

Міжнародний економіко-гуманітарний університет  
імені академіка Степана Дем'янчука  
Рівненський державний гуманітарний університет

Барановський С.В., Бомба А.Я., Кузьменко А.П.

**Навчально-методичний посібник для  
самостійного вивчення дисципліни**

**“Рівняння математичної  
фізики”**

Рівне  
Редакційно-видавничий центр ПВНЗ “МЕГУ”  
імені академіка Степана Дем'янчука  
2006

**ББК 22.311я73**  
**К 88**  
**УДК 531.01(075)**

Барановський С.В., Бомба А.Я., Кузьменко А.П. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни “Рівняння математичної фізики”. – Рівне : “МЕГУ” імені академіка Степана Дем’янчука, 2006. – 236 с.

**Рецензенти:**

**В. Самойленко**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

**Н. Вірченко**, доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного технічного університету України “КПІ”.

Рекомендовано до друку вченою радою Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем’янчука (протокол № 7 від 25 березня 2004 р.).

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист №1.4/18–Г–184 від 2.06.06)

**ISBN 966-7359-48-4**

© Барановський С.В., Бомба А.Я., Кузьменко А.П.  
© «Тетіс»

## ВСТУП

Математична фізика розвивалася з часів Ньютона паралельно з розвитком фізики і математики. В кінці XVII ст. було відкрито диференціальне та інтегральне числення та сформульовані основні закони класичної механіки і закон всесвітнього тяжіння. У XVIII ст. методи математичної фізики почали формуватись при вивченні коливань струн і стержнів, а також задач, пов'язаних з акустикою і гідродинамікою. В XIX ст. ідеї математичної фізики отримали новий розвиток у зв'язку з задачами теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки, нелінійними хвильовими процесами і т.п. У XX ст. в математичну фізику включаються задачі квантової фізики і теорії відносності, а також нові проблеми газової динаміки, перенесення частинок і фізики плазми.

Математичне моделювання та дослідження на цій основі різноманітних фізичних процесів часто зводяться до задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядків, які традиційно є предметом навчального курсу “Рівняння математичної фізики”. Основними математичними засобами дослідження таких задач служать теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, функціональний аналіз, обчислювальна математика. При цьому, серед задач математичної фізики виділяється важливий клас *коректно поставлених задач*, тобто задач, для яких існує єдиний розв'язок, що неперервно залежить від даних задачі. Хоча такі вимоги здаються на перший погляд абсолютно природними, але їх, незважаючи на це, необхідно доводити в рамках прийнятої математичної моделі. Доведення коректності – це перша апробація моделі: модель несуперечлива (розв'язок існує), модель однозначно описує фізичний процес (розв'язок єдиний), модель мало чутлива до неточностей виміру фізичних величин (розв'язок неперервно залежить від даних задачі).

Даний навчально-методичний посібник призначений для забезпечення і підтримки самостійної роботи над курсом “Рівняння математичної фізики”, типовим для студентів освітнього напрямку “Прикладна математика”, спеціалізація яких передбачає навички з моделювання фізичних процесів.

Посібник складається з трьох частин. В першій наведено основні теоретичні відомості курсу; в другій – приклади розв'язання типових задач та завдання для самостійних і контрольних робіт. В третій частині посібника наведено авторські приклади застосування чисельних та чисельно-аналітичних методів математичної фізики для моделювання фізичних полів в задачах механіки суцільного середовища, що може стати основою для написання студентських наукових робіт.

## ЧАСТИНА 1

# ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ КУРСУ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

## 1. Постановка задач для рівнянь з частинними похідними

### 1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними 1-го порядку

#### 1.1.1. Основні поняття та визначення рівнянь з частинними похідними

Розглянемо функцію  $z$ , що залежить від кількох змінних:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ).

Нетотожне співвідношення, що містить шукану функцію, незалежні змінні та частинні похідні від шуканої функції, називається *рівнянням з частинними похідними*. У загальному випадку його можна подати у вигляді:

$$F\left(z, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, \dots\right) = 0.$$

Порядок  $k$  старшої частинної похідної, що входить до рівняння, називається *порядком рівняння з частинними похідними*. Задача розв'язання або інтегрування рівняння з частинними похідними у класичному розумінні полягає у знаходженні його розв'язків –  $k$ -разів неперервно-диференційовних функцій, які при підстановці в дане рівняння замість невідомої функції і її частинних похідних перетворюють його у тотожність за незалежними змінними.

Найбільш загальне рівняння з частинними похідними першого порядку з  $n$  незалежними змінними може бути записано у вигляді:

$$F\left(z, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Природно чекати нескінченної кількості розв'язків цього рівняння, оскільки звичайні диференціальні рівняння можна формально вважати частинним випадком рівнянь з частинними похідними з числом незалежних змінних  $n=1$ , але, як відомо, звичайне диференціальне рівняння за звичай

має нескінченну множину розв'язків.

Розглянемо рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними  $x$  і  $y$ , яке не містить похідної по  $z$ :

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \quad (1.2)$$

До цього рівняння входить тільки частинна похідна  $\partial z / \partial x$ . Тому таке рівняння можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з шуканою функцією  $z$  і незалежною змінною  $x$ , а  $y$  розглядати в якості параметра. Нехай його загальний розв'язок є

$$z = \varphi(x, y, C). \quad (1.3)$$

Для того, щоб вираз (1.3) був розв'язком рівняння (1.2), необхідно й досить, щоб  $C$  було сталим відносно  $x$ ; отже, воно може бути будь-якою функцією від  $y$ , і ми дістанемо "найзагальніший" розв'язок рівняння з частинними похідними (1.2), якщо підставимо замість  $C$  довільну функцію  $\psi(y)$ :

$$z = \varphi(x, y, \psi(y)). \quad (1.4)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку виду (1.2) має одну довільну функцію.

