РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

БОМБА А.Я., БАРАНОВСЬКА І.А., ПЕКАРСЬКА Л.В.

Математична зарядка

(олімпіадні задачі для школярів)

Рівне – 2012

Бомба А.Я., Барановська І.А., Пекарська Л.В.(укладачі). Математична зарядка (олімпіадні задачі для школярів). – Рівне: РДГУ – РОІППО, 2012. – 123с.

У посібнику представлено умови та розв'язки задач різних етапів математичних олімпіад. Проведено їх умовний розподіл за рівнем складності для учнів 7– 11 класів. Причому класифікацію здійснено так, що кожен учень може розв'язувати задачі не лише "свого класу", але й спробувати свої сили в задачах "наступного рівня". Крім того при підборі умов та формуванні розв'язків задач переслідувалась мета можливого їх узагальнення та подальшого використання при розробці тематики учнівських досліджень (зокрема в рамках МАН).

Призначений для підготовки школярів до участі в математичних конкурсах та олімпіадах, а також для всіх, хто цікавиться математикою.

Рецензенти: ***Б.П. Петрівський*** – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики РДГУ;

Н.Б. Харченко **–** кандидат педагогічних наук, доцент кафедри методики і змісту природничо-математичних дисциплін та інформаційних технологій РОІППО.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, протокол № __ від "__" ___________ 2012р.

ЗМІСТ

І. ЗАДАЧІ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (2010 Р.)

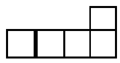
1.1. 7 клас (умови)

1. У виразі $12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1$ певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільшезначення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

Зауваження. Дужку виду “(” можна ставити лише перед числом, а дужку виду “)” лише після числа, наприклад, вирази $-4(-3-2)$ та $-(4-3-)2$ вважаються забороненими.

2. Знайдіть найменше натуральне число $n>100$ таке, що серед чисел $n-100$, $n-99$, …, $n-1$, n, $n+1$,..., $n+100$ (усього 201 число) найбільшу суму цифр має число n. Відповідь обґрунтуйте.

3. Кожна з дівчинок Оксана, Олеся, Оля та Олександра одержала прямокутник розміром 2010×10. Їм запропонували прямолінійним розрізом розрізати цей прямокутник на дві частини таким чином, щоб з цих частин, не накладаючи їх одна на другу, можна було скласти трикутник. Усі вони впоралися із завданням. Чи могли вони отримати чотири попарно різні трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

4. (Рубльов Богдан) Яку найбільшу кількість фігурок виду  можна розташувати у квадраті розміром 8×8 клітинок так, щоб вони не накладались одна на іншу? Відповідь обґрунтуйте.

5. Кожна школа делегувала рівно трьох учнів на районну олімпіаду. Андрій, Богдан та Олеся представляли ліцей ”Кубик”. Усіх учасників перед початком олімпіади вишукували в одну лінію і роздали послідовно зліва направо номери учасників. Андрій побачив, що перед ним стільки ж учасників, скільки й після нього. Виявилось, що обидва інших учасники з ”Кубика” стоять за ним і мають номери: у Богдана – 19-й, а у Олесі – 28-й. Скільки шкіл у цьому районі? Відповідь обґрунтуйте.

6. Розріжте квадрат на декілька трикутників таким чином, щоб кожний

трикутник мав рівно три інших сусідніх трикутники. Два трикутники називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону або спільний відрізок, який є частиною сторони. Якщо спільною є лише одна точка, то такі трикутники не вважаються сусідніми.

7. Доведіть, що існує як завгодно багато натуральних чисел, у яких сума цифр самого числа дорівнює сумі цифр квадрату цього числа.

8. У кожній з 2010 клітин, розставлених вздовж кола, записане деяке натуральне число. На деяку з клітин ставиться фішка. Далі ця фішка рухається за годинниковою стрілкою за таким правилом. Вона пересувається на кількість клітин, яка дорівнює числу, що записане у вихідній клітині, після чого на 1 збільшується число у клітині, куди ця фішка прибула. Далі вона знову рухається за тим самим правилом. Доведіть, що через деякий час фішка побуває в усіх клітинах хоча б по одному разу. Відповідь обґрунтуйте.

1.2. 7 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. При будь-якій розстановці дужок у підсумковому результаті число 12 завжди буде із знаком +, а число 11 – із знаком −. Таким чином сума буде найбільшою, якщо усі інші числа будуть із знаком +, а для цього достатньо дужки розставити, як це показано у відповіді. Остаточне найбільше значення знаходимо простими підрахунками.

Відповідь: $12-(11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1)=46$.

2. Розглянемо довільне число. Якщо його дві останні цифри замінити на 99, то сума цифр стане більшою. Тому шукане число закінчується на 99. Числа 99,199,...,899 умову не задовольняють, оскільки у цьому переліку кожне наступне число має суму цифр більшу від попереднього. А от число 999 шукане, оскільки його сума цифр дорівнює 27 і більша від будь-якого трицифрового, а серед наступних за ним 100 чотирицифрових чисел від 1000 до 1099, найбільшу суму цифр має число 1099, але ця сума цифр менша від суми цифр числа 999.

*Відповідь:*999.

3. *Відповідь:* Так, могли, відповідні приклади показані на рис.1.1

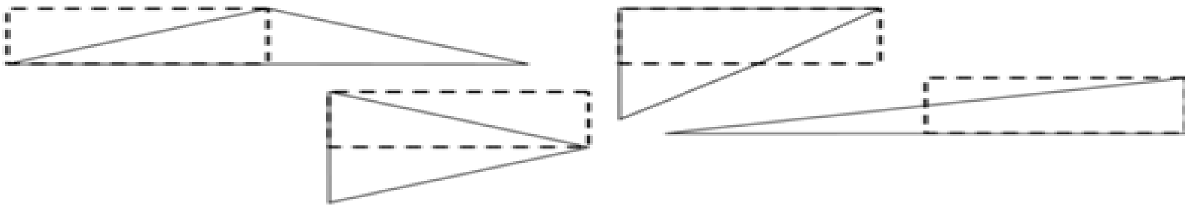


Рис.1.1

4. Достатньо розглянути розташування 12 таких фігурок, як це показано на рис.2. Більше їх розташувати неможливо, оскільки 13 таких фігур складаються з 13·5=65 малих квадратиків, а великий квадрат містить їх лише 8·8=64.

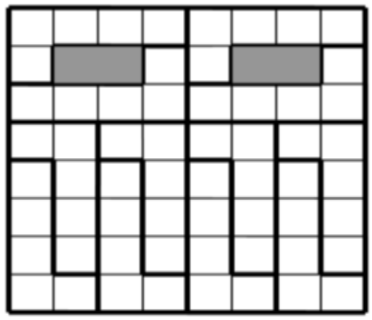


Рис.1.2

*Відповідь:*12 фігурок.

5. Нехай перед Андрійком стоїть х учасників, тоді після нього стільки ж, тобто загалом учасників $2x+1$. Оскільки Богдан стоїть за Андрієм, то перед ним є принаймні 18 учасників, тобто $x \le 17$, таким чином максимум є 35 учасників. Але їх так само не менше ніж 28, а внаслідок їх непарної кількості – не менше 29. Але, оскільки з кожної школи було рівно по 3 учасники, то їх кількість кратна 3. Між числами 28 та 35 є єдине непарне число, яке кратне 3 – це число 33. Таким чином усього було 33 учасники, тому шкіл у районі – 11.

*Відповідь:*11.

6. *Відповідь:* Таких розбиттів багато, на рис.1.3 зображений один з можливих варіантів.

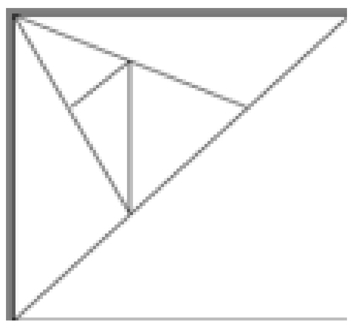


Рис.1.3.

7. Розглянемо для довільного натурального n число $10^n-1=99\ .\ .\ .\ 9$. Очевидно, що його сума цифр $S=9n$. Обчислимо квадрат цього числа:

$$(10^n-1)^2=10^2n-2\cdot 10^n+1=100...0-200...0+1=99...9800\ldots 01.$$

Сума цифр цього числа так само дорівнює $9(n-1)+8+1=9n=S$, що й треба було довести.

8. Якщо фішка рухається достатньо довго, то настане момент, коли вона побуває у деякий клітині A принаймні 2010 разів. Нехай з самого початку там було написане деяке число n, тоді вона своїм першим ходом потрапляє у клітину B_1, що відстоїть по колу від клітині A на n позицій. Після другого попадання у клітину A там стане записаним число $n+1$, тому вона наступним ходом потрапить у клітину B_2, що відстоїть від клітині A на $n+1$ позицію, тобто у клітину, наступну за клітиною B_1. Після наступного попадання у клітину A там стане записаним число $n+2$ і фішка попаде у клітину B_2, наступну за клітиною B_1. І так далі, фішка буде послідовно попадати в усі клітини, починаючи з B_1. Таким чином після 2010 стрибків фішка послідовно потрапить в усі клітини, що й треба було довести.

1.3. 8 клас (умови)

1. У виразі

$$\underbrace{2010-2009-2010-2009-2010-2009-\ldots-2010-2009}_{2010\,чисел}$$

певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

Зауваження. Дужку виду “(” можна ставити лише перед числом, а дужку виду “)” лише після числа, наприклад, вирази $-2010(-2009-2010)$ та $-(2010-2009-)2010$ вважаються забороненими.

2. Олеся та Андрій кидають по одному разу стандартний гральний кубик. Знайдіть імовірність того, що кількість очок у Олесі більша від кількості очок, що випали у Андрія. Відповідь бґрунтуйте.

3. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, \ldots, n^2$ можна вибрати 4 попарно різних числа $a, b, c, d,$ для яких виконується рівність $ab=cd$. Відповідь обґрунтуйте.

4. Кожен з хлопців – Віталій, Михайло та Олександр отримали від мами по n гривень. Віталій на усю суму повинен був купити книжки, Михайло –

зошити, а Олександр – ручки. На решту, що залишилась у них, мама дозволила купити морозиво. Мамі вони сказали, що Віталікові цих грошей вистачило лише на купівлю 1 книги, Михайлові – на купівлю двох зошитів, Олександрові – на купівлю п’яти ручок, і морозива хлопці купили на n гривень. Доведіть, що принаймні один з хлопців неправильно виконав доручення мами.

5. У гострокутному трикутнику ABC точки M і N середини сторін AB і AC відповідно. Для довільної точки S, що лежить на стороні BC, доведіть, що виконується умова:

$$(MB-MS)(NC-NS)\leq 0.$$

6. Чи існують такі попарно різні натуральні числа $a_1,a_2,...,a_k$, більші від 1, для яких виконується рівність

$$a_1+a_2+...+a_k=2010\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)$$

а) якщо k=2;

б) якщо k=12.

7. Олеся може писати на дошці натуральні числа за двома правилами. Для кожного натурального n, яке вже написане на дошці, вона може написати число $3n$+13. Якщо ж записане число є повним квадратом, то вона може також записати корінь з цього числа. Використовуючи лише ці два правила, чи може Олеся одержати:

а) число 55, якщо вона починала з числа 256;

б) число 256, якщо вона починала з числа 55?

1.4. 8 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. При будь-якій розстановці дужок у підсумковому результаті перше число 2010 завжди буде із знаком +, а перше число 2009 – із знаком −. Таким чином сума буде найбільшою, якщо усі інші числа будуть із знаком +, а для цього достатньо розставити дужки, як це показано у відповіді. Найбільше значення знаходимо такими підрахунками:

$$\underbrace{2010-(2009-2010-2009-2010-2009-...-2010-2009)}_{2010\,чисел}=$$

$$2010-2009+\underbrace{2010+2009+2010+2009+...+2010+2009}_{2008\,чисел}=$$

$$=1+(2010+2009)\cdot 1004=4035077$$

Відповідь:

$$\underbrace{2010-(2009-2010-2009-2010-2009-...-2010-2009)}_{2010\,чисел}=4035077$$

2. Усього можливих варіантів $6^2=36$, підрахуємо кількість варіантів, при яких Олеся може набрати більше очок.

Якщо у Олесі випадає 1, то така ситуація неможлива.

Якщо 2, то можливий лише варіант 1.

Якщо 3, то можливі варіанти 1 та 2.

Якщо 4, то можливі варіанти 1, 2 та 3.

Якщо 5, то можливі варіанти 1, 2, 3 та 4.

Якщо 6, то можливі варіанти 1, 2, 3, 4 та 5.

Загалом – 15 варіантів. Таким чином шукана імовірність є: $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

Відповідь: $\frac{5}{12}$.

3. Якщо серед заданих чисел є така четвірка різних чисел n, $2n$, $3n$, $6n$, то числа вибрати можна, оскільки $n \cdot 6n=2n \cdot 3n$. Такі числа належать множині $\{n, n+1, n+2,...,n^2\}$ за умови $n^2 \geq 6n$, або $n \geq 6$, таким чином залишилось розглянути випадки $n< 6$.

Для $n=5$ маємо числа 5, 6, 7,..., 25 і з добутку $2\cdot3\cdot4\cdot5$ знаходимо шукані числа – це пари чисел $2\cdot3=6$ і $4\cdot5=20$ та інша пара $2\cdot4=8$ і $3\cdot5=15$, добутки яких задовольняють потрібні умови.

Так само при $n=4$ маємо числа 4, 5, 6,..., 16, шукані дві пари – це 4 та 15, а також 6 та 10.

При $n=3$ серед чисел 3, 4, 5,…, 9 знаходимо шукані дві пари – це 4 та 6, а також 3 та 8.

При $n=1$, 2 чисел просто не вистачає, щоб утворити потрібні дві пари.

Відповідь: при усіх $n \geq 3$.

4. Позначимо вартість однієї книги, зошита та ручки відповідно через q_1, q_2 та q_3, а одержані решти – r_1, r_2, r_3. Тоді умови задачі можна записати таким чином:

$$n=q_1+r_1, n=2q_2+r_2, n=5q_3+r_3,$$

при цьому повинні виконуватись умови $r_1< q_1$, $r_2< q_2$, $r_3< q_3$, бо інакше були б куплені додатково або книга, або зошит, або ручка. З останніх нерівностей випливає, що $n = q_1+ r_1>2r_1$, $n = 2q_2+ r_2>3r_2$, $n= 5q_3+ r_3>6r_3 \Rightarrow r_1<\frac{1}{2}n$, $r_2<\frac{1}{3}n$, $r_3<\frac{1}{6}n$. Якщо додати записані рівності, то одержимо, що

$$n = r_1 + r_2 + r_3 < \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} = n.$$

Одержана суперечність доводить, що при купівлі була помилка.

5. Проведемо висоту AD, тоді з властивостей прямокутних трикутників $MB=MD$, $NC=ND$ (рис.1.4). Якщо $S=B$, або $S=C$, або $S=D$, то $MB=MS$ або $NC=NS$, звідки заданий вираз в лівій частині умові дорівнює нулеві і твердження доведене.

Нехай тепер S не співпадає із жодною з точок B, C, D, тоді без обмеження загальності розгляду, припустимо, що S належить відрізку BD. Тоді $MB=MD>MS$ та $NS>ND=NC$, звідки й маємо, що $(MB-MS)(NC-NS)<0$, що й треба було довести.

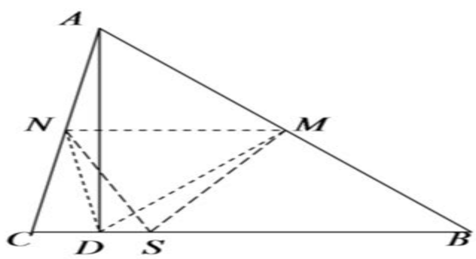


Рис.1.4

6. В основі знаходження таких чисел добре відоме співвідношення: якщо d – деякий дільник числа n, що $1<d<n$, то число $d' = n/d$ так само є дільником числа n, що задовольняє умови $1<d'<n$. При цьому, якщо n неповний квадрат, то $d \neq d'$.

а) Таким чином двома числами, що задовольняють умову можуть бути будь-яка пара дільників числа 2010. Умову достатньо переписати у вигляді

$$a_1+a_2=2010/a_1+2010/a_2.$$

б) Так само треба просто виписати попарно різні дільники числа 2010, звідки й одержимо шукану відповідь, Для кожної відповідної пари дільників виконується формула, що наведена у попередньому пункті, звідки й випливає наведена відповідь.

Відповідь:

а) будь яка пара дільників числа 2010, добуток яких дорівнює 2010, наприклад a_1=2, a_2=1005;

б) 2, 3, 5, 6, 10, 15, 134, 201, 339, 402, 670, 1005.

7. а) Достатньо вказати ланцюг, за яким проводиться одержання відповідного числа.

$$256 \to 16 \to 61 \to 196 \to 14 \to 55.$$

б) Розглянемо конгруенції за модулем 4. Повний квадрат повинен дорівнювати 0 або 1 за модулем 4. Але за першим правилом ми можемо одержати з числа вигляду ≡3(mod4) число вигляду ≡2(mod4), та навпаки, з числа ≡2(mod 4) можна одержати лише числа≡3(mod4). Зрозуміло, що, починаючи з числа 55≡3(mod4), ми не одержимо жодного разу повного квадрату, тому усі числа можна одержувати лише за першим правилом, алеза ним не можна одержати бажане 256, оскільки воно кратне 4.

*Відповідь:*а) можна; б) не можна.

1.5. 9 клас (умови)

1. Побудуйте графік рівняння: $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{|y|}{y}=2y$.

2. Прямокутник розміром 2010 × 11розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітин товщиною у 1 клітину цього прямокутника пофарбовано у жовтий колір, шар клітин товщиною у 1 клітину, що межує із зовнішнім шаром, пофарбовано у блакитний колір. Наступний шар клітин, що межує з блакитним пофарбовано у жовтий колір і так далі. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітин у цьому прямокутнику.

3. При яких x значення функції $y=(\sqrt{x})^{2009}+(\sqrt{1-x})^{2010}$ є цілим числом?

4. У гострокутному трикутнику *ABC* точка *O*– центр описаного кола, *CH*–

висота трикутника, точка T– основа перпендикуляра, що опущений з вершини C на пряму AO. Доведіть, що пряма TH проходить через середину сторони BC.

5. Натуральні числа a, b, c, d такі, що $ab^2+ ad^2+ cb^2=ba^2+ bd^2+ ca^2$ та число $a^2+ b^2+ c^2+d^2$– просте. Доведіть, що $a=b$.

6. У гострокутному трикутнику ABC точка O є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (центр описаного кола), D– точка перетину прямих AO та BC . Виявилось, що $OD=BD=1/3BC$. Знайти кути трикутника.

7. Число $n>2010$ задовольняє умову:для будь-якого $k \in \{1, 2, . . . , n-2010\}$ числа $n+k$ та $2010+k$ є взаємно простими. Знайдіть усі такі числа n.

8. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел.Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся – суму. Чи могло так трапитись, що у Андрійка та Олесі співпали

а) три останніх цифри результату,

б) чотири останніх цифри результату?

1.6. 9 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Зрозуміло, що $x\neq 0$ та $y\neq 0$, далі розглянемо 3 випадки.

1й випадок. $x>0$, $y> 0$, тоді маємо умову $2y=2$, звідки знаходимо перший промінь з відповіді.

2й випадок аналогічний першому при $x<0$, $y<0$, тоді маємо інший промінь з відповіді.

3й випадок. $xy<0$, тоді маємо рівність $2y=0$, яка не має розв’язків, що задовольняють умові.

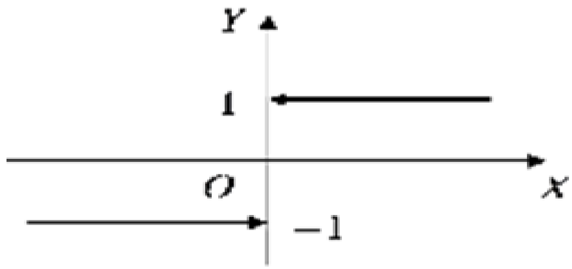


Рис.1.5

*Відповідь:*відкриті промені $y=-1$ при $x<0$ та $y=1$ при $x> 0$ (рис.1.5).

2. Виділимо зовнішні шари кожного кольору послідовно: 2010 × 11 – жовтий; 2008 × 9 – блакитний; 2006 ×7 – жовтий; 2004 × 5 – блакитний; 2002 × 3 – жовтий; 2000 × 1 – блакитний.

Далі просто через різницю відповідних площ зовнішніх прямокутників та внутрішніх обчислимо відповідні значення. Почнемо знизу:

Блакитних: 2000·1=2000.

Блакитних: 2004·5−2002·3=4014.

Блакитних: 2008·9−2006·7=4030.

Жовтих: 2002·3−2000 1=4006.

Жовтих: 2006 7−2004 5=4022.

Жовтих: 2010 11 −2008 9=4038.

Відповідь: жовтих 12066, блакитних 10044.

3. Зрозуміло, що ОДЗ нашого виразу $x\in [0, 1]$, тому кожний з доданків невід'ємний та не перевищує 1. Це означає, що при піднесенні до степеня він не збільшується.

Тому $(\sqrt{x})^{2009}+(\sqrt{1-x})^{2010}\le x+(1-x)=1,$ тобто цей виразможе приймати цілі значеннялише 0 та 1. Те, що нуль не приймається – очевидно, оскільки кожний з доданків невід'ємний та одночасно доданки не обертаються в нуль. Значення 1 може досягатись за одночасного виконання двох умов: $(\sqrt{x})^{2009}=x$ та $(\sqrt{1-x})^{2010}=(1-x),$ тому можливі значення x=0 та x=1. Перевіркою переконуємось, що вони обидва задовольняють умову і є шуканими розв'язками задачі.

Відповідь: при x=0 та x=1.

4. Позначимо через P перетин прямих TH та BC (рис.1.6). Треба показати, що P середина сторони BC. Оскільки $\angle AHC=\angle ATC=90^\circ$, то чотирикутник $ACTH$ – вписаний, тому $\angle PHC=\angle TAC=\angle OAC$=1/2 ($180^\circ-\angle AOC$)=$90^\circ-\angle ABC=\angle BCH=\angle PCH\Rightarrow\Delta PCH$–рівнобедрений з вершиною P . Оскільки ΔCHB – прямокутний, то P лежить на серединному перпендикулярі до відрізку CH , тому P середина сторони BC.

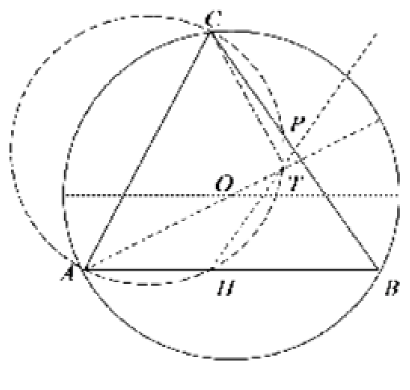


Рис.1.6

5. Припустимо, що $a\neq b$. Умову $ab^2+ad^2+cb^2=ba^2+bd^2+ca^2$ можна переписати в вигляді: $(a-b)(d^2-ab-ac-bc)=0$. Тому в припущенні $a\neq b$ одержимо: $d^2=ab+ac+bc$.

Тоді: $a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=(a+b+c)^2-d^2=(a+b+c+d)(a+b+$ $+c-d)$.Оскільки $(a+b+c+d)(a+b+c-d)$ – просте, та a, b, c, d – натуральні, то $a+b+c-d=$. Тобто $ab+ac+bc=d^2=(a+b+c-1)$. Розкриваючи дужки у рівності $(a+b+c-1)^2=ab+ac+bc$, одержимо: $a^2+b^2+c^2+1+2ab+2ac+2bc-2a-2b-2c=ab+$ $ac + bc$, або $a(a+b-2)+b(b+c-2)+c(c+a-2)+1=0$. Але ця рівність не може виконуватись, оскільки кожний доданок у лівій частині невід'ємний і уся сума не менше 1. Тому $a=b$.

6. *Відповідь:* Кути трикутника $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$.

7. Позначимо число$m=n-2010$, тодi маємо для кожного k$\in\{1, 2, ..., m\}$ таку рівність $(2010+k, n+k)=(2010+k, n+k-2010-k)=(2010+k, m)= 1$. Тобто, m послідовних чисел 2011, 2012, . . . , 2010 + k є взаємно простими з числом m, але серед m послідовних чисел завжди принаймні одне ділиться на m, що суперечить наведений вище умові, окрім випадку m=1. Таким чином шукане число n=2010+m=2011.

Відповідь: 2011.

8. а) Нехай на дошці записані числа a, a+1, a+2, . . . , a+15. У Олесі вийде число 16a+8·15=8(2a+15). Покажемо, що у Андрійка вийде число, що закінчується трьома нулями. Дійсно, серед 16 послідовних натуральних чисел обов'язково знайдуться 3,що діляться на 5, та 3, що діляться на 2. А тому добуток цих чисел ділиться на $2^3 \cdot 5^3$= 1000.Число, що вийшло у Олесі, теж буде закінчуватись трьома нулями, якщо 2a+ 5.125.

Наприклад, якщо a=55, то сума чисел у Олесі також закінчується трьома нулями.

б) Аналогічно до розв'язку пункту а), помітимо, що у Андрійка вийде число, що ділитьсяна 16. А значить і число, утворене чотирма останніми цифрами результату, ділиться на16. У той же час число, яке отримала Олеся, на 16 не ділиться, так само, як і число,утворене чотирма останніми цифрами результату.

*Відповідь:*а) так, могло; б) ні, не могло.

1.7. 10 клас (умови)

1. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахувавдобуток записаних чисел, а Олеся – суму. Чи могло так трапитись, що уАндрійка та Олесі співпали

а) три останніх цифри результату,

б) чотири останніх цифри результату?

2. У змаганні приймає участь 2010 програмістів. У кожному раунді усі програмісти поділяються на 2 команди, з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах?

3. На площині задані точки $A \neq B$. Точка С рухається по площині таким чином,що $\angle ACB=\alpha$, де α– фіксований кут з проміжку$(0^\circ, 180^\circ)$. Вписане у трикутник ABC коло має центр у точці I та дотикається сторін AB, BC, CA у точках D, E, F відповідно. Прямі AI та BI перетинають пряму EF у точках M та N відповідно. Покажіть, що:

а) відрізок MN має постійну довжину;

б) усі кола, описані навколо трикутників DMN , мають спільну точку.

1.8. 10 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. а) Нехай на дошці записані числа a, a+1, a+2, . . . , a+15. У Олесі вийдечисло 16a+8 15=8(2a+15). Покажемо, що у Андрійка вийде число, що закінчується трьома нулями. Дійсно, серед 16 послідовних натуральних чисел обов'язково знайдуться 3,що діляться на 5, та 3, що діляться на 2. А тому добуток цих чисел ділиться на $2^3 \cdot 5^3$=1000. Число, що вийшло у Олесі, теж буде закінчуватись трьома нулями, якщо 2a+15.125.

Наприклад, якщо a=55, то сума чисел у Олесі також закінчується трьома нулями.

б) Аналогічно до розв'язку пункту а), помітимо, що у Андрійка вийде число, що ділиться на 16. А значить і число, утворене чотирма останніми цифрами результату, ділиться на16. В той же час число, яке отримала Олеся, на 16 не ділиться, так само, як і число, утворене чотирма останніми цифрами результату.

*Відповідь:*а) так, могло; б) ні, не могло.

2. Покажемо, що меншої кількості не вистачить. Будемо просто рахуватимаксимальну кількість програмістів, які грали у одній команді. Після першого раунду їх було 1005. Після кожного раунду знайдеться принаймні половина менше програмістів, які грали у одній команді, а тому за 10 раундів обов'язково залишиться принаймні 2 програмісти, які кожного разу грали у одній команді. Тепер покажемо, що за 11 раундів можна це зробити. Додамо до 2010 учасників 38 ”мертвих душ”, при цьому 19 з них додамо напочатку списку, а 19 – наприкінці. І перенумеруємо їх номерами від 0 до 2047. Ці номери запишемо у двійковому розкладі, таким чином, щоб кожен номер мав 11 двійкових розрядів, якщо необхідно допишемо попереду потрібну кількість нулів. Тепер щодо поділенняна команди – у *k*-му раунді програмісти розбиваються на команди у відповідності до *k*-двійкової цифри, до однієї команди ті, у яких ця цифра 0, до інших – у яких ця цифра 1.Очевидно, що команди будуть рівними, оскільки кількість учасників з 2048 мають однакову кількість 0 та 1 у *k*-му розряді. Крім того, серед віртуальних учасників також однакова кількість 0 та 1 у *k*-му розряді, оскільки вони мають симетричні номери за рахунок симетричного розташування у нумерації. Крім того, кожні два учасники мають номери, яківідрізняються принаймні у одному розряді. У відповідному раунді вони й будуть грати у різних командах.

*Відповідь:*11 раундів.

3.а)Розглянемо $\angle AFM=\angle AMF=180^\circ-\angle MFA-\angle FAM=90^\circ-\angle ECI-\angle FAM=90^\circ-1/2(\angle C+\angle A)=1/2\angle B=\angle IBA$

Оскільки $\angle NIM=\angle AIB\Rightarrow\angle NIM=\angle AIB$. Зрозуміло, що $CI\perp MN$, тому маємо подібність.

б) Очевидно, що точки *F*, *D* симетричні відносно прямої *AM* . З подібності вище доведених трикутників $\angle IMD=\angle IBD$, тому *IMBD* – вписаний чотирикутник, тому $\angle BMA = 90°$. Якщо P– середина відрізку AB, тому $\angle BPM = 2\angle BAM = \angle BAC$. Оскільки точки симетричні відносно BN , то знову з урахуванням подібності наведених трикутників, ми маємо такі рівності: $\angle NMD = 2\angle IND = 2\angle IAB = \angle BAC$, тобто $\angle BPM = \angle MND$. Тому точки M, N, D, P– циклічні, тобто коло, що описане навколо $PDMN$ проходять через точку P – середину відрізку AB, що й треба було довести.

1.9. 11 клас (умови)

1. Задане число $n = 11^{2011} \cdot 2011^{11}$. Скільки існує натуральних дільників числа n^2, які менші від n, але не дільниками n?

2. У змаганні приймає участь 2010 програмістів. У кожному раунді усі програмісти поділяються на 2 команди, з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах?

3. Знайти усі пари натуральних чисел $m, n > 1$, для яких $(n^3 - 1) \vdots (mn - 1)$.

1.10. 11 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Спочатку підрахуємо кількість N дільників числа $n^2 = 11^{4022} \cdot 2011^{22}$ за відомою формулою:

$$N = (4022+1)(22+1) = 925229.$$

Оскільки усі дільники числа n^2 можна розбити на пари – d та $\frac{n^2}{d}$, одне з яких більше від числа n, а інще – менше. Саме число n, як дільник n^2, не має пари та не є меншим від n, то кількість дільників числа n^2, які менші від n дорівнює $\frac{92529-1}{2} = 46264$. Тепер серед усіх цих дільників треба вилучити ті, які є дільниками числа n. Зрозуміло, що вони всі менші за n (саме число n не треба рахувати серед дільників числа n^2, що є меншими від n).

Кількість N_1 дільників числа n, що менші від n, обчислимо за аналогічною формулою:

$$N_1 = (2011+1)(11+1)-1 = 24143.$$

Таким чином шукане число дільників дорівнює 46264–23143=22121.

*Відповідь:*22121.

2. Покажемо, що меншої кількості не вистачить. Будемо просто рахувати максимальну кількість програмістів, які грали у одній команді. Після першого раунду їх було 1005. Після кожного раунду знайдеться принаймні половина менше програмістів, які грали у одній команді, а тому за 10 раундів обов'язково залишиться принаймні 2 програмісти, які кожного разу грали у одній команді. Тепер покажемо, що за 11 раундів можнаце зробити. Додамо до 2010 учасників 38 "мертвих душ", при цьому 19 з них додамо напочатку списку, а 19 – наприкінці. І перенумеруємо їх номерами від 0 до 2047. Ці номери запишемо у двійковому розкладі, таким чином, щоб кожен номер мав 11 двійкових розрядів, якщо необхідно допишемо попереду потрібну кількість нулів. Тепер щодо поділенняна команди – у k- му раунді програмісти розбиваються на команди у відповідності до k-ї m двійкової цифри, до однієї команди ті, у яких ця цифра 0, до інших – у яких ця цифра 1. Очевидно, що команди будуть рівними, оскільки кількість учасників з 2048 мають однакову кількість 0 та 1 у k-му розряді. Крім того, серед віртуальних учасників також однакова кількість 0 та 1 у k-му розряді, оскільки вони мають симетричні номери за рахунок симетричного розташування у нумерації. Крім того, кожні два учасники мають номери, яківідрізняються принаймні у одному розряді. У відповідному раунді вони й будуть грати у різних командах.

