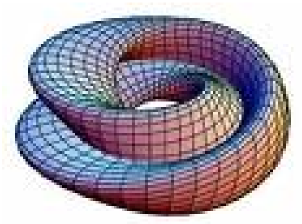
УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
РІВНЕНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
РІВНЕНСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
юному науковцю – члену математичного відділення МАН щодо написання науково-дослідницької роботи



Рівне-2009

Бомба А. Я., Белешко Д. Т., Дейнека О. Ю., Тадєєв П. О. Турбал Ю. В.
Методичні рекомендації юному науковцю – члену математичного відділення МАН щодо написання науково-дослідницької роботи . – Рівне: РМАНУМ, 2009. – 53с.

У посібнику наведено вимоги, методичні рекомендації та поради щодо підготовки, написання, оформлення і захисту робіт учнями – членами математичного відділення МАН (секції: математика; прикладна математика; математичне моделювання).

Адресовано працівникам освіти, які організовують роботу з обдарованими школярами в містах, районах, селах, наукових товариствах, філіях МАН та навчальних закладах нового типу (ліцеях, колегіумах, гімназіях) і учням-членам МАН.

Зміст

Вступ

Однією із форм роботи із інтелектуально обдарованою молоддю є Мала академія наук України де виховано багато творчих індивідуумів – майбутніх вчених та державних діячів. Мала академія наук України (далі МАН) – загальнодержавний науково-громадський проект, спрямований на пошук, підтримку, сприяння творчому розвитку обдарованих, здібних до наукової діяльності учнів.

МАН організовано Міністерством освіти України та Академією наук України (Постанова Колегії Міністерства освіти України від 22.12.93 р. №19/3-9 та Президії Академії Наук України №351). Освітні завдання, що покладені на МАН визначаються Державною науковою програмою " Освіта України XXI століття ", яка затверджена постановою Кабінету Міністрів України №896 від 3.11.93 р., а саме:

– виявляти, розвивати і підтримувати таланти та обдарування учнівської молоді;
– виховання свідомого громадянина України;
– пропаганда наукових досліджень учнів, студентів та захист їх авторських прав та інтересів;
– створення умов для творчого, інтелектуального, духовного самовдосконалення особистості, формування у молоді вмінь та навичок культури наукового дослідження;
– задоволення потреб особистості в професійному самовизначення та творчій самореалізації.

Оскільки Мала академія наук України є творчим об'єднанням молоді, яке забезпечує її інтелектуальний і духовний розвиток, підготовку до активної діяльності в галузі науки та сприяє самовизначенню в майбутній професії, міністр освіти і науки України щорічно видає наказ про проведення Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт членів Малої академії наук України.

Положення про етапи конкурсів-захистів, спосіб розгляду науково-дослідницьких робіт, базові наукові напрями та профілі, відповідальні структури і заохочення регламентуються відповідним наказом міністра освіти і науки України.

Для підвищення об'єктивності під час аналізу конкурсних робіт і визначення переможців конкурсу необхідна уніфікація вимог і підходів до підготовки, написання і захисту науково-дослідницьких робіт.

Але це не означає, що науково-дослідницька робота, яка представляється на конкурс, обмежується рамками певних тематик. Інваріантність спрощує порівняння робіт, а варіативність відтворює концепцію дослідника. В основі роботи має лежати певна наукова ідея, а автор повинен відобразити в ній власну позицію дослідника.

§ 1. Загальні положення

Наукова робота – це самостійно виконане наукове дослідження певної проблеми, яке відповідає науковим принципам, має певну структуру, містить результат власного пошуку, власні висновки. Дослідницька тема повинна бути (основні положення запозичені із [69]) :

– актуальною як з практичної, так і з теоретичної точок зору;
– посильною для виконання за період 2–3-річної роботи в МАН;
– перспективною для подальшого продовження роботи в цьому напрямку в студентському науковому товаристві;
– достатньо забезпеченою відповідним первинним матеріалом;
– безумовно, цікавою для дослідника, що стимулює пошукову ініціативу.

Якісне виконання роботи передбачає:

– обґрунтування теми, вибір об'єкта і визначення мети дослідження;
– добір і аналіз наукової літератури з обраної теми, розробку гіпотези;
– складання плану та структури роботи, розробку програми і підбір методів дослідження;
– використання інформації міжнародної мережі INTERNET тощо;
– проведення дослідження і узагальнення його результатів, висновки;
– оформлення пошуково-дослідницької роботи;
– рецензування роботи, захист отриманих результатів.

Написання наукової роботи вимагає, передусім, чіткого уявлення про рівень розробки теми, яка досліджується, у науці. Ось чому потрібно ознайомитися з основною літературою, що стосується обраної теми. Цей етап проводиться спільно з науковим керівником; це – своєрідна спільна творча праця двох дослідників – досвідченого і початківця. Керівник пропонує молодому науковцю необхідну літературу, оригінальні статті зі спеціальних наукових періодичних видань, спрямовує зусилля учня на пошук правильного розв'язання наукової задачі, на вибір ефективного та обґрунтованого методу. Успіх у написанні роботи значною мірою визначається умінням працювати з *літературними джерелами,* до яких належать навчальні підручники, монографії та наукові статті у періодичних виданнях. Пошуку цієї літератури допоможуть систематичний та алфавітний каталоги, а також різноманітні бібліографічні джерела.

Каталоги поділяються на:

– алфавітні, в яких назви творів розташовано в алфавітному порядку від прізвища першого автора чи від назви книги;

– систематичні, в яких назви творів розташовано за галузями знань;

– предметні, що містять назви творів із конкретних галузей знань.

Існують також чисельні бібліографічні довідкові видання, списки літератури у підручнику, монографії тощо.

Крім того, в періодичних виданнях, як правило, в останньому номері календарного року вміщується покажчик статей, опублікованих упродовж року.

Літературу, відсутню у вашій бібліотеці, можна замовити в іншій бібліотеці, де вона є, по міжбібліотечному абонементу (скорочено МБА).

Ефективність наукової роботи значною мірою залежить від вашого уміння орієнтуватися в науковій літературі, з якою ви працюєте.

Літературу доцільно записувати на окремі картки, зазначаючи всі дані про працю: прізвище та ініціали автора, назву монографії, статті чи збірника статей, тез, місце, рік видання, назву видавництва чи журналу, кількість сторінок, короткий зміст або цитати. Посилює достовірність одержаних результатів комбіноване використання джерел різних типів, але дуже важливо, щоб ці джерела точно відповідали поставленим завданням і співвідносились із темою наукової роботи.

Як працювати з науковою літературою ?

1. Для отримання максимальної кількості корисної інформації при читанні дотримуйся певних правил:

– з'ясуй назву книги або статті;

– зверни увагу на рік випуску та видавництво, щоб визначити давність та достовірність матеріалу;

– розберись в основному змісті книги та виділи факти, потрібні для твоєї роботи;

– знайди нові або суперечливі факти, які підлягають перевірці чи критиці.

2. При роботі з літературою послуговуйся деякими порадами психологів, наприклад:

– читай без регресії, тобто переглядаючи очима текст, доки він не буде прочитаний увесь, і перечитуючи його знову після деякого осмислення (такий спосіб опрацювання матеріалу забирає багато часу);

– читай не окремими словами, а змістовими блоками;

– під час читання виділяй ключові слова та опорні пункти;

– роби перерви під час роботи з літературою – після кожних 20 хвилин читання зроби паузу хвилин на 5, після кожної прочитаної книги відпочивай 20 хвилин.

Якість наукової роботи визначається за такими критеріями:

– актуальність теми дослідження;

– складність, проблемність, науковість;

– системність і повнота в розкритті обраної теми;

– новизна отриманих результатів;

– аргументованість висновків;

– грамотність викладу та культура оформлення [61].

Тематика науково-дослідних робіт не обмежується. Тема та зміст роботи повинні відповідати профілю секції. Результати оформлюються за тією ж схемою, що і дисертаційне дослідження, відповідно до вимог Державного стандарту України ДСТУ 3008-95.

Назва наукової роботи повинна бути лаконічною, короткою, відповідати суті вирішеної наукової проблеми (задачі), вказувати на мету дослідження та його завершеність. У назві не слід використовувати ускладнену термінологію. Треба уникати назв, що починаються зі слів «Дослідження питання...», «Дослідження деяких шляхів...», «Деякі питання...», «Матеріали до вивчення...в, «До питання...» тощо, в яких не відбито достатньою мірою суть проблеми.

Кожна робота повинна ґрунтуватися на науковій базі, мати посилання на наукову літературу, відображати власну позицію дослідника. Наукова робота повинна мати рецензію відповідного фахівця.

Наукова робота за об’ємом не повинна перевищувати 30 друкованих сторінок (співвідношення теоретичної частини до практичної приблизно 1:1) і повинна мати таку ***структуру***:

– титульний аркуш;
– зміст;
– перелік умовних позначень (за необхідності);
– вступ;
– основна частина;
– висновки;
– список використаних джерел;
– додатки (за необхідності).

Титульний аркуш повинен містити найменування територіального відділення МАН, назву наукового відділення та назву секції;

– назву роботи;
– прізвище, ім’я, по батькові автора, назву навчального закладу, де навчається автор;
– науковий ступінь, вчене звання, посаду, прізвище, ім’я, по батькові наукового керівника (або консультанта);
– назву міста і рік виконання.

Для зручності користування **зміст** подається відразу після титульної сторінки роботи із зазначенням сторінок. Він містить найменування та номери початкових сторінок усіх розділів, підрозділів та пунктів (якщо вони мають заголовок), зокрема вступу, загальних висновків, додатків, списку використаної літератури.

Перелік умовних позначень, символів, будь-яких скорочень, а також словник термінів (за необхідністю) складається у разі використання в науково-дослідницькій роботі специфічної (або складної) термінології, маловідомих або нових скорочень та символів і розміщується на сторінці після змісту.

У **вступі** необхідно розкрити актуальне значення теми, стан її вивчення, обґрунтувати важливість проведення дослідження. Його обсяг 1 – 2 сторінки.

Після визначення актуальності проблеми наукової роботи формулюється мета та завдання дослідження. Не слід формулювати мету як “Досягнення...”, “Вивчення...”, тому що ці слова вказують на засіб досягнення мети, а не саму мету.

Об’єкт дослідження – це процес, ідеалізоване явище або теорія, що породжує проблемну ситуацію й обраний для вивчення метод. Предмет дослідження міститься в межах об’єкта. Об’єкт і предмет дослідження як категорії наукового процесу співвідносяться між собою як загальне і часткове. В об’єкті виділяється та його частина, яка є предметом дослідження.

Подають перелік використаних методів дослідження для досягнення поставленої в роботі мети, коротко та змістовно визначаючи, що саме досліджувалось тим чи іншим методом.

При обґрунтуванні наукової новизни отриманих результатів необхідно показати їх відмінність від тих результатів, які були відомі раніше, описати ступінь новизни (вперше одержано, удосконалено, дістало подальший розвиток тощо).

У вступі потрібно відобразити практичне або теоретичне значення наукової роботи, особливо для розвитку відповідних галузей науки, техніки та виробництва. У роботі, що має теоретичне значення, треба подати відомості про наукове використання результатів досліджень або рекомендації щодо їх використання, а в роботі, що має прикладне значення – відомості про практичне застосування одержаних результатів або рекомендації, як їх використати. Повідомити, на яких заходах (конференціях, конкурсах тощо) були оприлюднені (апробовані) результати дослідження, та зазначити, у скількох матеріалах (статті, тези) опубліковано результати досліджень. Отже, орієнтовна структура вступу:

1. Сутність і стан вивчення проблеми, що розглядається.
2. Актуальність обраної теми.
3. Мета дослідження.
4. Завдання дослідження.
5. Об’єкт дослідження.
6. Предмет дослідження.
7. Методи дослідження.
8. Наукова новизна.
9. Значення роботи.
10. Апробація результатів дослідження.
11. Публікації (за наявності).

Основна частина роботи складається з розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів. Кожний розділ починають з нової сторінки. Кожен розділ (підрозділ, пункт чи підпункт) повинен мати назву. Особливе значення в ній належить лаконічності, виваженості й точності заголовків (логічності, доступності матеріалу). Наукова робота ні в якому разі не повинна перетворюватися в реферативний текст, коли переписуються окремі сторінки з літератури або механічно переказуються чужі думки, без найменшого вияву власної точки зору. Вживання цитат повинне виправдовуватись інформаційною доцільністю. Доцільність цитування визначається його місцем у композиції. У кінці кожного розділу формулюють висновки зі стислим викладенням наведених у розділі наукових і практичних результатів, що дає змогу вивільнити загальні висновки від другорядних подробиць.

У розділах основної частини подають:

– огляд літератури за темою;

– методику досліджень і експериментальну частину (за необхідності);

– відомості про проведені дослідження;

– аналіз і узагальнення результатів досліджень.