Нагадаємо, що в теорії звичайних диференціальних рівнянь критерієм загальності розв'язку була можливість дістати з нього усі частинні розв'язки. При цьому частинний розв'язок був означений як розв'язок, що задовольняє початкові умови Коші (теорема існування стверджувала існування таких розв'язків та їх однозначну визначеність початковими даними). Природно і для рівнянь з частинними похідними ввести такі додаткові умови, які однозначно визначили б частинний розв'язок. Такими додатковими умовами є початкові умови Коші. Для одного рівняння  $m$ -го порядку, розв'язаного відносно однієї з старших похідних, вигляду

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) \quad (1.5)$$

початкові умови мають вигляд: при  $x_1 = x_1^0$

$$z = \varphi_0(x_2, \dots, x_n), \frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} = \varphi_{m-1}(x_2, \dots, x_n), \quad (1.6)$$

де  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$  – деякі задані функції. При цьому задача Коші полягає у знаходженні розв'язку рівняння (1.5), яке задовольняє умови (1.6).

Для рівняння першого порядку, припускаючи, що воно розв'язане відносно однієї з частинних похідних, наприклад,  $\partial z / \partial x_1$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \quad (1.7)$$

задачу Коші формулюють так: *знайти розв'язок  $z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  рівняння (1.7), який при даному початковому значенні  $x_1$  перетворюється в задану функцію решти незалежних змінних: при  $x_1 = x_1^0$ ,  $z = \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$ .*

У випадку двох незалежних змінних задача інтегрування рівняння з частинними похідними, а також умови Коші допускають просту геометричну інтерпретацію. Наприклад, розглянемо рівняння першого порядку:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \quad (1.8)$$

або, краще, розв'язане відносно однієї частинної похідної:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (1.9)$$

Тоді, розв'язок  $z = \Phi(x, y)$  рівняння (1.8) або (1.9) визначить в координатному просторі  $(x, y, z)$  деяку поверхню, яку називатимемо *інтегральною поверхнею* рівняння (1.8) або (1.9). Дотична площина до цієї поверхні у точці  $(x, y, z)$  описується рівнянням:

$$Z - z = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y),$$

де  $X, Y, Z$  – біжучі координати,  $\partial \Phi / \partial x$  і  $\partial \Phi / \partial y$  – кутові коефіцієнти дотичної площини. Таким чином, рівняння (1.8) визначає співвідношення між координатами  $x, y, z$  точки шуканої інтегральної поверхні і кутовими коефіцієнтами дотичної площини до поверхні у цій точці.

Умови Коші для рівняння (1.9) запишуться наступним чином:

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y). \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) описують криву у просторі. Отже, *задача Коші полягає у знаходженні інтегральної поверхні, що проходить через криву (1.10).*

Якщо рівняння дано у більш симетричній формі (1.8), то *узгаальнена задача Коші* така: *знайти інтегральну поверхню рівняння (1.8), що проходить через задану криву:*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (1.11)$$

При такій постановці задача Коші стає невизначеною для деяких кривих (1.11), оскільки через деякі криві проходить нескінченна множина інтегральних поверхонь. Ці особливі криві називаються *характеристиками* і відіграють першорядну роль в теорії інтегрування рівнянь з частинними похідними.







### 1.1.3. Квазілінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

**Означення.** Квазілінійними неоднорідними рівняннями з частинними похідними першого порядку називають рівняння виду

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \quad (1.18)$$

де  $P_1, P_2, \dots, P_n, R$  – неперервно диференційовні функції від  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ . Відповідні лінійні однорідні рівняння (1.12) є частинним випадком рівнянь типу (1.18), коли права частина  $R=0$  і коли коефіцієнти  $P_1, P_2, \dots, P_n$  при похідних не залежать від шуканої функції.

Рівняння типу (1.18) може бути зведено до однорідного рівняння наступним чином. Шукатимемо функцію  $z$  від незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що задовольняє рівняння (1.18) – у неявному вигляді:

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1.19)$$

так що шуканою функцією буде  $V$ .

Із співвідношення (1.19) визначаємо значення частинних похідних

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{\partial V / \partial x_i}{\partial V / \partial z} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (1.18) та помноживши обидві частини на  $\frac{\partial V}{\partial z}$  (припускаємо, звичайно, що цей множник не дорівнює тотожно нулеві), після перенесення усіх членів у ліву частину, отримаємо співвідношення:

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (1.20)$$

Зазначимо, що при такому перетворенні накладаються додаткові обмеження, коли вимагається, щоб співвідношення (1.20) справджувалося тотожно відносно  $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ , а тому не можна стверджувати, що зазначеним способом ми дістанемо усі розв'язки рівняння (1.18).

Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає лінійному рівнянню з частинними похідними (1.20):

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}. \quad (1.21)$$

Ця система  $n$  рівнянь має  $n$  незалежних перших інтегралів, нехай це будуть



$$\vartheta(x)U_x + U_t = 0, \quad (1.25)$$

яке описує процес *конвективного переносу* частинок вздовж додатного напрямку осі  $Ox$ . Тут  $U=U(x,t)$  – концентрація частинок в точці  $x$  у момент часу  $t$ ,  $\vartheta(x)$  – швидкість їх перенесення (неперервно диференційовна функція,  $\vartheta(x) \geq \vartheta_0 > 0$ ).