Відповідь: 11 раундів

3. Нехай $(mn-1)|(n^3-1)$. Оскільки $(n^3-1)m-n^2(mn-1)=n^2-m$, то $(mn-1)|(n^2-m)$. З іншого боку, $m(n^2-m)\ (mn-1)=n^2-\ m \Rightarrow (mn-1)|(m^2-n)$. Таким чином при $n > m^2$ маємо $mn - 1 \le n-m^2 \le n-1$, що неможливо.

Якщо $n=m^2$, то це є розв'язком задачі.

Якщо $n<m^2$, та оскільки mn – $1 \le n^3-$, то $\sqrt{n} < m \le n^2$.

Якщо $n^2-m>0$, то $mn-1\le n^2-m<n^2-1$, тобто $m<n$, що неможливо, оскільки $mn-1\le m^2-n<m^2-1$, тобто $n<m$. Залишається випадок $m=n^2$, який задовольняє умову. Таким чином відповіддю задачі будуть усі пари натуральних чисел (k,k^2) та (k^2, k) при $k>1$.

Відповідь: пари натуральних чисел (k,k^2) та (k^2,k) при $k>1$.

II. ЗАДАЧІ III ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (2011 Р.)

2.1. 7 клас (умови)

1. Олеся записала натуральне число N . Після цього Андрійко записав

одну шосту, одну п'яту, одну четверту, одну третю та одну другу від числа N . Виявилось, що сума усіх записаних чисел є цілим числом. Яке найменшечисло могла записати Олеся?

Відповідь обґрунтуйте.

2. До натурального числа N справа дописали дві різні ненульові цифри.

Виявилось, що одержане число ділиться націло на N . При якому найбільшому N це можливо?

Відповідь обґрунтуйте.

3. а) Прямокутник $ABCD$ розрізано на декілька квадратів, периметр кожного з яких дорівнює цілому числу сантиметрів. Чи обов'язково і периметр прямокутника $ABCD$ також визначається цілим числом сантиметрів?

б) Квадрат $ABCD$ розрізано на декілька квадратів, периметр кожного з

яких дорівнює цілому числу сантиметрів. Чи обов'язково і периметр квадрата $ABCD$ також визначається цілим числом сантиметрів?

Відповідь обґрунтуйте.

4. Є 10 куп камінців, у яких знаходиться відповідно 3,4,5,...,12 камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 1 камінець, у другу – 2, у третю – 3 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 1 камінець, з другої – 2, з третьої – 3 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 2011 камінців?

Відповідь обґрунтуйте.

5. Знайдіть найбільше натуральне число, у якого усі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

Відповідь обґрунтуйте.

6. Використовуючи числа 1,2,...,20 рівно по одному разу в якості чисельників або знаменників, утворіть 10 таких звичайних дробів, щоб їх сума булацілим числом. Достатньо навести принаймні один такий приклад.

Відповідь обґрунтуйте.

7. Чи існує опуклий чотирикутник, у якого протилежні сторони не паралельні, та який можна розрізати на 2011 рівнобедрених трикутників?

Відповідь обґрунтуйте.

8. На дошці розміром 9 × 9 клітинок на центральному полі стоїть чорнафішка, а на серединах сторін зовнішнього квадрату стоять 4 білі фішки.

Перший гравець грає чорною фішкою, він можеза один хід пересунути її на будь-яку сусідню посторонi клітину, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє додатково1 білу фішку на зовнішньому периметрі квадрату,але обов’язково в таке поле, що межує по стороніз будь-яким іншим полем, в якому вже стоїть біла фішка (дивись рис.2.1).

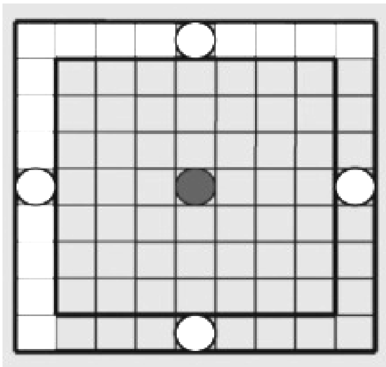


Рис.2.1

Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

Відповідь обґрунтуйте.

9. Знайдіть усі такі двоцифрові натуральні числа N , які дорівнюють сумі цифр числа N до якої додається куб суми цифр числа N .

Відповідь обґрунтуйте.

10. Знайти всі такі пари простих чисел (a,b), для яких число $a^b b^a$+1 також просте.

2.2. 7 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Андрійко отримав таку суму:

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)N=\frac{29N}{20},$$

а воно буде цілим за умови, що N ділиться на 20, тобто найменшим числом є число 20.

Відповідь: 20.

2. Нехай справа дописати цифри, які утворюють число $\overline{ab}$. За умовою задачі випливає, що $\overline{Nab}\,\vdots\, N,$ або $100N+\overline{ab}\,\vdots\, N,$ звідки $\overline{ab}\,\vdots\, N$. Оскільки число $\overline{ab}$ утворене двома різними цифрами, то $a\leq 98$, тому й $N\leq 98$. А число N=98 задовольняє умову задачі. Дійсно, до числа 98 можна приписати цифри 9 та 8, і одержане число 9898 ділиться на 98, тобто воно задовольняє умову.

Відповідь: 98.

3. а) тут достатньо навести приклад. Розглянемо два квадрати *ABMN* та *NMCD* зі стороною $\frac{1}{4}$. Тоді периметр кожного з квадратів складає ціле число сантиметрів – 1, а периметр прямокутника *ABCD* складає $2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$ – не ціле число.

б) Розглянемо будь-яку сторону зовнішнього квадрату, до неї прилягають декілька менших квадратів (рис.2.2). Нехай сторона зовнішнього квадрату а, сторони менших квадратів дорівнюють $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді можемо записати, що сторона a дорівнює сумі сторін $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$, але кожна сторона a_i, якщо її помножити на 4, дає ціле, тому й периметр P квадрата *ABCD* є $P=4a=4a_1+4a_2+\ldots+4a_n$– ціле число, оскільки оскільки кожний доданок є цілим.

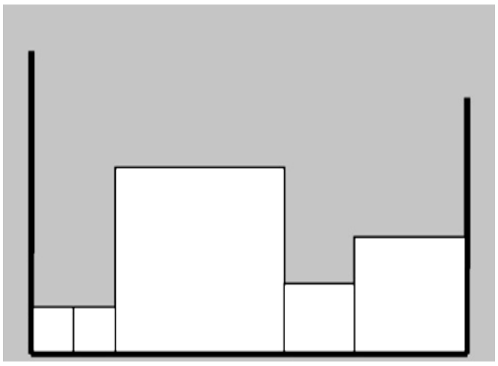


Рис.2.2

4. При таких операціях сумарна кількість камінців в усіх купках змінюється на число, що кратне 3. У кінцевий момент це число дорівнює 2011 · 10 і не кратне 3. Але у початковий момент кількість камінців дорівнює 3+4+5+...+12=75, тобто число кратне 3. Одержана суперечність показує неможливість такого перетворення.

Відповідь: Не можна.

5. Зрозуміло, що число не може мати більше ніж 10 цифр, крім того воно повинно бути десятицифровим, бо таке число завжди більше від числа, що має меншу кількість цифр. Тепер просто будемо записувати цифри шуканого числа, беручи до уваги, що у двох чисел з однаковою кількістю цифр більшим є те, у якого більшою є цифра у більшому розряді. Таким чином будемо ставити відповідні цифри по місцях.

975 – перші три цифри, зрозуміло, що другою цифрою не може бути 8, так само й третьою.

975864 – перші шість цифр. Далі не може стояти 3, тому повинно стояти 2, а тому останні цифри ставляться таким чином: 9758642031.

Відповідь: 9758642031.

6. *Відповідь:* $\frac{17}{3}+\frac{13}{2}+\frac{11}{6}+\frac{19}{1}+\frac{14}{7}+\frac{18}{9}+\frac{20}{10}+\frac{16}{8}+\frac{15}{5}+\frac{12}{4}=$
$=14+19+2+2+2+2+3+3=47$

7. Одни з прикладів чотирикутника та його розбиття показаний на рис.2.3 Тут неважко показати, що відповідні сторони непаралельні. Спочатку розглядаємо рівнобедрений трикутник $A_1B_1B_2$, який має досить малий кут при вершині. Використаємо 2009 таких трикутників, а далі добудуємо ще два рівнобедрених трикутники $A_1A1005C$ та $B_1B1006D$, у яких – $A_1A1005{=}A_1C$, та $B_1B1006{=}B_1D$.

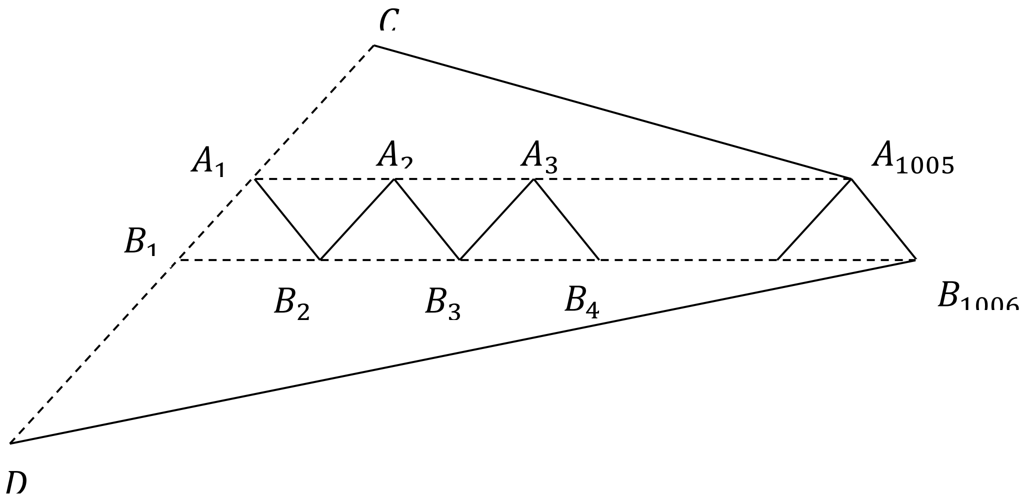


Рис.2.3

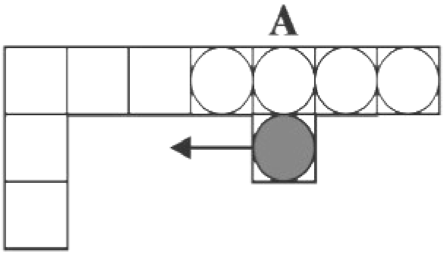


Рис.2.4

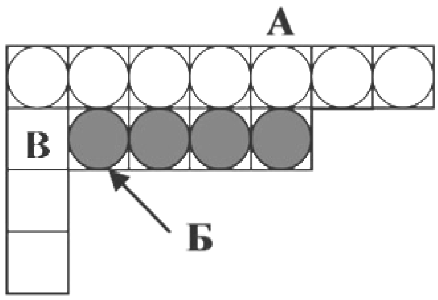


Рис.2.5

8. Перший гравець ходить у напрямі будь-якої середньої на стороні клітини, наприклад, клітини А, що є середньою на верхній стороні квадрату. Він досягає сусідньої клітини за 3 ходи. Тоді принаймні з одного боку від цієї клітини другий поставив максимум 1 фішку. Наприклад зліва. (рис.2.4). Тоді перший гравець рухає свою чорну фішку у напрямі стрілки і досягає клітини Б. Навіть, якщо другий гравець ходить у тому ж самому напрямі, то при цій ситуації у клітині Б (рис.2.5), він не може завадити попасти першому у клітину В, оскільки повинен зробити хід у кутову клітину. Якщо другий змінить стратегію ходів, то він може програти лише раніше

Відповідь: виграє перший гравець.

9. Позначимо суму цифр числа N через n, тоді маємо таку рівність: $N=n+n^3$. Зрозуміло, що куб суми цифр не перевищує 99, а таких кубів натуральних чисел усього чотири –1, 2, 3, 4. Достатньо їх перебрати. Тоді з рівності $N=n+n^3$ знайдемо можливі значення N :

N=1+1=2 – має суму цифр 2, умову не задовольняє;

N=8+2=10 – має суму цифр 1, умову не задовольняє;

N=27+3=30 – має суму цифр 3, є розв’язком задачі;

N=64+4=68 – має суму цифр 14, умову не задовольняє.

Відповідь: (2,3), (3,2), (2,2).

10. Очевидно, що для того, щоб число $a^b b^a+1$ було простим, необхідно, щоб хоча б одне з чисел a, чи b було парним. Без обмеження загальності припустимо, що a=2. Легко помітити, що значення b=2 та b=3 задовольняють умову. Покажемо, що для всіх b>3 число $a^b b^a+1$ не буде простим (а саме – воно ділиться на 3). Перепишемо наш вираз з урахуванням викладеного вище:

$2^b b^2+1$, $b>3$.

Отже, можемо стверджувати, що для простих b остача при діленні на 3 буде дорівнювати 1 чи 2. Відповідно, квадрат цього числа даватиме в остачі при діленні на 3 значення 1. Аналогічно, будь-який непарний степінь двійки при діленні на 3 дає остачу 2. Таким чином отримуємо,що число $2^b b^2+1$, при $b>3$, є кратним 3, а тому простим бути не може.

2.3. 8 клас (умови)

1. Відмінниці Олесі задали додому обчислити сумудвох звичайних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$(не обов’язково правильних). Її однокласник Андрійко хворів і перепитав це завдання телефоном, але не так почув і записав , що треба додати такі два дроби $\frac{b}{a}$ і $\frac{d}{c}$. Коли він їх додав, то запитав у Олесі відповідь. Чи правильно додав свої дроби Андрійко, якщо Олеся одержала від вчителькі відмінну оцінку, а усі 4 дроби, що додавали Андрійко та Олеся, були попарно різними?

2. Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність:

$(n-1)(n-3)(n-5)...(n-2011)=n(n+2)(n+4)...(n+2010)$.

3. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 та b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 є перестановками чисел 1, 2, 3, 4, 5. Доведіть, що серед п’яти чисел $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5$ принаймні два мають однакову остачу при діленні на 5.

4. У селі 8 домів, між якими є доріжки, план яких зображений на (рис.2.6) По кожній з цих доріжок дозволено рухатись лише в одному напрямі. Чи можна так установити напрямок руху по доріжках, щоб від будь-якого дома до будь-якого іншого дома можна було дістатись, пройшовши у дозволених напрямах не більше ніж по двох доріжках?

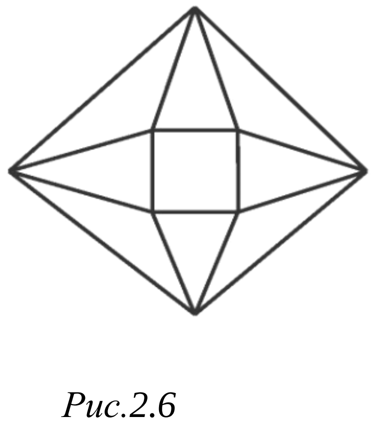


Рис.2.6

5. Знайдіть найбільше парне натуральне число, у якого усі цифри різніта

кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

6. На сторонах AD та BC квадрата $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $AM=BN$. Точка X – основа перпендикуляра, опущеного з точки D на пряму AN. Доведіть, що кут MXC – прямий.

7. На дошці розміром 11 × 11 на центральному полі стоїть чорна фішка, а на серединах сторін зовнішнього квадрату стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою, він може за один хід пересунути її на будь-яку сусідню по стороні клітину, якщо на ній не стоїть біла фішка.

Другий гравець своїм ходом виставляє додатково 1 білу фішку на зовнішньому периметрі квадрату, але обов’язково в таке поле, що межує по стороні з будь-яким іншим полем, в якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

8. Скільки розв’язків у цілих числах має рівняння $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=x^3+y^3+z^3+s$, якщо а) $s=0$; б) $s=1$?

9. Натуральне число $k>1$. Знайдіть усі цілі числа (x,y), які задовольняють рівність: $y^k=x^2+x$.

2.4. 8 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Припустимо, що він додав їх правильно, тоді має місце рівність: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$, або $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{ac}$. Звідси випливає що, $bd=ac$, тобто $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$, що суперечить тому, що усі чотири дроби рівні.

Відповідь: не правильно.

2. Якщо замість n підставити парне число, то зліва число непарне, а справа – парне, і навпаки, якщо підставити непарне число, то зліва буде парне число, а справа – непарне, в обох випадках рівність неможлива.

Відповідь: Таких цілих чисел не існує.

3. Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_5=5$. Якщо при цьому $b_5\neq 5$, то, наприклад, $b_4=5$ і тоді числа a_4b_4 та a_5b_5 кратні 5, тому дають однакову нульову остачу при діленні на 5. у цьому випадку твердження доведене. Нехай тепер $b_5=5$. Припустимо, що твердження задачі не вірне. Тоді числа a_1b_1, a_2b_2 , a_3b_3, a_4b_4 в деякому порядку дають остачі 1, 2, 3 та 4 при діленні на 5. Тоді з одного боку добуток чисел $a_1b_1\cdot a_2b_2\cdot a_3b_3\cdot a_4b_4$ дає при діленні на 5 остачу 4, що легко одержати, якщо розкрити дужки у рівності: $(5n_1+1)(5n_2+2)(5n_3+3)(5n_4+4)=5N+24$. З іншого боку, оскільки числа a_1,a_2,a_3,a_4 та b_1,b_2,b_3,b_4 є перестановками чисел 1, 2, 3 та 4, то добуток $a_1b_1\cdot a_2b_2\cdot a_3b_3\cdot a_4b_4=24\cdot 24=576$ дає при діленні на 5 остачу 1. Одержана суперечність завершує доведення.

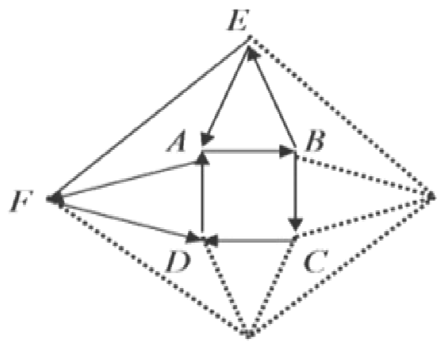


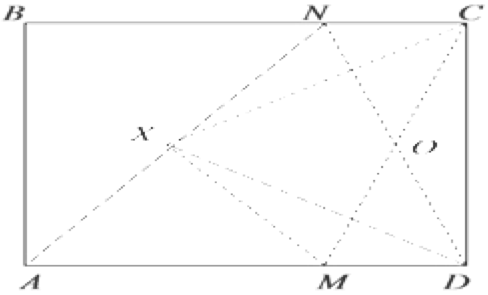
Рис.2.7

4. Розглянемо 4 хати, які на рис.2.7 позначені буквами *A, B, C, D,* між *A* та *C* існує рівно два шляхи, які мають не більше двох переходів. Через вершини *B* та *D* відповідно. Без обмежень загальності можемо вважати, що напрямок доріжок там обраний як на рис.2.6.

Є 2 шляхи від *B* до *A*, які містять не більше двох переходів – це прями напрямок, а також через вершину *E*. Оскільки прямий напрямок вже йде у зворотному напрямі, то це визначає однозначно напрям по доріжках *BE* та *EA*. Аналогічно визначається напрямок відрізків *FA* та *FD*. Розглянемо припустимі шляхи між *F* та *B*, а також між *E* та *D*. Обидва цих маршрути проходять вздовж доріжки *FE*, але вимагають протилежних напрямів. Одержане доводить неможливість потрібної розстановки напрямів.

5. Початок розв’язання співпадає з початком розв’язання задачі 7–1. Таким чином знаходимо число початок шуканого числа 975864. Якщо тепер поставити цифру 2, то наступною може йти лише цифра 0 і усі парні числа використані, тобто остаточне число не може бути парним. Таким чином наступною цифрою може у максимального числа йти 1. Далі решта цифр ставляться однозначно: 9758641302.

6. Проведемо діагоналі прямокутника *MNCD*, які перетинаються в центрі *O* описаного навколо нього кола, тоді за побудовою точка *X* лежить на цьому колі з діаметром *DN* (рис.2.8). Тоді з властивостей вписаних у коло кутів маємо такі рівності: $\angle NXC=\angle NDC=\angle MCD=\angle MXD$. Звідси випливає, що $\angle MXC=\angle MXD+\angle DXC=\angle CXN+\angle \mathrm{DXC}=\angle DXN=90^{\circ}$, що й треба було довести.



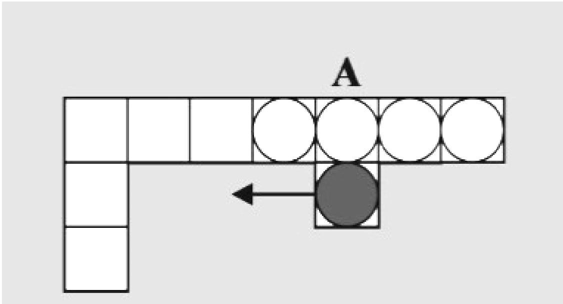
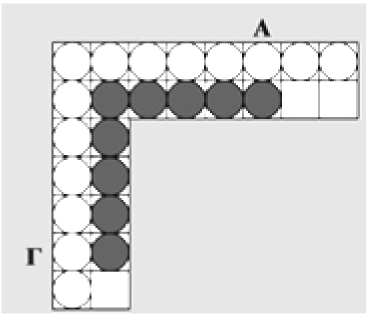


Рис.2.8 *Рис.2.9*



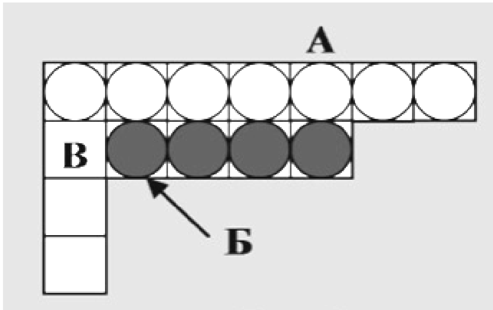


Рис.2.10 *Рис.2.11*

7. Перший гравець ходить у напрямі будь-якої середньої на стороні клітини, наприклад, клітини А, що є середньою на верхній стороні квадрату. Він досягає сусідньої клітини за 4 ходи. Якщо принаймні з одного боку від цієї клітини другий поставив максимум 1 фішку, наприклад зліва, (рис.2.9), тоді перший гравець рухає свою чорну фішку у напрямі стрілки і досягає клітини Б. Навіть, якщо другий гравець ходить у тому ж самому напрямі, то при цій ситуації у клітині Б (рис.2.10). Він не може завадити попасти першому у клітину В, оскільки повинен зробити хід у кутову клітину. Якщо у нього стоїть по дві фішки по обидва боки, то він починає рухатись у будь-якому напрямі, наприклад, як і раніше у лівий бік. Тоді другий може йому завадити виграти до досягнення найближчої кутової клітини. Але відповідь другого гравця є єдиною можливою, щоб не програти. І ми одержимо ситуацію, що зображена на рис.2.11 У цій ситуації хід першого, і вн перемагає, оскільки ця ситуація

аналогічна до розглянутих вище.

Відповідь: виграє перший гравець.

8. а) Покладемо спочатку $x=-y$, тоді наше рівняння набуває вигляду $3x^2+z^2=z^3$. Тепер нехай $x=tz$, тоді рівняння стає таким:

$3z^2t^2+z^2=z^3$, або $3t^2+1=z$, таким чином кожна трійка $z=3t^2+1, x=t(3t^2+1)$, $y=-t(3t^2+1)$ задовольняє рівняння при довільному цілому t.

б) Неважко побачити, що для усіх цілих t має місце конгруенція $t^3\equiv t(\mathrm{mod}3)$. Припустимо, що рівняння має розв'язок у цілих числах,тоді позначимо $x+y+z=a$ і будемо мати за модулем 3, що

$$a+1\equiv x+y+z+1\equiv x^3+y^3+z^3+1\equiv x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\equiv$$

$$\equiv x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\equiv(x+y+z)^2\equiv a^2,$$

тобто $a^2-a-1 \vdots 3$, але останнє неможливе, оскільки, якщо а кратне 3, то це очевидно не вірне, а якщо а не кратне 3, то $a^2-a-1\equiv-a$ – не може ділитись на 3. Одержана суперечність показує, що це рівняння не має розв'язків у цілих числах.

Відповідь: а) нескінченно багато розв'язків, б) розв'язків немає.

9. Запишемо задані рівність у вигляді $y^k=x(x+1)$. Це можливо при $x=0$ та $x=-1$, тоді $y=0$. Припустимо тепер, що $x\neq 0,-1$. Числа x та $x+1$ взаємно прості, тому остання рівність можлива лише за умови, що $x=a^k$ та $x+1=b^k$ для деяких цілих $a,b\neq 0$, при цьому числа a, b можна вибрати одного знаку. Тоді з рівності

$$(x+1)-x=1=b^k-a^k=(b-a)(b^k-1+b^k-2_a+...+a^k-1)$$

маємо, що добуток двох цілих чисел дорівнює 1, але другий множник у правій частині за модулем більший від 1, оскільки там усі доданки одного знаку та їх кількість не менше двох. Одержана суперечність показує, що рівність неможлива.

Відповідь: (0,0), (−1,0).

2.5. 9 клас (умови)

1. Знайдіть усі значення параметра b, при яких для кожного x принаймні

одна з функцій $f_1(x)=x^2+2011x+b$ чи $f_2(x)=x^2-2011x+b$ приймає додатнє значення.

2. Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді 2^n+2^m, де n, m – деякі різні натуральні числа.

3. У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно 1 раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку – 0 очок, нічиїх у волейболі не буває. Якщо по завершенню турніру різниця очок команд, що посіли перше та друге місця, не перевищує 1 очка, між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, що посіли 3-є та 4-е, 5-е та 6-е, а також 7-е та 8-е місця. Таким чином максимум може буде проведено 4 стикові гри. Яка найменша кількість стикових ігор може буде проведена по завершенню турніру?

Зауваження. По завершенню турніру при будь-яких результатах кожне місце займає рівно одна команда. Навіть якщо у декількох команд рівна кількість очок, вони займають різні місця.

4. Знайдіть усі такі трицифрові натуральні числа N , які дорівнюють сумі цифр числа N до якої додається куб суми цифр числа N .

5. П’ять років тому сумарний вік усіх синів у родині перевищував сумарний вік усіх доньок на 2 роки. З того часу в сім’ї народилася ще одна дитина, і тепер сумарний вік усіх доньок перевищує сумарний вік усіх синів на 2 роки. Наскільки відрізнялися сумарний вік синів і сумарний вік доньок у родині два роки тому?

2.6. 9 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. При $x=0$ маємо $f_1(0)=f_2(0)=b$, тому значення $b\le 0$ умову не задовольняє. Нехай тепер $b>0$. Додамо значення обох квадратичних функцій і одержимо, що $f_1(x)+f_2(x)=2x^2+2b>0$, тому принаймні один з цих двох доданків буде додатним. Тобто кожне значення $b>0$ задовольняє умову.

Відповідь: $b>0$.

2. Покладемо $n=m+3$, тоді $N=2^n+2^m=2^m(2^3+1)=2^m\cdot 9$, тепер достатньо вибрати $m=2s$ і будемо мати, що $N=(3\cdot(2^s))^2$ – квадрат для довільного

натурального s.

3. Якщо припустити, що не було проведено жодної стикової гри, то різниця між 1-м та 2-м місцем, 3-м та 4-м, 5-и та 6-м, а також 7-м та 8-м місцем складає не менше ніж 2 очки. Тоді різниця між 1-м місцем та 8-м складає мінімум 8 очок, але переможець може набрати максимум 7 очок (усі перемоги), а остання команда – 0 очок (усі поразки), але навіть тоді різниця не перевищує 7 очок. Одержали суперечність. Таким чином принаймні 1 стикова гра була проведена.

Відповідь: 1.

4. Позначимо суму цифр числа N через n, тоді маємо таку рівність: $N=n+n^3$. Оскільки $1 \le n \le 27$, то n^3лежить в межах від 73 до 998, оскільки $73=100-27 \le N-27 \le n^3 \le N-1 \le 999-1=998$. Простим підбором знаходимо, що у цих межах лежать такі куби натуральних чисел: $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$.

Тоді з рівності $N=n+ n^3$знаходимо можливі значення N :

$N=125+5=130$ – має суму цифр 4, умову не задовольняє;

$N=216+6= 222$ – має суму цифр 6, є розв'язком задачі;

$N=343+7=350$ – має суму цифр 8, умову не задовольняє;

$N=512+8=520$ – має суму цифр 7, умову не задовольняє;

$N=729+9= 738$ – має суму цифр 18, умову не задовольняє.

Відповідь: 222.

5. Нехай п'ять років тому в сім'ї було n синів та m доньок, сумарний вік синів дорівнював N , а сумарний вік доньок M .

Якщо k років тому у родині народилася ще одна донька, то сумарний вік синів тепер складає $N+5n$, а сумарний вік доньок$M+5m+k$. Оскільки $N=M+2$, звідси маємо, що $(N+5n)+2=M+5m+k \Rightarrow M+5n+4=M+5m+k \Rightarrow k=5(n-m)+4$, а оскільки $0 \le k \le 5$, то $k=4$ і $n-m=0$. Тож два роки тому сумарний вік синів $N+3n$ і доньок $M+3m+2$ були рівними: $N+3n-(M+3m+2)=(N-M)+3(n-m)-2=2-2=0$. Але в родині міг народитися й син. Нехай нині йому k років. Тоді сумарний вік синів на даний момент складає $N+5n+k$, а доньок $M+5m$. Маємо, що

$(N+5n+k)+2=M+5m \Rightarrow M+5n+k+4=M+5m \Rightarrow k=5(m-n)-4$. І знову, оскільки $0 \le k \le 5$, то $k=1$ і $m-n=1$. Тож два роки тому сумарний вік доньок $M+3m$ переважав вік синів $N+3n$ на рік: $M+3m-(N+3n)=(M-N)+3(m-n)=-2+3=1$.

Відповідь: Вони були рівними або сумарний вік доньок перевищував сумарний вік синів на рік.

2.7. 10 клас (умови)

1. Відомо, що x_1, x_2, x_3 попарно різні дійсні числа.

а) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$;числа $x_{1,} x_2$ є нулями функції $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$.

Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

б) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$; числа $x_{1,} x_2$ є нулями функції $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$.

Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

2. Задане число $n = 11^{2011} \cdot 2011^{11}$. Скільки існує натуральних дільників числа n^2, які менші від *n*, але не дільниками *n*?

3. Сума декількох послідовних натуральних чисел (більше одного) дорівнює 2011. Знайдіть усі такі набори послідовних натуральних чисел.

4. Послідовність (a_n) визначається такими умовами:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$$

для кожного натурального *n*. На скільки нулів закінчується число a_{2011}?

2.8. 10 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. а) Запишемо цю функцію у такому вигляді $f(x) = (x - x_2) + (x - x_3) + (x - x_1) + (x - x_3) + (x - x_1) + (x - x_2)$, очевидно, що графіком цієї функції є парабола, яка має гілки, що направлені вгору. Без

обмеження загальності можемо вважати,що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді $f(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) < 0$, що рівносильне тому, що у параболи є корені.

б) Розглянемо приклади таких функцій: $f_1(x) = x^2 + x, \quad f_2(x) = x^2 - x, f_3(x) = 1 - x^2$ вони мають корені 0,-1,0,1 та -1,1 відповідно. Їх сума – це функція $f(x) = x^2 + x + x^2 - x + 1 - x^2 = x^2 + 1,$ яка очевидно нулів не має.

Відповідь: а) обов'язково; б) не обов'язково.

2. Спочатку підрахуємо кількість N дільників числа $n^2 = 11^{4022} \cdot 2011^{22}$ за відомою формулою:

$$N = (4022 + 1)(22 + 1) = 925229.$$

Оскільки усі дільники числа n^2 можна розбити на пари – d та $\frac{n^2}{d}$, одне з яких більше від числа *n*, а інще – менше. Саме число *n,* як дільник n^2, не має пари та не є меншим від *n,* то кількість дільників числа n^2, які менші від *n* дорівнює $\frac{92529 - 1}{2} = 46264.$ Тепер серед усіх цих дільників треба вилучити ті, які є дільниками числа *n.* Зрозуміло, що вони всі менші за *n* (саме число *n* не треба рахувати серед дільників числа n^2, що є меншими від *n*).

Кількість N_1 дільників числа *n,* що менші від *n,* обчислимо за аналогічною формулою:

$$N_1 = (2011 + 1)(11 + 1) - 1 = 24143.$$

Таким чином шукане число дільників дорівнює 46264–23143=22121.

*Відповідь:*22121.