В огляді літератури окреслюються основні етапи розвитку наукових досліджень за проблемою. Стисло, критично висвітлюючи роботи попередників, потрібно назвати ті питання, що залишились невирішеними і, отже, визначити своє місце в розв’язанні проблеми. Бажано закінчити цей розділ коротким резюме стосовно необхідності проведення досліджень у даній галузі. Необхідно посилатися на наукові джерела, що дадуть змогу відшукати документи і перевірити достовірність відомостей при цитуванні документа. Посилатися слід на останні видання публікацій. Посилання на джерела слід зазначати порядковим номером за переліком, виділеним квадратними дужками [ ].

Результати власних досліджень необхідно викладати, порівнюючи їх з отриманими іншими авторами, з відображенням новизни. Аналіз повинен відображати власну позицію дослідника.

У **висновках** необхідно зробити короткий виклад найважливіших результатів, які були отриманні в ході роботи. Висновки мають відповідати меті та завданням дослідження, про які було повідомлено у вступі, та сформульовані відповідно до опису основної частини. Кожен окремий висновок пишеться з абзацу. Варто наголосити на важливості отриманого наукового здобутку для науки. При потребі можна сказати про перспективу даного дослідження, викласти рекомендації щодо використання отриманих результатів. Обсяг висновків – 1–2 сторінки.

Оформлення наукової роботи є наступним. Комп’ютерний набір: текстовий редактор Word, шрифт 14, Times New Roman через 1,5 інтервал по ширині. Оригінал друкується на папері формату А-4. Відтиски на папері повинні бути чіткими. На аркушах слід залишати поля: ліве – 30 мм, праве – 10 мм, верхнє та нижнє по 20 мм. Абзацні відступи становлять 5 знаків.

Текстова частина – чорного кольору. Заголовки відокремлюються від тексту зверху і знизу 3 інтервалами. Переноси слів та підрівнювання за форматом не використовувати.

Робота повинна бути виконана державною мовою. Усі сторінки роботи, враховуючи ілюстрації, додатки, повинні бути пронумерованими. Титульну сторінку не нумерують, але вона вважається першою. Нумерація починається з другої сторінки, на якій потрібно подати зміст роботи. З третьої – вступ тощо. Зміст, вступ, кожен розділ, висновки, літературу починають з нової сторінки. На наступних сторінках їх номер проставляють у правому верхньому кутку сторінки без крапки в кінці.

Заголовки структурних частин наукової роботи: ЗМІСТ, ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ, ВСТУП, РОЗДІЛ 1, РОЗДІЛ 2, …, ВИСНОВКИ, СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ, ДОДАТКИ друкують великими літерами симетрично до набору (по центру). Заголовки підрозділів друкують маленькими літерами (крім першої великої) з абзацного відступу. Крапку в кінці заголовка не ставлять. Якщо заголовок складається з двох або більше речень, їх розділяють крапкою. Номер розділу ставлять після слова РОЗДІЛ, після номера крапку не ставлять, потім з нового рядка друкують заголовок розділу.

Підрозділи нумеруються в межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу і порядкового номера підрозділу, між якими ставлять крапку, наприклад 2.3. (третій підрозділ другого розділу). Потім у тому ж рядку йде заголовок підрозділу. Пункти нумерують у межах кожного підрозділу (за такими ж правилами).

Ілюстрації (карти, схеми, фотографії, діаграми, креслення) та таблиці подають після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці. Ілюстрації позначають словом Рис. і нумеруються послідовно в межах розділу, за виключенням ілюстрацій, поданих у додатках. Номер ілюстрації повинен складатися з номера розділу і порядкового номера ілюстрації, між якими ставиться крапка, наприклад: *Рис.1.2 (другий рисунок першого розділу).* Номер, назву та пояснювальні підписи розміщують послідовно під ілюстрацією.

Таблиці нумерують послідовно (за винятком таблиць, поданих у додатках) у межах розділу, та розміщують цей напис у правому верхньому куті над відповідним заголовком таблиці, наприклад: *Таблиця 1.2* (друга таблиця першого розділу). Кожна таблиця повинна мати назву, яку розміщують над таблицею і друкують симетрично до тексту. Назву починають з великої літери.

Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів треба подавати безпосередньо під **формулою** в тій послідовності, в якій наведені у формулі. Значення кожного символу та числового коефіцієнту треба подавати з нового рядка. Рівняння та формули треба виділяти з тексту вільними рядками (вище та нижче кожної формули), при необхідності посилання нумерувати. Усі позначення мір, одиниці фізичних величин, результати досліджень приводяться відповідно до Міжнародної системи одиниць (SI).

При написанні роботи необхідно посилатися на **використані джерела**, на ідеях і висновках яких розроблюються досліджувані проблеми, задачі. Такі посилання дають змогу відшукати документи і перевірити достовірність відомостей про цитування документа, дають необхідну інформацію щодо нього, допомагають з'ясувати його зміст, мову тексту, обсяг. Посилатися слід на останні видання публікацій. Список використаних джерел пишуть з нової сторінки. Літературні джерела оформлюються відповідно до Державного стандарту [77] і розміщуються в алфавітному порядку прізвищ авторів. Під час роботи над дослідженням потрібно звертатися до енциклопедичних та тлумачних словників. Вони допоможуть з'ясувати значення певних термінів чи понять. Наведемо приклади бібліографічного опису окремих видів документів:

Книга одного автора:
Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними [текст] / В. М. Гончаренко. – К. : Вища школа, 1995. – 311 с.

Книга двох або трьох авторів:
Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

Книга чотирьох і більше авторів:
Математическая статистика и случайные процессы : Практикум [текст] / Л. Д. Вишневский [и др.]. – К. : Вища школа, 1992. – 143 с.

Окремий том багатотомного видання:
Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. [текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1970. – Т. **1**.

Опис статей з енциклопедій:
Динамическая система / Под. ред. И. М. Виноградова // Математическая энциклопедия : В 5 т. – М., 1979. – Т. 2.

Опис тез доповідей:
Лакоза І. В. Дослідження системи зв'язаних нейронів [текст]/ І. В. Лакоза // Матеріали дванадцятої міжнародної наукова конференція імені академіка М. Кравчука. – К., 2008.

Опис статей із журналів:
Табачников С. Л. Дифференциальная геометрия вокруг нас [текст] / С. Л. Табачников // Квант. – 1989. – № 11. – С. 8–13.

Додатки слід оформляти на наступних сторінках після списку літературних джерел, при цьому кожний додаток необхідно наводити з нової сторінки, наприклад: *Додаток А*. Додаток повинен мати заголовок, який друкується вгорі (симетрично до тексту сторінки) з великої літери.

Учасники конкурсу-захисту разом з роботою подають тези своєї роботи відповідно до зразка та завірену довідку наукового керівника, що підтверджує авторство, достовірність наведених результатів та можливість опублікування. Тези роботи подаються у друкованому вигляді та обов'язково на електронних носіях – дискета 3,5 дюйма, текст обсягом 1 сторінка формату

А4, набраному в текстовому редакторі Word, шрифтом Times New Roman, розміром 14 з 1,5 міжрядковим інтервалом. Усі поля – 20 мм.

Робота секції МАН включає:

– Заочне оцінювання науково-дослідних робіт.

– Виконання контрольних робіт з базових дисциплін.

– Захист науково-дослідних робіт.

Заочне оцінювання науково-дослідних робіт

Критерії:

– актуальність теми дослідження – 20 балів;

– складність, проблемність, науковість – 20 балів;

– системність і повнота в розкритті обраної теми – 20 балів;

– новизна отриманих результатів – 20 балів;

– аргументованість висновків – 10 балів;

– грамотність викладу та культура оформлення – 10 балів; Максимальна кількість балів – 100.

Виконання контрольних завдань із базових дисциплін

Передбачається 10 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень (4 завдання) – 4 бали за кожне;

2 рівень (3 завдання) – 10 балів за кожне;

3 рівень (3 завдання) – 18 балів за кожне.

Максимальна кількість балів – 100.

Захист науково-дослідних робіт

Для захисту автору надається до 10 хвилин, для відповіді на питання – до 3 хвилин. Захист науково-дослідних робіт оцінюється за такими критеріями:

– аргументованість вибору теми дослідження та її розкриття з урахуванням власного вкладу дослідника – 70 балів;

– логічність, чіткість, лаконічність викладення матеріалу – 30 балів;

– компетентність учасника, вичерпність відповідей – 30 балів;

– етикет та культура спілкування учасника – 10 балів;

– активна кваліфікована участь у веденні дискусій – 10 балів.

Максимальна кількість балів – 150.

Усі отримані оцінки вважаються остаточними, якщо протягом однієї години після оголошення результатів учасником конкурсу не буде подано офіційної апеляції в письмовій формі.

Поради конкурсанту, який виступає

* Сумлінно готуйтесь до виступу. Визначте основну думку та ґрунтовне її підтвердження. Підготуйте наочні посібники та ілюстрації (презентацію своєї роботи).

* Запам’ятайте текст свого повідомлення. Це надасть Вам впевненість і необхідну рішучість.

* Виступаючи, якомога рідше звертайтеся до своїх записів.

* Не ставте під сумнів значимість виступу, не знижуйте свій престиж вибаченнями з приводу того, що не зовсім готові, не вмієте говорити, чи маєте мало часу.

* Силу голосу пристосовуйте до акустики і розмірів приміщення.

* Якомога менше говоріть, коли пишете на дошці, тобто коли ви стоїте до слухачів спиною.

* Не робіть великі паузи. Намагайтеся не заповнювати їх різними звуками та словами-паразитами.

* Не порушуйте регламент. Поважайте слухачів, цінуйте їх час.

* Найкращий темп виступу 75 – 85 слів за хвилину. Але потрібно час від часу змінювати темп мовлення як засіб активізації уваги слухачів.

* Чергуйте довгі речення з короткими. Довгі речення важко сприймати й розуміти. Нагромадження коротких речень одне за одним робить мову монотонною.

* Основна думка повинна завжди висловлюватися головним реченням, а не підрядним.

* Слідкуйте за аудиторією. Пам’ятайте, що Ваше ставлення до слухачів віддзеркалюється ними.

* Не забувайте, що порівняння, приклади й аналогії допомагають краще зрозуміти суть справи.

* Враховуйте деякі властивості уваги:

– конкретний матеріал привертає увагу сильніше, ніж абстрактний;
– слухачі звичайно зосереджуються краще на тих моментах, які промовець підкреслює;
– відновлює увагу емоційний рух виступаючого в напрямі до аудиторії;
– завоювати увагу можна, говорячи про щось несподіване, нестандартне.

§ 2. Математика

2.1 Історія математики

Евклід, математик що жив у Давній Греції в 3 ст. до н. е. роботи Рафаеля.

Математика — наука про кількісні співвідношення і просторові форми дійсного світу (Колмогоров). Слово «математика» походить від грецького слова μάθημα, що означає «наука, знання, вивчення», і грецького μαθηματικός, що означає «любов до пізнання».

Математика виникла з давніх-давен з практичних потреб людини, її зміст і характер з часом змінювались. Від початкового предметного уявлення про ціле додатне число, від уявлення про відрізок прямої, як найкоротшу віддаль між двома точками математика пройшла довгий шлях розвитку, перш ніж стала абстрактною наукою з точно сформованими вихідними поняттями і специфічними методами дослідження. Нові вимоги практики розширюють обсяг понять математики, наповнюють новим змістом старі поняття.

Поняття математики абстраговані від якісних особливостей, специфічних для кожного даного кола явищ і предметів. Ця обставина дуже важлива у застосуванні математики. Так, число 2 не має якогось певного предметного змісту. Воно може відноситися і до двох книг, і до двох верстатів, і до двох ідей. Воно добре застосовується і до цих, і до багатьох інших об'єктів. Так само геометричні властивості кулі не змінюються від того, зроблено її зі сталі, міді чи скла. Звичайно, абстрагування від властивостей предмету збіднює наші знання про цей предмет і його характерні матеріальні особливості. В той же час, саме це абстрагування надає математичним поняттям узагальненості, даючи можливість застосовувати математику до найрізноманітніших за природою явищ. Це означає, що одні й ті ж закономірності математики, один і той же математичний апарат можуть бути достатньо успішно застосовані до біологічних, технічних, економічних та ін. процесів.