Для знаходження загального розв'язку, запишемо відповідне звичайне диференціальне рівняння  $\frac{dx}{\vartheta(x)} = \frac{dt}{1}$  та його перший інтеграл (загальний розв'язок)  $f(x)-t=\rho$ , де  $f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\vartheta(\tilde{x})}$ . Тоді функція вигляду

$$U(x,t)=\Phi(f(x)-t), \quad (1.26)$$

де  $\Phi(x)$  – довільна диференційовна функція, є загальним розв'язком рівняння (1.25).

## 2. Задача Коші для нескінченного стержня (початкова задача).

Задача Коші конвективного переносу (частинок) для нескінченного стержня формулюється так: *знайти розв'язок рівняння*

$$\vartheta(x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

в області  $G = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, t > 0\}$  при початковій умові

$$U(x,0)=g(x). \quad (1.28)$$

Умова (1.28) характеризує початковий ( $t=0$ ) розподіл концентрації частинок ( $U$ ) вздовж даного стержня, а рівняння (1.27) описує закон їх конвективного перерозподілу в наступні моменти часу ( $t>0$ ).

Зауважимо, що на дану початкову задачу Коші (1.27)–(1.28) можемо дивитися як на крайову задачу, яка полягає у знаходженні розв'язку рівняння (1.27) в області  $G$  при відомому його значенні на границі  $\partial G = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, t = 0\}$  даної області.

При певних умовах, накладених на функцію  $g(x)$ , дана задача має *єдиний розв'язок*, який може бути отриманий наступним чином. Поклавши у формулі (1.26)  $t=0$ , матимемо:

$$U(x,0)=\Phi(f(x))=g(x).$$

Позначимо  $f(x)=\tau$ . Оскільки функція  $f(x)$  є монотонно зростаючою та неперервно диференційовною (як визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від строго додатно визначеної диференційовної функції), тоді обернена до неї функція  $x = f^{-1}(\tau)$  існуватиме та буде монотонно зростаючою і неперервно диференційовною.

Звідси знаходимо:

$$\Phi(\tau) = g(f^{-1}(\tau)),$$

де  $\tau$  – може набувати довільні значення.

Поклавши тепер  $\tau=f(x)-t$ , отримаємо, згідно з (1.26) розв'язок поставленої задачі Коші (1.27)–(1.28):

$$U(x,t)=g(f^{-1}(f(x)-t)). \quad (1.29)$$

Дійсно, функція (1.29), як частковий випадок функції (1.26), задовольняє і рівняння (1.27), а поклавши в (1.29)  $t=0$ , матимемо:

$$U(x,0) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x).$$

Зауважимо, що уздовж кожної із характеристик рівняння (1.27) функція  $U$  має сталі значення. Дійсно, вздовж характеристики  $f(x)-t=\rho$  маємо:

$$U(x,t) = g(f^{-1}(f(x)-t)) = g(f^{-1}(\rho)) = \text{const}. \quad (1.30)$$

Характеристика  $t=f(x)$ , що проходить через початок координат  $(0,0)$  (яка одержується із загальної сім'ї характеристик при  $\rho=0$  з урахуванням  $f(0)=0$ ) є основною. Інші характеристики утворюються з неї шляхом паралельного зсуву (рис. 1.1). Зауважимо, що  $f(x)$  – час проходження частинки з точки  $\tilde{x} = 0$  до точки  $\tilde{x} = x$ .

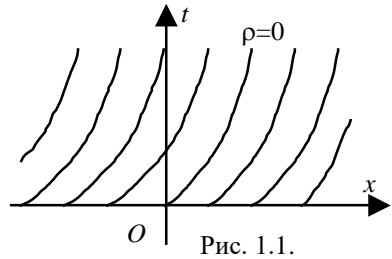


Рис. 1.1.

З геометричної точки зору задача Коші (1.27)–(1.28) полягає у побудові над півплощиною ( $t>0$ ) площини точок  $(x,t)$  деякої поверхні, рівняння якої  $U=U(x,t)$  задовольняє диференціальне рівняння (1.27) і до якої належить крива  $U(x,0)=g(x)$ . Зауважимо, що дана поверхня є лінійчатою, причому кожна із її твірних ліній утворюється шляхом вертикального зміщення відповідної характеристики на величину  $g(f(x))$  (рис. 1.2).

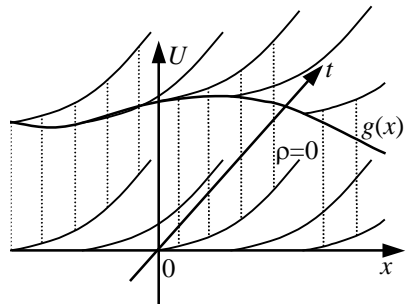


Рис. 1.2.