3. Позначимо перше з цих чисел через a_1, а останнє - a_n, вони утворюють арифметичну прогресію, тому з формули суми арифметичної прогресії маємо таку рівність:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} n = 2011 \Leftrightarrow (a_1 + a_n)n = 2 \cdot 2011.$$

У лівій частині добуток двох натуральних чисел, кожне з яких не менше 2, а у правій частині добуток двох простих чисел. Звідси зрозуміло, що можливі лише такі варіанти: $a_1 + a_n = 2$ та $n = 2011$ або $a_1 + a_n = 2011$ та $n = 2$.. Перший варіант очевидно умови не задовольняє, а з другого знаходимо єдину можливу відповідь: 1005+1006.

Відповідь: 1005+1006.

4. Якщо обчислити $a_3 = 6, a_4 = 24$, то можна припустити, що $a_n = n!$, що легко доводиться ММІ: $a_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = n!(n+1)(n+2) = (n+2)!$. Кількість нулів визначається тим, на яку степінь 5 ділиться число 2008. Вона визначається за добре відомою формулою:

$$\left[\frac{2011}{5}\right] + \left[\frac{2011}{5^2}\right] + \left[\frac{2011}{5^3}\right] + \ldots = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

Відповідь: 501.

2.9. 11 клас (умови)

1. Розв'язати рівняння $\left[x^2\right] - 2x = 1 = 0,$ де через $\left[x^2\right]$ позначимо найбільше ціле число, що не перевищує x^2.

2. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга містить 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. 2012 купка містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 2 камінці, у другу – 3, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 2 камінці, з другої – 3. З третьої – 4 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 3^{1005} камінців?

3. При якому найменшому натуральному n вираз $n^3 + n^2 + 330n + 330$ ділиться націло на 2011?

4. Для додатніх чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 \geq 3\left(1 + a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{c} + c\sqrt[3]{a}\right).$$

2.10. 11 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Перенесемо $2x$ у праву частину та поділимо на 2. Матимемо, що $x\frac{[x^2]+1}{2}$. Отже, $x-$напівціле число, і або $x=t$, або $x=t+\frac{1}{2}$, де $t-$деяке ціле число. Якщо $x=t$, маємо, що

$$[x^2]-2x+1=[t^2]-2t+1=t^2-2t+1=(t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Якщо ж $x=t+\frac{1}{2}$, то

$$[x^2]-2x+1=\left[(t+\frac{1}{2})^2\right]-2\left(t+\frac{1}{2}\right)+1=\left[t^2+t+\frac{1}{4}\right]-2t-1+1=$$
$$t^2+t-2t=t^2-t=t(t-1)=0 \Leftrightarrow t=0$$

або $t=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ або $x=\frac{3}{2}$.

Відповідь: $x=1, x=\frac{1}{2}$ або $x=\frac{3}{2}$.

2. При таких операціях сумарна кількість камінців в усіх їх купках змінюється на число, що кратне 9. У кінцевий момент це число дорівнює $2012\cdot 3^{1005}$ і також кратне 9. Але у початковий момент кількість камінців дорівнює $2^0+2^1+2^2+...+2^{2011}=2^{2012}-1$. Знайдемо остачу при діленні цього числа на 9. $2012=335\cdot 6+2, 2^6=64\equiv 1(\bmod 9),$ тому

$$2^{2012}-1\equiv\left(2^6\right)^{335}\cdot 2^2-1\equiv 4-1=3(\bmod 9).$$

Тобто це число на 9 не ділеться, звідси й випливає неможливість.

Відповідь: Не можна.

3. Оскільки вираз розкладається на множники таким чином: $n^3+n^2+330n=(n+1)(n^2+330),$ то для того, щоб він ділився націло на просте число 2011, треба щоб один з множників ділився націло на 2011. Знайдемо, при яких найменших $n\in\mathbb{N}$ це можливе.

Для $n+1$ очевидно, що найменше значення $n=2010,$ а для $n^2+330,$ оскільки n^2 зростає, простим підбором знаходимо , що $n=41$ при маємо рівність $n^2+330=2011,$ тому це значення і є найменше.

Відповідь: $n=41.$

4. З нерівності між середніми запишемо такі три нерівності:

$$\begin{cases} a+a^2+b \geq 3a\sqrt[3]{b}, \\ b+b^2+c \geq 3b\sqrt[3]{c}, \\ c+c^2+a \geq 3c\sqrt[3]{a}. \end{cases}$$

Залишається додати ці три нерівності і відповідним чином згрупувати доданки.

III. ЗАДАЧІ III ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (2012 Р.)

3.1. 7 клас (умови)

1. На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно).

а) Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

б) Чи обов'язково на дошці з'явиться число, кратне 5?

2. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов'язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

3. Нехай $S(a)$ позначає суму цифр десяткового запису натурального числа a. Про натуральне число n відомо, що $S(n)=503$, а $S(121n)=2012$. Знайдіть усі можливі значення $S(11n)$.

4. Кожен з 1005 мешканців Смарагдового міста носить окуляри. Загалом в цих окулярах вставлено по 670 лінз рожевого, блакитного та зеленого кольору. Всі мешканці стали в коло так, що жодні два сусіди не мають лінз однакового кольору в окулярах. Яка найбільша можлива кількість мешканців може носити окуляри з різнокольоровими лінзами?

5. Дано 101 монету, серед яких 50 справжніх (однакових за вагою) та 51 фальшива. Фальшиві монети можуть відрізнятися за вагою одна від одної, бути легшими або важчими за справжні (але обов'язково відрізняються за вагою від справжніх монет). Як з допомогою терезів з двома чашками без гирьок виявити хоча б одну фальшиву монету?

6. Відомо, що олівець та ручка разом коштують більше, ніж один зошит, а олівець та зошит разом — більше, ніж три ручки. Що дорожче — олівець чи ручка?

7. Дано 11 монет, серед яких 5 справжніх (однакових за вагою) та

6 фальшивих. Фальшиві монети можуть відрізнятися за вагою одна від одної, бути легшими або важчими за справжні (але обов'язково відрізняються за вагою від справжніх монет). Як з допомогою терезів з двома чашками без гирьок виявити хоча б одну фальшиву монету?

3.2. 7 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. а) В першому, третьому, п'ятому і т.д. записаних числах буде почергово змінюватись парність (адже сума двох послідовних кількостей хвилин непарна). Серед них будуть з'являтися парні числа. При цьому лише перше з них може дорівнювати 2 (отримане як 0+2 або 1+1), наступні парні числа більші за 2, і тому складені.

б) Якщо написаним числом є 1, а перша побачена Андрійком кількість хвилин дорівнює 0, ми отримуємо періодичну повторюваність остач записаних чисел при діленні на 5: 1, 2, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 1,…. Серед цих остач не буде 0.

2. Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1. Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4, тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати в перших чотирьох рядках, один — в чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик в три нижні рядки.

3. Нехай $n=\overline{a_1a_2...a_{k-1}a_k}$, де $a_1 \neq 0$, $a_2,\ldots,$ a_{k-1}, a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $121n$ є сума одного числа $100n$, двох чисел $10n$ і одного числа n. Якщо додавати ці числа порозрядно в стовпчик:

$$\begin{array}{r} \overline{a_1a_2a_3...a_{k-1}a_k\;0\;0} \\ + \quad \overline{a_1a_2...a_{k-2}a_{k-1}a_k\;0} \\ \overline{a_1a_2...a_{k-2}a_{k-1}a_k\;0} \\ \overline{a_1...a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k} \end{array}$$

то в кожному розряді суми, починаючи з другого і закінчуючи передостаннім, буде сума двох цифр попереднього розряду, однієї цифри цього розряду і однієї цифри наступного розряду числа n. Якщо при цьому не буде переносів у наступні розряди, то кожна цифра числа n додається 4 рази, і сума цифр числа $121n$ дорівнює $4S(n)=4\cdot 503=2012$. Якщо при цьому буде хоча б один перенос, то сума цифр числа $121n$, очевидно, зменшиться (бо тоді із одного розряду суми віднімається 10, 20 або 30, а до наступного додається відповідно тільки 1, 2 або 3), тобто у цьому випадку $S(121n)<4S(n)=2012$. Оскільки за умовою задачі $S(121n)=2012$, то це означає, що переносів не було, тобто усі цифри числа n не перевищують 4.

Отже, $11n=10n+n$, тобто без переносів додаємо в сумі

$$+\begin{array}{l}\overline{a_1a_2...a_k\ \ 0}\\ \ \ \overline{a_1...a_{k-1}a_k}\end{array}$$

$11n=\overline{a_1(a_2+a_1)...(a_k+a_{k-1})a_k}$, $\quad s(11n)=a_1+(a_2+a_1)+...+(a_k+a_{k-1})+a_k=$ $=2(a_1+a_2+...+a_{k-1}+a_k)=2S(n)=1006$.

Відповідь. $S(11n)=1006$.

4. Будемо кольори лінз позначати літерами Р, Б, З. Зрозуміло, що в колі не можуть стояти поруч мешканці з різнокольоровими окулярами, тому таких мешканців не більше за 502. Якщо їх є 502, то рівно двоє людей з однокольоровими окулярами стоять поруч (нехай це мешканці з лінзами РР та ББ), а далі по колу «різнокольорові» та «однокольорові» мешканці стоять почергово. Так вліво і вправо від вказаної пари ми однозначно отримуємо кольори

…РР, БЗ, РР, БЗ, РР, ББ, РЗ, ББ, РЗ, ББ,…,

і при замиканні кола у нас з'явиться пара сусідів або з лінзами однакового кольору, або з однокольоровими окулярами в обох. Тому кількість 502 неможлива. Приклад з 501 «різнокольоровим» мешканцем і вказаною кількістю лінз можна побудувати за схемою:

РР,БЗ,РР,БЗ,…РР,БЗ,РР,ББ,РЗ,ББ,РЗ,…,ББ,РЗ,ББ,ЗЗ,РБ,ЗЗ,РБ,…,ЗЗ,РБ,ЗЗ,

де останній, 1005-ий, мешканець стає біля першого, а між виділеними мешканцями стоять по 333 людини.

Відповідь: 501.

5. Навмання вибираємо монету А. Порівнюємо її з кожною іншою. Якщо кількість рівних їй за вагою монет відмінна від 49, монета А є фальшивою. Якщо ця кількість рівна 49, то відкладаємо виявлені 50 рівних за вагою монет, і беремо монету Б серед інших. Порівнюємо Б з усіма іншими залишеними. Якщо ця кількість не рівна 49, то Б фальшива. Якщо дорівнює 49, відкладаємо Б і рівні їй за вагою монети. Остання монета, що залишилася, точно є фальшивою.

6. Замінюючи в другому твердженні зошит на олівець та ручку, отримуємо, що два олівця та ручка дорожчі за три ручки.

Відповідь: Олівець дорожчий за ручку.

7. Розв'язання аналогічне задачі 2 достатнього рівня, лише замінюємо значення 50 на 5, а 49 на 4.

3.3. 8 клас (умови)

1. Чи можна записати цілі числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а) 13; б) 11; в) 12 ?

2. Чи може добуток чотирьох послідовних непарних натуральних чисел бути кубом деякого натурального числа?

3. П'ять прямих попарно перетинаються (див. рис.3.1). Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.

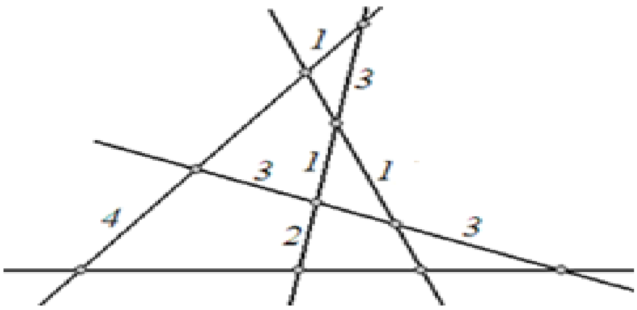


Рис.3.1

4. Дано квадратний тричлен $2013x^2 + 2012x + 2011$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, $x^2 - x + 1$ чи $x^2 + x - 1$. Програє гравець, після ходу якого одержується многочлен з цілочисельним коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

5. На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно).

а) Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

б) Чи обов'язково на дошці з'явиться число, кратне 5?

6. На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно). Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

7. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов'язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

3.4. 8 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Нехай біля вершин правильного восьмикутника послідовно, за рухом годинникової стрілки, записані числа:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

a) Якщо припустити, що виконується умова задачі, то

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \geq 14, \\ a_2 + a_3 + a_4 \geq 14, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_7 + a_8 + a_1 \geq 14, \\ a_8 + a_1 + a_2 \geq 14. \end{cases}$$

Додавши усі ці вісім нерівностей, одержимо: $3(a_1 + a_2 + ... + a_8) \geq 8 \cdot 14$.

Оскільки $a_1 + a_2 + ... + a_8 = 1 + 2 + ... + 8 = 36$, то правильною буде така нерівність: $3 \cdot 36 \geq 8 \cdot 14$, тобто $108 \geq 112$. Оскільки остання нерівність є хибною, то наше припущення про існування потрібного розміщення заданих чисел є неможливим.

б) У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$, $a_6 = 7$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$.

в) Доведемо, що потрібного розміщення заданих чисел не існує. Припустимо, що це не так. Числа 2 і 3 не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше зліва і справа від них повинно бути записаним лише число 8, що неможливо. Далі, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1 = 1$, тоді $a_4 = 2$ і $a_6 = 3$, або $a_4 = 3$ і $a_6 = 2$. Тоді, для обох цих випадків, однозначно $a_5 = 8$. Далі, розглянувши чотири випадки для розташування 4, одержимо, що 8 знову повинно з'явитися, що дає суперечність.

Відповідь. *а*) Не можна; *б*) можна; *в*) не можна.

2. Нехай для деякого парного числа k і натурального l виконується рівність:

$$(k-3)(k-1)(k+1)(k+3) = l^3, \text{ тобто } \left(k^2-9\right)\left(k^2-1\right) = l^3.$$

Спільний простий дільник чисел $k^2 - 9$ і $k^2 - 1$, якщо він існує, є дільником їхньої різниці (вона дорівнює 8) дорівнює 2. Але l – непарне, тому l не ділиться на 2, а це означає, що числа $k^2 - 9$ і $k^2 - 1$ взаємно прості і кожне є точним кубом, тобто $k^2 - 9 = n^3$ і $k^2 - 1 = m^3$, де $m, n \in N$. Звідси випливає, що $m^3 - n^3 = 8$, тобто $(m-n)\left(m^2 + mn + n^2\right) = 8$. Оскільки $m - n < m^2 + mn + n^2$, то можуть бути лише такі можливості:

$$\begin{cases} m - n = 1, \\ m^2 + mn + n^2 = 8; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m - n = 2, \\ m^2 + mn + n^2 = 4. \end{cases}$$

Перша система не має розв'язків у натуральних числах, бо коли $m - n = 1$, то m і n мають різну парність, а тоді $m^2 + mn + n^2$ – непарне число.

Друга система також не має розв’язків у натуральних числах, бо коли $m-n=2$, то $m\geq 3$, а тоді $m^2+mn+n^2>m^2\geq 9$. Усі одержані протиріччя доводять, що вказаний добуток не може бути точним кубом.

Відповідь. Ні, не може.

3. Оскільки довжина *CD* має бути натуральним числом, і є меншою за *CE*+*ED*=2, отримуємо *CD*=1. Аналогічно в трикутнику *ABE* довжина *BE* буде більшою за 2 і меншою за 4, і тому *BE*=3. Оскільки трикутник *CDE* — рівносторонній, маємо ∠*CED*=60º, звідки ∠*BEA*=60º. Звідси і з рівності *BE*=*AE* тоді ми отримуємо, що всі кути трикутника *ABE* дорівнюють 60º. Це суперечить тому, що $AB\neq AE$.

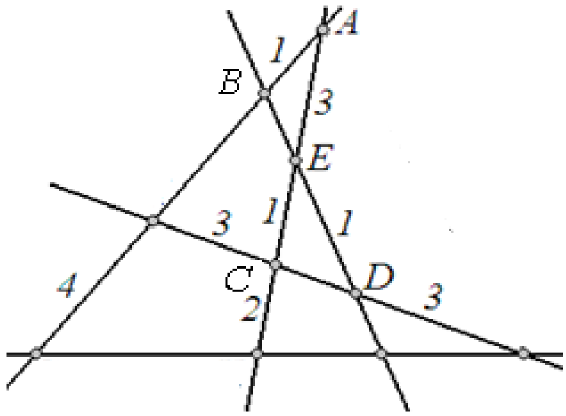


Рис.3.2

4. Доведемо, що виграє перший гравець. Він може ходити так, щоб після його ходу вільний член одержаного многочлена був непарним, а коефіцієнти при x^2 та x мали однакову парність. Тоді після ходів першого гравця будуть з’являтися квадратні тричлени, які у цілих точках приймають лише непарні значення, а тому не матимуть цілих коренів. Діючи саме так, перший гравець не програє.

Відмітимо, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною 0, тобто одержаний многочлен, з такою сумою коефіцієнтів, матиме корінь $x=1$. Це означатиме, що саме тоді гра закінчиться і виграє перший гравець.

Стратегія для першого гравця може бути такою: перший віднімає x^2, а далі повторює ходи другого.

5. а) У першому, третьому, п’ятому і т.д. записаних числах буде почергово змінюватись парність (адже сума двох послідовних кількостей хвилин непарна). Серед них будуть з‘являтися парні числа. При цьому лише перше з них може дорівнювати 2 (отримане як 0+2 або 1+1), наступні парні числа більші за 2, і тому складені.

б). Якщо написаним числом є 1, а перша побачена Андрійком кількість хвилин дорівнює 0, ми отримуємо періодичну повторюваність остач записаних чисел при діленні на 5: 1, 2, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 1,…. Серед цих остач не буде 0.

Відповідь: Не обов'язково

6. а) У першому, третьому, п'ятому і т.д. записаних числах буде почергово змінюватись парність (адже сума двох послідовних кількостей хвилин непарна). Серед них будуть з'являтися парні числа. При цьому лише перше з них може дорівнювати 2 (отримане як 0+2 або 1+1), наступні парні числа більші за 2, і тому складені.

б) Якщо написаним числом є 1, а перша побачена Андрійком кількість хвилин дорівнює 0, ми отримуємо періодичну повторюваність остач записаних чисел при діленні на 5: 1, 2, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 1,…. Серед цих остач не буде 0.

7. Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1. Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4, тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати в перших чотирьох рядках, один — в чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик в три нижні рядки.

3.5. 9 клас (умови)

1. Чи можна записати цілі числа $1,2,3,4,5,6,7,8$ у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а)13; б)11; в)12?

2. Нехай x, y, z – такі додатні дійсні числа, що $xyz\left(x+y+z\right)=1$.

а) Доведіть, що виконується рівність

$$\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)^2.$$

б) Знайдіть хоча б одну трійку попарно різних чисел x, y, z, які задовольняють цю рівність.

3. П'ять прямих попарно перетинаються (див. рис.3.3). Чи можливо отримати довжини відрізків такими, як це вказано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.

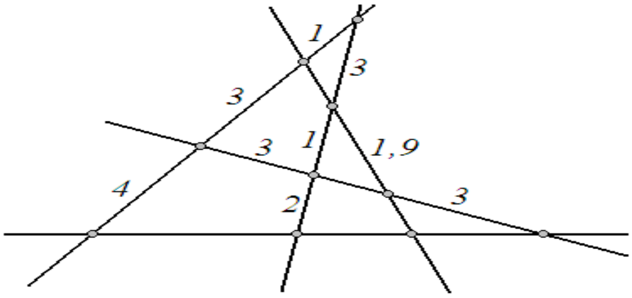


Рис.3.3

4. Дано квадратний тричлен $2013x^2+2012x+2011$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, x^2-x+1 чи x^2+x-1. Програє гравець, після ходу якого одержується многочлен з цілочисельним коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

5. Про функції f і g відомо, що

$$f(x)=\begin{cases}2-x, \text{ якщо } x>1,\\ |x|+2, \text{ якщо } x\le 1;\end{cases} \text{ і } g(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ якщо } x\ge 1,\\ -x+2, \text{ якщо } x<1.\end{cases}$$

Побудуйте графік функції $y=f(g(x))$.

6. Чи можна записати цілі числа $1,2,3,4,5,6,7,8$ у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а)13; б)11; в)12 ?

7. П'ять прямих попарно перетинаються (див. рис.3.4). Чи можливо отримати довжини відрізків такими, як це вказано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.

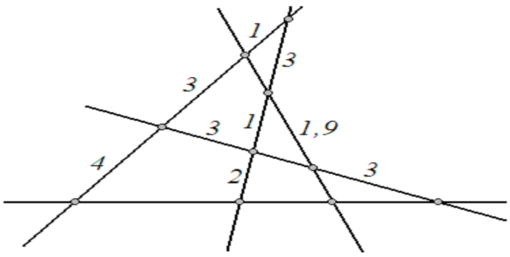


Рис.3.4

3.6. 9 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Див. завдання 8 класу.

2. а) Використовуючи умову, одержуємо:

$$x^2+\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{xyz(x+y+z)}{y^2}=x^2+\frac{xz(x+y+z)}{y}=$$
$$=\frac{x^2y+xz(x+y+z)}{y}=\frac{x(y+z)(z+x)}{y},$$

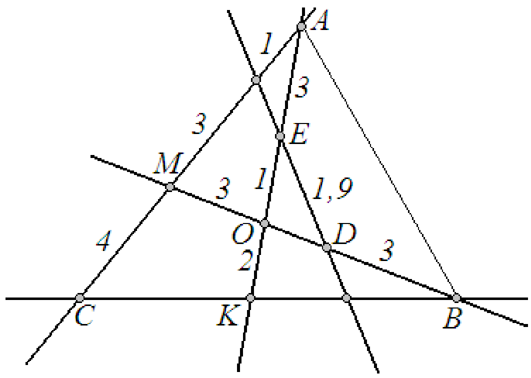
тобто $x^2+\frac{1}{y^2}=\frac{x(y+z)(z+x)}{y}$. Аналогічно можна довести, що

$$y^2+\frac{1}{z^2}=\frac{y(z+x)(x+y)}{z} \text{ і } z^2+\frac{1}{x^2}=\frac{z(x+y)(y+z)}{x}.$$

Перемноживши останні три рівності, одержуємо рівність, яку і треба було довести.

б) Нехай $x=1$, $y=2$, тоді число z знаходимо з умови: $2z(3+z)=1$, тобто $2z^2+6z-1=0$. Звідки $z=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$ – додатний корінь цього квадратного рівняння. Тому, потрібною трійкою можуть бути такі числа: $x=1$, $y=2$, $z=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$.

3. Позначимо деякі точки перетину прямих так, як це вказано на рисунку, і з'єднаємо точки A і B відрізком. Припустимо, що таке можливо. Тоді BM – медіана трикутника ABC, бо $AM=CM$. Оскільки $AO=4$ і $OK=2$, то $AO:OK=2:1$. Звідси випливає, що O – точка перетину медіан трикутника ABC. Оскільки $BO=2MO=2\cdot3=6$, то $OD=BO-BD=6-3=3$, що суперечить нерівності для сторін трикутника OED: $OE+ED>OD$. Одержане протиріччя і доводить, що виконати умову задач не можна.



Відповідь: Ні, неможна

Рис.3.5

4. Доведемо, що виграє перший гравець. Він може ходити так, щоб після його ходу вільний член одержаного многочлена був непарним, а коефіцієнти

при x^2 та x мали однакову парність. Тоді після ходів першого гравця будуть з'являтися квадратні тричлени, які у цілих точках приймають лише непарні значення, а тому не матимуть цілих коренів. Діючи саме так, перший гравець не програє.

Відмітимо, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною 0, тобто одержаний многочлен, з такою сумою коефіцієнтів, матиме корінь $x=1$. Це означатиме, що саме тоді гра закінчиться і виграє перший гравець.

Стратегія для першого гравця може бути такою: перший віднімає x^2, а далі повторює ходи другого.

5. Оскільки при $x \ge 1$ значення функції $g(x)=2x+1 \ge 2\cdot 1+1=3$, а при $x<1$ значення $g(x)=-x+2>-1+2=1$, то це означає, що $g(x)>1$ при усіх дійсних x. Тоді, за означенням функції f, матимемо, що $f(g(x))=2-g(x)$, тобто $y=2-g(x)$.

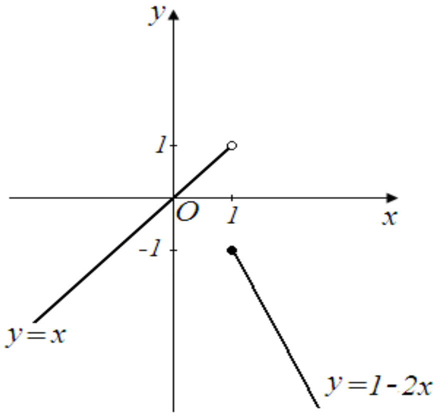


Рис.3.6

6. Нехай біля вершин правильного восьмикутника послідовно, за рухом годинникової стрілки, записані числа:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

a) Якщо припустити, що виконується умова задачі, то

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 \ge 14, \\ a_2+a_3+a_4 \ge 14, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_7+a_8+a_1 \ge 14, \\ a_8+a_1+a_2 \ge 14. \end{cases}$$

Додавши усі ці вісім нерівностей, одержимо: $3(a_1+a_2+...+a_8) \ge 8\cdot 14$.

Оскільки $a_1+a_2+...+a_8=1+2+...+8=36$, то правильною буде така нерівність: $3\cdot 36 \ge 8\cdot 14$, тобто $108 \ge 112$. Оскільки остання нерівність є хибною, то наше припущення про існування потрібного розміщення заданих чисел є неможливим.

б) У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$, $a_6 = 7$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$.

в) Доведемо, що потрібного розміщення заданих чисел не існує. Припустимо, що це не так. Числа 2 і 3 не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше зліва і справа від них повинно бути записаним лише число 8, що неможливо. Далі, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1 = 1$, тоді $a_4 = 2$ і $a_6 = 3$, або $a_4 = 3$ і $a_6 = 2$. Тоді, для обох цих випадків, однозначно $a_5 = 8$. Далі, розглянувши чотири випадки для розташування 4, одержимо, що 8 знову повинно з'явитися, що дає суперечність.

Відповідь. *а*) Не можна; *б*) Можна; *в*) Не можна.

7. Оскільки довжина *CD*має бути натуральним числом, і є меншою за *CE*+*ED*=2, отримуємо *CD*=1. Аналогічно в трикутнику *ABE* довжина *BE* буде більшою за 2 і меншою за 4, і тому *BE*=3. Оскільки трикутник *CDE* — рівносторонній, маємо ∠*CED*=60º, звідки ∠*BEA*=60º. Звідси і з рівності *BE*=*AE* тоді ми отримуємо, що всі кути трикутника *ABE* дорівнюють 60º. Це суперечить тому, що *AB* ≠ *AE*.

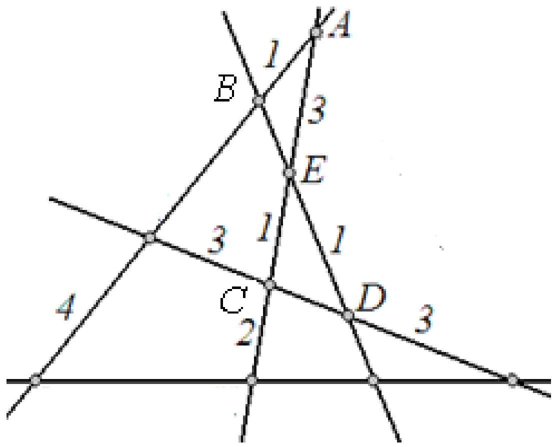


Рис.3.7

3.7. 10 клас (умови)

1. Знайдіть усі дійсні x, для яких виконується рівність $\left\{3\left\{3\left\{3\{3\{3x\}\}\right\}\right\}\right\} = x$.(Тут запис $\{a\}$ означає дробову частину числа a.)

2. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 406, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2012. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n$. Відповідь обґрунтуйте.

3. У паралелограмі$ABCD$ провели діагональ AC. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і AC відповідно у точках M, N і K. Пряма MK перетинає пряму CD у точці P, а пряма NK перетинає пряму AD у точці Q. Нехай E і F – середини відрізків MP і NQ. Доведіть, що точки B, E і F лежать на одній прямій.

4. Числова послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ задовольняє умови $a_1 = 1, a_2 = 9$ і $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$ для усіх натуральних n. Доведіть, що для кожного натурального n число a_n – квадрат цілого числа.

5. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n$. Відповідь обґрунтуйте.

6. На дошці записані (в такому порядку) два числа a і b. Андрійко ліворуч від a пише число $\frac{a+1}{b}$, після чого витирає число b. Потім він робить таку саму операцію з утвореною парою чисел, і так далі. а) Якщо $a = 20$, а $b = 12$, які числа буде написано на дошці після 2012 таких операцій? б). За яких значень aі b всі числа, які одержить Андрій, будуть натуральними? Відповіді обґрунтуйте.

7. На сторонах ABі CD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) обрано відповідно такі точки K і L, що $\angle BKC = \angle AKD, \angle BLC = \angle ALD$. Доведіть, що точки K і L рівновіддалені від точки перетину діагоналей трапеції.

3.8. 10 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Очевидно, $x \in [0,1)$. Доведемо таку властивість дробової частини дійсних чисел: для будь-якого дійсного a і натурального n виконується рівність

$$\{n\{a\}\} = \{na\}.$$

Доведення. Маємо $\{n\{a\}\} = n\{a\} - [n\{a\}] = n(a - [a]) - [n(a - [a])] =$

$$= na - n[a] - [na - n[a]] = na - n[a] - [na] + n[a] = na - [na] = \{na\},$$

що і треба було довести.

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне такому

$$\{3^5 x\} = \{243x\} = 243x - [243x] = x,$$

або $242x = [243x]$. Оскільки$x \in [0,1)$, то $242x$ буде цілим тоді й тільки тоді, коли $x = \frac{k}{242}, k = 0,1, \dots, \frac{241}{242}$. З іншого боку, якщо x має такий вигляд, то $243x = \frac{243k}{242} = k + \frac{k}{242}$, і , тому $[243x] = k = 242x$.

Відповідь.$x = \frac{k}{242}$, де $k = 0,1, \dots ,241$.

2. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, де $a_1 \neq 0$, a_2, …,a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та двох чисел n. При додаванні цих чисел в стовпчик:

$$
\begin{array}{r}
\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_k\ 0\ 0\ 0} \\
\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_k\ 0\ 0\ 0} \\
+ \qquad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} a_k\ 0} \\
\overline{a_1 \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \\
\overline{a_1} \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k
\end{array}
$$

якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа n. При перенесенні однієї одиниці у старший розряд сума цифр зменшується на 9. Тому, оскільки $2012 = 5 \cdot 406 - 2 \cdot 9$, то в старший розряд (або старші розряди) було перенесено двійку (або дві одиниці). Тому при додаванні двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та <u>одного</u> числа n (тобто при множенні n на 2011) в старші розряди або було перенесено дві одиниці (чи двійку), або одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливі значення суми цифр числа $2011n$: $1606 = 4 \cdot 406 - 2 \cdot 9$, $1615 = 4 \cdot 406 - 9$, $1624 = 4 \cdot 406$. Покажемо, що всі ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо $A_k = \underbrace{40004000 \dots 4000}_{k\ разів}$. Тоді

сума цифр кожного з чисел $n_0 = A_{100} + 420$, $n_1 = 10A_{100} + 1050$, $n_2 = 10A_{99} + 2323$ становить 406, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$, $2012n_2$ становить 2012, а суми цифр чисел $2011n_0$, $2011n_1$ та $2011n_2$ дорівнюють відповідно 1624, 1615 та 1609. *Відповідь.*1609, 1615, 1624.

3. За теоремою про дотичні, маємо $AM = AK, BM = BN$ і $CN = CK$, тобто трикутники MAK, MBN і NCK – рівнобедрені. Звідси випливають наступні рівності кутів: $\angle AMK = \angle AKM$ і $\angle CNK = \angle CKN$.