Абстрагування в математиці не є її винятковою особливістю. Але в математиці цей процес йде далі, ніж у інших природничих науках. У ній широко використовують процес абстрагування різних ступенів. Наприклад, поняття групи виникло внаслідок абстрагування від деяких властивостей чисел та інших уже абстрактних понять. У математиці специфічним є також метод одержання результатів. Якщо природознавець, доводячи будь-яке твердження, завжди використовує дослід, то математик доводить свої результати лише на основі логічних міркувань. Жодний результат у математиці не можна вважати доведеним, поки йому не дано логічного обгрунтування, хоч спеціальні досліди і підтвердили його. В той же час істинність математичних теорій перевіряється на практиці, але ця перевірка має особливий характер. Математику можна застосувати до вивчення будь-яких явищ. Проте в дійсності її роль в різних галузях наукової і практичної діяльності неоднакова. Особливо великою є роль математики у вивченні тих явищ, для яких навіть значне абстрагування від їхніх специфічних якісних характеристик не змінює істотно притаманних цим явищам кількісних і просторових закономірностей. Наприклад, у небесній механіці тіла вважають матеріальними точками (тобто абстрагуються від реальності). Користуючись математичним апаратом, можна не тільки дуже точно обчислювати небесні явища (затемнення, положення планет тощо), але й за відхиленням спостережуваних траєкторій від теоретично обчислених зробити висновок про наявність невидимих неозброєним оком небесних тіл. Саме так було відкрито планети Нептун (1846) і Плутон (1930). В зв’язку з бурхливим розвитком космічних польотів небесна механіка набула все більшого значення. Механіка і фізика стали, по суті, математичними науками. Значне місце посідає математика в економіці, біології, медицині, лінгвістиці. Для цих наук особливого значення набула математична статистика. Процес математизації наук, що почався з 18 ст., тепер набув винятково інтенсивного розвитку.

Історію математики вчені зазвичай поділяють на чотири періоди:

- період зародження математики як самостійної дисципліни — тривав приблизно до 6—5 століття до н. е. В цей період формувались поняття цілого числа і раціонального дробу, поняття віддалі, площі, об’єму, створювались правила дій з числами та найпростіші правила для обчислення площ фігур і об’ємів тіл. Математика не мала ще форми дедуктивної науки, вона являла собою збірник правил для виконання певного роду дій. У всіх математичних текстах (єгипетських, вавілонських), що дійшли до нас, математичні знання викладалися саме в такій формі.
- період елементарної математики — тривав від 6—5 ст. до н. е. до середини 17 століття. В цей період на основі невеликої кількості вихідних тверджень — аксіом будувалася геометрія як дедуктивна наука. Математика перестала бути безіменною наукою. З історії математики відомі імена багатьох вчених давньої Греції (Фалес, Піфагор, Гіппократ Хіоський, Демокріт, Евдокс, Евклід, Архімед та ін.), Китаю (Чжан Цан, Ген Шоу-чан, Цзу Чун-чжі та ін.), Середньої Азії (Джемшід ібн-Масуд аль-Каші, Мухаммед бен-Муса аль Хорезмі та ін.), Індії і пізніше Західної Європи (Л. Феррарі, Н. Тарталья, Дж. Кардано, С. Стевін та ін.), що зробили значний вклад у математику.
- Третій період (середина 17 ст. — початок 20 ст.) — період дослідження змінних величин. Природознавство і техніка дістали новий метод вивчення руху і зміни — диференціальне числення та

інтегральне числення. Створився ряд нових математичних наук — теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, диференціальна геометрія, варіаційне числення та ін., що значно розширили предмет і можливості математики. Велику роль у розвитку математики цього періоду відіграли й українські математики. М. І. Лобачевський відкрив неевклідову геометрію, М. В. Остроградський зробив визначні відкриття в механіці, математичному аналізі, математичній фізиці, П. Л. Чебишов поклав початок новому напряму в теорії функцій, зробив значні відкриття в теорії чисел, теорії імовірностей, механіці, наближеному аналізі. До цього ж періоду відноситься діяльність таких видатних вчених, як О. М. Ляпунов, А. А. Марков (старший), Г. Ф. Вороний та багатьох інших.

- Четвертий період — період сучасної математики — характеризується свідомим і систематичним вивченням можливих типів кількісних співвідношень і просторових форм. У геометрії вивчається вже не лише тривимірний простір, а й ін. подібні до нього просторові форми. Характерними напрямами розвитку математики цього періоду є теорія множин, функціональний аналіз, математична логіка, сучасна алгебра, теорія імовірностей, топологія тощо.

З 17 століття розвиток математики істотною мірою взаємокоординується з розвитком фізики, механіки, низки технічних дисциплін, зокрема гірництва. Математика широко застосовується, наприклад, для складання та опрацювання математичних моделей технологічних процесів.

2.2 Цілі і методи математики

Математика вивчає уявні, ідеальні об’єкти та співвідношення між ними, використовуючи формальну мову. Однак усі досліджувані математикою об’єкти мають прообрази в реальному світі, більш-менш схожі на свої математичні моделі. Модель об’єкта враховує не всі його риси, а тільки найбільш потрібні для мети дослідження. Наприклад, вивчаючи фізичні властивості апельсина, ми можемо абстрагуватися від його кольору та смаку і подати його (нехай не ідеально точно) у вигляді кулі. Якщо ж нам потрібно зрозуміти, скільки апельсинів ми отримаємо, якщо складемо докупи два і три, — то можна абстрагуватися і від форми, залишивши в моделі тільки одну характеристику — кількість. Абстракція та встановлення зв’язків між об’єктами в найбільш загальному вигляді — це є ціль математики.

Вивчення об’єктів у математиці відбувається за допомогою аксіоматичного методу: спочатку для досліджуваних об’єктів формулюється список аксіом і вводяться необхідні означення, а потім з аксіом за допомогою логічних правил виведення одержують цінні теореми.

2.3 Основні розділи математики:

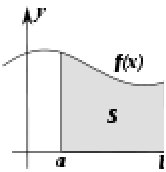
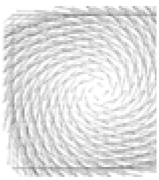
Алгебра • Дискретна математика • Диференціальні рівняння • Геометрія • Комбінаторика • Лінійна алгебра • Математична логіка • Математична статистика • Математичний аналіз • Теорія ймовірностей • Теорія множин • Теорія чисел • Тригонометрія • Топологія • Функціональний аналіз

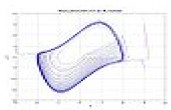
2.4 Окремі теми

Числа

Натуральні числа — Цілі числа — Раціональні числа — Дійсні числа — Комплексні числа — Гіперкомплексні числа — Кватерніони — Октоніони — Седеніони — Гіпердійсні числа — Сюрреальні числа — p-адичні числа — Математичні сталі — Назви чисел — Нескінченність

Перетворення

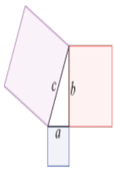
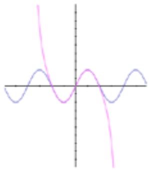
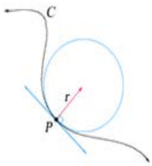
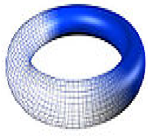
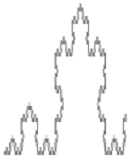
$36 \div 9 = 4$			$\int 1_S \, d\mu = \mu(S)$
Арифметика	Диференці-альне та інтегральне числення	Векторний аналіз	Математичний аналіз

$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}y + c$		
Диференціальні рівняння	Динамічні системи	Теорія хаосу

Структури

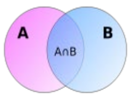
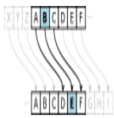
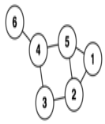
Абстрактна алгебра — Теорія груп — Алгебраїчні структури — Алгебраїчна геометрія — Теорія чисел — Топологія — Лінійна алгебра — Універсальна алгебра — Теорія категорій — Теорія послідовностей

Просторові відношення

				
Геометрія	Тригонометрія	Диференціальна геометрія	Топологія	Фрактальна геометрія

Дискретна математика

Дискретна математика містить засоби, які застосовуються до об'єктів, що можуть приймати лише специфічні, окремі значення (не неперервні).

	$\forall x(P(x) \Rightarrow P(x'))$			
Теорія множин	Математична логіка	Теорія обчисленності	Криптографія	Теорія графів

Системи числення

Позиційні системи числення–Непозиційні системи числення

Випадкові величина та процеси

Комбінаторика–Теорія ймовірностей– Математична статистика–Випадкові процеси–Ланцюги Маркова

2.5. Прикладна математика

Прикладна математика – область математики, що розглядає застосування математичного знань в інших сферах діяльності. Прикладами такого застосування будуть: чисельні методи, математична фізика, лінійне програмування, оптимізація і дослідження операцій, моделювання суцільних середовищ (механіка суцільних середовищ), біоматематика і біоінформатика, теорія інформації, теорія ігор, теорія ймовірності і статистика, фінансова математика і теорія страхування, криптографія, а отже комбінаторика і деякою мірою кінцева геометрія, теорія графів в додатку до мережевого планування, і багато в чому те, що називається інформатикою. У питанні про те, що є прикладною математикою, не можна скласти чітку логічну класифікацію. Розділами прикладної математики є: геометрія, фізикометрія, хімікометрія, психометрія, економікометрія, інвестометрія, соціометрія та ін. Математичні методи звичайно застосовуються до специфічного класу прикладних завдань шляхом складання математичної моделі системи. Окремим розділом прикладної математики є математична фізика. Математична фізика описує фізичні процеси, і досить часто вона не відрізняється від теоретичної фізики. Її основними розділами є:

- Механіка рідини і газу
- Теорія акустики
- Рівняння Максвела, на яких ґрунтується електромагнетизм
- Механіка**.**

2.6 Математичне моделювання

Математи́чне моделюва́ння - метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей. В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто, їх аналогії. Математичні моделі досліджуються, як правило, із допомогою аналогових обчислювальних машин, цифрових обчислювальних машин, комп’ютерів.

На початку 60-их років було розроблено один із методів математичного моделювання — квазіаналогове моделювання. Цей метод полягає в дослідженні явища або процесу іншої фізичної природи, яке описується співвідношеннями, еквівалентними до результатів щодо того процесу, який вивчається.

Математи́чне моделюва́ння тією чи іншою мірою застосовують всі природничі і суспільні науки, що використовують математичний апарат для одержання спрощеного опису реальності за допомогою математичних понять. Математи́чне моделюва́ння дозволяє замінити реальний об’єкт його моделлю і потім вивчати останню. Як і у випадку будь-якого моделювання, математична модель не описує явище абсолютно адекватно, що залишає актуальним питання про застосовність отриманих таким шляхом даних. Математи́чне моделюва́ння широко застосовується у гірництві, геології, для вивчення і аналізу процесів переробки корисних копалин.

§ 3. Приклади оформлення робіт

Наведемо приклади (фрагменти) оформлення окремих робіт.

Приклад 1. Робота з математики учасника III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт Василя Остапчука.

Міністерство освіти і науки України
Мала Академія Наук України
Секція: „математики”

Науково-дослідницька робота

Узагальнення комплексних чисел на простір

Виконав:

Остапчук Василь, учень 11 класу фізико-математичного профілю ПМЛ „Елітар”

Науковий керівник:

Андрій Ярославович Бомба, Доктор технічних наук, канд. фіз.-мат. наук, професор Рівненського державного гуманітарного університету

Керівники:

Анна Вікторівна Теребус, студентка-магістр факультету математики і інформатики РДГУ

Людмила Володимирівна Тищук, Вчитель математики ПМЛ „Елітар”

Рівне 2009

ЗМІСТ

Як бачимо (відповідно до змісту), в даній дослідницькій роботі наводиться історичний екскурс у спроби узагальнення комплексних чисел, огляд останніх робіт із даної тематики і що саме основне узагальнюючи класичне поняття в наперед визначеному напрямку описано способи його безпосереднього впровадження.

Крім того вивчено основні властивості, новоствореного об’єкту, та наведено на прикладі задач ряд ефективних застосувань. Це дає змогу як найглибше осягнути властивості n-вимірних комплексних чисел та мати певні уявлення про сфери їх застосування.

Дана науково-дослідницька робота є прикладом змістовного дослідження вже здавалося б відомих, класичних математичних об’єктів, коли процес пізнання починається із досить конкретної проблеми – побудови певних комфорних сіток.

Вступ

Дана наукова робота стосується узагальнення комплексних чисел на n-вимірний простір і є логічним продовженням наших попередніх робіт на тематику поширення комплексних чисел у тривимірний простір.

В цьому аспекті тема дослідження досить актуальна, оскільки таких узагальнень потребують різні галузі науки і техніки. У цьому напрямку працювали вчені різних країн, проте цілісного (алгебраїчно замкненого) аналогу нікому з них так і не вдалось побудувати. Але, не зважаючи на вже доведену Фробеніусом неможливість такої «побудови», ми намагатимемось побудувати теорію у якій би справджувалось дії додавання та віднімання, існувала взаємовідповідність між множенням і діленням, існувала тригонометрична форма запису.