3. *Задача Коші для напівнескінченного стержня (гранична задача)* зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\vartheta(x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.31)$$

в області  $G = \{(x, t) : -\infty < t < +\infty, x > 0\}$  при граничній умові

$$U(0, t) = p(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (1.32)$$

Аналогічно до попереднього, поклавши в загальному розв'язку рівняння (1.26)  $x=0$ , одержимо, з урахуванням (1.32), що  $\Phi(\tau) = p(-\tau)$ , а звідси і розв'язок задачі Коші (1.31)–(1.32):

$$U(x, t) = p(t - f(x)). \quad (1.33)$$

4. *Кутова задача Коші (початково-гранична задачі)* формулюється так: знайти розв'язок рівняння

$$\vartheta(x) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.34)$$

в області  $G = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$  при умовах

$$U(x, 0) = g(x), \quad x > 0; \quad U(0, t) = p(t), \quad t > 0. \quad (1.35)$$

Розв'язок даної задачі легко конструюється з розв'язків (1.29) та (1.33) попередніх двох задач, а саме:

$$U(x, t) = \begin{cases} g(f^{-1}(f(x) - t)), & t < f(x); \\ p(t - f(x)), & t \geq f(x). \end{cases} \quad (1.36)$$

Зауважимо, що якщо  $g(0) \neq p(0)$ , то розрив відповідної поверхні матиме місце і вздовж кутової характеристики  $t=f(x)$  (див. рис. 1.3). Якщо ж в точці  $(0, 0)$  функції  $g(x)=p(x)$  узгоджені, але не достатньо, а саме  $g(0)=p(0)$ , то відповідна поверхня  $U=U(x, t)$  буде неперервною, але, взагалі кажучи, негладкою (вздовж кутової характеристики можливий “рубець”). Для згладження даного рубця необхідні у кутовій точці ще й умови на похідні функцій  $g(x)$  та  $p(x)$  (умови гладкості).

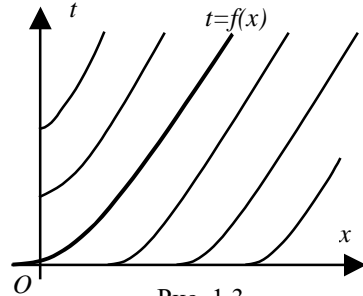


Рис. 1.3.

## 1.2. Постановка типових задач математичної фізики

### 1.2.1. Лінійна задача про поширення тепла

Розглянемо однорідний стержень довжиною  $l$ , бічна поверхня якого теплоізолювана. Вважатимемо, що стержень настільки тонкий, що в будь-який момент часу температуру у всіх точках поперечного перерізу можна було б вважати однаковою. Якщо кінці стержня підтримувати при сталих

температурах  $u_1$  та  $u_2$ , то, як відомо, вздовж стержня встановиться лінійний розподіл температури  $u(x)=u_1+\frac{u_2-u_1}{l}x$ . При цьому від більш нагрі-

того кінця стержня буде переходити тепло. Величина теплового потоку вважається додатною, якщо тепло протікає в сторону збільшення  $x$ .

Ми будемо розглядати процес поширення температури в стержні. Цей процес у даному випадку буде описуватись функцією  $u(x,t)$ , що представляє температуру в перерізі  $x$  в момент часу  $t$ .

Процеси, які пов'язані з поширенням тепла, підкоряються наступним фізичним закономірностям.

*Закон Фур'є.* Якщо температура тіла нерівномірна, то в ньому виникають теплові потоки, що направлені з місць з більшою температурою в місця з більш низькою температурою. Кількість тепла, що перетікає за одиницю часу в напрямі осі  $x$  через переріз  $S$ , рівна:

$$q=-S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.37)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, що залежить від фізичних властивостей тіла, та в деякій мірі від температури  $u$ , чим, як правило, нехтують.

Для виведення рівняння, якому задовольняє функція  $u(x,t)$ , виділимо деякий елемент  $(x, x+\Delta x)$  стержня. Приріст кількості тепла в цьому елементі за одиницю часу буде:

$$c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.38)$$

де  $c$  – питома теплоємність,  $\rho$  – густина матеріалу стержня.

При цьому кількість тепла, яка надійшла в цей елемент за одиницю часу через перерізи  $x$  та  $x+\Delta x$ , буде рівною

$$-S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x - \left(-S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}\right) = -S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}. \quad (1.39)$$

Прирівнюючи кількість тепла (1.38) і (1.39) та поділивши отриману рівність на  $\Delta x$ , отримаємо:

$$c\rho S\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + S\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x}.$$

Переходячи до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \text{ або } u_t = a^2 u_{xx}, \quad (1.40)$$

де  $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коефіцієнт температуропровідності.

Рівняння (1.40) має нескінченну кількість частинних розв'язків. При розв'язанні конкретної фізичної задачі необхідно з усіх цих розв'язків вибрати той, який задовольняє деякі додаткові умови, що впливають з її фізичного змісту. Такими додатковими умовами, як правило, є граничні умови та початкові умови.

У випадку, коли на кінцях стержня підтримуються задані температури, такі додаткові умови матимуть вигляд:

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0; \quad u(x, 0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

а повна задача для визначення шуканої функції  $u(x, t)$  прийме вигляд:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t; \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0; \quad u(x, 0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (1.41)$$

Якщо розглядається нескінченний стержень  $-\infty < x < +\infty$ , вихідна задача (1.41) прийме вигляд:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases} \quad (1.42)$$

В середині стержня може виділятися або поглинатися тепло (наприклад, при проходженні струму, внаслідок хімічних реакцій і т. п.). Виділення такого тепла може бути охарактеризовано густиною теплових джерел  $f(x, t)$  у точці  $x$  в момент часу  $t$ . В результаті дії цих джерел на ділянці  $(x, x + \Delta x)$  за одиницю часу виділиться додаткова до (1.39) кількість тепла

$$s \cdot \Delta x \cdot f(x, t).$$

Тоді, аналогічно до (1.40), для відшукування функції  $u(x, t)$  отримаємо рівняння у вигляді

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (1.43)$$

Якщо стержень неоднорідний, тобто коефіцієнти  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  різні для різних точок  $x$  і є функціями від  $x$ , то рівняння (1.43) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a^2(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