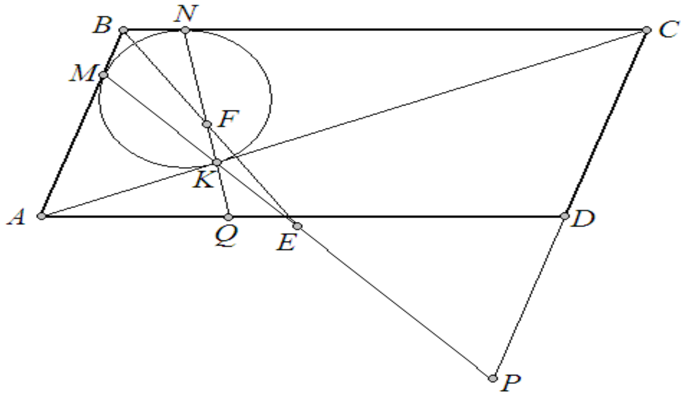


Рис.3.8

Далі, $\angle AMK = \angle CPK$ і $\angle AQK = \angle CNK$ як внутрішньо різносторонні при паралельних перетнутих третьою прямою. Крім того, $\angle AKM = \angle CKP$ і $\angle AKQ = \angle CKN$ як вертикальні. Отже, $\angle AKQ = \angle AQK$ і $\angle CKP = \angle CPK$, тобто трикутники KAQ і KCP – рівнобедрені. Звідси випливає, що $AM = AK = AQ$ і $CN = CK = CP$, тобто трикутники MAQ і NCP – рівнобедрені (див. рис.3.9).

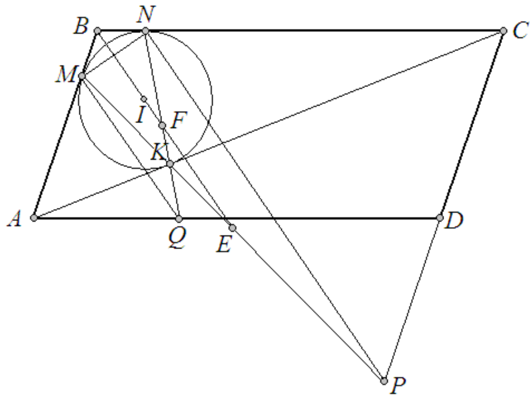


Рис.3.9

Нехай I– центр кола, вписаного в трикутник ABC, тоді BI – серединний перпендикуляр відрізка MN і бісектриса кута ABC. З рівнобедреності трикутника MAQ випливає $\angle AMQ = \frac{180° - \angle MAQ}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI$, тобто $MQ \parallel BI$. Аналогічно доводиться, що $NP \parallel BI$.

Таким чином, з того, що $MQ \parallel NP \parallel BI$ і BI проходить через середину MN, то за теоремою Фалеса BI проходить через середини відрізків MP і NQ, що і завершує доведення.

4. З умови задачі знаходимо, що усі члени заданої послідовності – цілі числа, причому $a_3 = 14 \cdot 9 - 1 - 4 = 121$. Спочатку, за допомогою методу математичної індукції, доведемо, що $a_{n-1}a_{n+1} = (a_n + 2)^2$ для всіх $n \geq 2$ - база індукції. При $n = 2$ маємо $a_1 a_3 = 1 \cdot 121 = (9 + 2)^2 = (a_n + 2)^2$- крок індукції. Нехай $a_{n-1}a_{n+1} = (a_n + 2)^2$. Доведемо, що $a_n a_{n+2} = (a_{n+1} + 2)^2$. Дійсно,

$$a_n a_{n+2} - (a_{n+1}+2)^2 = a_n(14a_{n+1} - a_n - 4) - (a_{n+1}+2)^2 =$$
$$= 14a_n a_{n+1} - a_n^2 - 4a_n - a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} - 4 =$$
$$= a_{n+1}(14a_n - a_{n+1} - 4) - (a_n+2)^2 = a_{n-1}a_{n+1} - (a_n+2)^2 = 0.$$

Таким чином, за принципом математичної індукції, $a_{n-1}a_{n+1} = (a_n+2)^2$ для всіх $n \geq 2$, тобто для усіх $n \geq 2$ добуток $a_{n-1}a_{n+1}$ є квадратом цілого числа. Якщо a_{n-1} – квадрат цілого числа і $a_{n-1}a_{n+1}$ – квадрат цілого числа, то і a_{n+1} – квадрат цілого числа. Оскільки $a_1 = 1$ і $a_2 = 9$ – квадрати цілих чисел, за індукцією одержуємо, що a_n – квадрат цілого числа для кожного натурального n, що і треба було довести.

5. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, де $a_1 \neq 0$, a_2, …,a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та двох чисел n. При додаванні цих чисел в стовпчик:

$$
\begin{array}{rr}
 & \overline{a_1a_2a_3a_4\dots a_k}\ 0\ \ 0\ \ 0 \\
 & \overline{a_1a_2a_3a_4\dots a_k}\ 0\ \ 0\ \ 0 \\
+ & \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}a_{k-1}a_k}\ 0 \\
 & \overline{a_1\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k} \\
 & \overline{a_1\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k}
\end{array}
$$

якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа n. При перенесенні однієї одиниці устарший разряд сума цифр зменшується на 9. Тому, оскільки $2011 = 5 \cdot 404 - 9$, то в старший розряд було перенесено одиницю. Тому при додаванні двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та одного числа n (тобто при множенні n на 2011) в старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа $2011n$: $1607 = 4 \cdot 404 - 9$, $1616 = 4 \cdot 404$. Покажемо, що обидва ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо $A_k = \underbrace{40004000 \dots 4000}_{k\ разів}$. Тоді сума цифр кожного з чисел $n_0 = A_{100} + 400$, $n_1 = A_{100} + 40$ становить 404, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$ становить 2011, а суми цифр чисел $2011n_0$ та $2011n_1$ дорівнюють відповідно 1616 та 1607.

*Відповідь.*1607, 1616.

6. Розглянемо перетворення $f:(x,y)\mapsto\left(\frac{x+1}{y},x\right), x>0, y>0$. Легко перевірити, що п'ять послідовних виконань цього перетворення дає такі результати:

$$(x,y)\underset{f}{\to}\left(\frac{x+1}{y},x\right)\underset{f}{\to}\left(\frac{x+y+1}{xy},\frac{x+1}{y}\right)\underset{f}{\to}\left(\frac{y+1}{x},\frac{x+y+1}{xy}\right)\underset{f}{\to}$$

$$\underset{f}{\to}\left(y,\frac{y+1}{x}\right)\underset{f}{\to}(x,y)$$

Таким чином, перетворення f таке, що $f(f(f(f(f(x,y)))))=(x,y)$ для будь-яких $x>0, y>0$.

а) Оскільки $2012=5\cdot402+2$, то скориставшись поміченою властивістю перетворення f, одержуємо, що Андрійко після 2012операцій одержить числа $\frac{a+b+1}{ab}=\frac{33}{240}=\frac{11}{80}$та $\frac{a+1}{b}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$.

б) Щоб одержана після однієї операції пара чисел була натуральною, необхідно і достатньо, щоб $a+1=kb$, де k – натуральне. Щоб одержані після двох операцій числа були натуральними, треба, щоб $\frac{k+1}{a}=\frac{k+1}{kb-1}$було натуральним. Тоді $\frac{k+1}{kb-1}\geq1$, тобто $2\geq k(b-1)$. З цієї нерівності випливає, що або $b=1$,або $k=2$ і $b-1=1$, або $k=1$ і $b-1\in\{1,2\}$. Якщо $b=1$, то з того, що $\frac{k+1}{kb-1}=\frac{k+1}{k-1}$ натуральне, одержуємо, що $k=2$ або $k=3$, звідки $(a,b)=(1,1)$ або $(a,b)=(2,1)$. Якщо $k=2$ і $b-1=1$, то $(a,b)=(3,2)$. Якщо $k=1$ і$b-1=1$, то $(a,b)=(1,2)$. Якщо $k=1$ і $b-1=2$, то $(a,b)=(2,3)$. Легко бачити, що $(1,1)\underset{f}{\to}(2,1)\underset{f}{\to}(3,2)\underset{f}{\to}(2,3)\underset{f}{\to}(1,2)\underset{f}{\to}(1,1)$, тому всі знайдені пари чисел справді мають бажану властивість.

Відповідь. а) $\frac{11}{80}$та $\frac{7}{4}$; б) $(a,b)\in\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.

7. Нехай точка C' симетрична точці C відносно прямої AB. Тоді $\angle BKC'=\angle BKC=\angle AKD$, тому точки C', K і D лежать на одній прямій. За теоремою синусів $\frac{BC}{CK}=\frac{\sin\angle BKC}{\sin\angle ABC}=\frac{\sin\angle AKD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{KD}$, тому $\frac{C'K}{KD}=\frac{CK}{KD}=\frac{BC}{AD}$. Нехай O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$.З подібності трикутників COB і AOD

маємо, що $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD}$. Таким чином, $\frac{C'K}{KD} = \frac{BO}{OD}$, тому трикутники $C'DB$ і KDO подібні, звідки $OK = C'B\frac{OD}{BD} = BC\frac{AD}{BC+AD}$. Аналогічно $OL = BC\frac{AD}{BC+AD}$, що й треба довести.

3.9. 11 клас (умови)

1. Знайдіть усі дійсні x, для яких виконується рівність $\left\{3\left\{3\left\{3\{3\{3x\}\}\right\}\right\}\right\} = x$. (Тут запис $\{a\}$ означає дробову частину числа a.)

2. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 406, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2012. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n$. Відповідь обґрунтуйте.

3. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа. Доведіть, що
$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \le \frac{1}{6}(a+b+c).$$

4. Нехай A – точка, яка лежить зовні заданого кола ω. Через точку A провели дві прямі, одна із яких перетинаєω в точках B і C, а інша – в точках D і E (точка D лежить між A і E). Пряма, що проходить через D і паралельна прямій BC, вдруге перетинає ω в точці F а пряма AF вдруге перетинає ω в точці T. Нехай M – точка перетину прямих BC і ET, N – точка, симетрична точці A відносно точки M, а K – серединаBC. Доведіть, що точки D, E, K і N лежать на одному колі.

5. Нехай α і β – такі гострі кути, що $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$. Доведіть, що $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta)$.

6. У паралелограмі $ABCD$ провели діагональ AC. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і AC відповідно у точках M, N і K. Пряма MK перетинає пряму CD у точці P, а пряма NK перетинає пряму AD у точці Q. Нехай E і F – середини відрізків MP і NQ. Доведіть, що точки B, E і F лежать на одній прямій.

7. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n$. Відповідь обґрунтуйте.

3.10. 11 клас (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Очевидно, $x \in [0,1)$. Доведемо таку властивість дробової частини дійсних чисел: для будь-якого дійсного a і натурального n виконується рівність

$$\{n\{a\}\} = \{na\}.$$

Доведення. Маємо $\{n\{a\}\} = n\{a\} - [n\{a\}] = n(a-[a]) - [n(a-[a])] =$
$= na - n[a] - [na - n[a]] = na - n[a] - [na] + n[a] = na - [na] = \{na\}$,
що і треба було довести.

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне такому

$$\{3^5 x\} = \{243x\} = 243x - [243x] = x,$$

або $242x = [243x]$. Оскільки$x \in [0,1)$, то $242x$ буде цілим тоді й тільки тоді, коли $x = \frac{k}{242}, k = 0,1,\dots,241$.З іншого боку, якщо x має такий вигляд, то $243x = \frac{243k}{242} = k + \frac{k}{242}$,і $\frac{k}{242} \in [0,1)$, тому $[243x] = k = 242x$.

Відповідь.$x = \frac{k}{242}$, де $k = 0,1,\dots,241$.

2. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, де $a_1 \neq 0$, a_2, …,a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та двох чисел n. При додаванні цих чисел в стовпчик:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & \overline{a_1a_2a_3a_4\dots a_k} & 0 & 0 & 0 \\
 & \overline{a_1a_2a_3a_4\dots a_k} & 0 & 0 & 0 \\
+ & & \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}a_{k-1}a_k} & & 0 \\
 & & & \overline{a_1\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k} & \\
 & & & \overline{a_1}\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k &
\end{array}
$$

якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа n. При перенесенні однієї одиниці устарший разряд сума цифр зменшується на 9.

Тому, оскільки $2012 = 5 \cdot 406 - 2 \cdot 9$, то в старший розряд (або старші розряди) було перенесено двійку (або дві одиниці). Тому при додаванні двох чисел $1000\,n$, одного числа $10n$ та <u>одного</u> числа n (тобто при множенні n на 2011) в старші розряди або було перенесено дві одиниці (чи двійку), або одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливі значення суми цифр числа $2011n$: $1606 = 4 \cdot 406 - 2 \cdot 9$, $1615 = 4 \cdot 406 - 9$, $1624 = 4 \cdot 406$. Покажемо, що всі ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо $A_k = \underbrace{40004000 \dots 4000}_{k\ разів}$. Тоді сума цифр кожного з чисел $n_0 = A_{100} + 420$, $n_1 = 10A_{100} + 1050$, $n_2 = 10A_{99} + 2323$ становить 406, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$, $2012n_2$ становить 2012, а суми цифр чисел $2011n_0$, $2011n_1$ та $2011n_2$ дорівнюють відповідно 1624, 1615 та 1609.

*Відповідь.*1609, 1615, 1624.

3. Для доведення цієї нерівності скористаємося такою відомою нерівністю: $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$, де $x,\ y,\ z$ – додатні дійсні числа. Вона легко доводиться за допомогою нерівності Коші для трьох додатних чисел. З цієї нерівності випливає справедливість й такої нерівності:

$$\frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Оскільки $a + 3b + 2c = 2b + (b + c) + (c + a)$, то, скориставшись попередньою нерівністю, одержимо:

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} \leq \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}\right) = \frac{a}{18} + \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{b + c} + \frac{ab}{c + a}\right).$$

Аналогічно,

$$\frac{bc}{b + 3c + 2a} \leq \frac{b}{18} + \frac{1}{9}\left(\frac{bc}{c + a} + \frac{bc}{a + b}\right),$$

$$\frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{c}{18} + \frac{1}{9}\left(\frac{ca}{a + b} + \frac{ca}{b + c}\right).$$

Додавши ці нерівності, одержимо:

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq$$

$$\leq \frac{1}{18}(a+b+c)+\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}+\frac{ca}{b+c}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}(a+b+c)+\frac{1}{9}(a+b+c)=\frac{1}{6}(a+b+c),$$

що і потрібно було довести.

4. Оскільки $DF \parallel BC$, то $\angle DFA = \angle CAF$. Крім того, $\angle DFA = \angle DFT = \angle DET$ як вписані, що спираються на одну дугу. Отже, $\triangle AMT \sim \triangle EMA$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін: $\frac{AM}{MT}=\frac{EM}{AM}$, тобто $AM^2 = EM \cdot MT$. За теоремою про січні кола, маємо $ME \cdot MT = MB \cdot MC$. Тому $AM^2 = MB \cdot MC = (AB - AM) \cdot (AC - AM) = AB \cdot AC - AM \cdot (AB + AC) + AM^2$. Звідси $AB \cdot AC = AM \cdot (AB + AC)$. Оскільки K – середина BC, то $AB + AC = 2AK$. За теоремою про січні маємо $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Отже, $AD \cdot AE = AM \cdot 2AK$. Оскільки M – середина AN, то остання рівність запишеться так: $AD \cdot AE = AN \cdot AK$, тому точки D, E, K і N лежать на одному колі.

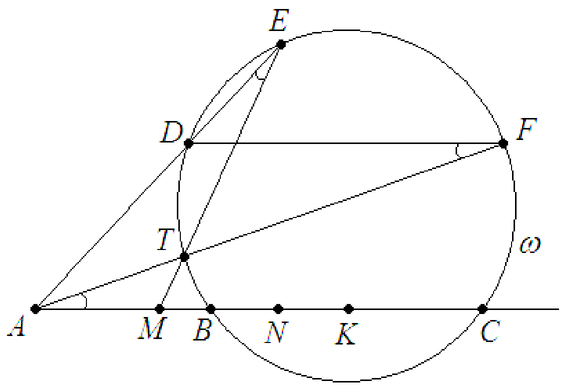


Рис.3.10

5. Без обмеження загальності можна вважати, що $\alpha \geq \beta$. Оскільки $\sin^2 x$ зростає при $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, та $\sin^2\alpha + \sin^2(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Запишемо

$$\sin^2(\alpha+\beta) - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2(\alpha+\beta) - 1) =$$

$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= \cos(\alpha+\beta)\,(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Останній вираз додатній, оскільки $0 < \alpha - \beta < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\alpha+\beta) < \cos(\alpha-\beta)$.

6. За теоремою про дотичні, маємо $AM = AK, BM = BN$ і $CN = CK$, тобто трикутники MAK, MBN і NCK – рівнобедрені. Звідси випливають наступні

рівності кутів:$\angle AMK = \angle AKM$і $\angle CNK = \angle CKN$. Далі, $\angle AMK = \angle CPK$ і $\angle AQK = \angle CNK$ як внутрішньо різносторонні при паралельних перетнутих третьою прямою. Крім того, $\angle AKM = \angle CKP$ і $\angle AKQ = \angle CKN$ як вертикальні. Отже, $\angle AKQ = \angle AQK$ і $\angle CKP = \angle CPK$, тобто трикутники KAQ і KCP – рівнобедрені. Звідси випливає, що $AM = AK = AQ$ і $CN = CK = CP$, тобто трикутники MAQ і NCP – рівнобедрені (див. рис.3.11).

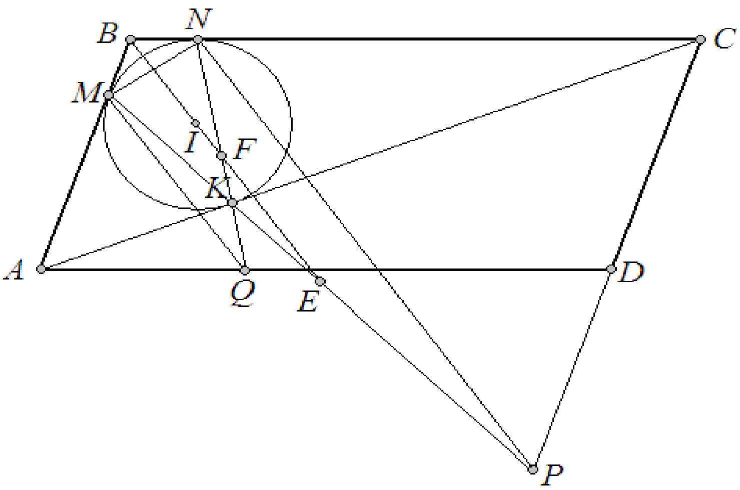


Рис.3.11

Нехай I– центр кола, вписаного в трикутник ABC, тоді BI – серединний перпендикуляр відрізка MN і бісектриса кута ABC. З рівнобедреності трикутника MAQ випливає $\angle AMQ = \frac{180° - \angle MAQ}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI$, тобто $MQ \parallel BI$. Аналогічно доводиться, що $NP \parallel BI$.

Таким чином, з того, що $MQ \parallel NP \parallel BI$ і BI проходить через середину MN, то за теоремою Фалеса BI проходить через середини відрізків MP і NQ, що і завершує доведення.

7. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, де $a_1 \neq 0$, a_2, …,a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та двох чисел n. При додаванні цих чисел в стовпчик:

$$\begin{array}{r} \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_k\ 0\ 0\ 0} \\ \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_k\ 0\ 0\ 0} \\ +\qquad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} a_k\ 0} \\ \overline{a_1 \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \\ \overline{a_1} \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k \end{array}$$

якщо не відбувається переносів в наступний разряд, то сума цифр утвореного числа, як неважко помітити, у 5 разів більша за суму цифр числа n. При перенесенні однієї одиниці устарший разряд сума цифр зменшується на 9. Тому, оскільки $2011 = 5 \cdot 404 - 9$, то в старший розряд було перенесено одиницю. Тому при додаванні двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ та одного числа n (тобто при множенні n на 2011) в старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа $2011n$: $1607 = 4 \cdot 404 - 9$, $1616 = 4 \cdot 404$. Покажемо, що обидва ці значення можуть бути реалізованими. Покладемо $A_k = \underbrace{40004000 \ldots 4000}_{k\ разів}$. Тоді сума цифр кожного з чисел $n_0 = A_{100} + 400$, $n_1 = A_{100} + 40$ становить 404, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$ становить 2011, а суми цифр чисел $2011n_0$ та $2011n_1$ дорівнюють відповідно 1616 та 1607.

*Відповідь.*1607, 1616.

IV. ЗАДАЧІ IV ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ (2009-2010 РР.)

4.1. 8 клас (умови)

1. При яких натуральних n значення кожного з виразів $n^2-10n+23, n^2-9n+31, n^2-12n+46$ є простим числом.

2. В рядок записали $n \geq 5$ дійсних чисел. З'ясувалось, що сума будь-яких трьох записаних поспіль чисел – додатне число, а сума будь-яких 5 записаних поспіль чисел є від'ємним числом. При якому найбільшому значенні n це можливо?

3. Точка P належить трикутнику ABC. Центри описаних кіл трикутників PBC, PAC, PAB позначимо через O_A, O_B, O_C відповідно. Позначимо через O_P- центр описаного кола трикутника $O_AO_BO_C$. Доведіть, що точка P задовольняє умову $O_P=P$ тоді і тільки тоді, коли P - ортоцентр ΔABC.

4. Розв'яжіть в натуральних числах n , k рівняння:

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

5. У різних вершинах рівностороннього трикутника зі стороною 1 знаходяться три бігуни: Перший, Другий та Третій. Вони одночасно починають рухатись вздовж сторін в одному напрямі (Другий в напрямі Першого, Третій - в напрямі Другого, Перший - в напрямі Третього). Чи обов'язково зустрінуться у якийсь момент в одній точці усі три бігуни одночасно, якщо:

а) швидкості Першого, Другого та Третього відповідно дорівнюють 2008, 2009 та 2010?

б) вони рухаються з різними швидкостями, кожна з яких є натуральним числом?

6. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що будь-яке з чисел $1, 2, \ldots, 10$ може буде подане як цифра або як сума кількох цифр десятковогозапису числа n, що стоять поруч.

7. Нехай $a,\ b$ - такі натуральні числа, що

$$a(a,b) + b[a,b] = a^2 + b^2,$$

де через (a,b)та $[a,b]$ позначені відповідно найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чиселa,b. Знайдіть$(2010^a-1,2010^b-1)$.

8. В середині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC та гострим кутом при вершині відмічена точка P така, що $\angle BPC=2\angle BAC$. Нехай K– основа перпендикуляра, опущеного з A на пряму, якій належить бісектриса кута, суміжного з кутом $\angle BPC$. Доведіть, що $BP+PC=2AK$.

4.2. 8 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Нехай n таке натуральне число, що задовольняє умову задачі. Знайдемо суму усіх чисел: $3n^2-31n+100=2n^2-30n+n(n-1)+100$ - парне число. Це означає, що усі ці три числа не можуть бути непарними. Тому хоча б одне із них буде парним, тобто дорівнює 2. Розв'язавши кожне з трьох рівнянь:

$$n^2-10n+23=2, n^2-9n+31=2, n^2-12n+46=2,$$

ми знаходимо, що $n=3$ або $n=7$. Залишилося перевірити ці значення.

При $n=3$ маємо:

$$n^2-10n+23=2, n^2-9n+31=13 \text{ та } n^2-12n+46=19.$$

При $n=7$маємо:

$$n^2-10n+23=2, n^2-9n+31=17 \text{ та } n^2-12n+46=11.$$

Як бачимо усі одержані значення - прості. Отже, умова задачі виконується лише $n=3, n=7$.

Відповідь: $n=3, n=7$.

2. Наведемо відповідний приклад для $n=6$: $3,-5,3,3,-5,3$.

Припустимо, що існують вказані числа для деякого $n\ge 7$, виберемо довільні 5 чисел a,b,c,d,e,які стоять поруч. Оскільки за умовою $a+b+c>0$, $c+d+e>0 \Longrightarrow (a+b+c+d+e)+c>0$, а також $a+b+c+d+e<0$. Звідси очевидно, що $c>0$, тому серед 5 чисел, які стоять поруч середнє завжди повинно бути додатним. За таких умов усі числа окрім 2 крайніх з кожного краю є середніми у деякій п'ятірці, тому вони усі повинні бути додатними.

Тепер розглянемо 6 поруч записаних чисел: a, b, c, d, e, f. Тоді за умовою $a+b+c+d+e<0$, а $(a+b+c)+(d+e+f)>0$. Таким чином $f>0$, аналогічно $a > 0$, тобто крайні числа у кожній шістці повинні також бути додатними. Остаточно маємо, що усі n чисел повинні бути додатними. Що очевидно, умову задачі не задовольняє. Одержана суперечність завершує доведення.

Відповідь: $n = 6$.

3. Нехай $A' = PA \cap O_B O_C, B' = PB \cap O_A O_C C' = PC \cap O_B O_A O_A O_C$ є серединним перпендикуляром до BP, тому містить точку B' - середину відрізку BP. Аналогічно, A', C'є серединами PA, PC (рис.4.1). Якщо P є центром описаного кола $\Delta O_A, O_B, O_C$ то перпендикуляр, опущений з P на $O_A O_C$є серединним, отже B', як основа цього перпендикуляру є також серединою $O_A O_C$. Аналогічно, в цьому випадку, A', C' є серединами $O_B O_C$, $O_A O_B$. При цьому $PB \perp O_A O_C \parallel A'C' \parallel AC$, бо $A'C'$є середньою лінією трикутників $O_A O_B O_C$та APC. Аналогічно $PA \perp BC$, $PC \perp AB$, отже P - ортоцентр ΔABC. Очевидно також, що якщо P - ортоцентр, то $OP = P$.

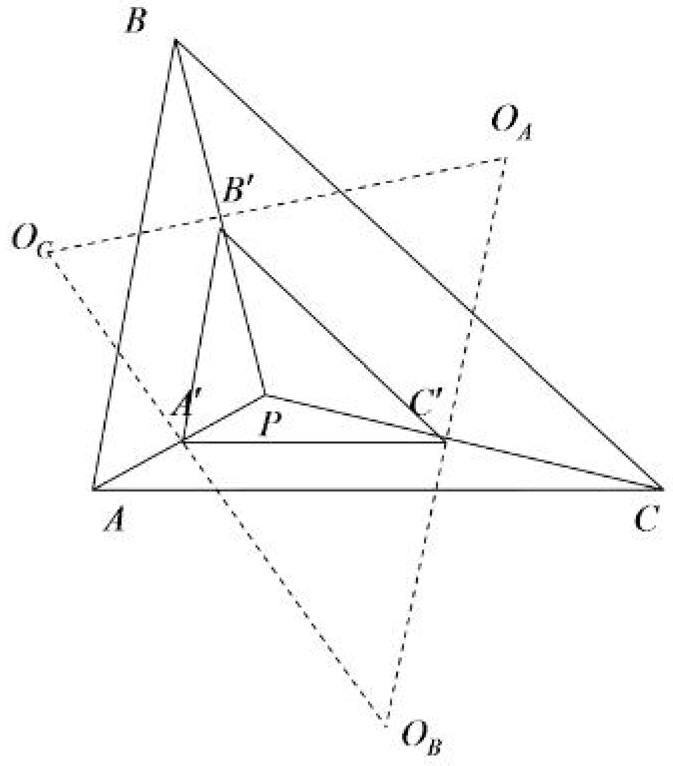


Рис.4.1

4. Перепишемо рівняння у вигляді $2n^k + 3n = (n+1)^n - 1$. Розкладемо праву частину на множники і отримаємо:

$$2n^k + 3n = (n+1)^n - 1 =$$
$$= (n + 1 - 1)((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \cdots + (n+1) + 1).$$

Права частина ділиться на n^2 оскільки перший множник дорівнює n, а другий має n доданків, кожний з яких дає остачу 1 при діленні на n, тобто також ділиться на n. Отже $(2n^{k-1} + 3) \vdots n$. Можливі два випадки.

1) $k = 1$, тому $5 \vdots n$, тому треба розглянути випадки $n = 1$ та $n = 5$. При

$n = 1$ маємо $2 = 6$ - суперечність. При $n = 5$ маємо $6^5 = 31$ - також суперечність.

2) $k > 1$, тоді повинна виконуватись умова $3 \vdots n$. Знову треба розглянути два випадки $n = 1$ та $n = 3$. При $n = 1$ маємо $2 = 6$ - суперечність. При $n = 3$ маємо $64 = 2 \cdot 3^k + 10$, звідки знаходимо, що $k = 3$.

Таким чином знаходимо розв'язок $n = k = 3$.

5. *а)* Запишемо умову зустрічі бігунів у одній точці: $2008t = 2010t + 1 - 3m = 2009t + 2 - 3n$, де $m, n \in Z, t \in R$. Звільнимось у цих рівняннях від дійсного параметру t і одержимо: $t = 3n - 2$, або $2t = 6n - 4$. Також маємо $2t = 3m - 1 \Rightarrow 3m - 1 = 6n - 4 \Leftrightarrow m = 2n - 1$, звідки шукані розв'язки легко знаходяться, наприклад, при $m = n = 1$ і, маємо $t = 1$. Простою підстановкою переконуємось, що дійсно через час $t = 1$ Перший пробіжить 2008, Другий - 2009 (на 1 більше, тобто як раз дожене Першого), Третій - 2010 і дожене Першого та Другого.

б) Нехай швидкості Першого, Другого та Третього відповідно 1, 2 та 4. Тоді умову зустрічі у одній точці можна записати таким чином: $t = 4t + 1 - 3m = 2t + 2 - 3n,\ m, n \in Z, t \in R$. Тоді $t = 3n - 2$та $3t = 3m - 1$. Звідси маємо таке рівняння у цілих числах: $9n - 6 = 3m - 1$, яке очевидно не має розв'язків, тобто три одночасно не зустрінуться.

Відповідь:а) обов'язково; *б)* не обов'язково.

6. Зрозуміло, що трицифровим це число бути не може. Припустимо, що воно має чотири цифри : $\overline{abcd}$, тоді усього можна побудувати 10 різних комбінацій сум сусідніх цифр: $a, b, c, d, a + b, b + c, c + d, a + b + c, b + c + d, a + b + c + d$. Для виконання умов задачі усі ці 10 значень повинні бути різними. Таким чином усі цифри різні та їх сума 10, оскільки цифра 0 у нашому числі просто зайва, то єдиною можливою комбінацією цифр є 1, 2, 3, 4. Але для того, щоб одержати у сумі число 9, цифра 1 повинна стояти на краю, аналогічно для одержання у сумі цифри 8 на краю повинна бути також цифра 2. Таким чином, з точністю до порядку (прямого чи зворотного) можливі числа 1342 або 1432. Але для першого числа неможна одержати суму 5, для другого - 6.

Таким чином число щонайменше п’ятицифрове. Воно не може починатись з 1111, оскільки для одержання суми 10 нам треба мати одне з чисел 11116, 11117, 11118, 11119, а з цих чисел не можна представити число 5. Так само початок 1112 задає такі числа - 11125, 11126, 11127, 11128, 11129 (щоб сума цифр була не меншою від 10).

Але тоді не можна представити число 5 (крім другого числа) та 6 для другого числа. Таким чином для мінімального числа початок повинен бути щонайменше 1113. Числа 11131, 11132, 11133 очевидно не дають у сумі 10, а число 11134 задовольняє умови, а тому є за доведенням мінімальним.

*Відповідь:*11134.

7. Нехай $(a,b)=d,$ тоді $a=dx$ і $b=dy,$ де x та y - взаємно прості натуральні числа. Оскільки $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=dxy,$ то задана рівність перепишеться так $d^2x+d^2xy^2=d^2x^2+d^2y^2,$ тобто $x+xy^2=x^2+y^2.$ Звідки $(x-1)(x-y^2)=0,$ тобто $x=1$ або $x=y^2.$ Оскільки x і y- взаємно прості числа, то друга рівність дає $x=1,\ y=1.$ В обох випадках $x=1,$ а це означає, що $b=ay,$ де y - деяке натуральне число. У цьому випадку, матимемо

$$2010^b-1=(2010^a)^y-1=(2010^a-1)((2010^a)^{y-1}+(2010^a)^{y-2}+\cdots+$$
$$+2010^a+1)\ \vdots\ 2010^a-1$$

Відповідь: $2010^a-1.$

8. Спочатку покажемо, що точка K завжди розташована всередині $\Delta ABC.$ Розглянемо випадок, коли точка $P=P_1$ лежить на стороні AB тоді послідовно обчислимо кути. Нехай $\angle BAC=\alpha$ (рис.4.2), тоді $\angle BP_1C=2\alpha\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\angle BCP_1=\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2}\Rightarrow\angle P_1CA=\alpha,$ таким чином ΔACP_1- рівнобедрений, тому висота P_1K_1 є бісектрисою, тому точка $K=K_1$ належить стороні *AC*. Тому при розташуванні точки P всередині ΔABC бісектриса PK зовнішнього кута $\angle BPC$ має менший кут з прямою $BC.$ Тому й перпендикуляр з вершини *A* на цю пряму розташований між сторонами *AB* та *AC* трикутника *ABC*.