Метою і завданням роботи є узагальнення комплексних чисел на n-вимірний простір, яке будується на основі властивостей комплексних чисел, а також проведених раніше узагальнень комплексних чисел на тривимірний простір з метою їх застосування до розв'язання деяких задач n-вимірної геометрії і побудови ε конформних сіток.

Перед розробкою теорії n-вимірних комплексних чисел і її застосувань була досліджена і проаналізована історична довідка (домагання вчених узагальнити комплексні числа) і опрацьовано роботи Бомби А. Я. та Теребус А. В (огляд яких наведено у роботі).

Наукова новизна основних результатів роботи:

1) вперше побудовано теорію n-вимірних комплексних чисел на основі n-вимірної сферичної системи координат та узагальнень зроблених з просторових та планіметричних форм комплексного числа ;

2) розглянуті основні властивості цієї множини, зокрема: піднесення до m-ого степеня($m \in Z$) та добування кореня m-ого степеня($m \in N$) з n-вимірного комплексного числа;

3) на основі цього було введено математичний апарат з означень і теорем, які були доведені;

4) побудовано операційну базу для розв'язання задач n-вимірного простору;

5) розв'язано декілька задач та прикладів використовуючи n-вимірні комплексні числа;

6) в частковому випадку побудовано n-вимірний аналог існуючих плоских та просторових ε - конформних сіток.

3

Нижче розміщено частина роботи у якій на основі введених правил виконання елементарних операцій над n-вимірними комплексними числами описує операційну базу подібну до існуючої в аналітичній геометрії. І наводить приклади її використання для розв'язування різноманітних задач.

III. Операційна база n-вимірних комплексних чисел та її застосування

Операційна база для застосування n-вимірних комплексних чисел до розв'язання стереометричних задач:

1.Квадрат відстані між двома точками:

Дано дві точки $A(a)$ і $B(b)$ (де). Вектору $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ відповідає число $b-a$. Отже: $AB^2 = |b-a|^2 = (b-a)(\overline{b}-\overline{a})$,

$$AB^2 = (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2 \qquad (10)$$

Де a, b - n-вимірні комплексні числа *A* і *B*, де $a = a_1 + a_2 i_1 + a_3 i_2 + \ldots + a_n i_{n-1}$ і $b = b_1 + b_2 i_1 + b_3 i_2 + \ldots + b_n i_{n-1}$ Аналогічне позначення буде використовуватися і надалі.

2.Рівняння n-вимірної кулі з центром в $A(a)$ і радіусом R:

$(x-a)(\overline{x}-\overline{a}) = R^2$,

$$(x-a)(\overline{x}-\overline{a}) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = R^2 \qquad (11)$$

де x - координати біжучої точки.

Для одиничної n-вимірної сфери з центром у початку координат маємо:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

3. Перпендикулярність векторів і прямих.

Два ненульові вектори $\overline{OA}$ *і* $\overline{OB}$ будуть перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься рівність: $\underline{a}\overline{\underline{a}}+\underline{b}\overline{\underline{b}}=(\underline{a}-\underline{b})(\overline{\underline{a}}-\overline{\underline{b}})$, де $A(\underline{a})$, $B(\underline{b})$, $O(0)$. Рівність (11) випливає з теореми Піфагора, а саме з рівності $OA^2+OB^2=AB^2$. Перепишемо вираз (11) у вигляді:

$$\begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n)^2 = \\ &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2 \end{aligned} \qquad (12)$$

37

$$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}+b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}+\ldots+b_n)^2= \\ =(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2+\ldots+(b_n-a_n)^2$$, отже:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=-(b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+\ldots+b_na_n) \quad (13)$$

Перепишемо дане співвідношення для прямих AB і CD:

$$(a_1-b_1)(c_1-d_1)+(a_2-b_2)(c_2-d_2)+\ldots+(a_n-b_n)(c_n-d_n)= \\ =-((a_1-b_1)(c_1-d_1)+(a_2-b_2)(c_2-d_2)+\ldots+(a_n-b_n)(c_n-d_n)) \quad (14)$$

4. Рівняння перетину січних і дотичних до n-вимірної кулі.

Нехай AB – радіус кулі з центром в $A(\underline{a})$, а BC – дотична до кулі. Тоді $AB\perp BC$. Зі співвідношення (14):

$$(a_1-b_1)(b_1-c_1)+(a_2-b_2)(b_2-c_2)+\ldots+(a_n-b_n)(b_n-c_n)= \\ =-((a_1-b_1)(b_1-c_1)+(a_2-b_2)(b_2-c_2)+\ldots+(a_n-b_n)(b_n-c_n)),$$

$$a_1b_1-a_1c_1-b_1^2+b_1c_1+\ldots+a_nb_n-a_nc_n-b_n^2+b_nc_n= \\ =-(a_1b_1-a_1c_1-b_1^2+b_1c_1+\ldots+a_nb_n-a_nc_n-b_n^2+b_nc_n)$$

Запишемо рівняння для кола з центром у початку координат і радіусом 1, тобто, враховуючи, що $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=1$, $a=0$:

$$b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n=1 \quad (15)$$

5. Поділ відрізка у заданому відношенні.

Використовуючи формулу добутку можна отримати формули аналогічні трьохвимірним:

Нехай $\overline{AC}=k\overline{CB}$ ($k\in R$), $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ [3], тоді $(c-a)=k(b-c)$, звідси:

$$c_1=\frac{a_1+kb_1}{k+1},\ c_2=\frac{a_2+kb_2}{k+1},\ \ldots,\ c_n=\frac{a_n+kb_n}{k+1} \quad (16)$$

Зокрема, якщо $AC=CB$, то

$$c_1=\frac{a_1+b_1}{2},\ c_2=\frac{a_2+b_2}{2},\ \ldots,\ c_n=\frac{a_n+b_n}{2}. \quad (17)$$

За допомогою формули добутку ми можемо знайти точку $X(x)$ перетину медіан у трикутнику ABC :

$$x = \frac{a+b+c}{3} \tag{18}$$

для n-вимірного випадку отримаємо:

$$x_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ x_2 = \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \ldots,\ x_n = \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \tag{19}$$

3.2. Задачі на n-вимірні комплексні числа

Задача 1.

У n-вимірному просторі дано n-вимірну кулю і довільно вибрану точку. Довести, що відрізки всіх дотичних прямих, що виходять з цієї точки і проведені до n-вимірної кулі рівні.

Доведемо це твердження для дотичних проведених із точки $A(a)$.

Виберемо дві дотичних. Нехай одна з них перетинає коло у точці $M(m)$, а інша в точці $K(k)$. Відстань між точками $A(a)$ $M(m)$, $A(a)$ і $K(k)$ (з (10):

$$AM^2 = (a-m)(\overline{a}-\overline{m}) = (a_1-m_1)^2+(a_2-m_2)^2+(a_3-m_3)^2+\ldots+(a_n-m_n)^2,$$

$$AK^2 = (a-k)(\overline{a}-\overline{k}) = (a_1-k_1)^2+(a_2-k_2)^2+(a_3-k_3)^2+\ldots+(a_n-k_n)^2 \tag{20}$$

Не порушуючи загальності, для спрощення, покладемо центр n-вимірної кулі у початок координат і візьмемо радіус за 1. Тоді рівняння n-вимірної кулі можна записати у вигляді: $m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_n^2=1,\ k_1^2+k_2^2+k_3^2+\ldots+k_n^2=1$.Рівняння дотичних до цієї кулі (з (2.20)): $a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n=1;\ a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n=1$.

Розкриємо дужки у співвідношеннях (20) і здійснимо над виразами алгебраїчні перетворення:

39

$$AM^2 = a_1^2 + m_1^2 - 2a_1 m_1 + a_2^2 + m_2^2 - 2a_2 m_2 + \ldots + a_n^2 + m_n^2 - 2a_n m_n =$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 a_1^2 - 2(a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - 1 =$$
$$a\bar{a} - 1$$

$$AK^2 = a_1^2 + k_1^2 - 2a_1 k_1 + a_2^2 + k_2^2 - 2a_2 k_2 + \ldots + a_n^2 + k_n^2 - 2a_n k_n =$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2 a_1^2 - 2(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - 1 =$$
$$= a\bar{a} - 1$$

Отже, $AM^2 = AK^2$, тому $AM = AK$, що й треба було довести.

Задача 2.

У n-вимірному просторі розміщені точки A, B, C, D, при цьому $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Доведіть що $AD \perp BC$.

Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Запишемо умови перпендикулярності (14) для відповідних прямих:

$$\begin{aligned}&(a_1 - b_1)(c_1 - d_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - d_2) + \ldots + (a_n - b_n)(c_n - d_n) = \\ &= -((a_1 - b_1)(c_1 - d_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - d_2) + \ldots + (a_n - b_n)(c_n - d_n))\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}&(a_1 - c_1)(b_1 - d_1) + (a_2 - c_2)(b_2 - d_2) + \ldots + (a_n - c_n)(b_n - d_n) = \\ &= -((a_1 - c_1)(b_1 - d_1) + (a_2 - c_2)(b_2 - d_2) + \ldots + (a_n - c_n)(b_n - d_n))\end{aligned};$$

$$a_1 c_1 - a_1 d_1 - b_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 - a_2 d_2 - b_2 c_2 + b_2 d_2 + \ldots + a_n c_n - a_n d_n - b_n c_n + b_n d_n = 0$$

$$a_1 b_1 - a_1 d_1 - b_1 c_1 + c_1 d_1 + a_2 b_2 - a_2 d_2 - b_2 c_2 + c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n - a_n d_n - b_n c_n + c_n d_n = 0$$

прирівнявши дві останні рівності отримаємо:

$$\begin{aligned}&a_1 c_1 - a_1 d_1 - b_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 - a_2 d_2 - b_2 c_2 + b_2 d_2 + \ldots + a_n c_n - a_n d_n - b_n c_n + b_n d_n = \\ &= a_1 b_1 - a_1 d_1 - b_1 c_1 + c_1 d_1 + a_2 b_2 - a_2 d_2 - b_2 c_2 + c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n - a_n d_n - b_n c_n + c_n d_n\end{aligned};$$

$a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 + \ldots + a_n c_n + b_n d_n = a_1 b_1 + c_1 d_1 + a_2 b_2 + c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n + c_n d_n$, тоді:

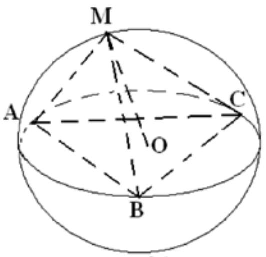
$$\begin{aligned}&a_1 b_1 - a_1 c_1 - b_1 d_1 + c_1 d_1 + a_2 b_2 - a_2 c_2 - b_2 d_2 + c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n - a_n c_n - b_n d_n + c_n d_n = \\ &= -(a_1 b_1 - a_1 c_1 - b_1 d_1 + c_1 d_1 + a_2 b_2 - a_2 c_2 - b_2 d_2 + c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n - a_n c_n - b_n d_n + c_n d_n)\end{aligned}$$, але

дане співвідношення еквівалентне рівнянню:

$$\begin{aligned}&(a_1 - d_1)(b_1 - c_1) + (a_2 - d_2)(b_2 - c_2) + \ldots + (a_n - d_n)(b_n - c_n) = \\ &= -((a_1 - d_1)(b_1 - c_1) + (a_2 - b_2)(b_2 - c_2) + \ldots + (a_n - d_n)(b_n - c_n))\end{aligned}$$, а це й є умова

перпендикулярності прямих AD і BC, що і треба було довести.

Задача 3.



мал. 3.1

Усі вершини правильного трикутника лежать на n-вимірній сфері, центр якої збігається з центром трикутника. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин трикутника стала (не залежить від розміщення точки на сфері).

Розв'язання (авторське).

Нехай $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $M(x)$ - точки сфери з центром $O(0)$ і радіусом r.

Розвяжемо спочатку дану задачу при n=3 (див. мал. (3.1)). Рівняння сфери для даного випадку (з (2.4)): $x\bar{x} = r^2$.

Трикутник ABC – рівносторонній (з умови), тоді т. O –точка перетину медіан трикутника. За формулою (18) $(a+b+c)/3 = 0$, $a+b+c=0$.

$AM^2 = (a-x)(\bar{a}-\bar{x}) = a\bar{a} - a\bar{x} - \bar{a}x + x\bar{x} = 2r^2 - a\bar{x} - \bar{a}x$. Аналогічно $BM^2 = (b-x)(\bar{b}-\bar{x}) = 2r^2 - b\bar{x} - \bar{b}x$, $CM^2 = (c-x)(\bar{c}-\bar{x}) = 2r^2 - c\bar{x} - \bar{c}x$ тоді:

$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 6r^2 - \bar{x}(a+b+c) - x(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = 6r^2 - \bar{x}(a+b+c) - x(\overline{a+b+c}) = 6r^2 - \bar{x}\cdot 0 -$ $- x\cdot\bar{0} = 6r^2$. Матимемо: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 6r^2$, Отже, сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин трикутника.