### 1.2.2. Рівняння дифузії

Якщо середовище нерівномірно заповнене газом, то має місце дифузія його з місць з більш високою концентрацією в місця з меншою концентрацією. Це ж явище спостерігається і в розчинах, якщо концентрація розчиненої речовини в об'ємі не є однаковою. Подібно до попереднього випадку будемо розглядати процес дифузії в порожнистій, досить тонкій трубці, такій, що у будь-який момент часу концентрацію газу в перерізі трубки можна було б вважати однаковою. Тоді процес дифузії може бути описаний деякою функцією  $u(x, t)$ , яка представляє собою концентрацію в

перерізі  $x$  в момент часу  $t$ . Згідно з *законом Гернста* маса газу, яка перетікає через переріз  $x$  за одиницю часу  $t$ , дорівнює

$$q = -D \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S,$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Складемо рівняння балансу маси газу на ділянці  $(x, x+\Delta x)$

$$S\Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -DS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + DS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}, \quad (1.44)$$

або розділивши рівність на  $\Delta x$  та перейшовши до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.45)$$

Якщо коефіцієнт дифузії постійний, то рівняння дифузії матиме вид

$$u_t = Du_{xx}.$$

Аналогічно до попереднього може бути враховано наявність внутрішніх джерел речовини, що приведе до подібного з (1.43) рівняння.

Розглянемо випадок, коли процес дифузії проходить у середовищі, що рухається з постійною швидкістю  $V$ . Тоді у рівнянні балансу маси газу на ділянці  $(x, x+\Delta x)$  потрібно додатково врахувати кількість речовини, що проходить через переріз ділянки за рахунок переносу рухомого середовища, яка рівна

$$+V \cdot S \cdot u \Big|_x - VSu \Big|_{x+\Delta x}.$$

Тоді рівняння (1.45) прийме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) - V \frac{\partial u}{\partial x}.$$

### 1.2.3. Задачі поширення тепла у просторі

Процес поширення тепла у просторі може бути охарактеризований температурою  $u(x, y, z, t)$ . Якщо температура не однакова, то виникають теплові потоки, які будуть спрямовані з місць з більш високою температурою до місць з більш низькою температурою. Використовуючи закон

Фур'є для просторового випадку, який матиме вигляд  $q = -S\lambda \frac{\partial u}{\partial n}$ , де  $n$  –

нормаль до площадки  $S$ , та як і в попередньому випадку, закон збереження енергії, приходимо до наступного рівняння *теплопровідності* у випадку однорідного середовища:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f, \quad \text{або} \quad u_t = a^2 \Delta u + f,$$



де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

#### 1.2.4. Рівняння малих поперечних коливань струни

Тут під струною ми будемо розуміти тонку нитку, яка може вільно згинатись, тобто не створює опору зміні її форми, не пов'язаному із зміною її довжини. Силу натягу  $T$ , що діє на струну, вважатимемо значною, так що можна знехтувати дією сили тяжіння. Нехай у положенні рівноваги струна напрямлена вздовж осі  $Ox$ . Будемо розглядати тільки поперечні коливання струни, вважаючи, що рух проходить в одній площині, і що всі точки струни рухаються перпендикулярно до осі  $Ox$ . Через  $u(x,t)$  позначимо зміщення точок струни в момент часу  $t$  від положення рівноваги. При кожному фіксованому значенні  $t$  графік функції  $u(x,t)$ , очевидно, дасть форму струни в цей момент часу (рис. 1.5).

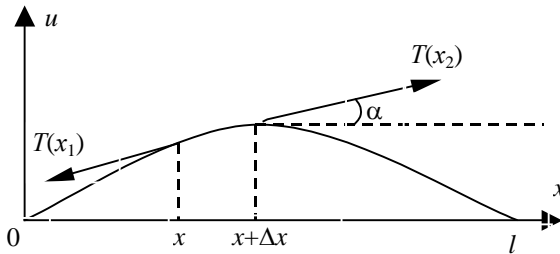


Рис. 1.5.

Далі будемо розглядати лише малі коливання струни, такі, що квадратами  $u_x(x,t)$  та  $u(x,t)$ , а також їх добутками можна знехтувати. Підрахуємо довжину дуги на ділянці  $(x, x+\Delta x)$ . Вона рівна:

$$S' = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+(u_x)^2} dx \approx x+\Delta x - x = S.$$

Тобто в межах прийнятої точності можемо вважати, що збільшення довжин ділянок струни не виникає. Звідси в силу закону Гука матимемо, що величина натягу  $T$  в кожній точці з часом не змінюється. Крім того, сума проєкцій на вісь  $Ox$  сил натягу, зовнішніх сил та сил інерції має бути рівна нулю. Оскільки ми розглядаємо лише поперечні коливання, то сили інерції та зовнішні сили напрямлені вдвож осі  $Ou$ , тоді

$$T(x)\cos\alpha(x) - T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x) = 0,$$

але  $\cos\alpha(x) \approx 1$ , тобто  $T(x) \approx T(x+\Delta x)$ .

Таким чином, можна вважати  $T(x) = T_0 = \text{const}$ .

Складемо рівняння руху струни. Сума проєкцій на вісь  $Ou$  сил, що діють на ділянку  $(x, x+\Delta x)$  дорівнює  $Y = T_0 \cdot \sin\alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \cdot \sin\alpha|_x$ .

Згідно з законами Ньютона, ці сили повинні бути рівні добутку маси цієї ділянки на його прискорення. Тобто в проєкції на вісь  $Ou$  отримаємо рівність.

$$T_0 \sin\alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha|_x = \rho(x) \cdot \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (1.46)$$

Але згідно з нашим наближенням  $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ , а тому з (1.46)

отримаємо  $\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]$ , звідки при  $\Delta x \rightarrow 0$  маємо

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.47)$$

Це рівняння і називають *рівнянням малих поперечних коливань струни*.