Продовжимо перпендикуляр AK до перетину з прямою CP (рис.4.3) (без обмеження загальності розгляду задачі, будемо вважати, що точка P ближче до точки B ніж до C). Так само пряма BP перетинається з прямою AK у точці X. Тоді у ΔPXY відрізок PK- одночасно висота та бісектриса, тому він рівнобедрений, тобто $\angle PXY = \angle PYX$,звідки $\angle BXA = \angle AYC$. Якщо тепер позначимо $x = \angle XBA, y = \angle YCA, x_1 = \angle CAY, y_1 = \angle BAX$, тоді $x_1 + y_1 = \alpha,\ \pi - \alpha = X + Y + \angle PBC + \angle PCB = x + y + \pi - 2\alpha \Rightarrow x + y = \alpha = x_1 + y_1$, крім того $x + y_1 = y + x_1$. З останніх двох рівностей маємо $x = x_1, y = y_1$. Таким чином, $\Delta ABX = \Delta CAY$ за стороною та двома кутами.

Далі маємо такі рівності: $2AK = AX + AY = CY + BX = CY + BP + PX = CY + YP + BP = CP + BP$, що й треба було довести.

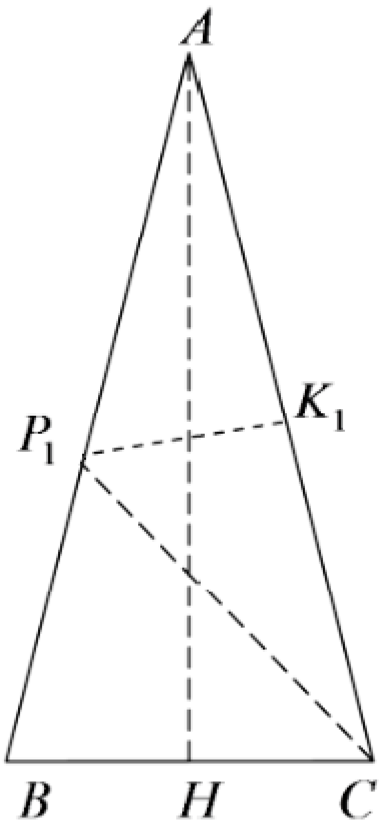


Рис.4.2

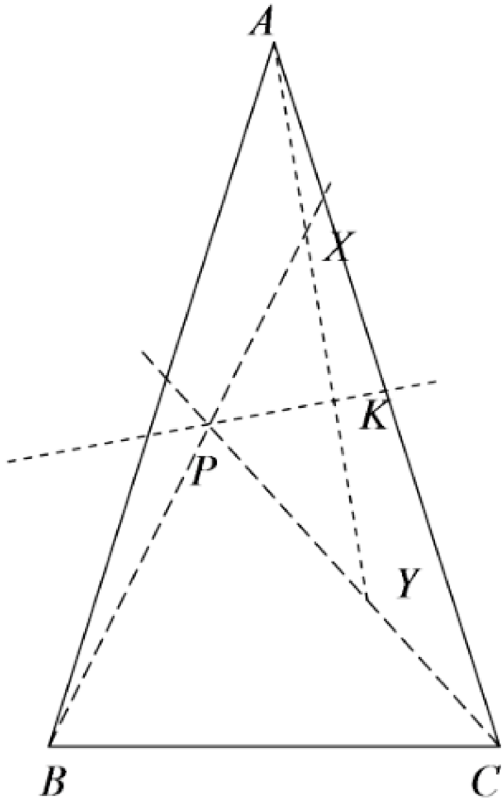


Рис.4.3

4.3. 9 клас (умови)

1. Числа $a_1 = 1, a_2 = 1 - \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots$

$\ldots, a_{2009} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2009}, a_{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2009} -$

$- \frac{1}{2010}$ записати порядку зростання (рис.4.4) .

З'ясуйте яке число у цій розстановці записане:

а) на 1000-му місці;

б) на 2000-му місці?

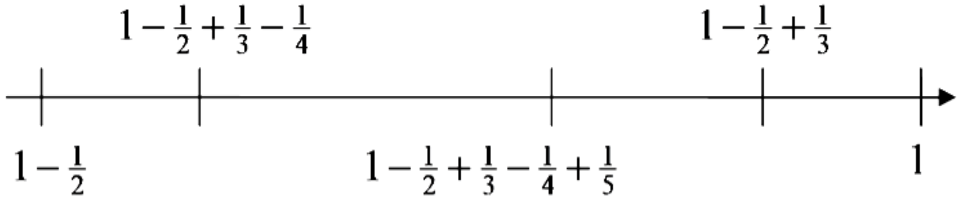


Рис.4.4

2. Нехай $P(x), Q(x)$ та $R(x)$ - многочлени, при цьому $Q(x)$ та $R(x)$ набувають лише невід'ємних значень. Відомо, що рівняння

$$P(x)+\sqrt{Q(x)}+\sqrt{Q(x)+\sqrt{R(x)}}=0$$

має нескінченно багато коренів. Чи випливає звідси, що будь-яке дійсне число є коренем даного рівняння?

3. Дано гострокутний трикутник *ABC.* На серединних перпендикулярах до його сторін AB і BC відповідно відмітили точки P і Q, а M і N - їх проекції на сторону AC. З'ясувалося, що $2MN = AC$. Доведіть, що описане коло трикутника PBQ проходить через центр описаного кола трикутника *ABC.*

4. Натуральні числа a, b такі, що число $m = a + b + 2\sqrt{ab+1}$ є натуральним. Доведіть, що m - складене число

5. Яку максимальну кількість вершин може мати опуклий багатокутник, у якого усі кути вимірюються цілим числом градусів?

6. Навколо гострокутного трикутника ABC описане коло. Хорда AD є бісектрисою кута трикутника та перетинає сторону BC у точці L, хорда DK перпендикулярна до його сторони AC і перетинає її в точці M. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{BL}{LC}=\frac{1}{2}$.

7. Куб складається з n^3 одиничних кубиків. Пряму, що проходить через центри рівно n одиничних кубиків назвемо "цікавою". Чи існує таке значення $n > 1$, при якому кількість цікавих прямих є степенем числа 2?

8. Дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задовольняють умови $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ та $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$na_1 \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

4.4. 9 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Неважко побачити, що кожне наступне число потрапляє проміж двома попередніми числами (рис.4.4.). Зрозуміло, що виконуються такі нерівності: Для парного $n = 2k$:

$$a_{2k-2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2k-2} < a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1} -$$

$$- \frac{1}{2k} < a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1},$$

Для непарного $n = 2k + 1$:

$$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2k} < a_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} +$$

$$+ \frac{1}{2k+1} < a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1}.$$

Тому усі числа будуть йти таким чином у порядку зростання:

$$a_2, a_4, \ldots, a_{2010}, a_{2009,} a_{2007}, \ldots, a_3, a_1.$$

Тепер вже неважко з'ясувати, що на 1000-му місці стоїть $a_{2000,}$ а на 2000-му місці стоїть a_{21}.

Відповідь: а) a_{2000}; *б)*a_{21}?

2. Покажемо, що це не так, для чого наведемо відповідний приклад.

$$P(x) = x, Q(x) = \frac{1}{4}x^2, \sqrt{Q(x)} = \frac{1}{2}|x|, R(x) = 0.$$

Тоді

$$\sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = \tfrac{1}{2}|x|,$$

І маємо: $P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = x + |x| = \begin{cases} 2x, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$

Таким чином ліва частина не дорівнює тотожньо нулеві, але рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що це не єдиний приклад, можна вибрати $Q(x) = \frac{1}{8}x^2$, $R(x) = (\frac{1}{8}x^2)^2$.

Відповідь: Не обов'язково.

3. Нехай O - точка перетину серединних перпендикулярів до сторін AB і BC (рис.4.5). Тоді O - центр описаного кола трикутника ABC. Нехай ці серединні перпендикуляри перетинають сторони AB і BC в точках K і L відповідно. Тоді KL - середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії одержуємо, що $KL \parallel AC$ і $2KL = AC$. Тому, $MKLN$ - паралелограм, бо $KL \parallel MN$ і $KL = MN$. Оскільки $PM \perp AC$ і $QN \perp AC$, то $PN \parallel QN$. Так як $PM \parallel QN$ і $KM \parallel LN$, то $\angle PMK = \angle QNL$.

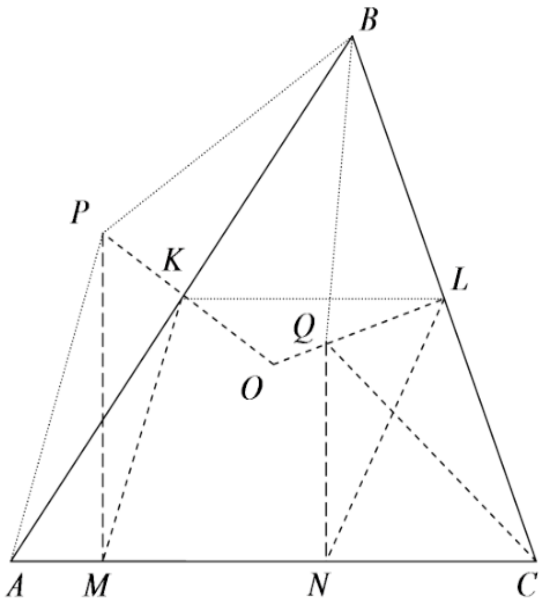


Рис.4.5

Точки A і P видно із точок K і M під прямими кутами, тому точки P, K, M і A лежать на колі з діаметром PA. Аналогічно доводиться, що точки Q, N, C і L лежать на колі з діаметром CQ , а точки O, K, B і L лежать на колі з діаметром BO. Звідси випливає, що $\angle PAK = \angle PMK = \angle QNL = \angle QCL$. Оскільки точки P і Q лежать на серединних перпендикулярах до сторін AB і BC, то трикутники APB і BQC - рівнобедрені. Звідси випливає, що $\angle PBA = \angle PAB = \angle QCB = \angle QBC$.

Таким чином $\angle PBQ = \angle KBL = 180^{\circ} - \angle KOL = 180^{\circ} - \angle POQ$, тобто точки $P,\ B,\ Q,\ O$ належать одному колу, що і треба було довести.

4. З умови випливає, що $2\sqrt{ab+1}$ −натуральне число. Число $z = \sqrt{ab+1}$ не може бути не натуральним, бо інакше $ab+1$ було б дробовим, а це неможливо, бо a, b −натуральні. Тоді $b = \frac{z^2-1}{a} = \frac{(z-1)(z+1)}{a}$. Це означає, що a можна розкласти на множники $a = a_1 a_2$ так, що $z-1$ ділиться на a_1, а $z+1$ − на

a_2. $\quad m = a + \frac{(z-1)(z+1)}{a} + 2z = \frac{(a+z)^2-1}{a} = \frac{(a+z-1)(a+z+1)}{a} = \frac{a+z-1}{a_1}\frac{a+z+1}{a_2}$.

Обидва множники $\frac{a+z-1}{a_1}$ та $\frac{a+z+1}{a_2}$ – натуральні та більші одиниці, а тому m-складене.

5. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180^{\circ}(n-2)$, максимальний кут, який визначається цілим числом градусів - це 179°. Таким чином ми можемо записати співвідношення $180^{\circ}(n-2) \leq 179^{\circ}n \Rightarrow n \leq 360$. Зрозуміло, що$n = 360$- це найбільше можливе значення. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику. Можна міркувати таким чином: сума зовнішніх кутів дорівнює 360°, і кожний зовнішній кут не менше 1°, таким чином може бути не більше 360 таких кутів. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику.

*Відповідь:*360.

6. За властивістю бісектриси $\frac{B\,L}{AB} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{LC}{BL}$,або $\frac{AC}{AB} = 2$, тобто $AC = 2AB$ (рис.4.6). Оскільки $\angle BAD = \angle DAC(AD$- бісектриса $\angle BAC$, то ці кути спираються на рівні дуги, тобто $BD = DC$. Розглянемо S- середину відрізку AC.Тоді $AS = SC = AB$.

Тод і $\Delta BAD = \Delta SAD$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси випливає, що $BD = DS$.А тоді $DC = BD = DS$.

Отже, трикутник ΔSDC- рівнобедрений з основою SC.Тоді його висота DM є одночасно і медіаною. Отже, $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$. Тоді $AM = AC - MC = AC - \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}AC$. Отже $\frac{AM}{MC} = \frac{\frac{3}{4}AC}{\frac{1}{4}AC} = 3$.

Зауваження: Оскільки в гострокутному трикутнику ABC, $AC = 2AB$, то кут $\angle ACB$ не більше 30° (рис.4.7). Це значить, що перпендикуляр з точки D на пряму AC перетинає її у внутрішній точці відрізку AC.

Відповідь : $\frac{AM}{MC} = 3$.

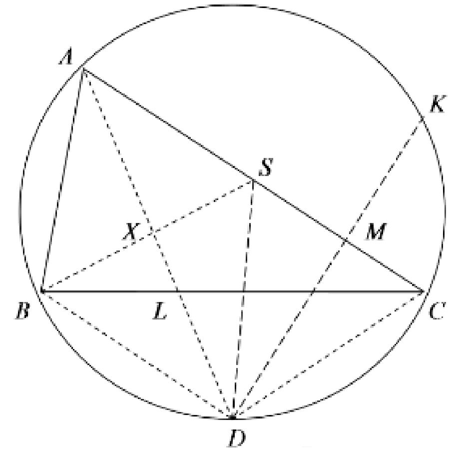


Рис.4.6

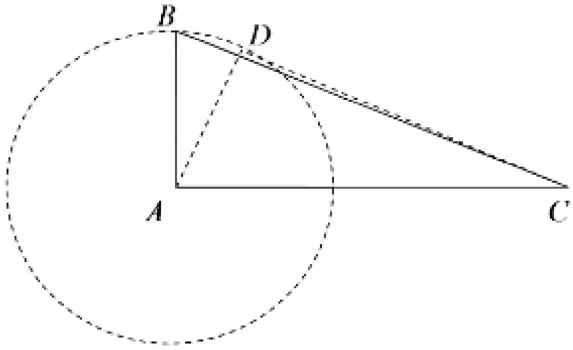


Рис.4.7

7. Для кубика стороною n загальна кількість різних ”цікавих” прямих буде дорівнювати $3n^2 + 6n + 4$. Це можна або безпосередньо обчислити, врахувавши, що ”цікаві” прямі можуть бути трьох напрямів: паралельно ребру, паралельнодіагоналі грані, діагональ усього кубика. Або застосувати такий підхід. Наліпимо на даний кубик шар кубиків товщиною в один кубик, таким чином отримавши новий кубик з розмірами $(n + 2)(n + 2)(n + 2)$. Зауважимо, що кожна цікава пряма проходить через центри рівно двох ”наліплених” кубиків, інакше вона б повністю належала зовнішньому шару. Причому через заданий ”наліплений” кубик проходить рівно одна цікава пряма. Таким чином, кожна цікава пряма відповідає єдиній парі ”наліплених” кубиків, а тому кількість цікавих прямих буде дорівнювати половині кількості ”наліплених” кубиків, а саме

$$\frac{1}{2}((n + 2)^3 - n^3) = 3n^2 + 6n + 4.$$

Тепер треба з’ясувати, чи існують натуральні розв’язки рівняння $3n^2 + 6n + 4 = 2^l$. Позначимо $m = n + 1$ і перепишемо його у такому вигляді: $3m^2 + 1 = 2^l$. Тепер розглянемо це рівняння за модулем 8. При $l \geq 3$ права частина кратна 8, а ліва частина на 8 не ділиться, оскільки дає остачі 1,4,5 при діленні на 8. Таким чином залишається лише розглянути випадки $l = 1$ та $l = 2$.

При $l = 1$ маємо $3m^2 + 1 = 2$ - немає натуральних розв’язків.

При $l = 2$ маємо $3m^2 + 1 = 4$- має натуральний розв'язок $m = 1$, але тоді $n = 0$, що суперечить умові.

Таким чином шуканого кубика не існує.

*Відповідь:*шуканого кубика не існує.

8. Доведення випливає з таких перетворень:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq$$
$$\leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1(a_1 - a_1) + a_2(a_1 - a_2) + \cdots + a_n(a_1 - a_n) =$$
$$= a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = na_1,$$

що й треба було довести.

4.5. 10 клас (умови)

1. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходить через точки $A(-2,1)$ та $B(2,9)$ і не має спільних точок з віссю абсцис. Знайти усі значення які може приймати абсциса вершини параболи.

2. Для деяких дійсних чисел x, y числа $x^2 + y^2, x^3 + y^3$та $x^4 + y^4$ раціональні. Чи обов'язково число$x + y$ також раціональне?

3. Андрій має картки, які з одного боку однакові, а на іншій стороні записані числа $1, 3, 5, \ldots, 2009$, а Леся - такі ж самі картки тільки з числами $2, 4, 6, \ldots, 2010$. Леся викладає усі свої картки в один ряд числами донизу (тобто значень чисел спочатку не видно), після цього Андрій викладає свої картки поверх Лесиних. Таким чином утворюється 1005 пар карток. Після цього числа у парах порівнюють і тому з гравців, у кого число більше, нараховується 1 бал. Андрію відомо, що Леся викладає свої картки з числами у порядку зростання зліва направо, починаючи з деякого місця. Коли вона доходить до останньої позиції, то далі знову починає викладати картки у порядку зростання з самої лівої позиції. Наприклад: $20, 22, 24, \ldots, 2010, 2,4, \ldots, 18$. Андрій прагне набрати якомога більше очок. Яку кількість очок він може собі забезпечити, яким би не виявились розташування карток з числами у Лесі?

4. Точка P належить трикутнику *ABC*. Центри вписаних кіл у трикутники *PBC, PAC, PAB* позначимо через I_A, I_B, I_C відповідно. Позначимо через I_P-

центр вписаного кола у трикутник $I_A I_B I_C$. Довести, що для точки P, яка задовольняє умову $I_P = P$, виконуються рівності:

$$AP - BP = AC - BC, \qquad BP - CP = BA - CA, CP - AP = CB - AB.$$

5. Розв'яжіть рівняння $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4} + \cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4} = \sqrt{2}$.

6. Знайдіть найменше натуральне число k, для якого існує такий набір з 2010 попарно різних натуральних чисел, що добуток будь-яких k чисел цього набору ділиться націло на добуток решти $2010 - k$ чисел набору.

7. На сторонах AB і BCтрикутника ABC вибрали точки K і M відповідно так, що $AK = KM = MC$. Нехай N - точка перетину прямих AM і CK, P- основа перпендикуляра, опущеного з точки N на пряму KM, а Q - така точка відрізка KM, що $MQ = KP$. Доведіть, що вписане коло трикутника KMB дотикаєтьсясторони KM у точці Q.

8. Яке найменше значення може приймати вираз

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$- попарно різні цілі числа.

4.6. 10 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Запишемо умови, що парабола проходить через задані точки:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 9, \end{cases}$$

звідки маємо, що $b = 2$ та $4a + c = 5$. З умови, що парабола не має дійсних коренів, маємо $D = b^2 - 4ac = 4 - 4a(5 - 4a) < 0$, звідки одержуємо умову на a: $\frac{1}{4} < a < 1$. Залишається розв'язати відповідну нерівність для абсциси вершини. Оскільки $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{a} \Rightarrow x_v \in (-4, -1)$.

Відповідь: $(-4, -1)$

2. Розглянемо спочатку випадок $xy = 0$, тобто припустимо, що, наприклад,$y = 0$. Якщо x^2 та x^3 – раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2} = x$.

Нехай тепер $xy \neq 0$.З рівності $(x^2 + y^2)^2 = (x^4 + y^4) + 2x^2y^2$маємо, що $(xy)^2 \in Q$. Але тоді$(x^6 + y^6) = (x^2 + y^2)\left((x^4 + y^4) + (xy)^2\right) \in Q$. Тому з рівності $(x^3 + y^3)^2 = (x^6 + y^6) + 2(xy)^3$ випливає, що $(xy)^3 \in Q$, але тоді вже й $\frac{(xy)^3}{(xy)^2} = xy \in Q$,і остаточно $x + y = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy} \in Q$, що й треба було довести.

Відповідь: Число обов'язково раціональне.

3. Для цього Андрій викладає свої картки справа наліво у такому порядку: $2009, 2007, 2005, \ldots, 3, 1$. Покажемо, що як би не викладала свої картки Леся Андрій набере 502 очки. Зробимо це методом математичної індукції. Усього у Лесі є 1005 варіантів викладання карток (кожний варіант зображений у відповідному рядку)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & \cdots & 2008 & 2010 \\ 4 & 6 & & 2010 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 2008 & 2010 & \cdots & 2004 & 2006 \\ 2010 & 2 & & 2006 & 2008 \end{bmatrix}$$

Якщо порівняти варіант Андрія з першим рядком, то бачимо, що треба порівняти такі розклади: $2, 4, \ldots, 2010$ та $2009, 2007, 2005, \ldots, 3, 1$.Як бачимо Андрій набирає рівно 502 очки у перших стовпчиках. Це - база індукції. Припустимо, що у k-му рядку Андрій набирає 502 очки. Тоді вони набираються так: частина у перших стовпчиках, а решта - у останніх. Разом - 502.

Покажемо,що у наступному k-му рядку - їх буде стільки ж. У порівнянні з k-*м* рядком, буде зменшення на 1 очко на початку рядка та збільшення на 1 очко наприкінці.

Тепер покажемо, що кращого результату Андрій досягти не зможе. Оскільки Леся знає розташування карток Андрія вона вибере той рядок із можливих який дає максимальну кількість очок саме їй. Підрахуємо, а скільки усього балів може набрати Андрій при усіх можливих 1005 Лесиних розкладах карт. Розташуємо карти Андрія під низом наведеної таблички 1005 x 1005.

Підрахуємо загальну кількість балів: там, де стоїть число 2009, Андрій набере 1004 очки (програє лише тому рядку, де у Лесі - 2010), Андрійкове число

2007 загалом набере 1003 очко, і т.д., число 1 набере 0 очок. Таким чином, разом буде набрано$1004 + 1003 + \cdots + 1 + 0 = \frac{1005\cdot1004}{2} 502 \cdot 1005$ очок.

Тому в середньому Андрій набирає 502 очки у кожній з 1005 варіантів. Тобто, якщо існують розклади, при якому хоч у одному рядку Андріїв виграш більше 502 очок, то існують варіанти, при яких виграш менший, а тому Леся може вибрати саме цей розклад. Таким чином наведений вище варіант для Андрія - найкращий.

*Відповідь:*Андрій може набрати 502 очки.

4. Позначимо точки $A' = AP \cap I_B I_C,\ B' = BP \cap I_A I_C, C' = CP \cap I_B I_A$ (рис.4.8). Оскільки $I_P = P$, то $I_P P$є бісектрисою кутів $\angle BPC$ та $\angle I_B I_A I_C$,тому дві пари прямих $I_A I_B,\ I_A I_C,$ а також BP, CP симетричні відносно прямої $I_A = P$. Тому $\angle(I_A I_B, CP) = \angle(BP,\ I_A I_C)$(орієнтовні кути). Аналогічно $\angle(\ I_B I_C, AP) = \angle CP,\ I_B I_A, \angle\ (I_C I_A, BP) = \angle(AP,\ I_C I_B)$ отже, $\angle(\ I_A I_B, CP) = \angle(BP,\ I_A I_C) = \angle(AP,\ I_C I_B) = \angle(CP,\ I_C I_A) \Rightarrow CP \perp\ I_B I_A$

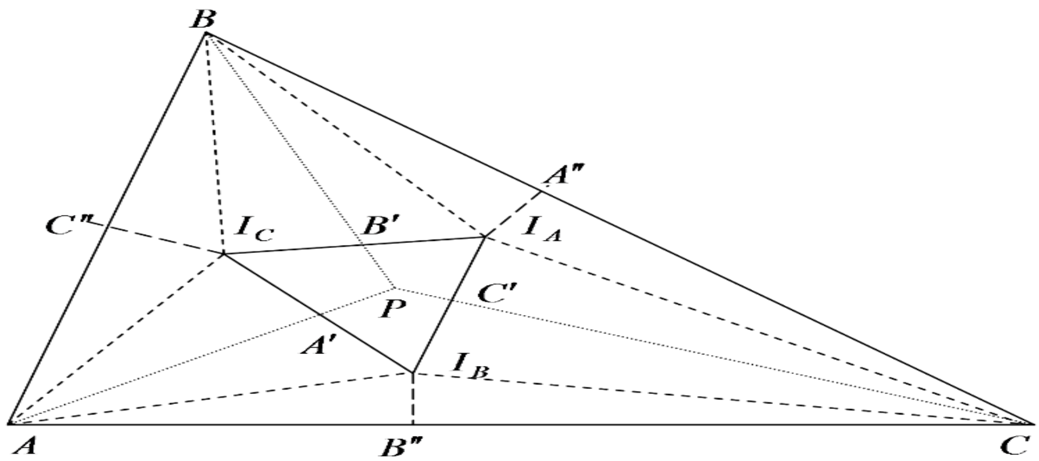


Рис.4.8

А оскільки основа перпендикуляру, опущеного з інцентра трикутника на його сторону, є точкою дотику із цією стороною вписаного кола, то вписані кола в ΔPAC та ΔPBC дотикаються прямої CP в C',отже ці два кола дотикаються і між собою. Аналогічно між собою в B' дотикаються вписані кола $\Delta PAB,\ \Delta PBC$ та $PB,$ а в A' - вписані кола $\Delta PAC,\ \Delta PAB$. Нехай A''- точка дотику вписаного кола ΔPBC та BC. Аналогічно визначаються точки B'', C''. Тоді

$$AP + BC = PA' + AA' + BA'' + A''C = PB' + AB'' + BB' + B''C = BP + AC.$$

Аналогічно $AP + BC = CP + AB$.Отже P - така точка, що $AP - BP = AC - BC, BP - CP = BA - CA, CP - AP = CB - AB$що й треба булодовести.

5. ОДЗ лівої частини нашого рівняння$x \in [0,2]$, при таких x обидві функції $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4}$ та $\cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4}$ є зростаючими, а тому сума також функція зростаюча. Звідси зрозуміло, що якщо рівняння має розв'язок, то він єдиний. Простим підбором знаходимо, що $x = 1$ є розв'язком, а тому він шуканий.

Відповідь: $x = 1$.

6. З одного боку, k не може бути меншим, ніж 1006: інакше добуток k найменших чисел довільного набору буде меншим за добуток решти $2010 - k \geq k$ чисел (усі множники у першому добутку будуть меншими за множники другого). З іншого боку, можна показати приклад набору, що задовольняє умову $k = 1006$.

Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{2010}$ — 2010 довільних попарно різних простих чисел і $a_i = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_{2010} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{2010}}{p_i}$. Тоді добуток 1006 чисел $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{1006}}$ дорівнює $\frac{(p_1 p_2 \cdots p_{2010})^{1006}}{p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_{1006}}} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{2010}^{\alpha_{2010}}$, де степінь α_i кожного простого числа $p_i, 1 \leq i \leq 2010$, дорівнює 1005 або 1006, тобто не менший ніж 1005. Аналогічно, добуток решти 1004 чисел можна подати як $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{2010}^{\beta_{2010}}$, де кожен степінь $\beta_i, 1 \leq i \leq 2010$, дорівнює 1003 або 1004, тобто не перевищує 1004. Зрозуміло, що в такому випадку перший добуток ділиться на другий. Насамкінець, якщо $i \neq j$,то$a_i = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{2010}}{p_i} \neq \frac{p_1 p_2 \cdots p_{2010}}{p_j} = a_j$, тож числа набору $\{a_i\}$ попарно різні.

Відповідь: $k = 1006$.

7. Нехай I - центр вписаного кола трикутника KMB. Тоді KI і MI– бісектриси $\angle BKM$і $\angle BMK$ відповідно. Оскільки, за умовою задачі, трикутники AKM і CMK - рівнобедрені, то

$$\angle KAM = \angle KMA = \angle MKI = \angle BKI \text{ і } \angle MKC = \angle MCK = \angle KMI = \angle BMI,$$

причому ці кути гострі (рис.4.9). Це означає, що точка P належить відрізку KM.

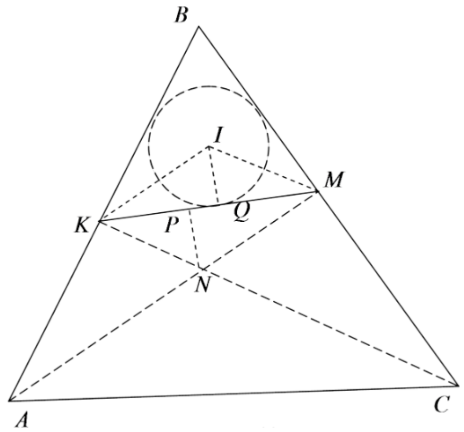


Рис.4.9

Так як $\angle IKM = \angle KMA$ і $\angle IMK = \angle MKC$, то $KI \parallel AM$ і $MI \parallel CK$, тобто чотирикутник $KIMN$ - паралелограм. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $KN = IM$. Так як $KP = MQ$ (за умовою), то трикутники PKN і QMI рівні (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $\angle IQM = \angle NPK = 90^{\circ}$. А це означає, що Q- точка дотику, що і треба було довести.

8. Доведемо методом математичної індукції, що

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6,$$

якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ - попарно різні цілі числа.

База індукції очевидна. Дійсно, $S_2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 2$, оскільки усі числа цілі та різні.

Тепер нехай твердження справджується для деякого n, тобто

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6.$$

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ - попарно різні цілі числа. Оскільки цей вираз циклічний, то можемо вважати, що x_{n+1}- найбільше з даних чисел. Враховуючи, що x_1, x_n, x_{n+1}- цілі та попарно різні, отримуємо

$$(x_n - x_{n+1})^2 + (x_{n+1} - x_1)^2 - (x_n - x_1)^2 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1) \geq 4.$$

Додаючи цю нерівність до припущення індукції, отримаємо потрібне твердження для $n + 1$.

Залишається навести приклади таких чисел, для яких в доведеній нерівності буде виконуватись рівність.

Для непарного $n = 2k - 1$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k - 1$ при $j \geq k + 1$.

Для парного $n = 2k$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k + 1$ при $j \geq k + 1$.

Відповідь: $4n - 6$.

4.7. 11 клас (умови)

1. При яких дійсних числах $a,\ b$ найбільше з чисел $3a^2 + 2b$ і $3b^2 + 2a$ приймає найменше значення?

2. Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах k, n рівняння $2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2$.

3. В середині паралелограма $ABCD$ відмічені точки P та Q, що симетричні відносно точки перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що кола описані навколо трикутників ABP, CDP, $B\ CQ$ та ADQ мають спільну точку.

4. Відомо, що число a таке ірраціональне число, для якого існують числа x, y, такі що $x + y = a$, а $x^k + y^k$ є раціональним числом для усіх натуральних k від 2 до n. Для якого найбільшого n це можливо?

5. Для якого найменшого натурального числа N можна замість знаків " $*$ " у виразі $1 * 2 * 3 * \ldots * N$ поставити знаки " $+$ " та " $-$ " таким чином, щоб одержати значення виразу рівним:

а) 2010; *б)* 2011?

6. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle ABC$ та $\angle BCD$ неменші від $120°$. Доведіть, що $AC + BD > AB + BC + CD$.

7. Знайдіть усі такі функції $f: Z \to Z$, що

1) для довільних цілих чисел $x,\ y$ $f\big(x + f(x + 2y)\big) = f(2x) + f(2y)$;

2) $f(0) = 2$.

8. Числа $1, 2, \ldots, n$ у деякому порядку розставлені в ряд. З ними дозволяється робити таку операцію: беруть довільні дві пари сусідніх

елементів, які не мають спільних членів та міняють ці пари місцями. Чи завжди можна за скінченну кількість таких операцій одержати монотонний (зростаючий або спадний) набір чисел, якщо:

а) $n = 2009$; *б)* $n = 2010$?

4.8. 11 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Нехай $M(a,b) = \max\{3a^2 + 2b, 3b^2 + 2a\}$. Тоді $M(a,b) \geq 3a^2 + 2b$ і $M(a,b) \geq 3b^2 + 2a$.

Звідки випливає, що $2M(a,b) \geq 3a^2 + 2b + 3b^2 + 2a$. Таким чином,

$$\frac{2}{3}2M(a,b) + \frac{2}{9} \geq \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0,$$

Тобто $M(a,b) \geq -\frac{1}{3}$, причому $M(a,b) = -\frac{1}{3}$, якщо $a = b = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $a = b = -\frac{1}{3}$.

2. Розглянемо це рівняння по модулю 8. При $k \geq 3$ ліва частина кратна 8, а права частина на 8 не ділиться. Таким чином, залишається розглянути лише випадки $k \in \{0,1,2\}$.

При $k = 0$ маємо рівняння $n^2 = 16$ звідки $n = 4$.

При $k = 1$ маємо рівняння $n^2 = 31$, розв'язків немає.

