- М.: Мир, 1967.- 310 с.
61. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.- 208с.
62. Веригин Н.Н., Шержуков Б.С. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах // Развитие исследо-

- ваний по теории фильтрации в СССР (1917-1967). - М.: Наука, 1967. - С. 237-313.
63. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук.- 1957.- 12, Вып. 5. - С. 3-122.
 64. Джеймс А. Математические методы контроля загрязнения воды.- М.: Мир, 1981.- 471 с.
 65. Эльсгольц Л.С., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М: Наука, 1971. – 296 с.
 66. Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического вида с малым параметром при производной// ДАН СССР.- Т.117, №6.- 1957.- С. 935-938.
 67. Исакова Е.К. Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром // Матем. сборник.- 1966.- Т.69(111).- С. 300-320.
 68. Кабацій М.М., Маркуш І.І. Асимптотика розв'язку мішаної задачі для рівнянь четвертого порядку з малим параметром, що вироджуються в параболическі рівняння другого порядку // Праці Четвертої наукової конференції молодих математиків України.–Київ.-1968. С. 160-163.
 69. Каменомостская С.Л. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных // Матем. сб.- 1952.- Т.31(73).- С. 703-708.

70. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.- Москва-Ленинград: Физматгиз, 1962.- 708с.
71. Копсон Э.Т. Асимптотические разложения. - М.: Мир, 1966.- 159 с.
72. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, 1972.-274 с.
73. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы.- М.: Наука, Т1, 1976.- 584с.; Т2, 1977.- 611с.
74. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1973.- 736 с.
75. Лаврик В.И., Бездетный Б.П. Применение метода суммарных представлений к задачам конвективной диффузии // ДАН УССР. Сер. А.- 1976.- №5.- С. 420-423.
76. Лаврик В.И., Бомба А.Я. О приближенном решении одной краевой задачи диффузии при плановой напорной фильтрации // Математические методы исследования физических полей.- К.: Изд. ин-та математики АН УССР, 1980.- С. 26-36.
77. Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85-72.- Киев: 1985.- 16 с.
78. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука, 1981.-398 с.
79. Люстерник Л.А., Олейник О.А. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр // Труды 3 матем. съезда.- Т.2.-М.: Изд-во АН СССР, 1963.-

- С.158-169.
80. Ляшко І.І., Демченко Л.І., Мистецький Г.Ю. Вологоперенос у насичено-ненасичених пористих середовищах // Доповіді АН УРСР. Сер. А.- 1979.-№8.- С. 600-603.
 81. Маркуш І.І. Розвиток асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь. – Ужгород: Закарпатська обласна друкарня, 1975.- 224 с.
 82. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.: Наука, 1980.- 534с.
 83. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.- М.: Изд-во МГУ, 1965.- 549 с.
 84. Мельников В.Л. Асимптотичне розкладання розв'язку другої крайової задачі для рівняння параболічного типу// Доповіді АН УРСР. Сер. А.- 1973.-№5.- С. 413-477.
 85. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.- М.: Наука, 1969.- 379 с.
 86. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.- Новосибирск: Наука, 1977.- 422с.
 87. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984.- 535 с.
 88. Николаевский В.Н. Конвективная диффузия в пористых средах // Прикладная математика и механика.- 1959.- Т.23, №6.- С.1042-1050.
 89. Олейник О.А. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем

- введения “исчезающей вязкости” // УМН.- 1959.- Т.14, вып. 2.- С. 159-164.
90. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.- М.: Наука, 1977.- 664 с.
91. Присяжнюк І.М. Чисельно-асимптотичне наближення розв’язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом // Волинський математичний вісник. - 2004. - Вип. 11. - С. 150-160.
92. Присяжнюк І.М. Асимптотичний метод розв’язування сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” у многозв’язних областях// Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2003. - Вип. 1. - С. 118–128.
93. Радьгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов. - М.: Высш. школа, 1983.- 160 с.
94. Рауз Х. Механика жидкости. - М.: Стройиздат, 1967.
95. Скопецкий В.В., Бомба А.Я., Присяжнюк И.М. Сингулярно возмущенные задачи типа “конвекция-диффузия” в многозв’язных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №2. - С. 99-104.
96. Сушко В.Г. О некоторых сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с вырождением // Докл. АН СССР.- 1989.- 304, №4.- С. 777-780.
97. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных // УМН.- 1952.- Т.7, вып. 1(47).- С. 140-142.

98. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // УМН.- 1970.- Т.25, вып. 4.- С.123-156.
99. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д., Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.-К.: Наукова думка, 1966.- 251 с.
100. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод.- М.: Недра, 1981.- 304 с.
101. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Про врахування нелінійного зв'язку між хімічними потенціалами і концентраціями в задачах гетеродифузії // Волинський математичий вісник.- Рівне.- 2001.- Випуск 8.- С. 98- 104.
102. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу.- Львів: СПОЛОМ, 2003. - 128с.
103. Чернуха О.Ю. Про одну нелінійну задачу дифузії з логарифмічною залежністю хімічного потенціалу від концентрації для шару // Доповіді Національної академії наук України.- 2000.- №8.- С. 37-42.
104. Шержуков Б.С. Диффузия и неравномерный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ проток.- Труды ин-та ВОДГЕО.- М.- 1975.- Вып. 54.- С. 25-39.
105. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 212 с.
106. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. –К.: Вища школа, 1971.-324 с.

Наукове видання

**Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет**

**Андрій Ярославович Бомба
Сергій Віталійович Барановський
Ігор Михайлович Присяжнюк**

НЕЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”

Монографія

Підписано до друку2008р.
Папір оцет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 9. Тираж 100. Зам. №

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12