Якщо на струну діють зовнішні сили, густина яких рівна  $F(x, t)$ , то рівняння (1.47) переписеться у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \text{ де } f = \frac{F}{\rho}, a^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

При  $F \neq 0$  коливання струни називаються *вимушеними*, а при  $F = 0$  – *вільними*.

Для однозначного опису процесу коливання необхідно задати ще додаткові умови. Зокрема, у початковий момент часу потрібно задати по-

ложення і швидкість усіх точок струни:  $u(x,0) = \varphi_0(x)$ ,  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x)$ .

У випадку обмеженої або напівобмеженої струни задають ще і граничні умови, які, зокрема, можуть бути такими:

– відомо закон руху лівого кінця струни:  $u(0,t) = \mu(t)$ ;

– на правий кінець струни діє сила  $\gamma(t)$ :  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \frac{\gamma(t)}{T_0}$ .

Аналогічно може бути виведене рівняння, що описує малі повздовжні коливання пружного стержня

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

де  $S(x)$  – площа поперечного перерізу стержня;  $E(x)$  – модуль Юнга в точці  $x$ .

### 1.2.5. Поперечні коливання мембрани

Мембраною називають плоску натягнуту плівку, що не чинить опору згину і зсуву. Для виведення рівняння коливання мембрани, аналогічно до попереднього припускають, що вона в положенні рівноваги розміщена в площині  $xOy$  і займає деяку область  $D$ , що обмежена кривою  $L$ . Мембрана знаходиться під дією рівномірного натягу  $T$ , прикладеного до країв. Тут також розглядаються тільки поперечні коливання мембрани перпендикулярно площині  $xOy$ . Тоді зміщення  $u$  точки  $(x, y)$  мембрани буде функцією від  $x, y, t$ . Розглядаються тільки малі коливання.

Аналогічно до попереднього з врахуванням згаданих вище припущень виводяться рівняння малих поперечних коливань мембрани, що мають вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

### 1.2.6. Задачі гідродинаміки та поширення звукових хвиль

Нехай рідина рухається з швидкістю  $V(x, y, z, t)$ , проекції якої на осі координат позначимо  $V_x, V_y, V_z$ . В кожний момент часу і в кожній точці рідина знаходиться в деякому стані термодинамічної рівноваги, що визначається тиском  $p(x, y, z, t)$ , густиною  $\rho(x, y, z, t)$ , температурою  $T(x, y, z, t)$ , ентропією  $S(x, y, z, t)$  і внутрішньою енергією  $E(x, y, z, t)$ .

Якщо в рідині немає стоків і витоків, то справедлива рівність

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0.$$

Розглянемо рух ідеальної рідини, тобто рідини, в якій відсутні сили в'язкості. Тоді рівняння руху такої рідини може бути записане у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \text{ або } \begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Коливальні рухи з малими амплітудами в стисливій рідині або газі називають звуковими хвилями.

### 1.2.7. Стаціонарні задачі для теплових полів

Розглянемо процес поширення тепла у випадку, коли в рівнянні (1.40) можна припустити, що  $u_t=0$ , тобто теплове поле встановлено, і з часом не змінюється. Тоді ми приходимо до так званого рівняння Лапласа:

$$\Delta u=0. \quad (1.48)$$

При наявності теплових джерел рівняння приходимо до рівняння Пуассона:  $\Delta u=-f$ .

Розглянемо деякий об'єм  $T$ , обмежений поверхнею  $\Sigma$ . Задача про стаціонарний розподіл температури  $u(x,y,z)$  в середині тіла  $T$  формулюється наступним чином: *знайти функцію  $u(x,y,z)$ , що задовольняє в середині  $T$  рівняння  $\Delta u=-f(x,y,z)$  і граничну умову, яка може бути взята в одному з наступних видів:*

I)  $u=f_1$  на  $\Sigma$  (*перша крайова задача*);

II)  $\frac{\partial u}{\partial n}=f_2$  на  $\Sigma$  (*друга крайова задача*);

III)  $\frac{\partial u}{\partial n}=h(u-f_3)=0$  на  $\Sigma$  (*третья крайова задача*),

де  $f_1, f_2, f_3, h$  – задані функції,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  – похідна по зовнішній нормалі до поверхні  $\Sigma$ .

Першу крайову задачу називають *задачею Діріхле*, а другу – *задачею Неймана*.

## 1.3. Класифікація рівнянь з частинними похідними 2-го порядку

### 1.3.1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку від двох незалежних змінних

Розглянемо квазілінійне (лінійне відносно старших похідних) диференціальне рівняння 2-го порядку від двох незалежних змінних

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0, \quad (1.49)$$

де  $a_{11}, a_{22}, a_{12}$  є функціями від  $x$  та  $y$ .

Тут природно поставити питання про відшукування такого регулярного перетворення незалежних змінних  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , що відносно

нових змінних  $\xi, \eta$  відповідне (1.49) рівняння для функції  $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  матиме найбільш просту форму. При переході від змінних  $(x, y)$  до  $(\xi, \eta)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \quad u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= U_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= U_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Підставляючи значення похідних (1.50) в (1.49), будемо мати

$$\alpha_{11} U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} U_{\xi\eta} + \alpha_{22} U_{\eta\eta} + \Phi = 0, \quad (1.51)$$

де  $\alpha_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2$ ,

$$\alpha_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$\alpha_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2.$$

Причому функція  $\Phi$  – не залежить від похідних другого порядку.