У загальному випадку, при n>3, рівняння сфери (згідно (11)) набуде вигляду: $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2} = r^2$. З умови та формули знаходження точки перетину медіан трикутника (19) матимемо $a_1 + b_1 + c_1 = 0$, $a_2 + b_2 + c_2 = 0$, …, $a_n + b_n + c_n = 0$.

За формулою (10) $AM^2 = (a-x)(\bar{a}-\bar{x}) = (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + ... + (a_n - x_n)^2 =$ $= a_1^2 - 2a_1x_1 + x_1^2 + a_2^2 - 2a_2x_2 + x_2^2 + ... + a_n^2 - 2a_nx_n + x_n^2 = 2r^2 - 2(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)$. Аналогічно $BM^2 = 2r^2 - 2(b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n)$, $CM^2 = 2r^2 - 2(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$ тоді: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 6r^2 - 2x_1(a_1 + b_1 + c_1) - 2x_2(a_2 + b_2 + c_2) - ... - 2x_n(a_n + b_n + c_n) = 6r^2$. Отже, $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 6r^2$, Бачимо, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки, що і треба було довести.

Висновки

У даній роботі побудовано n-вимірний аналог множини комплексних чисел. А саме:

1. побудувано теорію n-вимірних комплексних чисел (на основі n-вимірного аналогу сферичної системи координат та „неповної алгебраїчності”), зокрема: обгрунтувано їх основні властивості дій над ними;
2. на цій основі створено операційну базу для розв’язання n-вимірних задач (аналогів відповідних плоских та просторових задач);
3.1. одержано розв’язки базових n-вимірних стереометричних задач;
3.2. в частковому випадку побудувано n-вимірний аналог існуючих плоских та просторових ξ - конформних сіток.

У перспективі: а) охарактеризувати класи „розв’язних” (на основі створеної операційної бази) задач; б) розширення області застосовності побудованого (для часткового випадку) фрагменту алгоритму побудови n-вимірних ε конформних сіток, його обгрунтування (збіжність, точність, швидкість тощо).

Список літератури

1. Бомба А. Я.,Теребус А. В. Про один просторовий аналог комплексних чисел і задачі стереометрії// Український математичний журнал для школярів.-К.:Твімс.-2006.-Том.12. - Вип.1. - С.34-67.

2. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика: Учебное пособие. – Омск: Омск. Гос. ун-т, 2002. – 144 с.

3. Евграфов М.А. Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб и доп. – Москва: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1991. – 448 с.

4. Елисеев В. И. Ввведение в методы теории функций пространственного комплексного переменного.- М.: НИАТ. - 1990.- 189 с.

5. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа.- М.:Наука.-1973. – 144 с.

6. Лунц Г.Л., Эльнсгольц Л.Э. Финкции комплексного переменного: Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Издательство "Лань", 2002. – 304 с.

7. Понтрягин Л.С. Обобщение чисел // Квант. - М.:Наука.-1985.- Вып.3.-С.2-5.

8. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Лекции по алгебре и элементарным функциям.- М.:Изд-во. Моск. ун-та. - 1978. – 384 с.

9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с

10. Тадеєв В.О. Етюд про комплексні числа // Український математичний журнал для школярів.-К.:Твімс.-2002.-Том.8. - Вип.2. - С.52-67.

11. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. -Чернівці: Зелена Буковина.-2002.-340 с.

13* Теребус А. В. Просторові аналоги комплексних чисел (Наукова робота учасника МАН).- Рівне: РДГУ-СЮТ.- 2004р.

Приклад 2. Робота з математичного моделювання учасника III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт Романа Капшука.

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ РІВНЕНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
РІВНЕНСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Відділення математики
секція "Математичне моделювання"

МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТРАНСПОРТНОГО ТИПУ

Науково-дослідницька робота
учня 11-А класу НВК № 12
Капшука Романа Сергійовича

Керівник роботи
Барановська Ірина Анатоліївна

Рівне 2009

В цій науково-дослідницькій роботі показано, як усвідомивши сутність окремого фундаментального напрямку математичного програмування, можна з легкістю застосовувати такий спосіб мислення до різноманітних аспектів навчального процесу. Автор цієї роботи таким чином неявно підкреслює відому особливість абстрактного мислення, коли важко усвідомлювана специфіка психологічних і педагогічних проявів при постановці основної задачі в певній мірі відтворюється у відповідній математичній моделі, яка в силу своєї конструкції містить адекватні причино-наслідкові зв’язки.

ЗМІСТ

ВСТУП

Транспортна задача є однією з основних спеціальних моделей математичного програмування – розділу математики, що вивчає задачі пошуку екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на певній множині M n-вимірного евклідового простору і розробляє методи їх розв'язання. Це пояснюється тим, що у постачально-збутових і торговельних організаціях, у будь-якій галузі виробничої діяльності важливе значення має зниження транспортних витрат на перевезення вантажів. Крім того, до транспортної задачі зводиться і низка інших виробничих задач, пов'язаних, наприклад, із раціоналізацією використання верстатів, складанням змінних графіків, регулюванням витрат води у водосховищах тощо [1,3,4].

Широкий інтерес до теорії і практики математичного програмування почався наприкінці 40-х початку 50-х років після того, як американський математик Дж. Данціг розробив ефективний обчислювальний алгоритм для розв'язування задач лінійного програмування. Цей алгоритм увійшов до літератури під назвою ***симплексного методу.***

Слід зауважити, що робота над лінійним програмуванням почалася в 30-х роках XX століття. В Угорщині в 1931 р. була опублікована праця Б. Егерварі, присвячена проблемам мінімізації при транспортуванні вантажів. На основі цієї праці згодом було вироблено ефективний метод розв'язування транспортних задач лінійного програмування, який ввійшов до літератури під назвою ***угорського методу.*** В 1939 р. Л. В. Канторович опублікував працю „Математичні методи в організації і плануванні виробництва", в якій запропонував один з методів розв'язування задач лінійного програмування – метод розв'язкових множників [6,7].

Однак це були тільки спроби розв'язати окремі задачі лінійного програмування. Систематична робота над математичним програмуванням почалася якраз після 1949 р., коли американський математик Дж. Данціг опублікував обчислювальний алгоритм для розв'язування задач лінійного програмування. З цього часу фактично розпочався феноменальний ріст інтересу до теорії і практики лінійного програмування. І вже досить швидко були одержані фундаментальні результати в лінійному програмуванні, які сьогодні стали класичними. Водночас дослідження в галузі лінійного програмування продовжуються.

4

Транспортна задача як задача лінійного програмування може бути розв'язана за допомогою відповідних загальних методів, зокрема симплексного методу. Однак внаслідок практичної важливості цієї задачі та специфіки обмежень для її розв'язання розроблено ряд більш простих і ефективніших методів, серед яких можна назвати метод потенціалів, розподільчий і його модифікації, Глейзала, квадратів, методи розв'язкових доданків, диференціальних рент та угорський з модифікаціями.

Метою даної роботи є розробка і дослідження процедур оптимізації розкладу самостійної підготовки учня на основі моделей і методів математичного програмування.

Виходячи з поставленої мети, визначені такі *завдання дослідження*:

1) встановити властивості розв'язків моделей лінійного програмування транспортного типу виходячи із загальних властивостей систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
2) обґрунтувати на цій основі відомий метод потенціалів розв'язання транспортних задач;
3) дослідити можливості застосування моделей лінійного програмування транспортного типу до вирішення різних проблем раціоналізації та оптимізації навчальної діяльності.

Предметом дослідження є моделі лінійного програмування транспортного типу.

Об'єктом дослідження є оптимальна організація навчальної діяльності.

у роботі детально описано математичну постановку транспортної задачі, властивості її розв'язків та обґрунтування методу потенціалів розв'язування цієї задачі.

Чітко описані математичні моделі самопідготовки учня до зовнішнього незалежного тестування. Всі базові параметри та невідомі мають цілком природне зміст. Запропоновано спосіб уточнення зведеного показника (аналог собівартості перевезень у класичній постановці транспортної задачі) за допомогою попарного порівняння навчальних дисциплін. На основі отриманого оптимального розподілу часу протягом семестру знайдено найкращий розподіл часу на протязі тижня.

До переваг даної роботи слід віднести і простоту її практичної реалізації. Доступність програмного забезпечення дозволяє створювати актуальні асоціації.

3.3. Постановка задачі оптимізації процесу самостійної підготовки учня до зовнішнього незалежного оцінювання

Застосуємо тепер метод розв’язання транспортних задач для раціональної організації процесу самостійної підготовки учня до ЗНО протягом II семестру. Розглядатимемо самостійну підготовку учнів як процес виконання типових завдань ЗНО у позаурочний час. На виконання типових завдань з кожної обраної дисципліни учень витрачає певний час, який вважатимемо сталим. Передбачається, що процес підготовки з кожної дисципліни здійснюється до визначеної дати проходження ЗНО. Кожен тиждень характеризується резервом часу для самопідготовки.

Якість виконання завдань самопідготовки будемо оцінювати, як і раніше, деяким показником, що характеризує ймовірність невідтворення опрацьованого навчального матеріалу. Такий показник можна визначити експериментальним шляхом оцінивши відсоток якісного відтворення навчального матеріалу учнем через різні проміжки часу після його вивчення. Оптимізація розкладу самопідготовки (подамо у вигляді таблиці 3.5) здійснюється шляхом мінімізації сукупної величини невідтворення навчального матеріалу протягом семестру.

Введемо такі позначення:

x_{ij} – час, що планується витратити для виконання завдань i-ї дисципліни в j-ий тиждень;

$\tilde{c}_{ij}$ – зведений показник, який характеризує ймовірність невідтворення навчальних умінь з i-ї дисципліни, що вдосконалювалися самостійно j-го тижня;

a_i – середня тривалість підготовки за період з i-ї дисципліни;

b_j – резерв часу, який може бути використаний для самопідготовки j-го тижня.

Таким чином, з урахування введених позначень можемо записати математичну постановку описаної вище задачі оптимізації процесу самопідготовки учня у вигляді: *знайти мінімум функції*

$$z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{19} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \tag{3.5}$$

при умовах

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i \quad (i = 1,2,3), \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \le b_j \quad (j = 1,2,\ldots,19), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2,3, \;\; j = 1,2,\ldots,19). \tag{3.7}$$

Таблиця 3.5

Обрані учнем дисципліни	Навчальні тижні у II-му семестрі							Середній час підготовки
	12.01-18.01	*19.01-25.01*				*27.04-03.05*	*04.05-10.05*	
Математика	$x_{1,1}$ $c_{1,1}$	$x_{1,2}$ $c_{1,2}$	…	$x_{1,j}$ $c_{1,j}$	…	$x_{1,18}$ $c_{1,18}$	$x_{1,19}$ $c_{1,19}$	a_1
Фізика	$x_{2,1}$ $c_{2,1}$	$x_{2,2}$ $c_{2,2}$	…	$x_{2,j}$ $c_{2,j}$	…	$x_{2,18}$ $c_{2,18}$	$x_{2,19}$ $c_{2,19}$	a_2
Українська мова та література	$x_{3,1}$ $c_{3,1}$	$x_{3,2}$ $c_{3,2}$	…	$x_{3,j}$ $c_{3,j}$	…	$x_{3,18}$ $c_{3,18}$	$x_{3,19}$ $c_{3,19}$	a_3
Резерв часу	b_1	b_2	…	b_j	…	b_{18}	b_{19}	

Припустимо, що має місце нерівність $a_1+a_2+...+a_m<b_1+b_2+...+b_n$, яка є досить природною, оскільки загальний резерв часу має бути природно більшим за загальний обсяг часу, що планується використати для підготовки до ЗНО. Тоді, для гарантування виконання умови типу (1.1), яка необхідна для застосування розглянутого вище методу потенціалів розв'язання задач лінійного програмування транспортного типу, введемо додаткове горизонтальне рівняння

$$x_{4,1}+x_{4,2}+...+x_{4,19}=a_4, \tag{3.8}$$

де величини $x_{4,j}$ $(j=1,2,...,19)$ будемо інтерпретувати як залишок часу після виконання запланованих типових завдань j-го тижня, a_{m+1} – загальний залишок часу за семестр: $a_4=b_1+b_2+...+b_{19}-(a_1+a_2+a_3)$. При цьому показники $\tilde{c}_{4,j}$ приймаємо рівними нулю для усіх індексів $j=1,2,...,19$.