При $k = 2$ маємо рівняння $n^2 = 73$, розв'язків немає.

Відповідь: $k = 0, n = 4$.

3. Позначимо через X - другу точку перетину кіл, що описані навколо ΔADQта $BCQ, QE -$промінь, який має однаковий напрямок з променем CB (рис.4.10).

Тоді $\angle EQB = \angle QBC, \angle EQA = \angle QAD \Rightarrow \angle AQB = \angle QAD + \angle QBC = 180^\circ - \angle QXD + 180^\circ - \angle QXC = \angle CXD.$ Крім того, $\angle AQB = \angle CPD,$ бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже, точки D, P, X, C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, P, X, B також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести. Це доведення спирається на конкретне розташування точок, а тому для повного доведення ще треба розглянути принаймні 3 випадки. Цього недоліку позбавлене інше розв’язання, яке ми тут наводимо. Воно спирається на орієнтовані кути. Для визначених вище позначень маємо:

$$\angle(QB;QA) = \angle(QB;BC) + \angle(BC;QA) = \angle(QB;BC) + \angle(AD;QA) =$$
$$= \angle(QX;XC) + \angle(DX;XQ) = \angle(DX;XC).$$

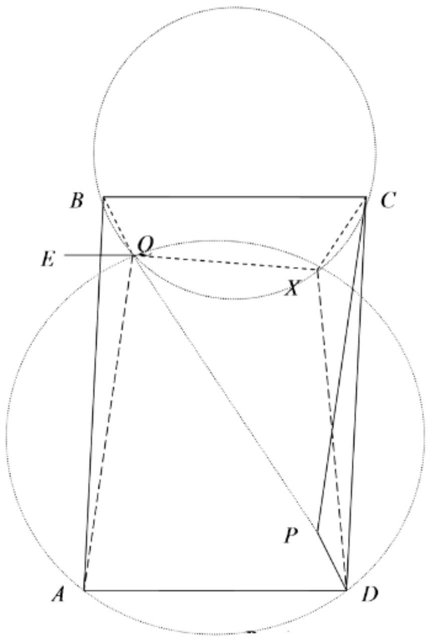


Рис.4.10

Далі завершення співпадає з попереднім, оскільки, $\angle(QB;QA) = \angle(PD;PC)$ бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже точки P, D, X, Q лежать на одному колі. Аналогічно точки $A,\ P,\ X,\ B$ також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести.

4. Покажемо, що при $n = 4$ це неможливе.

Розглянемо спочатку випадок $xy = 0$, тобто припустимо, що $y = 0$. При $n = 2$ це можливо, як приклад $x = \sqrt{2} \in \frac{R}{Q},\ x^2 = 2 \in Q$. Але, якщо x^2 та x^3- раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2} = x$ також раціональне.

Нехай тепер $xy \neq 0$. При $n = 4$ маємо, що $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ та $x^4 + y^4$ - раціональні. З рівності $(x^2 + y^2)^2 = (x^4 + y^4) + 2x^2y^2$ маємо, що $(xy)^2 \in Q$. Але тоді $(x^6 + y^6) = (x^2 + y^2)\big((x^4 + y^4) - (xy)^2\big) \in Q,$ тоді з рівності $(x^3 +$

$y^3)^2 = (x^6 + y^6) + 2(xy)^3$ маємо,що$(xy)^3 \in Q$,але тод вже й $\frac{x^3}{x^2} = xy \in Q$, і остаточно $x + y = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy} = a \in Q$ – одержали суперечність.

Покажемо, що при $n = 3$ відповідні числа існують. Позначимо через $a = x + y, b = xy. x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a - 2b) \in Q, x^3 + y^3 = (x + y)((x+y)^2 - 3xy) = a(a^2 - 3b) \in Q$. Підберемо такі ірраціональні a, b, щоб це виконувалось. Нехай $(a^2 - 2b) = p, a(a^2 - 3b) = q$, тоді $b = \frac{1}{2}(a^2 - p) \Rightarrow a(3p - a^2) = 2q$, таким чином маємо для a таке кубічне рівняння: $a^3 - 3ap + 2q = 0$. Підберемо деяке ірраціональне a, наприклад $a = 2 - \sqrt{2}$, далі послідовно обчислюємо p і q. Підставляємо у кубічне рівняння і маємо, що $p = \frac{14}{3}, q = 4$. Далі маємо, що $b = \frac{2}{3} - 2\sqrt{2}$, тобто для знаходження x, y маємо таку систему:

$$\begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{2}, \\ xy = \dfrac{2}{3} - 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

тобто вони є коренями такого квадратного рівняння:$t^2 - at + b = 0$. Обчислимо йогодискримінант, щоб переконатись, що ці числа є дійсними:

$$D^2 = a^2 - 4b = \frac{10}{3} + 4\sqrt{2} > 0.$$

Остаточно переконаємось, що $x^2 + y^2 = (a^2 - 2b) = \frac{14}{3} = p$ та $x^3 + y^3 = a(a^2 - 3b) = 4 = q$.

Відповідь: $n = 3$.

5. *а)* При усіх знаках $+$ маємо такі нерівності:$1 + 2 + 3 + \cdots + 62 = 1953 < 2010, 1 + 2 + 3 + \cdots + 63 = 2016 > 2011$. Таким чином $N > 63$. Легко показати, що тут відповідь $N = 63$, для цього достатньо розставити знаки таким чином – передчислом 3 поставити "$-$", а решта знаків - це "$+$", тоді $-3 \cdot 2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 62 + 63 = 2016 - 6 = 2010$.

б) Тут для $N = 63$ нічого не виходить, оскільки зміна знаку перед будь-яким числом не змінює парності значення виразу. Оскільки сума $1 + 2 + 3 + + \cdots + 63 = 2016$ є парним числом, то зміна будь-яких знаків залишить значення виразу парним. Більше того, якщо до цього виразу ще додати один доданок, то це буде парне число 64, а тому вираз все одно залишиться парним і не дасть значення 2011. Таким чином, щонайменше треба $N = 65$. А тепер вже знаки розставити доволі легко. Оскільки $1 + 2 + 3 + \ldots + 65 = 2145$, то $-2 \cdot (2 + 65) + 1 + 2 + 3 + \ldots + 65 = 2145 - 134 = 2011$.

Відповідь: а) $N = 63$; *б)* $N = 65$.

6. Нехай $AB = a, BC = b, CD = c$ (рис.4.11). Тоді $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B \geq a^2 + ab + b^2$.

Аналогічно $BD^2 \geq b^2 + bc + c^2 \Rightarrow AC + BD \geq \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2}$. Оскільки $\sqrt{a^2 + ab + b^2} > a + \frac{1}{2}b$ і $\sqrt{b^2 + bc + c^2} > c + \frac{1}{2}b$, то $AC + BD > a + b + c = AB + BC + CA$.

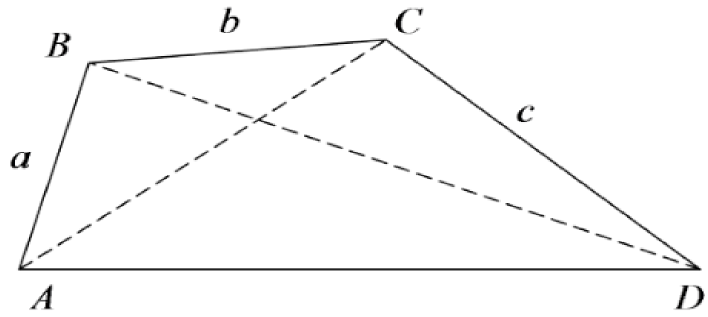


Рис.4.11

7. Підставимо $x = 0, y = 0 \Rightarrow$

$$f\big(f(2y)\big) = f(2y) + 2, \tag{1}$$

$$f\big(x + f(x)\big) = f(2x) + 2, \tag{2}$$

Доведемо індукцією по n, що $f\big(f(2y)\big) = f(2y) + 2$. База, при $n = 0$- вже доведена. З припущення, що $f(2n) = 2n + 2$ треба показати, що справджується рівність: $f(2n + 2) = 2n + 4$.

При$n = 2m$ треба показати, що $f(4m + 2) = 4m + 4$. Підставимо $x = 2m$ в (2): одержимо

$$f\big(2m + f(2m)\big) = f(2m + 2m + 2) = f(4m + 2) = f(4m) + 2 = 4m + 4.$$

При $n = 2m - 1,\ f(4m) = 4m + 2$. Підставимо $y = 2m - 1$ в (1):

$$f\big(f(4m - 2)\big) = f(4m) = f(4m - 2) + 2 = 4m + 2.$$

Повністю аналогічно ця рівність доводиться для від'ємних n, звідки для усіх цілих n одержимо $f(2n) = 2n + 2$. Нехай k - непарне, підставимо у вихідне співвідношення $x = 2z + k, y = -z, z \in Z$, тоді

$$f\big(2z + k + f(k)\big) = f(4z + 2k) + f(-2) =$$

$$= 4z + 2k + 2 - 2z + 2 = 2z + 2z + 4, \quad (3)$$

Розглянемо випадки $f(x)$- парне. Тоді підставимо в (3): $z = -\frac{f(k)}{2}$, тоді $f(k) = -f(k) + 2k + 4$, звідки $f(k) = k + 2$- непарне, тобто одержали суперечність $f(k)$-непарне. Тоді $2z + k + f(k)$- парне, а тому $f\big(2z + k + f(k)\big) = 2z + k + f(k) + 2$. З урахуванням (3) маємо $f\big(2z + k + f(k)\big) = 2z + k + f(k) + 2 = 2z + 2k + 4$, звідки остаточно одержуємо, що $f(k) = k + 2, k \in Z$.

Відповідь: $f(k) = k + 2$.

8. Якщо розглянути 5 сусідніх елементів, то з комбінації 12345 послідовно можна одержати такі:

$$12345 \to 14523 \to 23514 \to 51234 \to 53412 \to 12452. \quad (4)$$

Тобто останні три елементи були циклічно переставлені, тому аналогічно можна одержати й трійку 12534. Якщо зробити симетричні перестановки, то так само ми можемо переставити циклічно й три перші елементи п'ятірки:

$$12345 \to 34125 \to 25134 \to 23451 \to 45231 \to 31245. \quad (5)$$

Розглянемо деякі чотири позиції всередині списку, наприклад з номерами 1001-1004. На числа з такими значеннями поки що не зважаємо і послідовно розставляємо на свої місця числа з номерами $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Як це можна зробити показано нижче на прикладі числа 500. Припускаємо, що числа 1-499 вже зайняли своє позиції. Більше ми їх для перестановок не чіпаємо. Якщо 500 стоїть поруч справа від 499, тобто на своїй позиції, то все зроблене. Якщо 500 стоїть останнім n-м номером, то міняємо місцями пари, які займають позиції з номерами $(n-3, n-2)$ та $(n-1, n)$ і 500 вже займає не останню позицію. Якщо 500 стоїть через одну позицію від 499, тобто на 501-му місці, то спочатку робимо заміну пар, які займають такі номери: $(500{,}501)$ та $(502{,}503)$. Тепер нехай вже 500 займає деяку позицію $k \in \{502{,}503, \ldots, n-1\}$, тоді ми робимо заміну пар з такими номерами: (500,501) та $(k, k+1)$ і число 500 займає свою позицію. Таким чином ми розставимо на свої місця усі числа 1-1000. Після цього, аналогічно симетрично переставимо на свої місця числа $1001 - n$. Таким чином ми завжди зможемо одержати таку розстановку:

$$1,2, \dots, 1000, a, b, c, d, 1005, 1006, \dots, n,$$

де набір (a, b, c, d)є деякою перестановкою чисел $(1001,1002,1003,1004)$. Подивимось,які перестановки (a, b, c, d) ми зможемо одержати. Усього їх 24. Якщо розглянути п'ятірку $(1000, a, b, c, d)$ то шляхом використання схеми (4) одержимо ще такі:$(1000, a, c, d, b)$та $(1000, a, d, b, c)$. Якщо до одержаних четвірок $(a, b, c, d), (a, c, d, b)$та (a, d, b, c) додати справа число 1005, та застосувати схему (5), ми одержимо такі перестановки: $(b, c, a, d), (c, a, b, d), (c, d, a, b), (d, a, c, b), (d, b, a, c), (b, a, d, c)$. Знову застосувавши схему (4) до деяких з одержаних маємо ще 3 варіанти, які можна одержати:$(b, d, c, a), (c, b, d, a), (d, c, b, a)$. Тобто 12 з 24 ми одержати змогли. Покажемо, що при спробі розставити числа саме у зростаючому порядку інші 12 позицій досягнути неможливо.

Для довільної розстановки чисел $1,2, \dots, n$ назвемо інверсією випадок, коли більше число стоїть лівіше за менше, наприклад позиція з 5 чисел 23514 має інверсії: $(2,1), (3,1), (5,1)$ та $(5,4)$. Назвемо кількість таких інверсій "інваріантом позиції". Покажемо, що після виконання будь-якої дозволеної операції інваріант позиції змінюється на число, яке кратне 2. Припустимо, що ми поміняли числа (a, b) та (c, d), які займали позиції $(k, k+1)$ та $(l, l+1), k < l$. Тоді після перестановки не змінюється кількість інверсій, до яких причіпні числа, що розташовані на позиціях $1,2, \dots, (k-1)$ та $(l+2), (l+3), \dots, n$. Тобто, якщо інверсія була, то вона й залишиться, й навпаки,якщо вона не утворювалася, то вона й не з'явиться. Кількість інверсій, у яких задіяні числа на позиціях$(k+2), (k+3), \dots, (l-1)$ не зміниться по відношенню одне одного. Але якщо розглянути деяке число є, що займає одну вказаних позицій, то по відношенню до кожного з чисел тих пар (a, b) та (c, d), які переставляються вона зміниться. І змінюється це обов'язково з 0 на 1, чи навпаки, з 1 на 0. Якщо спочатку була інверсія між числами, наприклад, a і e (тобто у загальний інваріант позиції додавалась від цієї пари 1), то після перестановки інверсія зникає (у загальну суму додається 0) і навпаки. Таким чином загальна кількість змін буде парною, тому й парність інваріанту позиції не зміниться. Ну я що стосується чисел a, b, c, d то між a і b, та c і d нічого не зміниться, а між усіма іншими парами (їх 4) так само усе міняється на протилежне, а тому й парність суми інверсій не змінюється.

Таким чином зрозуміло, що ми не зможемо з позиції $1,2,3,4, \dots, n$ (інваріант якої 0) перейти у позицію $2,1,3,4,5, \dots, n$ (інваріант 1). Тобто одержати всередині з перестановки a, b, c, d решту 12 інших перестановок ми не зможемо.

Але усе це стосувалося лише спроби розставити числа за зростанням. Повністю аналогічно можна спробувати їх розставити за спаданням. Як ми бачимо усі позиції розбилися на дві великі групи позицій, з парним та непарним інваріантом, які не можна перетворити одна в іншу. Обчислимо інваріант такої позиції: $n, n-1, n-2, \dots, 3,2,1$. Тут кожна пара чисел утворює інверсію, а тому й їх загальна кількість $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Якщо це число парне, то обидві монотонні позиції знаходяться в одній половині, тобто їх можна перетворити одна в іншу, але не усі позиції можна одержати з них. Якщо ж навпаки, це число непарне, то будь-яка початкова позиція у відповідності з її інваріантом може бути перетвореною або у зростаючу, або у спадну послідовність. Таким чином залишається з'ясувати парність числа $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Оскільки n та $n-1$ різної парності, то це число буде парним, якщо одне з цих чисел є кратним 4, тобто при $n = 4m$ або $n = 4m + 1$, інакше воно непарне. Таким чином, при $n = 2009 \equiv 1(mod\ 4)$ не усі позиції можна перетворити одна у іншу. А при $n = 2010 \equiv 2(mod 4)$ навпаки, з кожної позиції такими перестановками можна одержати або зростаючий, або спадний набір заданих чисел.

Відповідь: *а)* не завжди; *б)* завжди.

V. ЗАДАЧІ IV ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ (2009-2010 РР.)

5.1. 8 клас (умови)

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівність $|y-x| = 2-y-x$.

2. Троє хлопчиків збирали горіхи. Коли вони порахували, що загалом зібрано 420 горіхів, то вирішили поділити їх порівну. Спочатку перший з хлопчиків віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині зібраних ним горіхів і ще по одному горіху, потім другий хлопчик віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині горіхів, що утворилися в нього, і ще по одному горіху. Після того, як таке ж саме зробив і третій хлопчик, з'ясувалося, що їм насправді вдалося поділити горіхи порівну. Визначте, скільки горіхів зібрав кожен з хлопчиків.

3. Чи можна в таблиці розміром 7×7 розставити 24 одиниці та 25 нулів (у кожній клітинці записується одне число) так, щоб для будь-якої клітинки, у якій міститься одиниця, сума чисел у сусідніх з нею клітинках дорівнювала 1, а для будь-якої клітинки, у якій знаходиться нуль, сума чисел у клітинках, сусідніх з нею, була відмінною від 1 (дві клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону)?

4. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і CA в точках K, N і M відповідно, причому відомо, що $\angle MKC = \angle MNA$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

5. Знайдіть усі такі пари додатних раціональних чисел x і y, що обидва числа $x+\frac{1}{y}$ і $y+\frac{1}{x}$ є натуральними.

6. Нехай $[x]$ - ціла частина числа x (тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x), $\{x\} = x-[x]$ - дробова частина числа x. Розв'яжіть рівняння $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$.

7. Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. На стороні AB обрано таку відмінну від вершин точку M, що $BM < BC$, причому описане коло

трикутника AMI перетинає сторонуAC в точці N, яка не співпадає з точками A і C. Доведіть, що $BM + CN = BC$.

8. Нехай $n \geq 3$ - задане натуральне число. На клітчастій дошці розміром $n \times n$ (кожна клітинка є квадратом розміром 1×1) усі клітинки діагоналі, що сполучає лівий нижній кут з правим верхнім кутом дошки, а також усі клітинки, які лежать під цією діагоналлю, пофарбовані чорним кольором. Решта клітинок дошки пофарбовані білим кольором. На скільки прямокутників може виявитися розрізаною частина дошки, утворена всіма чорними клітинками, якщо всю дошку розрізано по лініях сітки на $2n$ клітчастих прямокутників так, що кожен із прямокутників складається тільки з клітинок якогось одного кольору (до прямокутників відносяться й квадрати будь-яких розмірів)?

5.2. 8 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ x = 1; \end{array}\right. \\ y \leq 2 - x. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x; 1): x \leq 1\} \cup \{(1; y): y \leq 1\}$.

2. З рівностей

$$x_3 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_3 - 2 = 140, x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140, x_1 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140$$

знайдемо кількість горіхів у кожного з хлопчиків на передостанньому етапі. Аналогічно відновлюємо весь «ланцюжок»:

(140,140,140) <— (68, 68, 284) <— (32,140, 248) <— (68,122, 230).

Відповідь: перший хлопчик зібрав 68 горіхів, другий хлопчик — 122 горіхи, третій хлопчик — 230 горіхів.

3. *Відповідь:* так, можна (див. рис.5.1).

1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1

Рис.5.1

4. Нехай прямі AN і CK вдруге перетинають вписане коло трикутника ABC в точках P і Q відповідно. За теоремами про вписаний кут та кут між дотичною й хордою одержуємо:

$$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA, \angle QKM = \angle QPM = \angle QMC.$$

За умовою задачі, $\angle PNM = \angle QKM,$ а тому $PQ \parallel AC$. Звідси випливає, що $\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN$,тобто$\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що навколо чотирикутника *AKNC* можна описати коло, і $\angle CAK = \angle BNK, \angle ACN = \angle BKN$.

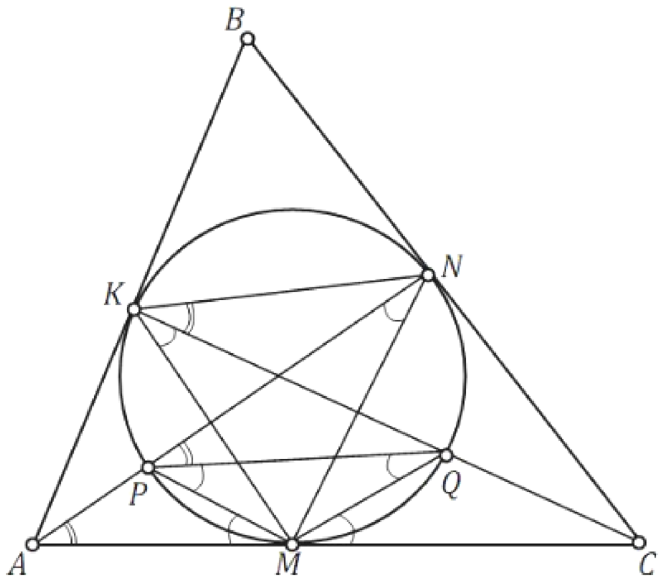


Рис.5.2

Трикутник KBN є рівнобедреним, тобто$\angle BNK = \angle BKN$.

Отже, $\angle CAK = \angle ACN$.

5. Нехай$x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q},$ де m, n, p, q – натуральні числа, причому$(m; n) = (p; q) = 1$. Оскільки $mp + nq \vdots np$,то$mp \vdots n, nq \vdots p,$ а тому $p \vdots n$ і $n \vdots p$. Маємо,

що $n = p$. Аналогічно доводиться, що $m = q$. Звідси тепер випливає, що $2m ⋮ n$ і $2n ⋮ m$. Отже, $m, n, p, q \in \{1; 2\}$. Тепер уже неважко одержати відповідь.

Відповідь: $(1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

6. Оскільки $0 \le \{x\} < 1$,то $x^2 < 1$, тобто $-1 < x < 1$. Якщо $x \in [0; 1)$,то $x = \{x\}$, і знаходимо $x = 0$. Для $x \in (-1; 0)$ позначимо $u = \{x\}, 0 < u < 1, [x] = -1$, $x = -1 + u$. Тоді з рівняння $2u^2 - 8u + 3 = 0$, з урахуванням нерівності $0 < u < 1$, одержуємо $u = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Відповідь: $1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 0$.

7. Візьмемо на стороні BC таку точку K, що $BM = BK$. Легко бачити, що $\Delta BMI = \Delta BKI$ (рис.5.3). Оскільки навколо чотирикутника $ANIM$ можна описати коло, і $\angle MAI = \angle NAI$, то $MI = NI = KI$.

Маємо:

$$\angle BKI = \angle BMI = 180^\circ - \angle AMI = \angle ANI, \angle CNI = \angle CKI.$$

З того, що$\angle NCI = \angle KCI$, випливає рівність кутів CIN і CIK.

Отже, $\Delta CNI = \Delta CKI, CN = CK, BM + CN = BK + KC = BC$.

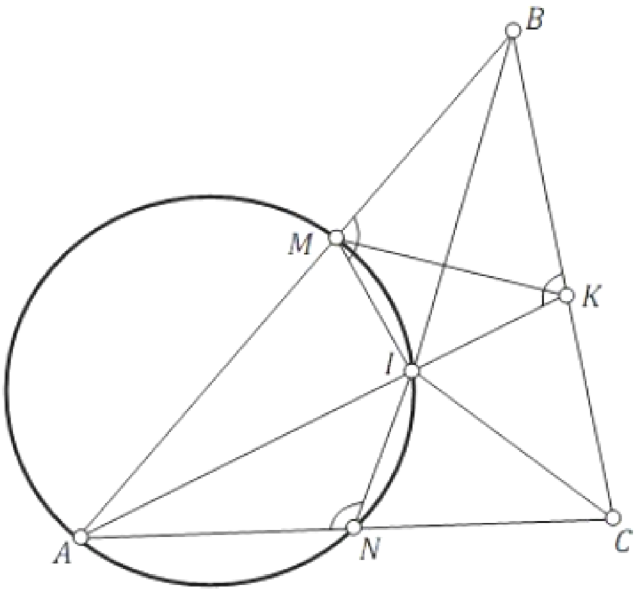


Рис.5.3

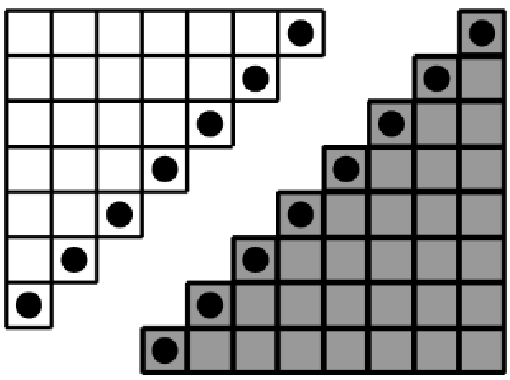


Рис.5.4

8. Нехай біла частина шахівниці розрізана на p прямокутників, а чорна - на q.(рис.5.4). Аналогічно тому, як зображено на рисунку для $n = 8$, на білій частині відмітимо $n - 1$ клітинку, а на чорній -n клітинок. Кожному з

прямокутників розрізання відповідної частини належить не більше однієї відміченої в цій частині клітинки, і тому $p \geq n-1, q \geq n$. З урахуванням рівності $p+q=2n$ легко отримати, що $p=n-1$ і $q=n+1$, або ж $p=n$ і $q=n$. Для кожного $n \geq 3$ неважко навести розрізання і з $q=n$ і $q=n+1$.

Відповідь: на n прямокутників або ж на $n+1$ прямокутник.

5.3. 9 клас (умови)

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють рівність $|y-[x]|=2-y-[x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

2. Дано трикутник ABC. Нехай I_A — центр кола, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за точки B і C відповідно. Доведіть, що точки B, C та центри описаних кіл трикутників ABI_A і ACI_A лежать на одному колі.

3. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого в кожній клітинці таблиці розміром $n \times n$ можна записати ціле число з відрізка $[-30; 30]$ так, щоб усі цілі числа цього відрізка виявилися записаними, причому ані в жодному рядку, а ні в жодному стовпці не знайшлося пари чисел з від'ємним добутком.

4. Нехай для додатних дійснихчисел x і y має місце рівність

$$x^2+y^2+\frac{8xy}{x+y}=16.$$

Доведіть що $x+y=4$.

5. Дано трикутник ABC, в якому $\angle C=90^\circ, AC<BC$. На стороні BC відмічено таку точку K, що $CK=CA$. Нехай D— така точка відрізка CK, що $\angle DAK=\angle BAK$. Відрізок DF є висотою трикутника ADB, а точка P - основою перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої FK.

Доведіть, що $CP=\frac{1}{2}(AF+FD+DA)$.

6. У країні Олімпії 2012 міст, деякі з котрих сполучаються між собою прямими авіалініями (кожною авіалінією сполучаються між собою тільки два

міста, причому будь-які два міста сполучені не більше, ніж однією авіалінією). Відомо, що кожне місто сполучається прямими авіалініями щонайбільше з 8 іншими містами. Доведіть, що в країні можна закрити не більше за 2012 авіаліній так, щоб серед будь-якихчотирьох міст хоча б два не сполучалися між собою прямою авіалінією.

5.4. 9 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ [x] = 1; \end{array}\right. \\ y \le 2 - [x]. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x;y): 1 \le x \le 2, y < 1\} \cup \{(x;y): x < 2\}$.

Нехай. $f(x) = \frac{x^3}{3x^2-3x+1}$.Обчисліть значення суми

$$f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \dots + f\left(\frac{2012}{2012}\right).$$

Розв'язання.Зауважимо, що $f\left(\frac{i}{2012}\right) = \frac{i^3}{i^3+(2012-i)^3}, 1 \le i \le 2012.$ Тоді

$$f\left(\frac{1006}{2012}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{2012}{2012}\right) = 1, f\left(\frac{i}{2012}\right) + f\left(\frac{2012-i}{2012}\right) = 1, 1 \le i \le 1005.$$

Відповідь:$\frac{2013}{2}$.

2. Нехай точка P – центр описаного кола трикутника ABI_A. Кут ABI_A тупий, а тому точки P і B лежать по різні боки від прямої AI_A. Нехай M і N – точки дотику даного кола зі стороною BC і продовженням сторони AC відповідно, а K – точка перетину цього продовження з описаним колом трикутника ABI_A.(див. рис.5.5). Оскільки $I_AM = I_AN$ і $BI_A = KI_A$, то прямокутні трикутники BMI_A та KNI_A рівні, а тому $BM = KN$. Оскільки $CM = CN$,

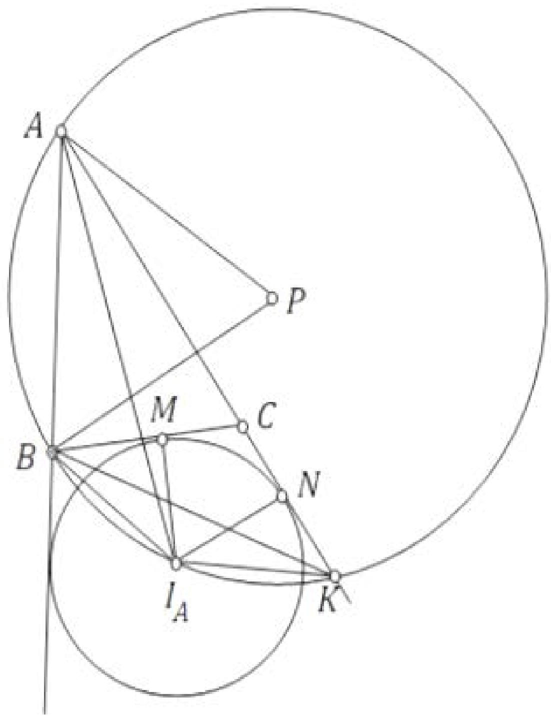


Рис.5.5

то $BC = CK$, тобто трикутник BCK рівнобедрений.

Нехай $\angle BCA = \gamma$, тоді $\angle BKC = \frac{\gamma}{2}$, $\angle BPA = \gamma$.Отже, $\angle BCA = \angle BPA$,а це й означає, що точка P належить описаномуколу трикутникаABC. Аналогічно доводиться, що центр описаного кола трикутника лежить на цьому колі. Це й завершує доведення.

3. Для $n = 11$ приклад легко наводиться: лівий верхній прямокутник розміром 5×6 заповнюється числами 1, 2,..., 30 у довільному порядку, правий нижній прямокутник розміром 6×5 заповнюється числами $-1, -2, \ldots, -30$ у довільному порядку, і до решти клітинок записуються нулі. Доведемо, що для $n \leq 10$ це неможливо. Якщо додатні цілі числа з відрізка $[-30;\ 30]$ розташовані в k стовпцях і m рядках, то всього клітинок з додатними числами буде не більше за km. Зрозуміло, що клітинок з від'ємними числами — не більше за $(n-k)(n-m)$. Оскільки

$$\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{k = (n-k)}{2} = \frac{n}{2}, \sqrt{m(n-m)} \leq \frac{m + (n-m)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}, km(n-k)(n-m) \leq \frac{n^4}{16},$$

то хоча б одне з чисел $km, (n-k)(n-m)$ не перевищує $\frac{n^2}{4}$. Але якщо $n \leq 10$, то$\frac{n^2}{4} < 30$, і тому записати принаймні один раз кожне ціле число з відрізка $[-30;\ 30]$ ми не зможемо.

Відповідь: $n = 11$.

4. Задана рівність рівносильна таким співвідношенням:

$$(x^2 + y^2)(x + y) + 8xy = 16(x + y),$$

$$((x + y)^2 - 2xy)(x + y) - 16(x + y) + 8xy = 0,$$

$$(x + y)^3 - 16(x + y) - 2xy(x + y) + 8xy = 0,$$

$$(x + y)((x + y)^2 - 16) - 2xy(x + y - 4) = 0,$$

$$(x + y)(x + y - 4)(x + y + 4) - 2xy(x + y - 4) = 0,$$

$$(x + y - 4)\big((x + y)(x + y + 4) - 2xy\big) = 0.$$

Для $x > 0$ та $y > 0 (x + y)(x + y + 4) - 2xy = x^2 + y^2 + 4(x + y) > 0$.