Виберемо змінні  $\xi$  та  $\eta$  так, щоб коефіцієнт  $\alpha_{11}$  був рівним нулю. Тоді задача про вибір нових незалежних змінних зводиться до інтегрування рівняння виду

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \quad (1.52)$$

Якщо  $a_{11} \neq 0$ , то рівняння (1.52) можна представити у вигляді рівняння:

$$(a_{11} z_x + (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) z_y) \cdot (a_{11} z_x + (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) z_y) = 0,$$

з якого отримаємо:

$$(a_{11} z_x + (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) z_y) = 0, \quad (a_{11} z_x + (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) z_y) = 0. \quad (1.53)$$

Розв'язки цих рівнянь будуть і розв'язками рівняння (1.52). Для інтегрування (1.53) складемо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}},$$

або  $a_{11} dy - (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) dx = 0$ ,  $a_{11} dy - (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) dx = 0$ . (1.54)

Рівняння (1.54) можна записати у вигляді одного рівняння

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (1.55)$$

Останнє рівняння називають *характеристичним* для рівняння (1.49). Розв'язки рівняння (1.55) називають *характеристиками*.

В залежності від знаку дискримінанту  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$  вводять наступну класифікацію диференціальних рівнянь (1.49):

- 1) рівняння (1.49) в області  $D$  називають *рівнянням гіперболічного типу*, якщо для довільної точки  $(x, y) \in D$ :  $\Delta > 0$ ;
- 2) рівняння (1.49) в області  $D$  називають *рівнянням параболічного типу*, якщо для довільної точки  $(x, y) \in D$ :  $\Delta = 0$ ;
- 3) рівняння (1.49) в області  $D$  називають *рівнянням еліптичного типу*, якщо для довільної точки  $(x, y) \in D$ :  $\Delta < 0$ .

Відзначимо, що: а) одне й те ж рівняння в різних областях може належати різним типам; б) у випадку рівнянь гіперболічного типу маємо дві дійсні різні сім'ї характеристик, параболічного – одну дійсну сім'ю характеристик, еліптичного – дві комплексно спряжені сім'ї; в)  $\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\delta^2$ , де  $\delta = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$ . Зазначимо, що з останнього, зокрема, впливає інваріантність типу рівняння при переході до нових змінних (адже в силу умови регулярності такого перетворення функціональний визначник  $D$  відмінний від нуля).

### 1.3.2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку у випадку двох незалежних змінних

1. Для рівняння *гіперболічного типу* ( $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ) характеристичне рівняння (1.55) має дві дійсні різні сім'ї характеристик  $C_1 = \varphi(x, y)$ ,  $C_2 = \psi(x, y)$ . Покладаючи  $\xi = \varphi(x, y)$  і  $\eta = \psi(x, y)$ , приводимо рівняння (1.51) до виду

$$U_{\xi\eta} = -\frac{\Phi(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}.$$

Останнє рівняння є *першою канонічною формою* рівнянь гіперболічного типу.

Покладемо  $\xi = \alpha + \beta$ ,  $\eta = \alpha - \beta$  або  $\alpha = (\xi + \eta)/2$ ,  $\beta = (\xi - \eta)/2$ , де  $\xi$  і  $\eta$  – нові змінні. Тоді

$$U_\xi = (\tilde{U}_\alpha + \tilde{U}_\beta)/2, \quad U_\eta = (\tilde{U}_\alpha - \tilde{U}_\beta)/2, \quad U_{\xi\eta} = (\tilde{U}_{\alpha\alpha} - \tilde{U}_{\beta\beta})/4.$$

В результаті отримуємо замість (1.51) *другу канонічну форму*

$$\tilde{U}_{\alpha\alpha} - \tilde{U}_{\beta\beta} = -\frac{2\Phi}{\alpha_{12}}.$$

2. Для рівняння *параболічного типу* ( $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ) характеристичне рівняння має один загальний інтеграл  $\varphi(x, y) = const$ . Покладемо  $\xi = \varphi(x, y)$  і  $\eta = \eta(x, y)$ , де  $\eta(x, y)$  – довільна функція така, що визначник перетворення  $\delta \neq 0$ . Тоді  $\alpha_{12} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}$  і

$$\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0.$$

Але 
$$\alpha_{12} = a_{11}\varphi_x\eta_x + a_{12}(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + a_{22}\varphi_y\eta_y =$$

$$= (\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

Тоді 
$$U_{\eta\eta} = -\frac{\Phi(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}.$$
 Це рівняння є канонічною формою для рівняння параболічного типу.

3. Для рівняння *еліптичного типу* ( $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ) рівняння (1.53) мають комплексні коефіцієнти. Нехай  $\varphi(x, y) = C$  загальний інтеграл (1.54). Тоді  $\varphi^*(x, y) = C$ , де  $\varphi^*$  – спряжена до  $\varphi$  функція. Введемо змінні  $\alpha$

і  $\beta$ ,  $\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}$ ,  $\beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$ , такі, що  $\xi = \alpha + i\beta$ ,  $\eta = \alpha - i\beta$ . Тоді

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 +$$

$$+ 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

тобто  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$  і  $\alpha_{12} = 0$ .

Таким чином рівняння (1.51) прийме вигляд  $U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = -\frac{\Phi}{\alpha_{22}}$ , що і є канонічною формою для рівняння еліптичного типу

### 1.3.3. Рівняння Лапласа в циліндричних та сферичних координатах

*Циліндричні координати* пов'язані з декартовими співвідношеннями  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ ,  $z = z$  або  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ ,  $z = z$ .