Для знаходження розв'язку задачі та проведення числових експериментів, нами побудована комп'ютерна модель з використанням програми "Пошук рішення". Як випливає з отриманого розв'язку найбільш інтенсивна підготовка, наприклад, з математики має відбуватись в період з 18 травня по 24 травня, що відповідає періоду після складання ЗНО з фізики та української мови і літератури. У період з 2 березня по 17 травня підготовка з математики – мінімальна (1 година в тиждень), що є природнім, оскільки в цей період відбувається інтенсивна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з інших обраних предметів, що складатимуться раніше. Цікавим виявився характер підготовки з української мови та літератури, а саме вона відбувається періодами з 12 січня по 15 лютого та з 13 квітня по 3 травня не готуємося до випробувань, проте з 16 лютого по 29 березня, з 11 травня по 17 травня інтенсивність підготовки – максимальна. Максимальною є і підготовка в останній тиждень перед кожним з випробувань.

44

ВИСНОВОК

Існуючі сьогодні можливості та швидкі темпи розвитку обчислювальної техніки спричинюють зростання інтересу до математичних методів аналізу та їх застосування, зокрема, для обґрунтування і оптимізації рішень, що приймаються.

У першому розділі роботи розглядається теорія моделей лінійного програмування транспортного типу, які широко використовуються для оптимізації транспортних витрат на перевезення вантажів. Зокрема, виходячи з економічного опису проблеми обґрунтована математична постановка задачі, а також на основі загальних властивостей систем лінійних алгебраїчних рівнянь встановлені властивості розв’язків таких задач.

Спираючись на ці властивості у другому розділі роботи встановлені критерії оцінки оптимальності довільного базисного розв’язку транспортної задачі та обґрунтовується метод потенціалів їх розв’язання.

На цій основі у третьому розділі представлені математичні моделі оптимізації розкладу самопідготовки учня, та оптимальної організації процесу самостійної підготовки учня до ЗНО, а також створені ефективні комп’ютерні реалізації цих моделей, в які за необхідності можна легко внести нові значення вихідних даних (резерву часу, середнього часу виконання домашніх завдань, показників відносної важливості тощо) та знайти нові оптимальні розв’язки. На нашу думку, використання таких моделей дозволить ефективніше здійснювати планування навчальної діяльності учня, стимулюватиме розвивати свої організаційні здібності, що є досить важливим у сучасному розвиненому суспільстві.

Зазначимо, що представлені у роботі моделі мають гарні перспективи щодо її вдосконалення в майбутніх дослідженнях, зокрема, в напрямку застосування ширшої постановки транспортної задачі з обмеженнями, застосування методів прийняття рішень для експертної оцінки показника невідтворення навчального матеріалу та пріоритетності дисциплін тощо.

У висновку структурно описано результати отримані в роботі; зазначено переваги запропонованого методу і перспективи майбутніх досліджень в напрямку узагальнення постановки математичної моделі та застосування потужніших методів для оцінки показника невідтворення.

Приклад 3. Робота з прикладної математики учасника ІІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт Тищук Євгенії.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

Відділення математики

Секція прикладної математики

ТЕОРІЯ ХАОСУ ТА ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

Роботу виконала:

Тищук Євгенія Володимирівна,

учениця 10-А класу

НВК №12 «Школа-ліцей»

міста Рівне

Науковий керівник:

Турбал Юрій Васильович,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

МЕГУ ім. С. Дем'янчука

РІВНЕ – 2009

У даній роботі розглядаються деякі аспекти теорії хаосу та дискретні динамічні системи. Основна увага приділяється детермінованим числовим послідовностям, поведінка яких має хаотичний характер. Для дослідження деяких таких послідовностей пропонується використовувати критерій Вейля у припущенні, що відповідний числовий ряд має рівномірний характер розподілу. Окремий розділ присвячений вивченню послідовностей, утворених променем світла при відбиванні від дзеркальних поверхонь певної форми (в роботі розглянуто лише круг).

ЗМІСТ

«Найвище призначення математики полягає в тому, щоб знаходити прихований порядок в хаосі, що оточує нас»

Н. Вінер

ВСТУП

<u>Актуальність</u> В центрі багатьох досліджень, що проводяться в різноманітних напрямках, таких як прогнозування фінансових ринків і ринків цінних паперів, системний аналіз, стиснення зображення і динаміка рідин, моделювання систем виробництва, прогнозування погоди, теорія хаосу пропонує нові підходи до вивчення, що можуть стати загальними для науки в майбутньому. Також конкретним прикладом застосування, а, отже, й актуальності, теорії хаосу та динамічних систем є генератори випадкових чисел (насправді, генератори *псевдовипадкових* чисел) на комп'ютері. "Випадкові" числа в генеруються простими детермінованими рівняннями.

<u>Метою</u> нашої роботи є вивчення елементів теорії хаосу в контексті дослідження дискретних динамічних систем, орбіти яких при певних значеннях параметрів мають хаотичний характер.

Теорія хаосу є теорією постійно змінних складних систем, основаних на математичних концепціях рекурсії. Вона являє собою математичний апарат, що описує поведінку детермінованих нелінійних динамічних систем, яка при деяких параметрах є настільки складною, що видається випадковою. Часто у таких динамічних системах спостерігається сильна залежність їхньої поведінки від початкових даних.

Методи теорії хаосу використовуються для моделювання біологічних систем, які, безумовно, являються одними з найбільш хаотичних систем зі всіх, котрі тільки можна собі уявити. Динамічні системи, які в неперервному випадку описуються системами диференціальних рівнянь, використовуються для моделювання найрізноманітніших процесів: починаючи з росту населення та епідемій і закінчуючи аритмією пульсації серця. Фактично будь-яка науково виписана хаотична система може бути змодельована – тенденції ринку акцій аналізуються методами теорії хаосу набагато легше, ніж стандартними явними рівняннями, що їх описують. Рекурсивні методи стиснення зображення все ще досліджуються, але вони обіцяють приголомшливі результати - графічний коефіцієнт стиснення буде 600:1! Спецефекти кінофільмів будуть більш реалістичні з застосуванням фрактальної графічної технології.

Найбільш поширене помилкове уявлення – це те, що теорію хаосу вважають наукою про безлад. Однак це не так. Вона описує ті незначні зміни, які потім можуть викликати зміну поведінки всієї системи. Одна з центральних концепцій теорії хаосу - це те, що в тоді, коли неможливо точно передбачити стан системи, можна в загальному промоделювати її поведінку . Таким чином, теорія хаосу акцентує свою увагу не на безладі систем і непередбачуваності, а на неусувному порядку, що панує в них.

Детермінований хаос — хаотична поведінка детермінованої системи, яка проявляється через надзвичайно високу чутливість до початкових умов. Явище детермінованого хаосу неодноразово спостерігалося як в лабораторних умовах (в плазмі, електричних колах, лазерах, хімічних реакціях, рідинах, в низці механічних пристроїв) так і в природі (динаміка зростання популяцій та метеорологічні явища). Детермінований хаос виникає тоді, коли результати еволюції, що починаються із нескінченно малого околу певної початкової точки, покривають скінченну область у фазовому просторі, тобто коли незначне відхилення у початкових умовах призводить до значного відхилення в кінцевій точці. Хорошим прикладом неперервної системи, в якій спостерігається детермінований хаос, є дивний атрактор Лоренца, який показує поведінку системи трьох спеціально заданих диференціальних рівнянь з початковими умовами. Навіть при невеликих змінах початкових умов поведінка може сильно змінитись. Теорія хаосу передбачає, що складні нелінійні системи по суті непередбачувані, але в той же самий час, вона також і показує, що завжди є спосіб представити поведінку системи у вигляді графіків атракторів або фракталів.

ІІІ. КРИТЕРІЙ РІВНОМІРНОСТІ ВЕЙЛЯ

3.1. Критерій Вейля. Визначення

Розглянемо, як можна математично описати хаотичну поведінку динамічних детермінованих систем з використанням понять теорії ймовірностей. Нехай α_1, α_2,..., α_n,… - реалізація незалежних випадкових величин, рівномірно розміщених на інтервалі [0,1]. Для них повинен виконуватись закон великих чисел, тобто

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx \qquad (3.1)$$

Послідовність чисел α_1, α_2,..., α_n,… називається рівномірно розподіленою за Вейлем, якщо властивість (3.1) має місце для $\forall$ інтегрованої за Ріманом функції f.

Критерій Вейля. Послідовність чисел α_1, α_2,..., α_n,… рівномірно розподілена за Вейлем, коли для $\forall$ цілого k виконується наступне :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\alpha_n} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$ або ж в іншому вигляді: $$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n<N} e^{2\pi i k\alpha_n} = 0$$

Як наслідок цього випливає рівномірна розподіл послідовності $\alpha_n=\{n\beta\}$ для $\forall$ ірраціонального β, де n=1,2,…, а $\{\beta\}$ – дробова частина числа.

Отже, маємо ще один приклад детермінованої послідовності, яка поводить себе як рівномірно-розподілена випадкова величина. Критерій Вейля зводить проблему рівномірного розподілу послідовностей до проблеми оцінки деяких експонентних сум. Хоча проблема оцінки їх сукупності може здатися важкою на перший погляд, з врахування мультиплікативних властивостей експоненціальних функцій вона вирішується набагато простіше.

На основі описаного вище підходу будуються алгоритми генерації послідовностей псевдовипадкових чисел. Розглянемо один з підходів: $\alpha_{n+1} = \{M\alpha_n\}$, $\alpha_0 = 2^{-m}$, де M – достатньо велике ціле число; фігурні дужки означають дробову частину і m – число двоїстих розрядів в мантисі числа при записі в ЕОМ. Для визначеності ми будемо вважати $M = 5^{2p+1}$, де p – ціле. Зокрема, це пояснюємо тим, що багато спеціалістів використовували та перевіряли послідовності з множниками такого виду. Справедливе уявлення $\alpha_n = \{5^{n(2p+1)}\alpha_0\}$, яке дозволяє описати отримання послідовності величини α_n наступним чином. Запишемо 2^{-m} в системі числення з основою $5: 2^{-m} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 5^{-k} = 0, \quad a_1 a_3 a_3 \ldots$, де a_k приймає одне із значень: 0, 1, 2, 3, 4. Співвідношення $\alpha_n = \{5^{n(2p+1)}\alpha_0\}$ означає, що кома в $2^{-m} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 5^{-k} = 0, \quad a_1 a_3 a_3 \ldots$, переноситься на $(2p+1)n$ позицій вправо і ціла частина отриманого числа відкидається. Звідси стає зрозумілим, що при малих $2p+1$ величини α_n, α_{n+1} будуть помітно "незалежні". Цей же факт відслідковується статистичними дослідженнями. Тому рекомендується p брати максимальним з тих, для яких $5^{2p+1} < 2^m$.

Очевидно, що послідовність α_n має період (L). Стандартними методами теорії чисел можна довести, що для вказаних параметрів M, α_0 дорівнює 2^{m-2}. Детальна інформація про періоди для методу відрахування приведена в $[1]$. Величина 5^{2p+1} в двоїстому вигляді закінчується на 01, тому всі $\alpha_n - m$- розрядні двоїсті дроби, останні два розряди яких дорівнюють 01. В результаті рівності $L = 2^{m-2}$ інші $m-2$ розряди "пробігають" всі можливі комбінації. Тому в якості α_0 можна брати будь-який m – розрядний двоїстий дріб такого типу.

Згадані алгоритми методу були ретельно протестовані статистичними тестами. Далі приведені результати статистичного аналізу першого мільйону псевдо випадкових чисел, що отримуються на ЕОМ по методу відрахувань з параметрами $M = 5^{17}$ та $\alpha_0 = 2^{-40}$.

Таблиця 3.1: Результати тестів k–рівномірності мільйона псевдо випадкових чисел при r = 10

K	1	2	3	4
N_k	10^6	$5 \cdot 10^5$	333 333	$25 \cdot 10^4$
s	9	99	999	9999
$\tilde{\chi}_0^2, s$	0,59	- 1,72	0,84	0,39

Результати статистичних тестів підтверджують задовільність розглядуваних псевдовипадкових чисел.

У висновку описані результати проведеного дослідження та визначені основні напрямки продовження дослідження у майбутньому.

27

ВИСНОВКИ

В ході даної науково-дослідницької роботи ми ознайомилися з основними поняттями теорії хаосу, дискретними динамічними системами, траєкторії яких являють собою множини з досить складною структурою. В першому розділі ми розглянули дослідницький шлях різних вчених, який врешті привів їх до хаосу; вияснили, що являють собою динамічні системи та фрактали (зокрема на прикладі килима Серпінського); розглянули деякі приклади хаотичних систем. В другому розділі ми ввели поняття дивного атрактора Лоренца як приклад неперервної системи, в якій спостерігається детермінований хаос. У третьому – введено критерій рівномірності Вейля, як один з способів визначення детермінованих послідовностей, що поводять себе як рівномірно-розподілена випадкова величина. На основі цього критерію ми провели дослідження з числом π, яке довело те, що числа нормального розподілу, отримані з його цифр рівномірно розподілені. В останньому четвертому розділі ми розглянули метод утворення послідовностей псевдовипадкових чисел, що ґрунтується на властивостях відбивання променя світла у світловодах. Проведено аналіз точок відбивання променя при різних кутах падіння. Експериментально знайдено кути падіння, при яких точки відбивання утворюють числову послідовність, яку можна вважати хаотичною.