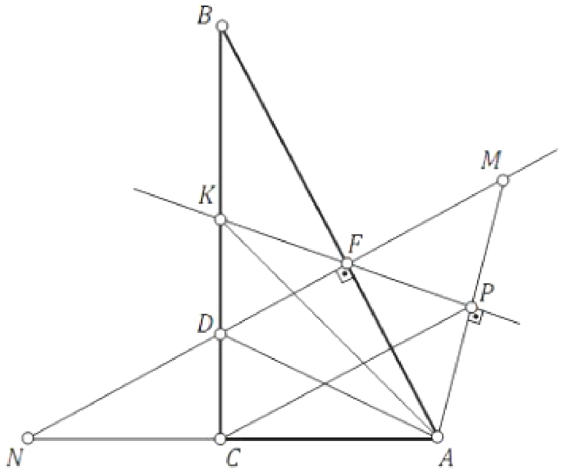


Рис. 5.6

5. Нехай пряма DF перетинає пряміAC і AP в точках N і M відповідно (нескладно довести, що такі точки перетину існують)(рис.5.6). Нехай$\angle BAC = \alpha, \alpha > 45^{\circ}, \angle BAK = \angle KAD = \delta.$ Тоді$\angle FDB = \alpha, \angle NDC = \alpha.$

Далі, $\alpha - \delta = 45^{\circ},\ 90^{\circ} - \alpha + 2\delta = \alpha,$ а тому $\angle ADC = \alpha.$ Звідси випливає, що точка C - середина відрізка $AN.$ Оскільки промінь AK — бісектриса внутрішнього кута A трикутника FDA, а промінь DK— бісектриса його зовнішнього кута при вершині D, то промінь DK є бісектрисою його зовнішнього кута при вершині F. Тому FP - медіана трикутника MFA. Отже, CP є середньою лінією трикутника AMN, і $CP = \frac{1}{2}NM.$ Залишається врахувати, що $ND = AD$ і $AF = FM.$

6. Нехай G— граф задачі. Розіб'ємо множину V_G його 2012 вершинна три підмножини A, B і C так, щоб сума 5 кількостей ребер підграфів $G(A), G(B)$і $G(C)$ була мінімальною (зрозуміло, що це можливо). Припустимо, що в одній з підмножин (нехай це буде підмножина A) є така вершина X, що в підграфі $G(A)$ її степінь $\rho_{G(A)}(X) \geq 3$. Оскільки $\rho_G(X) \leq 8$,то вершина X не може сполучатись з кожним з підграфів $G(B)$і $G(C)$ більше, а ніж двома ребрами. Нехай вершина X з підграфом $G(B)$сполучається щонайбільше двома ребрами. Тоді для підграфів $G(A\backslash\{X\}), G(B \cup \{X\})$і$G(C)$ сума S зменшується, що неможливо. Отже,в підграфах $G(A), G(B)$і $G(C)$ степінь усіх їхніх вершин не перевищує 2. Як відомо, у кожному графі сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєній кількості ребер, а тому в кожному з підграфів $G(A), G(B)$і

$G(C)$ кількість ребер не більше кількості вершин, тобто $S \leq 2012$. Видалимо всі ці S ребер (зробимо графи з множинами вершин A, B і C порожніми). Для будь-яких чотирьох вершин принаймні дві лежать в одній з цих трьох множин вершин, і після видалення ребер такі дві вершини не сполучаються ребром.

5.5. 10 клас (умови)

1. Нехай a, b, c— натуральні числа. Доведіть, що хоча б одне з чисел $a^5b - ab^5, b^5c - bc^5$, чи $c^5a - c$ ділиться без остачі на 8.

2. Знайдіть усі визначені на всій числовій прямій функції f, які набувають дійсних значень, і такі, що для будь-яких дійсних x, yі z

$$f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1.$$

3. Нехай O— центр описаного кола гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC.Прямі BO і CO перетинають сторони AC і AB в точках K і N відповідно. На сторонах AC і AB взято такі відмінні від K і N точки P і T відповідно, що $OK = OP$ і $ON = OT$. Через точку P проведено пряму, паралельну BK, а через точку T— пряму, паралельну CN, і позначимо через M точку перетину цих прямих. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA рівні.

4. Нехай $n \geq 3$ — задане натуральне число. Послідовність із $2n$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, будемо називати вдалою, якщо виконуються такі три умови:

1) усі числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, попарно різними елементами множини $\{1, 2, \dots, n\}$;

2) $a_k = a_{n+k}$ для всіх $k = 1,2, \dots, n$;

3) існують такі $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$із множини $\{1, 2, \dots, 2n\}$; що $a_{i_k} = k$ для всіх $k = 1,2, \dots, n$;

Наприклад, для $n = 5$ послідовність $1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5$ є вдалою, а послідовність $2, 1, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4$- ні. Для кожного$n \geq 3$ знайдіть кількість вдалих послідовностей.

5. Розв’яжіть рівняння $x + \sqrt{1 - x} + 1 = \sqrt{x} + 3\sqrt{x - x^2}$.

6. Про додатні дійсні числа a і b відомо, що $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 5$. Доведіть, що $3\sqrt{a+b} \geq a + b + 2$.

7. У кут BAC вписано два кола ω_1 і ω_2, які не мають спільних точок, причому $B \in \omega_1$ і $C \in \omega_2$ радіус кола ω_1 менший за радіус кола ω_2. Пряма BC вдруге перетинає кола ω_1 і ω_2 в точках K і N відповідно. Прямі AK і AN проходять, відповідно, через точки $P \in \omega_1$ і $M \in \omega_2$ відмінні від K і N. Доведіть, що точка A лежить на прямій, що проходить через центри описаних кіл трикутників ACM і ABP.

5.6. 10 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Серед трьох чисел a, b, c існують два числа, які мають однакову парність. Будемо вважати, що це числа a і b. Тоді числа $a - b, a + b, a^2 + b^2$ є парними, і $a^5b - ab^5 = ab(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \vdots 8$.

Зауваження. Неважко довести, що в розглядуваному випадку $a^5b - ab^5 \vdots 240$.

2. Покладемо у вихідній нерівності $x = y = z = 0$.Тоді $(f(0) - 1)^2 \leq 0$, тобто $f(0) = 1$. Візьмемо $y = z = 0$ і одержимо, що $f(0) + f(0) \geq f(x)f(0) + 1$. Звідси $f(x) \leq 1$ для всіх $x \in R$. Якщо $x = y = z = 1$, то $(f(1) - 1)^2 \leq 0, f(1) = 1$. Для $y = z = 1$ маємо: $f(x) + f(x) \geq f(x)f(1) \geq 1, x \in R$. Ми встановили, що для всіх $x \in R$ $f(x) = 1$. Перевірка показує, що така функція задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = 1,\ x \in R$.

3. Нехай H— ортоцентр трикутника ABC, точка D симетрична H відносно прямої AC. Як відомо, точка D лежить на описаному колі трикутника ABC. Позначимо через Q точку перетину відрізків OD і AC.

Тоді маємо:

$$\angle QDH = \angle QHD = \angle OBD.$$

Звідси випливає, що $HQ \parallel BK$, і $\angle BKC = \angle HQC$. Отже, $\angle HQC = \angle DQC = \angle OQK = \angle BKC$, а тому точки P і Q співпадають. Ми довели, що пряма,

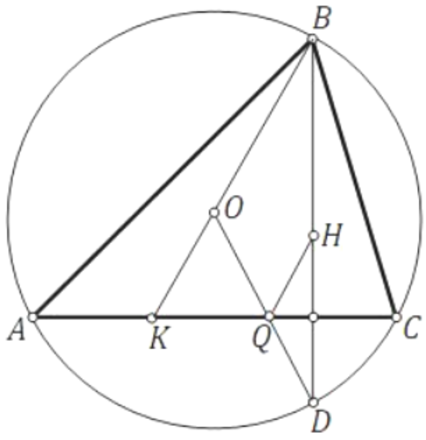


Рис.5.7

проведена через точку P паралельно BK, проходить через точку H. Аналогічно доводиться, що точка H лежить і на прямій, що проходить через точку T паралельно CN. Відтак, точка M з умови задачі є ортоцентром трикутника ABC. Рівність радіусів описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA є наслідком властивостей кола дев'яти точок (названі трикутники та трикутник ABC мають спільне коло дев'яти точок, а радіус кола дев'яти точок будь-якого трикутника вдвічі менший за радіус його описаного кола). До того ж, рівність радіусів описаних кіл трикутників ABC, AMB, BMC і CMA легко встановлюється за допомогою узагальненої теореми синусів.

4. Через m, $0 \leq m \leq n$, позначимо кількість чисел множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, які знаходяться серед індексів $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Неважко довести, що такими m індексами визначаються $n - m$ чисел із множини $\{n + 1, n + 2, 2n\}$, які увійдуть до даного набору індексів $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Цим повністю описуються всілякі вдалі послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Для $m = 0$ маємо вдалу послідовність $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n$. Але ж ця сама вдала послідовність утворюється ще в nвипадках, коли для набору індексів $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$.маємо, що $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \cap \{1, 2, \ldots, n\}, = \{1, 2, \ldots, m\}, 1 \leq m \leq n$.

Усіляких підмножин n-елементної множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, відмінних від підмножин $\{1, 2, \ldots, m\}, 1 \leq m \leq n$, існує $2^n - n$. Усім таким підмножинам відповідають різні вдалі послідовності (порожня підмножина відповідає випадку $m = 0$ і також враховується серед $2^n - n$ підмножин).

Відповідь: $2^n - n$.

5. Областю допустимих значень рівняння є відрізок $[0;1]$. Запишемо рівняння у вигляді

$$(\sqrt{x})^2+\sqrt{1-x}+(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2-\sqrt{x}-3\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0.$$

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, одержуємо:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}-1\right)=0.$$

Залишається розв'язати стандартними методами рівняння

$$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0{,}2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+1.$$

Відповідь: $\frac{1}{2};\ \frac{16}{25}$.

6. Нехай $u=a+b$ і $v=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Тоді $u+v=5$. Як відомо, $uv\geq 4$. Тому $5=u+v\geq u+\frac{4}{u}$. звідси випливає, що $u^2-5u+4\leq 0$. Отже, $1\leq\sqrt{u}\leq 2$, тобто $\left(\sqrt{u}-1\right)\left(\sqrt{u-2}\right)\leq 0$, і $3\sqrt{u}\geq u+2$.

7. Проведемо дотичну AF до описаного кола трикутника APB. Тоді $\angle PAF=\angle PBA=\angle PKB$, а тому $AF\parallel BC$. Отже, $\angle FAC=\angle ACN=\angle CMA$. З цього випливає, що пряма AF дотикається до описаного кола трикутника ACM. Оскільки описані кола трикутників ACM і ABP в точці A мають спільну дотичну, то точка A лежить на лінії центрів цих кіл.

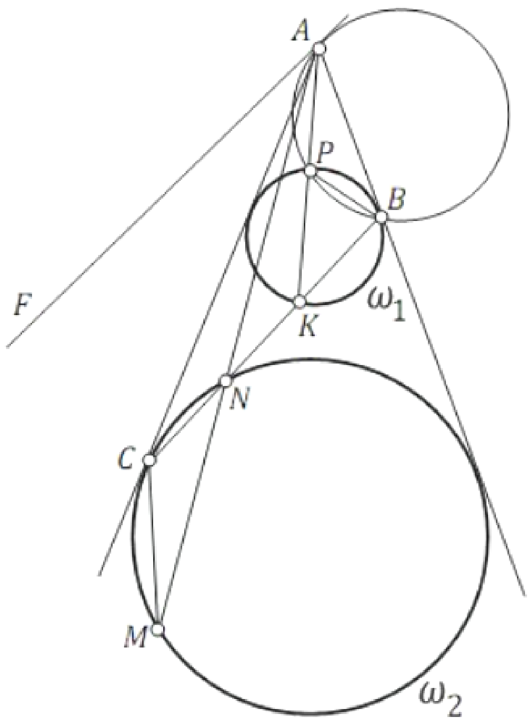


Рис.5.8

5.7. 11 клас (умови)

1. Для дійсних чисел $x\in(0;\pi)$ і $y\in(0;\pi)$ має місце рівність

$$\cos 2x\cos y-\cos 2y\cos x=\cos y-\cos x.$$

Доведіть, що $x=y$.

2. Дано таку визначену на всій числовій прямій функцію f, яка набуває дійснихзначень, що для всіх $x \in R$ і $y \in R$ справджується рівність

$$f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy).$$

Знайдіть значення $f(2012)$ якщо відомо, що $f(2011) = 2012$.

3. Нехай $SABC$— така трикутна піраміда, що для точки M перетину медіан її грані ABC виконуються нерівності $MA > 1, MB > 1$ і $MC > 1$. Доведіть, що $SA + SB + SC > 3$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} (x + y)(1 + xy) + (x - y)^2 = 2, \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

5. Нехай H— точка перетину висот гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC, M— середина сторони AB, N— середина сторони AC. Позначимо через, відповідно, P і Q точки перетину променів MH і NH з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що прямі BQ , AH і CP перетинаються в одній точці або паралельні.

6. Невід'ємні дійсні числа a, b і c задовольняють нерівність

$a + b + c \leq 2$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq 3.$$

7. Відомо, що многочлен $P(x)$ n-*го* степеня з цілими коефіцієнтами можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,де $0 < x_k < 3$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доведіть, що $x_k \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$.

5.8. 11 клас (відповіді, вказівки, розв'язки)

1. Запишемо дану рівність у вигляді

$$\cos^2 x \cos y - \cos^2 y \cos x = \cos y - \cos x,$$

$$(\cos x \cos y + 1)(\cos x - \cos y) = 0.$$

Оскільки для $x \in (0;\pi)$ і $y \in (0;\pi)$ $\cos x \cos y > -1$, то $\cos x = \cos y$, і тому, враховуючи спадання функції $f(t) = \cos t$ на проміжку $(0;\pi)$ маємо, що $x = y$. $x = y$.

2. Підставимо $x = 0$ і одержимо, що $f(0) = 0$. Підставляючи до нашого функціонального рівняння $y = -1$ та $y = -\frac{1}{2}$, одержимо, що $f(-x) = -f(x)$ та $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ для будь-яких дійсних x. Далі, підставимо $y = \frac{z}{2x}$, де $x \neq 0$, і одержимо, що $f(x+z) = f(x) + f(z)$. Оскільки $f(0+z) = 0 + f(z) = f(0) + f(z)$, то рівність $f(x+z) = f(x) + f(z)$ має місце для всіх дійсних x і z (позаяк кожен розв'язок функціонального рівняння адитивності, очевидно, задовольняє умову $f(x+2xy) = f(x) + 2f(xy)$, то ми встановили, що множини розв'язків цих рівнянь співпадають). Легко довести, що $f(kx) = kf(x)$ для довільних $x \in R$ і $k \in Z$. Оскільки $f(2011) = f(2011 - 1) = 2011f(1)$, і за умовою $f(2011) = 2012$, то

$$2012 = 2011f(1), f(1) = \frac{2012}{2011}, f(2012) = 2012, \qquad f(1) = \frac{2012^2}{2011}.$$

Відповідь: $f(2012) = \frac{2012^2}{2011}$.

3. Розглянемо вектори $\overrightarrow{MA} = \vec{a}, \overrightarrow{MB} = \vec{b}, \overrightarrow{MC} = \vec{c}, \overrightarrow{MS} = \vec{s}, \overrightarrow{SA} = \vec{a} - \vec{s}, \overrightarrow{SB} = \vec{b} - \vec{s}$ і $\overrightarrow{SC} = \vec{c} - \vec{s}$. Нам потрібно довести нерівність

$$|\vec{a} - \vec{s}| + |\vec{b} - \vec{s}| + |\vec{c} - \vec{s}| > 3.$$

Нехай $|\vec{s}| > 1$. Тоді, використовуючи відому рівність $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ та властивості скалярного добутку, маємо:

$$|\vec{a} - \vec{s}| + |\vec{b} - \vec{s}| + |\vec{c} - \vec{s}| \geq -\frac{(\vec{a} - \vec{s})\vec{s}}{|\vec{s}|} - \frac{(\vec{b} - \vec{s})\vec{s}}{|\vec{s}|} - \frac{(\vec{c} - \vec{s})\vec{s}}{|\vec{s}|} =$$

$$= 3|\vec{s}| - \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 3|\vec{s}| \geq 3.$$

Рівність у цій нерівностиі досягається тоді й тільки тоді, коли $|\vec{s}| = 1$ і вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ протилежно напрямлені до вектора $\overrightarrow{SM}$, що, зрозуміло, неможливо.

Розглянемо тепер випадок $|\vec{s}| < 1$. Тоді

$$|\vec{a}-\vec{s}|+|\vec{b}-\vec{s}|+|\vec{c}-\vec{s}| \geq \frac{(\vec{a}-\vec{s})\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{(\vec{b}-\vec{s})\vec{b}}{|\vec{b}|}-+\frac{(\vec{c}-\vec{s})\vec{c}}{|\vec{c}|}=$$

$$=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-\vec{s}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}-+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)=$$

$$=3+(|\vec{a}|-1)\left(1-\frac{\vec{s}\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)+(|\vec{b}|-1)\left(1-\frac{\vec{s}\vec{b}}{|b|}\right)+(|\vec{c}|-1)\left(1-\frac{\vec{s}\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)>3.$$

Для останньої оцінки ми врахували, що $1>|\vec{s}| \geq \frac{\vec{s}\vec{a}}{|\vec{a}|}, 1>|\vec{s}| \geq \frac{\vec{s}\vec{b}}{|\vec{b}|}, 1>|\vec{s}| \geq \frac{\vec{s}\vec{c}}{|\vec{c}|}$.

4. Перше рівняння системи запишемо, з урахуванням рівності

$x^3+y^3=1$, у вигляді

$$(x+y)(1+xy)+(x-y)^2-(x+y)(x^2-xy+y^2)-1=0,$$

тобто $(x+y-1)(1-(x-y)^2)=0$.

Подальші міркування є очевидними.

Відповідь: $(1;0),(0;1)$.

5. Нехай AA_1 — висота трикутника ABC. Розглянемо випадок, коли прямі BQ і CP перетинаються в деякій точці T. Нам потрібно довести, що точка T лежить на прямій AA_1. Припустимо спочатку, що точки A і P лежать по один бік від прямої BC, а точки A і Q— по різні боки від прямої BC (див. рис.5.9).

Як відомо, точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, лежать на описаному колі цього трикутника: насправді, якщо в трикутнику ABC точка F симетрична ортоцентру H відносно середини N сторони AC, то $\angle AFC=\angle AHC=180°-\angle ABC$. Далі, оскільки $FC \parallel AH$,то $\angle FCB = 90°$, і точки Bі F діаметрально протилежні. Отже, $HQ \perp BT$.

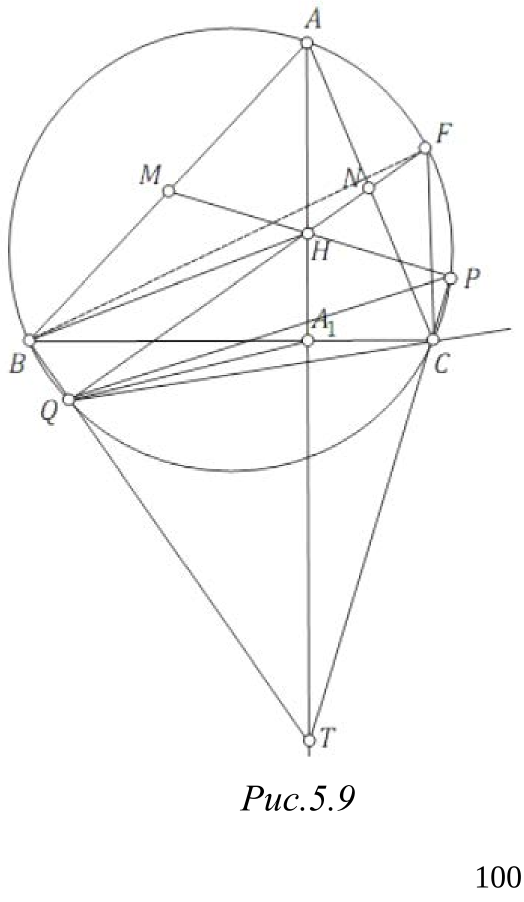


Рис.5.9

Аналогічно доводиться, що $HP \perp CT$. Чотирикутники $HQTP$ і BQA_1H циклічні. А тому маємо:$\angle QBC = \angle QHA_1, \angle QHT = \angle QPC$. Оскільки $\angle QPC = \angle QBC$, то $\angle QHT = \angle QHA_1$, що й завершує доведення. Якщо хорда PQ і точка A лежать по різні боки від прямої BC, то

$$\angle QBC = \angle QHA_1,$$

$$\angle QHT = \angle QPT, \angle QPT = \frac{\widehat{QP}}{2} + \frac{\widehat{PC}}{2} = \angle QBC.$$

Аналогічно розглядаються інші випадки розташування точок P і Qна описаномуколі трикутника ABC.

Якщо прямі BQ і CP паралельні, то неважко довести, що точка H лежить на відрізку MN, точки P і Fспівпадають, і тому $AH \parallel PC$.

6. Можна вважати, що $a \geq b \geq c \geq 0$. Доведемо такі дві нерівності:

$$\sqrt{a^2 + bc} \leq a + \frac{c}{2}, \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \frac{a + 3b + 2c}{2}.$$

Перша з них еквівалентна нерівності $4c(a - b) + c^2 \geq 0$. Для доведення другої нерівності скористаємося тим, що для $u > 0$ і $v > 0 \sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{2(u + v)}$.

Отже, $\sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \sqrt{2(b^2 + ca + c^2 + ab)}$. Неважко перевірити, що

$$2(b^2 + ca + c^2 + ab) \leq \left(\frac{a + 3b + 2c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a - b - 2c)^2 + 2c(b - c) \geq 0.$$

Маємо:

$$\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq a + \frac{c}{2} + \frac{a + 3b + 2c}{2} = \frac{3}{2}(a + b + c) \leq \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

7. Неважко довести, що для всіх $t \in (0; 3)$

$$|t(t - 1)(t - 2)(t - 3)| = |(t^2 - 3t)^2 + 2(t^2 - 3t)| \leq 1,$$

причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Нехай $a \geq 0$ — кількість рівних 1 чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_n, b \geq 0$ — кількість рівних 2 чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Якщо $a + b = n$, то твердження задачі, очевидно, виконано. Нехай $a + b < n, m = n - (a + b)$, і без обмеження загальності припустимо, що $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \{1; 2\}$. Тоді$P(x) =$

$(x-1)^a(x--2)^b Q(x)$, де многочлен $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$має цілі коефіцієнти (як частка двох зведених многочленів з цілими коефіцієнтами). Отже, $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ — деякі цілі ненульові числа, звідки отримуємо, що $A=|Q(0)Q(1)Q(2)Q(3)|\geq 1$. Але

$A=\prod_{k=1}^{m}|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)|$,і тому, згідно з доведеним, це можливо лише у випадку, коли $|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)|=1$ для всіх $k=1,\ldots,m.$ Остання рівність дає потрібний результат.

VI. ЗАДАЧІ МІЖНАРОДНИХ ОЛІМПІАД

6.1. Алгебра (умови)

1. Для множини $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, яка складається з чотирьох попарно різних додатних цілих чисел, позначимо s_A суму $a_1+a_2+a_3+a_4$. Позначимо n_A кількість пар індексів $(i,j), 1\le i<j\le 4$, для яких s_A ділиться на a_i+a_j. Знайти усі множини *A*, що складаються з чотирьох попарно різних додатних цілих чисел, для яких n_A набуває найбільше можливе значення.

2. Нехай $f:R\to R$ – функція, що визначена на множині дійсних чисел та набуває дійсні значення, така, що

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))$$

для всіх дійсних *x* та *y*. Довести, що $f(x)=0$ /(x) = 0 для всіх $x<0$.

3. Нехай $n>0$– ціле число. Є шалькові терези та *n* гирь вагою 2^0, $2^1,\ldots,2^{n-1}$. Усі *n* гир кладуть одну за одною на шальки терезів, тобто на кожному з *n* кроків вибирають гирю, яку ще не поклали на терези, та додають або на ліву, або на праву шальку; при цьому гирі кладуть так, аби у жоден момент часу права шалька не переважила ліву. Знайти кількість способів виконати таку послідовність кроків.

4. Нехай *f* – визначена на множині цілих чисел функція, яка набуває цілі додатні значення. Відомо, що для довільних цілих *m* і *n* різниця *f(m) –f(n)* ділиться на $f(m-n)$. Довести, що для довільних цілих *m* та *n* таких, що $f(m)\le f(n)$, число $f(n)$ ділиться на $f(m)$.

5. Знайдіть усі функції $f:R\to R$ такі, що для довільних $x,y\in R$, виконується рівність

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]$$

де $[a]$ позначає найбільше ціле число, яке не перевищує *a*.

6. Знайдіть усі функції $g: N \to N$ такі, що число

$$\left(g(m)+n\right)\left(g(n)+m\right)$$

є квадратом натурального числа при будь-яких $m,n \in N$.

7. На початку в кожній з шести коробок B_1, B_2, B_3,B_4, B_5, B_6 знаходиться по одній монеті. Дозволяється виконувати операції двох типів:

Тип 1) Вибрати непорожню коробку B_j , $1 \le j \le 5$, забрати з неї одну монету та додати дві монети в коробку B_{j+1};

Тип 2) Вибрати непорожню коробку B_k , $1 \le k \le 4$, забрати з неї одну монету та поміняти місцями вміст (можливо, порожній) коробки B_{k+1} із вмістом (можливо, порожнім) коробки B_{k+2} .

Чи існує скінчена послідовність таких операцій, що призводить до ситуації, коли п'ять коробок B_1,B_2, B_3, B_4, B_5 порожні, а коробка B_6 містить рівно $2010^{2010^{2010}}$ монет? (За означенням $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$).

8. Задано послідовність додатних дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Відомо, що існує такий номер s, що для усіх $n > s$.

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\right\}$$

Доведіть, що існують натуральні числа ℓ та N такі, що $\ell \le s$ та $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ при усіх $n \ge N$.

6.2. Алгебра (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Існує 6 пар індексів $1 \le i < j \le 4$. Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Тоді $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ та $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$. Таким чином, числа $a_2 + a_4$ та $a_3 + a_4$ більші за $\frac{1}{2} s_A$, а тому не є дільниками s_A. Отже, лишаться щонайбільше 4 пари індексів, для яких s_A може ділитися на $a_i + a_j$, тобто $n_A \le 4$.

Припустимо, що $n_A = 4$. Тоді $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ має ділитися на кожне з чисел $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$ та $a_2 + a_3$. Якщо $a_1 + a_4 \neq a_2 + a_3$, то одне з цих чисел є більшим за $\frac{1}{2}s_A$ та не може бути дільником s_A. Отже, $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A$. Нехай

$$a_1 + a_2 = \tfrac{1}{k}s_A, \quad a_1 + a_3 = \tfrac{1}{l}s_A,$$

де k,l k, l– деякі натуральні числа.

Оскільки $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A$, то $k > l > 2$. З іншого боку,

$$2a_1 = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) - (a_2 + a_3) = \left(\tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{l} - \tfrac{1}{2}\right)s_A > 0,$$

тобто $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{2} > 0$. Звідси випливає, що $l = 3$ (інакше $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} \le \frac{1}{5} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ та $k = 4$ або $k = 5$ (інакше $\frac{1}{k} + \frac{1}{3} \le \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Отримали дві системи рівнянь для знаходження $\frac{1}{k} + \frac{1}{3} \le \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ a_1 + a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 = \frac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ a_1 + a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо множини $A = \{a, 5a, 7a, 11a\}$ та $A = \{a, 11a, 19a, 29a\}$ відповідно (a – довільне натуральне число), для яких $n_A = 4$.

Відповідь: (a, $5a$, $7a$. $11a$) та (a, $11a$. $19a$, $29a$), де a – довільне натуральне число.

2. Після заміни $y = t - x$ нерівність набуває вигляду

$$f(t) \le tf(x) - xf(x) + f(f(x)), \; x, t \in R \qquad (1)$$

Розглянемо довільні дійсні числа a та b. Підставимо в (1) значення $t = f(a)$, $x = b$ та $t = f(b)$, $x = b$. Отримаємо

$$f(f(a)) \le f(a)f(b) - bf(b) + f(f(b))$$

$$f(f(b)) \le f(a)f(b) - af(a) + f(f(a))$$

Додаючи ці нерівності, дістанемо

$$2f(a)f(b) \ge af(a) + bf(b)$$

Зокрема при $b = 2f(a)$ це означає, що $2f(a)f(b) \ge af(a) + 2f(a)f(b)$, тобто $af(a) \le 0$. Таким чином,

$$f(a) \ge 0 \text{ при всіх } a \le 0 \qquad (2)$$

Тепер припустимо, що для деякого дійсного числа x маємо $f(x) \ge 0$. Тоді з (1) випливає, що для всіх $t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}$ виконується нерівність $f(t) < 0$ та дістаємо суперечність з (2). Отже,

$$f(x) \le 0 \text{ для всіх } x \in R. \qquad (3)$$

З (2) та (3) випливає, що $f(x) = 0$ для всіх $x < 0$. Залишилось знайти знайти $f(0)$. Підставимо в (1) значення $t = x < 0$. Дістанемо $0 \le 0 - 0 + f(0)$, тобто $f(0) \ge 0$, тому з (3) отримуємо $f(0) = 0$.

3. Позначимо $f(n)$ шукану кількість способів. Зауважимо, що відповідь задачі не зміниться, якщо замість набору гирь вагою $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ розглянути будь-який інший набір, у якому вага кожної гирі є більшою за сумарну вагу усіх легших за неї гирь (назвемо такий набір правильним). Справді, для кожного правильного набору вимога, щоб права шалька терезів ніколи не переважила ліву, рівносильна до вимоги, щоб в кожен момент часу найважча з уже використаних гирь завжди була на лівій шальці.

Розглянемо тепер гирю, яку ми збираємось покласти на шальки останньою. Зрозуміло, що набір з решти гирь є правильним, тому його можна розмістити на шальках терезів $f(n-1)$ способами. Тепер якщо останньою є найважча з усіх n гирь, її слід покласти на ліву шальку, а якщо будь-яка з інших $n-1$ гирь, то її можна покласти або на ліву, або на праву шальку, бо найважча гиря набору вже знаходиться на лівій шальці. Отже, кількість способів покласти на терези усі гирі становить

$f(n) = f(n-1)\cdot 1 + (n-1)\cdot f(n-1)\cdot 2 = (2n-1)f(n-1)$

Оскільки $f(1)=1$, то звідси індукцією за n дістаємо, що $f(n) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ при всіх $n>1$.

Відповідь: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

4. Нехай x та y – два цілих числа, для яких $f(x) < f(y)$.Покажемо, що $f(y)$ ділиться на $f(x)$. При $m = x$, $n = y$ дістаємо, що $f(y) - f(x) = |f(x) - f(y)| > 0$ ділиться на $f(x-y)$, тому $f(x-y) \le f(y) - f(x) < f(y)$. Отже, число $d = f(x) - f(x-y)$ задовольняє нерівності $-f(y) < -f(x-y) < d < f(x) < f(y)$

Але при $m = x$, $n = x - y$ отримуємо, що d ділиться на $f(y)$, тому $d = 0$. Отже, $f(x) = f(x-y)$. Таким чином, $f(x) - f(y)$ ділиться на $f(x) = f(x-y)$, а тому і $f(y)$ ділиться на $f(x)$.

5. Підставимо в умову $x = 0$ та отримаємо

$$f(0) = f(0)[f(y)] \qquad (*)$$

для усіх $y \in R$. Можливі два випадки.

Випадок 1. Припустимо, що $f(0) \ne 0$. Тоді з (*) отримуємо, що $[f(y)] \equiv 1$ при усіх $y \in R$. Отже, умову задачі можна переписати як $f([x]y) = f(x)$, звідки підстановкою $y = 0$ отримуємо $f(x) = f(0) = C \ne 0$. Остаточно, з $1 = [f(y)] = [C]$ маємо, що $1 \le C < 2$

Випадок 2. Нехай тепер $f(0) = 0$. Припустимо, що знайшлось таке число α, $0 < \alpha < 1$, що $f(\alpha) \ne 0$. Покладемо в умові $x = \alpha$ і отримаємо $0 = f(0) = f(\alpha)[f(y)]$ для усіх $y \in R$. Звідси $[f(y)] = 0$ для усіх $y \in R$. Підставимо в умову x=1 і отримаємо $f(y) = f(1)[f(y)] = 0$ для усіх $y \in R$, суперечність з припущенням, що $f(\alpha) \ne 0$. Отже, маємо

$f(\alpha)=0$ для усіх $0<\alpha<1$. Розглянемо довільне дійсне число *z*. Знайдеться таке ціле число*N,* що$\alpha=\frac{z}{N}\in[0;1)$ (в якості такого *N* можна взяти $N=[z]+1$ при $z>0$ і $N=[z]-1$при $z\le 0$). Підставимо в умову $x=N$ і $y=\alpha$ та отримаємо

$$f(z)=f(N\alpha)=f([N]\alpha)=f(N)[f(\alpha)]=0.$$

Отже, у цьому випадку $f(z)=0$ для усіх $z\in R$.

Залишається перевірити, що знайдені функції справді є розв'язками рівняння. Це можна зробити безпосередньою підстановкою.

Розв'язання 2. Зрозуміло, що

$$f(x)[f(y)]=f([x]y)=f([[x]]y)=f([x])[f(y)],$$

отже$\left(f(x)-f([x])\right)[f(y)]=0$ для довільних $x,y\in R$.

Якщо $[f(y)]=0$ для усіх $y\in R$, то покладемо в умові *x*=1 і отримаємо, що $f(y)=f(1)[f(y)]=0$, тобто функція *f* тотожно дорівнює нулю.

Якщо ж $[f(y_0)]\ne 0$ для деякого $y_0\in R$, то $f(x)=f([x])$ для усіх $x\in R$. Тоді з умови отримуємо, що $f(x)=f([x]\cdot 1)=f(x)[f(1)]$, тобто $f(x)(1-[f(1)])$. При $x=y_0$ звідси випливає, що$[f(1)]=1$. Припустимо, що $[f(0)]=0$. Тоді

$$1\le f(1)=f(2\cdot\tfrac{1}{2})=f(2)[f(\tfrac{1}{2})]=f(2)[f([\tfrac{1}{2}])]=f(2)[f(0)]=0,$$

суперечність. Отже $[f(0)]\ne 0$. Підставимо в умову $y=0$ та отримаємо, що $f(0)=f(x)[f(0)]$ при усіх $x\in R$, звідки $f(x)=c\ne 0$ з $[c]=[f(1)=1]$ тобто $c\in[1,2)$.

Перевіркою переконуємося, що усі знайдені функції справді задовольняють умову.

Відповідь: f(x) =const= *C*, де *C*= 0 або $1 \le C < 2$.

6. Зрозуміло, що будь-яка функція вигляду $g(n) = n + c$, де c – довільне ціле невід'ємне число, задовольняє умову, бо $(g(m)+n)(g(n)+m) = (n+m+c)^2$ – точний квадрат. Доведемо, що інших функцій немає. Головною у доведенні буде така

Лема. Припустимо, що для деяких натуральних чисел k, ℓ та простого числа *p* число $g(k) - g(\ell)$ ділиться на *p*. Тоді $k - \ell$ ділиться на *p*.

Доведення. Покажемо, що існує таке натуральне число *n,* що обидва числа $g(k)+n$ та $g(\ell)+n$ діляться на *p,* причому степінь *p* у розкладі цих чисел на прості множники непарний. Розглянемо два випадки. Якщо $g(k) - g(\ell)$ ділиться на p^2, тобто $g(k) - g(\ell) = p^2 r$, то досить покласти $n = pD - g(k)$, де $D \ge \max\{g(k), g(\ell)\}$ не ділиться на *p*. Тоді числа $g(k)+n = pD$ і $g(\ell) = g(k)+n+(g(\ell)-g(k)) = pD + p^2 r$ діляться на *p* і не діляться на p^2. Якщо ж $g(k) - g(\ell)$ ділиться на *p,* але не ділиться на p^2, то досить узяти $n = p^3 D - g(k)$ з тим самим числом *D,* що і раніше. Тоді число $g(k)+n = p^3 D$ ділиться на p^3, але не ділиться на p^4, а число $g(\ell)+n = p^3 D + (g(\ell)-g(k))$ ділиться на *p*, але не ділиться на p^2 Для знайденого числа *n* розглянемо числа $(g(\ell)+n)(g(n)+\ell)$ та $(g(k)+n)(g(n)+k)$. За умовою обидва числа є повними квадратами. Але перший множник в кожному з цих чисел містить *p* лише у непарному степені, тому другий множник має ділитися на *p*. А тоді $k - \ell = (g(n)+k) - (g(n)+\ell)$ діляться на *p*. Лему доведено.

Розглянемо, які наслідки випливають з леми. По-перше, якщо $g(k)=g(\ell)$ для деяких $k,\ell\in N$, то різниця $k-l$ має ділитися на будь-яке просте число, звідки $k-l=0$, тобто $k=l$. Отже, функція g ін'єктивна.

По-друге, розглянемо числа $g(k)$ та $g(k+1)$. Оскільки число $1=(k+1)-k$ не має простих дільників, то те саме виконується і для числа $g(k+1)-g(k)$, тобто $|g(k+1)-g(k)|=\pm1$, або $g(k+1)-g(k)=\pm1$. Покажемо, що знак один і той самий для усіх k. Припустимо, що це не так. Тоді знайдуться такі числа k, n, що $g(k+1)-g(k)=1$, а $g(n+1)-g(n)=-1$. Зрозуміло, що тоді мають існувати і два сусідніх числа з такою властивістю, тобто можна вважати, що $n=k+1$ або $n=k-1$. У першому випадку $g(k+2)=g(n+1)=g(n)-1=$ $=g(k+1)-1=g(k)$, суперечність з ін'єктивністю функції g. У другому випадку отримуємо аналогічну суперечність. Якщо $g(n+1)=g(n)-1$ для всіх $n\in N$, то $g(n+1)=g(1)-n$ для всіх $n\in N$, зокрема, $g(g(1)+1)=0$, що суперечить умові. Отже, $g(n+1)=g(n)+1$ для всіх $n\in N$, або $g(n)=n+(g(1)-1)$, що і було потрібно довести.

Відповідь: будь-яка функція вигляду $g(n)=n+c$,, де c– довільне ціле невід'ємне число.

7. Позначимо через $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\to(a_1',a_2',\ldots,a_n')$ таке твердження: якщо деякі послідовно розташовані коробки містять $a_1,a_2,\ldots a_n$ монет відповідно, то можна за допомогою декількох операцій отримати ситуацію, коли ці коробки містять $a_1',a_2',\ldots a_n'$ монет відповідно, при цьому вміст усіх інших коробок не змінюється.

Нехай $A=2010^{2010^{2010}}$. Наша мета – показати, що $(1,1,1,1,1,1)\to(0,0,0,0,A)$. Зауважимо, що достатньо отримати ситуацію

$(0,0,0,B,0,0)$ з числом B, більшим за $A/4$. Після цього будемо застосовувати операцію типу 2 до коробки B_4 (при цьому буде мінятися місцями вміст порожніх коробок B_5 та B_6), допоки не прийдемо до ситуації $(0,0,0,A/4,0,0)$, а далі послідовно застосуємо операцію типу 1 спочатку до коробки B_4, потім – до коробки B_5:

$$(0,0,0,A/4,0,0)\to(0,0,0,0,A/2,0)\to(0,0,0,0,0,A).$$

Доведемо спочатку дві леми, які дозволять конструювати більш складні переходи.

Лема 1. $(a,0,0)\to(0,2^a,0)$ для будь-якого $a\ge 1$.

Доведення. Доведемо за індукцією, що $(a,0,0)\to(a-k,2^k,0)$ для довільного $1\le k\le a$. База, k= 1: застосовуємо операцію типу 1 до першої коробки:

$$(a,0,0)\to(a-1,2,0)=(a-1,2^1,0).$$

Припустимо, що для деякого k< a твердження вірне. Позицію $(a-k,2^k,0)$ ми можемо отримати за припущенням індукції. Застосуємо операцію типу 1 до середньої коробки 2^k разів, аби вона стала порожньою. Потім застосуємо операцію типу 2 до першої коробки:

$$(a-k,2^k,0)\to(a-k,2^k-1,2)\to\ldots\to(a-k,0,2^{k+1})\to(a-k-1,2^{k+1},0).$$

Отже, $(a,0,0)\to(a-k-1,2^{k+1},0)$. Індукційний перехід доведено. .2

Лема 2. Позначимо $P_n=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n}$ (наприклад, $P_3=2^{2^2}=16$, $P_4=2^{2^{2^2}}=2^{16}$).

Тоді $(a,0,0,0)\to(0,P_a,0,0)$ для будь-якого $a\ge 1$.

Доведення. Теж будемо доводити за індукцією, що $(a,0,0,0)\to(a-k,P_k,0,0)$ для будь-якого $1\le k\le a$. База, $k=1$: застосовуємо операцію типу 1 до першої коробки: $(a,0,0,0)\to(a-1,2,0,0)=(a-1,P_1,0,0)$.

Припустимо, що для деякого $k < a$ твердження вірне. Позицію $(a-k, P_k, 0, 0)$ ми можемо отримати за припущенням індукції. Застосуємо тепер лему 1 до трьох останніх коробок і після цього операцію типу 2 до першої коробки:

$$(a-k, P_k, 0, 0) \to (a-k, 0, 2P^k, 0) = (a-k, 0, P_{k+1}, 0) \to (a-k-1, P_{k+1}, 0, 0)$$

Отже, $(a, 0, 0, 0) \to (a-k-1, P_{k+1}, 0, 0)$. Індукційний перехід доведено.

Тепер перейдемо до розв'язання задачі. Спочатку застосуємо операцію типу 1 до коробки 5, потім операцію типу 2 до коробок B_4, B_3, B_2 і B_1 (у цьому порядку), після чого двічі застосуємо лему 2:

$$(1,1,1,1,1,1) \to (1,1,1,1,0,3) \to (1,1,1,0,3,0) \to (1,1,0,3,0,0) \to (1,0,3,0,0,0) \to$$
$$\to (0,3,0,0,0,0) \to (0,0,P_3,0,0,0) \to (0,0,16,0,0,0) \to (0,0,0,P_{16},0,0)$$

Залишилось переконатися, що $P_{16} \geq A/4$. Це справді так, бо

$$A = 2010^{2010^{2010}} < \left(2^{11}\right)^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} =$$
$$= 2^{2^{11\cdot 2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{P_3}}} = P_6 < 4P_{16}$$

Зауваження. Цікаво дізнатись, яку ж максимальну кількість монет можливо отримати в останній коробці. Для трьох коробок неважко отримати, що цей максимум дорівнює 7, для 4 коробок він дорівнює 28:

$$(1,1,1,1) \to (0,3,0,3) \to (0,2,2,3) \to (0,2,0,7) \to (0,1,7,0) \to (0,1,0,14) \to$$
$$\to (0,0,14,0) \to (0,0,0,28)$$

Для 5 коробок можна отримати

$$(1,1,1,1,1) \to (1,0,0,14,0) \to (0,2,0,14,0) \to (0,1,14,0,0) \to (0,1,0,2^{14},0) \to$$
$$\to (0,0,2^{14},0,0) \to (0,0,0,2^{14},0) \to \left(0,0,0,0,2\cdot 2^{2^{14}}\right)$$

Для 6 коробок можна отримати

$$(1,1,1,1,1,1) \to (1,0,0,2^{14},0,0) \to (0,2,0,2^{14},0,0) \to (0,1,2^{14},0,0,0) \to$$
$$\to (0,1,0,P_{2^{14}},0,0) \to (0,0,P_{2^{14}},0,0,0) \to (0,0,0,P_{P_{2^{14}}},0,0) \to \left(0,0,0,0,0,2 \cdot 2^{P_{P_{2^{14}}}}\right)$$

Невідомо, чи є ці числа найбільшими можливими.

Інше цікаве питання – а яка найменша кількість монет може вийти? Для двох або трьох коробок відповідь 3, для чотирьох та більше – 0. Радимо читачеві самому спробувати побудувати потрібні ланцюжки операцій.

Відповідь: Так, потрібна послідовність операцій існує,

8. З умови задані випливає, що кожний член послідовності $a_n (n > s)$ можна подати як $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$, з $j_1 \cdot j_2 < n$, $j_1 + j_2 = n$. Якщо хоча б одне з чисел j_1, j_2 більше за *s*, то цей процес можна продовжити. Як результат, ми можемо подати кожне a_n у вигляді

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}, \text{ де } 1 \le i_j \le s, \; i_1 + \ldots + i_k = n$$

Розглянемо скінчений набір величин $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_s}{s}$. Серед них є найбільша. Позначимо цю найбільшу величину t і нехай ℓ – індекс (або один з індексів), при якому вона досягається, тобто

$$\frac{a_\ell}{\ell} = t = \max_{1 \le i \le s} \frac{a_i}{i}$$

Зрозуміло, що $a_m \le tm$ для усіх $1 \le m \le s$. Тоді з подання (3) випливає, що

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \le ti_1 + ti_2 + \ldots ti_k = t(i_1 + \ldots + i_k) = tn \tag{1}$$

тобто для усіх *n* виконується нерівність $a_n \le tn$.

Розглянемо нову послідовність $b_n = nt - a_n$. Завдяки тому, що $a_n \le tn$, члени послідовності (b_n) невід'ємні. Крім того,

$$b_n = nt - a_n = nt - \max_{1 \le k \le n-1}(a_k + a_{n-k}) = nt - \max_{1 \le k \le n-1}\left(kt - b_k + (n-k)t - b_{n-k}\right) =$$
$$= nt - \max_{1 \le k \le n-1}(nt - b_k - b_{n-k}) = -\max_{1 \le k \le n-1}(-b_k - b_{n-k}) = \min_{1 \le k \le n-1}(b_k + b_{n-k})$$

Зауважимо, що $b_\ell = \ell t - a_\ell = 0$, а отже при $n > s$ маємо

$$b_n = \min_{1 \le k \le n-1} \left(b_k + b_{n-k} \right) \le b_\ell + b_{n-\ell} = b_{n-\ell} \qquad \textit{(2)}$$

Розглянемо підпослідовність $b_i, b_{i+\ell}, b_{i+2\ell}, \ldots, b_{i+m\ell}, \ldots$ для деякого фіксованого $1 \le i \le \ell$. Завдяки (2) починаючи з певного члена вона є незростаючою і обмежена знизу нулем. Якщо ми покажемо, що члени послідовності (b_n) можуть набувати лише скінченну кількість різних значень, то звідси буде випливати, що підпослідовність $(b_{i+m\ell})$ з деякого моменту є сталою, тобто

$$b_{i+(m+1)\ell} = b_{i+m\ell} = b_{i+m\ell} + b_\ell \text{ для усіх } m > M_i \qquad (3)$$

Якщо розглянути $N = \ell \cdot \max\{M_1, M_2, \ldots M_\ell\}$, то при усіх $n > N$ завдяки (3) буде

$$b_{n+\ell} = b_n = b_\ell$$

звідки

$$a_{n+\ell} = (n+\ell)t - b_{n-\ell} = (n+\ell)t - b_n - b_\ell = a_n + a_\ell, \text{ для усіх } n > N,$$

що і було потрібно довести.

Отже, залишилося показати, що (b_n) набуває лише скінченну кількість значень. Якщо усі $b_j = 0$ для $1 \le j \le s$, то завдяки (2) усе доведено. В іншому випадку позначимо

$$T = \max_{1 \le j \le s} b_j, \ \varepsilon = \min\left\{ b_j : 1 \le j \le s, b_j > 0 \right\}$$

тобто $\varepsilon -$ це найменше ненульнове значення b_j при $1 \le j \le s$. З (2) випливає, що при будь-якому n маємо $0 \le b_n \le T$, а завдяки поданню (3)

$$b_n = nt - a_n = t\left(i_1 + \ldots + i_k\right) - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots a_{i_k} = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k},$$

тобто кожний член послідовності b_n належить множині

$$B = \left\{ b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots b_{i_k} : i_1, \ldots, i_k \le s \right\} \cap [0, T]$$

Розглянемо деякий елемент $x = b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k} \in B$. Тоді серед доданків не більше, ніж $\frac{T}{\varepsilon}$ ненульових (бо інакше було б $x > \frac{T}{\varepsilon} \cdot \varepsilon > T$, тому x можна подати таким само чином, але зі сталою $k \le \frac{T}{\varepsilon}$. Оскільки існує лише скінчена кількість сум $b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$ таких, що $i_1, \ldots, i_k \le s, k \le \frac{T}{\varepsilon}$, то члени послідовності (b_n) можуть набувати лише скінченну кількість значень, що і завершує доведення.

6.3. Геометрія (умови)

1. Нехай S – скінченна множина точок площини, яка містить принаймні дві точки. Відомо, що жодні три точки множини S не лежать на одній прямій. Назвемо *вітряком* такий процес. Спочатку обирається пряма ℓ, на якій лежить рівно одна точка $P \in S$. Пряма ℓ обертається за годинниковою стрілкою навколо центра P доти, доки вона вперше не пройде через іншу точку множини S. В цей момент ця точка, назвемо її Q, стає новим центром, та пряма продовжує обертатись за годинниковою стрілкою навколо точки Q доти, доки вона знову не пройде через точку множини S. Цей процес продовжується нескінченно.

Довести, що можна обрати деяку точку P множини S та деяку пряму ℓ, яка проходить через P, таким чином, що для вітряка, який починається з прямої ℓ, кожна точка множини S виступатиме в якості центра нескінченну кількість разів.

2. Нехай ABC– гострокутний трикутник, а Γ – описане навколо нього коло. Нехай пряма ℓ – деяка дотична до кола Γ, та нехай ℓ_a, ℓ_b та ℓ_c – прямі, симетричні прямій ℓ відносно прямих BC, CA та AB відповідно. Довести, що коло, описане навколо трикутника, утвореного прямими l_a, l_b та l_c дотикається до кола Γ.

3. Нехай точка I– центр вписаного кола трикутника ABC, а Г – описане коло цього трикутника. Позначимо через D другу точку перетину AI з Г. На дузі BDC вибрано точку E і на стороні BC вибрано точку F таким чином, що

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

ТочкаG– середина відрізкаIF. Доведіть, що точка перетину прямих EI та DG належить Г.

4. Нехай P– точка всередині трикутника ABC. Прямі AP, BP та CP вдруге перетинають описане коло Г в точках K, L та M відповідно. Дотична до кола Г, проведена через точку C, перетинає пряму AB у точці S. Виявилось, що $SC= SP$. Доведіть, що $MK =ML$.

6.4. Геометрія (відповіді, вказівки, розв’язки)

1. Задамо напрямок на прямій ℓ та будемо називати півплощину зліва від прямої світлою, а півплощину справа від прямої темною. Помітимо, що коли центр обертання змінюється з точки T на точку U, точка T опиняється в тій самій півплощіші, де раніше була точка U. Тому кількості точок з множиниS у світлій та у темній півплощинах є сталими за виключенням моментів, коли пряма ℓ проходить через дві точки.

Розглянемо випадок, коли S містить $2n+1$ точок. Зафіксуємо довільний напрямок, який не є паралельним жодному відрізку, що сполучає точки множини S. Тоді знайдеться пряма ℓ з даним напрямком, яка проходить через деяку точку $P \in S$ та по обидва боки від якої міститься по n точок множини S (справді, можна почати з прямої, відносно якої всі точки множини S містяться у одній півплощині, та паралельно зсувати її так, аби точки множини S по одній переходили в іншу півплощину). Покажемо, що вітряк, який починається зі знайдених точки $P \in S$ та прямої ℓ, є шуканим. Оскільки кількість точок у світлій та темній півплощинах є сталою та дорівнює n, то після повороту на 180° пряма ℓ знову пройде через точку P (інакше знайшлись би дві паралельні прямі, кожна з яких проходить через деяку точку множини Sт а по обидва боки від яких міститься по nточок множини S, а це очевидно неможливо), а далі процес буде періодично повторюватись. Але при повороті на 180° світла та темна півплощини міняються місцями, тому для кожної точки множиниSмає існувати момент, коли вона є центром, бо це єдиний спосіб перейти в іншу півплощину. Внаслідок періодичності кожна точка множиниSвиступатиме в якості центра нескінченну кількість разів.

Нехай тепер S містить $2n+1$ точок. Аналогічно до попередніх міркувань можна почати вітряк з таких прямої ℓ таточки $P \in S$, що у світлій півплощині міститься $n-1$, а у темній півплощині n точок множини S відповідно. Після повороту на 180° пряма ℓпройде через деяку іншу точку $Q \in S$,а кожна відмінна від P і Q точка множини S змінить світлу півплощину на темну або навпаки, а тому встигне побувати центром. Оскільки після повороту на 360° пряма ℓзнову пройде через початкову точку P, процес буде періодичним, тобто кожна точка множини S стане центром нескінченну кількість разів.

2. Позначимо A_1, B_1, C_1 вершини трикутника, утвореного прямимиℓ_a, ℓ_bтаℓ_c. Нехай прямаℓперетинає прямі B_1C_1, C_1A_1 та A_1B_1 у точках A', B' та C' відповідно. Без обмеження загальності будемо вважати, що точки C' та B' лежать на сторонах трикутника $A_1B_1C_1$, а точка A' на продовженні сторони B_1C_1.

Точка A є центром зовнівписаного кола трикутника $A_1B'C'$, тому A_1A – бісектриса кута$\angle B_1A_1C_1$. Аналогічно B_1B та C_1C– бісектриси кутів $\angle A_1B_1C_1$ та $\angle A_1C_1B_1$, а отже прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в точці I–інцентрі трикутника$A_1B_1C_1$.

Далі, $\angle BIC = \angle B_1IC_1 = 90° + \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1, \angle BAC = \angle C'AB' =$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle B'A_1C' = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$. Отже, $\angle B'IC + \angle BAC = 180°$, чотирикутник $ABIC$ вписаний, тобто точка I належить колу Г.

Нехай P – точка дотику ℓ з Г, P'– точка, симетрична до P відносно BC. Тоді P' належить прямій B_1C_1. Позначимо Q точку перетину описаних кіл трикутників B_1BP' та C_1CP'.

Оскільки

$$\angle BQC = \angle BQP' + \angle P'QC = \angle BB_1P' + \angle P'C_1C = 180° - \angle B_1IC_1 = 180° - \angle BIC,$$

то точки $I, B, C,$ Q лежать на одному колі.

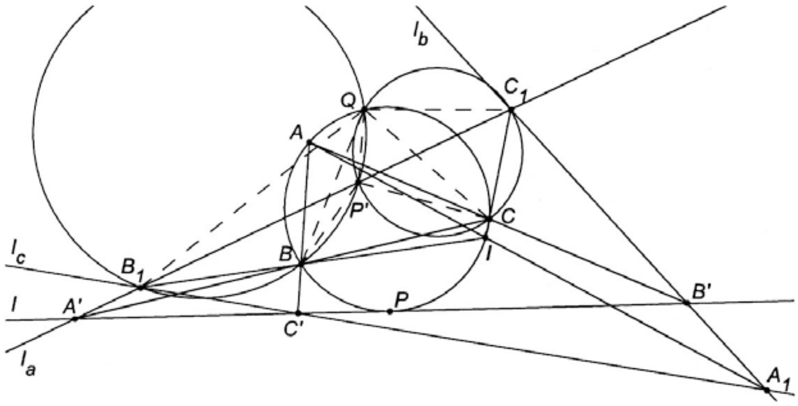


Рис.6.1

Оскільки

$$\angle B_1QC_1 = \angle B_1QP' + \angle P'QC_1 = \angle P'BI + \angle P'CI = 360° - \angle BP'C - \angle BIC =$$
$$= 360° - 2\angle BIC = 180° - \angle B_1A_1C_1$$

то точки A_1, B_1, C_1, Q лежать на одному колі, тобто Q– спільна точка описаних кіл трикутників ABC та $A_1B_1C_1$.

Залишилось довести, що Q є саме точкою дотику даних кіл. Нехай DQ – дотична до описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.Зауважимо, що B_1C_1– дотична до описаного кола трикутника $BP'C$, тому $\angle B_1P'B = \angle P'CB$ ZB'P'B =ZP'CB. Далі маємо

$$\angle DQB = \angle DQB_1 + \angle B_1QB = \angle QC_1B_1 + \angle B_1P'B = \angle QCP' + \angle P'CB = \angle QCB$$

Отже, DQ – дотична до описаного кола трикутника ABC, а тому описані кола трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ дотикаються в точціQ.

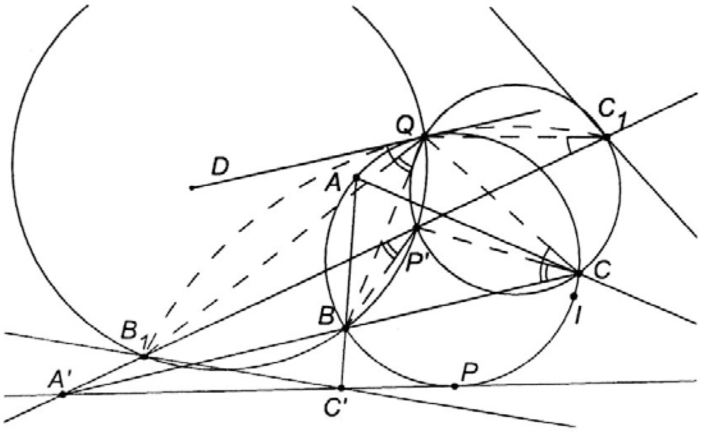


Рис.6.2

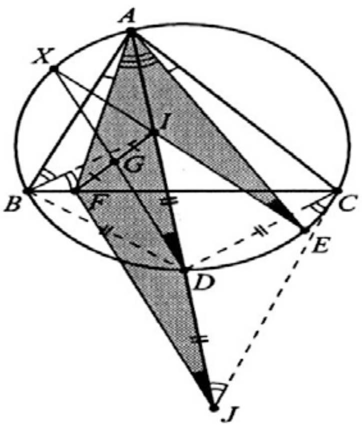


Рис.6.3

3. Покажемо, що рівність кутів $\angle IDG = \angle IEA$ достатня для того, щоб прямі EI та DG перетинались на колі Г.(рис.6.3) Припустимо, що пряма DG перетинає коло Г в точці X, а пряма EI– в точці X'. З рівності кутів випливає рівність дуг AX та AX'. Але точка X лежить на тій дузі AD, що містить точку B, так само точка X' лежить на тій дузі AE, що містить точку B. Отже, рівні дуги AX та AX' лежать по один бік від точки A, тобто точки X та X' співпадають.

Позначимо через J центр зовнівписаного кола ΔABC, яке відповідає вершині A (рис. 6.4). Точка J лежить на прямій AI, і, крім того, з теореми про "тризуб" випливає, що $DJ = DI$. Отже, в трикутнику FIJ пряма DG– середня лінія і $\angle IDG = \angle IJF$. Доведемо подібність трикутників AFJ та AIE, з якої і буде випливати потрібна рівність кутів $\angle AEI = \angle AJF = \angle IJF = \angle IDG$.

За теоремою про "тризуб" $DB = DC = DI = DJ$, отже ΔJDC – рівнобедрений і $\angle DJC = \angle JCD = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle JDC\right) = \frac{1}{2}\angle ADC = = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABI$. Крім того, $\angle BAI = \angle JAC$. Отже, трикутники ABI та AJC подібні. Звідси випливає, що $\frac{AB}{AJ} = \frac{AI}{AC}$, або $AB \cdot AC = AJ \cdot AI$. З іншого боку, $\angle ABF = \angle ABC = \angle AEC$ і за умовою $\angle BAF = \angle CAE$. Тому трикутники ABF та AEC також подібні, звідки $\frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AE}$, *або* $AB \cdot AC = AF \cdot AE$. Як наслідок з двох отриманих рівностей добутків,

$AF \cdot AE = AI \cdot AJ$, або $\frac{AF}{AJ} = \frac{AI}{AE}$. Оскільки $\angle BAF = \angle CAE$ і AD– бісектриса, то $\angle FAD = \angle IAE$, а отже трикутники AFJ та AIE подібні за рівним кутом та пропорційністю сторін, що і завершує доведення.

4. Вважатимемо, що $CA > CB$, а отже точка S лежить на промені AB. Оскільки $\angle PMK = \angle PAC$ як кути, що спираються на одну дугу, і $\angle KPM = \angle APC$ як вертикальні, то трикутники APC та MPK подібні (рис. 6.4). Отже, $\frac{MP}{MK} = \frac{AP}{AC}$. Аналогічно з подібності трикутників MPL та BPC випливає, що $\frac{ML}{MP} = \frac{BC}{BP}$. Перемножимо ці рівності та отримаємо $\frac{ML}{MP} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BC}{AC}$, тобто рівність $ML = MK$ еквівалентна рівності $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$. З умови $SP = SC$ і теореми про дотичну та січну випливає, що $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$, тобто $\frac{SP}{SA} = \frac{SB}{SP}$. З цієї рівності та того, що $\angle CSA$ є спільним для трикутників SPA і SBP, робимо висновок про подібність цих трикутників. Отже, $\frac{AP}{BP} = \frac{SA}{SP} = \frac{SA}{SC}$. Аналогічно, трикутники SCA і SBC теж подібні. Тому $\frac{SA}{SC} = \frac{AC}{BC}$. Звідси $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$, що еквівалентно рівності $ML=$ $=MK$.

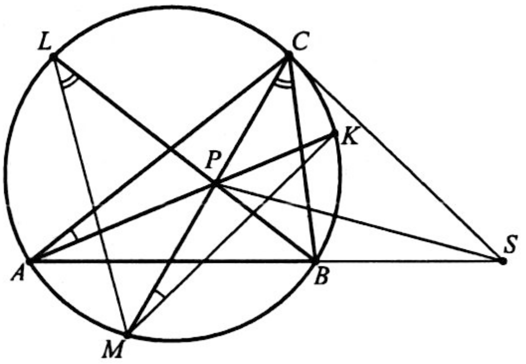


Рис.6.4

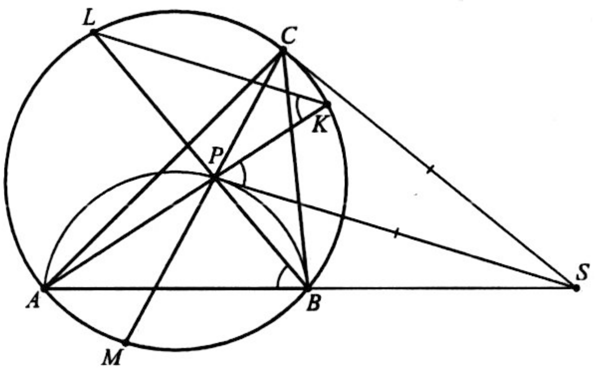


Рис.6.5

Розв'язання 2. Аналогічно до розв'язку 1 вважатимемо, що точка S лежить на промені AB. За умовою і теоремою про дотичну та січну $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$, тобто за зворотною теоремою SP є дотичною до описаного кола трикутника ABP (рис. 4). Тому $\angle KPS = 180^\circ - \angle SPA = \angle ABP$. Далі знаходимо $2\angle CPK = \breve{CK} + \breve{MA}$, отже

$$\breve{ML} = \breve{MA} + 2\angle AKL = \left(2\angle CPK - \breve{KC}\right) + 2\angle ABL = 2\left(\angle CPK + \angle ABL\right) - \breve{KC} =$$
$$= 2\left(\angle CPK + \angle ABP\right) - \breve{KC} = 2\left(\angle CPK + \angle KPS\right) - \breve{KC} = 2\angle CPS - \breve{KC}$$

За умовою SC = SP, тобто трикутник CSP– рівнобедрений і $\angle CPS = \angle PCS$. Отже, $\breve{ML} = 2\angle CPS - \breve{KC} = \breve{MK}$, оскільки $2\angle CPS = \breve{MK} + \breve{KC}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

2. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – 284 с.

3. *Вишенський В.А. та ін.* Конкурсні задачі з математики: Навч. посіб. /В.А. Вишенський, М.О. Перестук, А.М. Самойленко. – К.: Вища шк., 2001. – 432 с.

4. *Вишенський В.А., Карташев М.В., Михайловский В.І., Ядренко М.Й.* Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. – К.: Либідь, 1993.

5. *Вишенський В.А., Ядренко М.Й.*Збірник задач для учасників олімпіад юних математиків. – К.: Рад.шк., 1963. – 110 с.

6. *Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 302 с.

7. *Гєнкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В.*Ленінградськіматематичнігуртки. – К.: ТВіМС, 1997.

8. Заочные математические олимпиады /Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот М.Ж., Тоом А.Л. – М.: Наука, 1981. – 172 с.

9. Зарубежные математические олимпиады. /Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др; Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). 416 с.

10. *Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я.* Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976. – 543 с.

11. *Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А.*Задачіміжнароднихматематичнихолімпіад та методиїхрозв'язання. – Львів: Євросвіт, 1999.

12. *Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А.* Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.

13. *Пойа Д.*Как решать задачу. – М.: Просвещение, 1959. – 244 с.

14. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1972. – 448 с.

15. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. –344 с.

16. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко – К.: Вища шк. Изд-во при Киев.ун-те, 1984. – 238 с.

17. *Страшевич С., Бровкин Е.* Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978. – 338 с.

18. *Триг Ч.* Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975. – 302 с.

19. Українські математичні олімпіади: Довід. /В.А. Вишневський, О.Г. Ганюшкін, М.В. Карта шов та ін. – К.: Вища шк., 1993. – 415 с.

20. *Штейнгауз Г.* Сто задач. – М.: Наука, 1976. – 168 с.

21. *Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б.* Всероссийские математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1992.

22. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Вінниця: Вінницький пед. ун-т, 1998.

Навчальне видання

Математична зарядка

(олімпіадні задачі для школярів)

Андрій Ярославович Бомба,
Ірина Анатоліївна Барановська,
Лариса Володимирівна Пекарська

Набір:Гомон К.О., Грабар С.В.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
33028, м. Рівне, вул. Чорновола, 74