В майбутньому ми плануємо розглянути та вивчити неперервні динамічні системи, що описуються диференціальними рівняннями. Також ми б хотіли показати можливість застосування теорії хаосу на фінансовому ринку. Зокрема вивчаючи коливання курсу валют і досліджуючи хаотичність цього процесу.

§ 4. Вибір теми науково-дослідницької роботи

4.1. Тема конкурсної роботи повинна відповідати перспективним напрямам певного розділу науки і мати певну теоретичну і практичну цінність, а також має бути пов'язаною зі шкільним курсом та іншими суміжними навчальними предметами.

Тематика науково-дослідницької роботи може бути обрана самостійно конкурсантом або запропонована науковим керівником (науковим консультантом).

Щоб успішно вирішити поставлене в темі завдання, треба чітко визначити все те, що було зроблено раніше. Для цього слід ретельно проаналізувати і вивчити літературні джерела (книги, журнали, наукові збірники тощо).

Результати ознайомлення можуть показати, що:

– проблему вивчено, а отже, подальша робота недоцільна;

– проблему вивчено ще не повністю, деякі питання досліджено поверхнево і до того ж ти не погоджуєшся з результатами досліджень. Отже, наявні у друкованих джерелах результати з обраної теми не є перешкодою для проведення наукових досліджень.

Під час написання вступу науково-дослідницької роботи рекомендується викласти відомі з літературних джерел і власні міркування щодо обґрунтування вибору теми дослідження, вказати тенденції та загальні положення у дослідженнях даного напряму, тобто показати доцільність запланованого дослідження.

Ця частина включає в себе інформацію, яка визначає мету роботи, а тому для якісного дослідження треба коректно й чітко визначити мету дослідження і сформулювати її в тексті науково-дослідницької роботи. Мета може бути сформульована як у вступній частині роботи, так і в результаті аналізу (після аналізу) літературних джерел з вибраної тематики.

Як правило, мету дослідження вже закладено в самій назві обраної для дослідження теми. Цілі досліджень можуть бути найрізноманітнішими і спрямованими, зокрема, на:

– виявлення зв'язків між певними явищами чи поняттями;
– розкриття можливостей удосконалення методів, опису процесів або технологій.

4.2. Запропонуємо можливі напрямки пошуку актуальної тематики.

Узагальнення відомих математичних понять причому, в залежності від мети та цільової направленості, існують різноманітні підходи до таких узагальнень [88].

Узагальнення методів розв'язування певного класу математичних задач на основі використання розв'язків олімпіад них задач та науково-пізнавальних видань для школярів [33, 34, 36, 37, 41, 59, 91].

Залучення нестандартних методів до вирішення наукової проблеми, шляхом впровадження теоретичних положень із різноманітних математичних дисциплін [21, 31, 44, 50, 97].

Аналіз та використання методів доведення класичних математичних теорем до різноманітних задач. Таким чином відбувається проектування певного стилю мислення на зовсім не подібний з першого погляду об'єкт [31, 42, 50, 73].

Залучення конструктивних методів доведення, особливо для отримання *негативних* результатів (не існування, не можливість тощо) [58].

Перенесення загальних, формальних тверджень на конкретні об'єкти, звуження сфери застосування теорем з метою покращення необхідних умов [73].

Отримання відомих результатів іншими способами, для поглиблення сутності явищ [21, 31, 73].

Використання теоретичних положень дисципліни «Дослідження операцій», таких як: задача лінійного програмування, транспортна задача, матричні ігри, експертне оцінювання, для моделювання тих чи інших явищ [35, 85].

Моделювання явищ за допомогою фракталів [47, 68].

Створення ефективних економічних моделей [20].

Використання загальних положень математичної статистики, різноманітних критеріїв для перевірки статистичних гіпотез [22, 45, 85].

Впровадження положень теорії масового обслуговування для імітаційного моделювання [85].

Систематизація методів для окремого класу задач (наприклад задачі з параметрами) [33, 88].

4.3. Список тем.

1. Барицентричні координати, їх застосування [5, 30].
2. Ортоцентричні тетраедри, їх властивості та застосування [9, 53].
3. Операція повороту вектора та її застосування [52, 80, 81].
4. Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування функціональних рівнянь [16, 70].
5. Огляд змісту Д.А. Крижанівського "Изопериметри" [46].
6. Формули трьох косинусів і трьох синусів, їх застосування [23, 24].
7. Середні лінії чотирикутника. Друга середня лінія трапеції [52, 79].
8. Теореми Чеви і Менелая та їх застосування [51].
9. Рівняння з цілою та дробовою частинами [4, 56].
10. Функціональні рівняння Коші та їх застосування [16, 70].

11. Нерівності з цілою та дробовою частинами [4, 56].
12. Точки Лемуана, їх основні властивості [39, 57].
13. Геометричні формули стереометрії, що не ввійшли до шкільних підручників та їх застосування [23, 54].
14. Класифікація відображень подібностей на площині [49, 74].
15. Принцип Діріхле та його застосування [96].
16. Задачі про розбиття плоскої фігури на частини [14].
17. Застосування матриць в елементарній математиці [17].
18. Опуклі функції та пов'язані з ними нерівності [89, 90].
19. Аксіоматична теорія тригонометричних функцій [64].
20. Многочлени Чебишева, та їх застосування [19, 26, 84].
21. Групи рухів та групи симетрії фігур в поглибленому курсі планіметрії [63].
23. Корисні геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників планіметрії, їх застосування [23, 54].
24. Золотий переріз, його алгебраїчні та геометричні властивості та застосування [43, 75, 76].
25. Застосування графів до розв'язання систем лінійних рівнянь [55].
26. Двостороння лінійка як інструмент геометричних побудов [3, 8].
27. Методи розв'язання систем лінійних нерівностей [78, 83].
28. Узагальнення теорем косинусів та синусів [71, 92].
29. Задачі на побудову дотичних [15].
30. Алгебраїчні та геометричні задачі з нескінченною кількістю операцій [18].
31. Розв'язання логічних задач за допомогою графів [11, 94].
32. Гармонічні четвірки точок, їх застосування [38, 82].
33. Рівногранні тетраедри, їх основні властивості [9, 53, 60].
34. Методи обчислення відстані між мимобіжними прямими [40, 93].
35. Поняття центра масс та його застосування [6, 62].
36. Симетрія многогранників [13, 49, 65].
37. Задачі з параметрами [29, 32].
38. Розв'язання рівняння другого степеня в цілих числах [27].
39. Арбелон Архімеда, його властивості. Теорема Паппа [7, 12].
40. Метод математичної індукції в геометрії [28].
41. Метод підстановок розв'язання функціональних рівнянь [16, 70].
42. Графи з кольоровими ребрами [11, 66].

4.4. Наведемо приклад **завдання на виконання науково-дослідницької роботи**. Оскільки, сформульований план дозволяє якісно і своєчасно виконувати всі заплановані моменти обраної тематики. При цьому зауважимо, що описані нижче завдання, носять в першу чергу організуючий аспект і є складеним на прикладі конкретної роботи члена МАН.

РІВНЕНСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ РОБОТИ ЧЛЕНУ МАТЕМАТИЧНОГО ВІДДІЛЕННЯ МАН

Тема: ТЕОРІЯ ХАОСУ ТА ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ.

Мета: *вивчення елементів теорії хаосу в контексті дослідження дискретних динамічних систем, орбіти яких при певних значеннях параметрів мають хаотичний характер.*

Зміст роботи:

Вступ.
1. Теорія хаосу в загальних рисах.
   1.1. Деякі історичні дані.
   1.2. Динамічні системи.
   1.3. Приклади хаотичних систем.
2. Дивні атрактори.
3. Критерій рівномірності Вейля.
   3.1. Критерій Вейля. Визначення.
   3.2. Дослідження числа π за допомогою критерію Вейля.
4. Хаотичні та регулярні послідовності у світловодах.

Висновки.

Література:

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос [текст] / С. П. Кузнецов. – М. : Наука, 2001. – 190с.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [текст] / Р. М. Кроновер. – М. : Наука, 2000. – 170с.
3. Пайтаген Х., Рихтер П. Х. Красоты фракталов. Образы комплексных динамических систем [текст] / Х. Пайтаген. – М.: Мир, 1993. – 85с.

Календарний план:

1	Зібрати та опрацювати літературу з даної тематики.	01.10 – 15.10
2	Ознайомитися з теорією хаосу на прикладах динамічних систем.	16.10 – 31.10
3	Вивчити критерій Вейля.	01.11 – 08.11
4	Дослідити розподіл цифр у числі π за допомогою критерію Вейля.	09.11 – 15.11
5	Навести приклади різних послідовностей у світловодах.	16.11 – 06.12
6	Проаналізувати отримані результати.	07.12 – 13.12
7	Визначити напрямки подальшої роботи з подібної тематики.	14.12 – 19.12
8	Оформлення роботи.	20.12 – 20.01

Виконавець:

Науковий керівник: *кандидат фіз.-мат. наук Турбал Юрій Васильович.*

РІВНЕНСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ РОБОТИ ЧЛЕНУ МАТЕМАТИЧНОГО ВІДДІЛЕННЯ МАН

Тема: ЧУДОВІ ЛІНІЇ В ТРИКУТНИКУ

Мета: *вивчення властивостей медіани, висоти та бісектриси трикутника і можливостей використання цих властивостей.*

Зміст роботи:

Вступ.
1. Медіана трикутника.
1.1. Різні способи доведення властивостей медіани трикутника.
1.2. Медіана і площа.
1.3. Способи знаходження довжини медіани трикутника.
2. Бісектриса трикутника.
2.1 Теореми про бісектрису трикутника.
2.2 Центроїд і медіана в трикутнику.
2.3 Способи знаходження довжини бісектриси трикутника.
3. Висота трикутника.
3.1. Бароцентричні координати.
3.2. Різні способи доведення властивостей висоти трикутника.
4. Нерівності і медіана.
5. Знаходження відстані між чудовими точками трикутника.
6. Застосування теорем Стюарта, Чеви та ВанОбеля.
Висновки.

Література:

1. Балк М. Б. Геометрия масс [текст] / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1987. – 158 с.
2. Григорьев Н. А. Применение барицентрических координат для решения задач элементарной геометрии. Н. А. Григорьев // Математика в школе. – 1975. – №1. – С. 76–80.
3. Кушнир И. Геометрия. Теоремы и задачи. Т. 1. Планиметрия [текст] / И. Кушнир. – К. : Астарта, 1996 (гл. 2). – 475 с.

Календарний план:

1	Зібрати та опрацювати літературу з даної тематики.	01.10 – 16.10
2	Вивчити властивості медіани, висоти та бісектриси трикутника.	17.10 – 31.10
3	Визначити довжини медіани, висоти та бісектриси трикутника.	01.11 – 07.11
4	Вивчити теореми Стюарта, Чеви та ВанОбеля.	08.11 – 15.11
5	Довести нерівності, пов’язані із медіаною трикутника.	16.11 – 05.12
6	Проаналізувати отримані результати.	06.12 – 13.12
7	Визначити напрямки подальшої роботи з подібної тематики.	14.12 – 18.12
8	Оформлення роботи.	19.12 – 20.01

Виконавець:

Науковий керівник: *кандидат пед. наук Білешко Дмитро Тимофійович.*

Список літератури

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие [текст] / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1993. – 336 с.
2. Александров П. С. Введение в теорию групп [текст] / П. С. Александров. – М. : Наука, 1980. – 144 с.
3. Аляев А. В. Геометрические построения двусторонней линейкой [текст] / А. В. Аляев // Математика в школе. – 1978. – №2. – С. 77.
4. Апостолова Г. Ціла та дробова частини числа [текст] / Г. Апостолова, І. Панкратова, Л. Финкельштейн. – К. : Факт, 1966. – 96 с.
5. Балк М. Б. Геометрия масс [текст] / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1987. – (ч. 4). – 158 с.
6. Балк М. Б. Применение понятия центра масс на факультативных и кружковых занятиях [текст] / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1984. – №2. – С.45.
7. Банков Л. Как Папп доказал свою теорему? [текст] / Л. Банков. – М. : Мир, 1983. – 143 с.
8. Барбуляк В. С. Задачі на побудову за допомогою самої лише двосторонньої лінійки [текст] / В. С. Барбуляк // У світі математики. – 1983. – № 14. – С. 165.
9. Бевз П. П. Геометрія тетраедра [текст] / П. П. Бевз – К. : Рад. школа, 1979.). – 108 с.
10. Березина Л. Ю. Графы и их применения [текст] / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979.– гл. 3.). – 143 с.
11. Березина Л. Ю. Графы помогают решать логические задачи [текст] / Л. Ю. Березина // Математика в школе. – 1972. – №2. – С. 62.
12. Білецький Ю. О. Фігури на піску [текст] / Ю. О. Білецький, Г. Б. Філліповський. – Харьков: Основа, 2003. – (розд.17). – 158 с.
13. Богданова Т. А. О плоскостях симметрии параллелепипедов [текст] / Т. А. Богданова, Н. Н. Лебедев // Математика в школе. – 1977. – №4. – С. 31.
14. Болтянский В. Г. Теоремы и задачи комбинаторной геометри [текст] / В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. – М. : Наука, 1965 (гл. 1). – 108 с.
15. Борисенко В. П. Построение касательных [текст] / В. П. Борисенко // Математика в школе. – 1975. – №4. – С. 35.
16. Бродский Я. С. Функциональные уравнения [текст] / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа, 1983. – §§3 – 4. – 96 с.
17. Бродський Я. С. Матриці другого порядку та їх застосування [текст] / Я. С. Бродський, А. К. Сліпенко // У світі математики. – 1987. – № 18. – С. 119.

18. Бродський Я. С. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах [текст] / Я. С. Бродський, А. К. Слипенко. – К.: Вища школа, 1988 (ч. 3). – 120 с.
19. Васильев Н. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения [текст] / Н. Васильев, А. Зелевинский // Квант. – 1982. – №1. – С. 12.
20. Введение в математическое моделирование [текст] / В. Н. Ашихнин [и др.]. – М. : Логос, 2005. – 439 с.
21. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [текст] / И. М. Виноградов. – М. : Наука, 1980. – 144 с.
22. Відибіда О. К. Стохастичні моделі [текст] / О. К. Відибіда. – К. : Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова, 2006. – 192 с.
23. Габович И. Г. Алгоритмический поход к решению геометрических задач [текст] / И. Г. Габович. – К. : Рад. школа, 1989. – 160 с.
24. Габович И. Г. О двух зависимостях, полезных при решении стереометрических задач [текст] / И. Г. Габович // Математика в школе. – 1987. – №3. – С. 49.
25. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц [текст] / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 522 с.
26. Гашков С. Задача Чебышева и тригонометрические многочлены [текст] / С. Гашков С // Квант. – 1990. – № 6. – С. 25.
27. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах [текст] / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1983. – §§4 – 5. – 63 с.
28. Головина Л. И. Индукция в геометрии [текст] / Л. И. Головина, И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1961. – 99 с.
29. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами [текст] / П. И. Горнштейн, В. Б. Полянский, М. С. Якир. – К. : Текст, 1992. – 336 с.
30. Григорьев Н. А. Применение барицентрических координат для решения задач элементарной геометрии. Н. А. Григорьев // Математика в школе. – 1975. – №1. – С. 76–80.
31. Дедонье Жан Геометрия классических групп [текст] / Ж. Дедонье. – М. : Мир, 1974. – 204 с.
32. Дорофеев Г. В. О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы [текст] / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1982. – №4. – С. 36.
33. Задачі з параметрами [текст] / В. К. Репета [та ін.]. – К. : Наука, 2006. – 302 с.
34. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування [текст] / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів : Євро світ, 1999. – 321 с.
35. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл. [текст] / Л. М. Вивальнюк, О. І. Соколенко, Ю. В. Костарчук та ін. – К. : Рад.

школа, 1991. – 175 с.
36. Зарубежные математические олимпиады [текст] / (под ред. И.Н. Сергеева). – М. : Наука, 1987.
37. Збірник задач Київських математичних олімпіад [текст] / В. А. Вишенський , Н. В. Карташов, В. І. Михайловский, М. Й. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984.
38. Зетель С. И. Применение свойств гармонизма к решению некоторых задач [текст] / С. И. Зетель // Математика в школе. – 1966. – №4. – С. 73.
39. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника [текст] / С. И. Зетель. – М. : Учпедшз , 1962. – 152 с.
40. Изаак Д. Ф. О построении перпендикуляра двух скрещивающихся прямых [текст] / Д. Ф. Изаак, В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1986. – №5. – С. 62.
41. Избранные задачи (из журнала American Mathematical Months) [текст] / – М. : Мир, 1977.
42. Классическое введение в теорию чисел [текст] / Айермид [и др.]. – М. : Мир, 1978. – 415с.
43. Клименченко Д. В. “Золотий поділ” і пентаграма [текст] / Д. В. Клименченко // У світі математики. – 1987 – № 18. – С. 164.
44. Кованцов М. І. Проективна геометрія [текст] / М. І. Кованцов. – К. : Вища школа, 1985. –367 с.
45. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика [текст] / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1986. – 534 с.
46. Крижанівський Д. А. Изопериметри [текст] / Д. А. Крижанівський. – К. : Рад. школа, 1987. – 190 с.
47. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [текст] / Р. М. Кроновер. – М. : Наука, 2000. – 170с.
48. Кузнецова Л. И. Группы самосовмещений тетраэдров [текст] / Л. И. Кузнецова // Математика в школе. – 1977. – №3. – С. 78.
49. Кузнецова Л. И. Метод подобия при решении планиметрических задач [текст] / Л. И. Кузнецова, З. А. Скопец // Математика в школе, 1977. – №6. – С. 58.
50. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре [текст] / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 431 с.
51. Кушнир И. Геометрия. Теоремы и задачи. Т. 1. Планиметрия [текст] / И. Кушнир. – К. : Астарта, 1996 (гл. 2). – 475 с.
52. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії [текст] / І. А. Кушнір – К. : Абрис, 1994. – 463 с.
53. Кушнір І. А. Трикутна піраміда у задачах [текст] / І.А. Кушнір. – К. : Либідь, 1994 . – 112 с.

54. Кушнір І. А. Геометричні формули, що не увійшли до шкільних підручників [текст] / І. А. Кушнір. – К. : Факт, 2002. – 90 с.
55. Лисенко В. І. Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою графів [текст] / В. І. Лисенко // У світі математики. – 1974. – № 5. – С. 48.
56. Лобанова Л. Вибрані задачі елементарної математики [текст] / Л. Лобанова, Л. Фінкельштейн. – К. : Вища школа, 1989. – 94 с.
57. Лоповок Л. М. Властивості точки Лемуана [текст] / Л. М. Лоповок // У світі математики. – 1973. – № 4. – С. 135.
58. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции [текст] / А. И. Мальцев.– М.: Наука, 1965. – 392с.
59. Математичні олімпіади школярів України 1991-2000 [текст] / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
60. Матизен В. Э. Равногранные и каркасне тетраедры [текст] / В. Э. Матизен // Квант. – 1983. – №7. – С. 34.
61. Наказ Міністерства і науки України від 31.12.2008 № 1242 „ Про проведення Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідних робіт учнів-членів Малої академії наук України у 2008/2009 навчальному році ” [електронний ресурс] / Режим доступу : www.mon.gov.ua/
62. Нікелін О. В. Геометрія, 7 – 9. Поглиблений курс [текст] / О. В. Нікелін, О. Г. Кукуш. – К. : Ірпінь, 1999. – (розд.16). – 158 с.
63. Нікелін О. В. Симетрія, 7 – 9 класи. Поглиблений курс [текст] / О. В. Нікелін, О. Г. Куліш. – К. : Ірпінь, 1999 (розд. 5, 9). – 138 с.
64. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии [текст] / С. И. Новоселов – М. : Высшая школа, 1965 (гл. 6). – 552 с.
65. Окунев А. К. Симметрия правильных многогранников [текст] / А. К. Окунев // Математика в школе. – 1976. – №6. – С. 54.
66. Оре О. Графы и их применения [текст] / О. Оре. – М. : Мир, 1965. – 174 с.
67. Основи векторного та тензорного аналізу [текст] / О. Д. Валь [та ін.]. – Чернівці : Книги XXI, 2006. – 227 с.
68. Пайтаген Х., Рихтер П. Х. Красоты фракталов. Образы комплексных динамических систем [текст] / Х. Пайтаген. – М.: Мир, 1993. – 85с.
69. Пастухова Н. Л. Як працювати над науковою роботою : методичні рекомендації учасникам МАН [текст] / Н. Л. Пастухова // Наукова скарбниця освіти Донеччини. – 2008. – 2. – С. 22–30.
70. Пенцак Є. Функційні рівняння [текст] / Є. Пенцак, Л. Юрчишин. – Львів, ЛДУ, 1998. – 112 с.
71. Пікан В. В. Цікавий ряд [текст] / В. В. Пікан // У світі математики. – 1974. – № 5. – С. 212.
72. Платонов В. П. Алгебра группы и теория чисел [текст] / В. П. Платонов,

А. С. Ракинчук. – М. : Наука, 1991. – 654 с.

73. Пойя Дьердь. Математические открытия. Решения задач: основные понятия, изучение, преподавания [текст] / Д. Пойя. – М. : Наука, 1970. – 452 с.
74. Понарин Я. П. Перемищения и подобия плоскости [текст] / Я. П. Понарин, З. А. Скопец. – К. : Рад. школа, 1981 (гл. 3). – 175 с.
75. Попов Е. Д. Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу [текст] / Е. Д. Попов // У світі математики. – 1980. – № 11. – С. 74.
76. Попов Е. Д. Геометричні властивості відношення золотого перерізу [текст] / Е. Д. Попов // У світі математики. – 1982. – № 13. – С. 31.
77. Приклади оформлення бібліографічного опису у списку джерел, який наводять у дисертації, і списку опублікованих робіт, який наводять в авторефераті // Бюлетень ВАК України. – 2008. – 3. – С. 9–13.
78. Раковщик А. С. Решение систем линейных неравенств [текст] / А. С. Раковщик // Математика в школе. – 1973. – №6. – С. 4.
79. Раухман А. С. Геометрія чотирикутника [текст] / А. С. Раухман, Д. Т. Белешко, П. О. Тадєєв. – Рівне, 1997. – 26 с.
80. Скопец З. А. О понятии поворота вектора на плоскости [текст] / З. А. Скопец // Математика в школе. – 1975. – №4. – С. 15–20.
81. Скопец З. А. Геометрические миниатюры [текст] / З. А. Скопец. – М.: Просвещение, 1990. – 223 с.
82. Скопець З. А. Применения свойств гармонических четверок к решению геометрических задач [текст] / З. А. Скопець // Математика в школе. – 1966. – №4. – С. 70.
83. Солодовников А. С. Системы линейных неравенств [текст] / А. С. Солодовников // Математика в школе. – 1969. – №6. – С. 8 – 18.
84. Табачников С. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля [текст] / С. Табачников // Квант. – 1990. – № 6. – С. 23.
85. Таха Х. Введение в исследование операций (В 2-х кн.) [текст] / Х. Таха. – М. : Мир, 1985, кн.1. – 479 с., кн.2. – 469 с.
86. Технологія здійснення науково-дослідної роботи учнів [електронний ресурс] / Режим доступу : www.nvk1.sh.km.ua/
87. Узагальнення тригонометричних функцій та комплексних чисел [текст] / А. Я. Бомба, І. А. Барановська, А. В. Теребус, Т. В. Тищук. – Рівне : РОІППО, 2007. – 57с.
88. Ушаков Р. П. Навчаємось доводити тригонометричні нерівності [текст] / Р. П. Ушаков. – Х. : Основа, 2005. – 110 с.
89. Ушаков Р. П. Опуклі послідовності та пов’язані з ними нерівності [текст] / Р. П. Ушаков, Б. І. Хацет // У світі математики. – 1985. – № 16. – С. 126.
90. Ушаков Р. П. Опуклі функції та нерівності [текст] / Р. П. Ушаков,

Б. І. Хацет // У світі математики. – 1979. – № 10. – С. 81.

91. Федак І. В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх [текст] / І. В. Федак. – Чернівці : Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
92. Чувохина Г. А. Теорема косинусов для многоугольников и многогранников [текст] / Г. А. Чувохина // Математика в школе. – 1973. – №4. – С. 65.
93. Шарыгин И. Ф. Об одном методе нахождения расстояния и угла между скрещивающимися прямыми [текст] / И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1986. – №6. – С. 50.
94. Шедивы Я. Решение логических задач при помощи графов [текст] / Я. Шедивы // Математика в школе. – 1967. – №6. – С. 56.
95. Штенгауз Г. Сто задач [текст] / Г. Штенгауз. – М. : Физмангиз, 1959. – 158 с.
96. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле та його застосування [текст] / М. Й. Ядренко. – К. : Вища школа, 1985. – 79 с.
97. Яглом И. М. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии [текст] / И. М. Яглом, В. Г. Ашкенузе. – М. : Учпедгиз, 1962. – 247 с.