Перейдемо до циліндричних координат

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Отже

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Зокрема, при переході у площині від декартових координат  $(x, y)$  до полярних  $(r, \varphi)$ , матимемо

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

*Сферичні координати* пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями

$$x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Тоді

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$



## 2. Рівняння гіперболічного типу

### 2.1. Метод характеристик (метод поширення хвиль)

#### 2.1.1. Формула Д'Аламбера

Розглянемо задачу з початковими умовами (задачу Коші), що описує вільні коливання однорідної нескінченної струни:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Приведемо це рівняння до канонічного вигляду, що містить змішану похідну. Рівняння характеристик  $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$  або  $(dx - a dt)(dx + a dt) = 0$  розпадається на два рівняння  $dx - a dt = 0$ ,  $dx + a dt = 0$ . Інтегруючи останні рівняння, одержимо  $C_1 = x - at$ ,  $C_2 = x + at$ . Ввівши нові змінні  $\xi = x + at$ ;  $\eta = x - at$  і підставивши знайдені похідні в рівняння (2.1), отримаємо

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (2.2)$$

Якщо припустити, що шуканий розв'язок існує, то, підставивши його в рівняння (2.1), одержимо тотожність. Але тоді і канонічна форма (2.2) також буде тотожністю. Інтегруючи (2.2) по  $\xi$ , одержимо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = f(\eta),$$

де  $f(\eta)$  – довільна функція. Інтегруючи останню тотожність по  $\eta$ , отримаємо

$$u(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (2.3)$$

де  $f_1, f_2$  – функціями тільки змінної  $\xi$  або  $\eta$ .

Таким чином, якщо припустити існування розв'язку рівняння (2.1), то він повинен мати вигляд (2.3). З іншого боку, якщо функції  $f_1, f_2$  є неперервними разом з похідними до другого порядку включно, то вони є розв'язками рівняння (2.2), а, отже, функція

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (2.4)$$

є загальним розв'язком рівняння (2.2), який вперше одержав Ж. Д'Аламбер у 1747 р.

Визначимо функції  $f_1$  та  $f_2$  таким чином, щоб задовольнялись початкові умови

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x).$$

Проінтегрувавши друге рівняння, одержимо

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

де  $x_0, C$  – постійні. Звідси

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Підставляючи знайдені функції в (2.4), приходимо до відомої *формули Д'аламбера*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \quad (2.5)$$

яка одержана з припущення існування розв'язку поставленої задачі. Ця формула доводить і єдиність розв'язку. Дійсно, якщо б існував інший розв'язок задачі (2.1), то він представлявся б формулою (2.5) і співпадав би з одержаним розв'язком. Неважко перевірити, що функція, визначена формулою (2.5), задовольняє (якщо функції  $\varphi$  – двічі диференційовна,  $\psi$  – один раз диференційовна) рівняння і початкові умови. Тобто розв'язок поставленої задачі існує і він єдиний.

### 2.1.2. Фізична інтерпретація розв'язку задачі Коші

Функція  $u(x,t)$ , що визначається формулою (2.5), представляє процес поширення початкового відхилення і початкової швидкості. Якщо зафіксувати  $t=t_0$ , то функція  $u(x,t_0)$  дасть профіль струни в момент  $t_0$ , а фіксеуючи  $x=x_0$ , отримаємо функцію  $u(x_0,t)$ , що описує процес руху точки  $x_0$ . Припустимо, що спостерігач знаходиться в точці  $x=0$  в момент часу  $t=0$  та рухається з швидкістю  $a$  в додатному напрямку. Якщо ввести систему координат  $x'=x-at, t'=t$ , то в цій нерухомій системі координат функція  $u(x,t) = f(x-at)$  буде визначатись формулою  $u = f(x')$  і спостерігач весь час буде бачити той самий профіль, що і в початковий момент. Тобто функція  $u(x,t) = f(x-at)$  представляє собою незмінний профіль  $f(x)$ , що переміщується в додатному напрямку осі  $x$  з швидкістю  $a$ .

Функція  $f(x+at)$  представляє собою хвилю, що поширюється у від'ємному напрямку осі  $x$  з швидкістю  $a$ . Таким чином, загальний розв'язок (2.5) задачі Коші для нескінченної струни є суперпозиція двох хвиль.

У площині стану  $(x,t)$  прями  $x-at=const$  і  $x+at=const$  є характери-

стиками рівняння (2.1). Функція  $u=f(x-at)$  вздовж характеристики постійна  $x-at=const$ , функція  $u=f(x+at)$  постійна вздовж характеристики

$x+at=const$ . Оскільки  $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$  – то можемо зробити висновок, що швид-

кість поширення хвиль по струні обернено пропорційна квадратному кореню від густини і прямо пропорційна квадратному кореню від натягу струни.

### 2.1.3. Вимушені коливання нескінченної струни

Розглянемо задачу: *вивчити процес вимушених коливань однорідної нескінченної струни, яка знаходиться під дією розподіленої зовнішньої сили інтенсивністю  $f(t,x)$ , якщо її початкове відхилення дорівнює  $\varphi(x)$ , а початкова швидкість –  $\psi(x)$* . Математично це означає, що в області  $G=\{(t,x) \mid t>0, -\infty<x<+\infty\}$  необхідно знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}=a^2 u_{xx}+f(t,x), \quad (2.6)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x). \quad (2.7)$$

Розв'язок задачі Коші (2.6), (2.7) має вигляд

$$u(t,x)=z(t,x)+w(t,x), \quad (2.8)$$

де  $z(t,x)$  – розв'язок однорідного рівняння коливання струни з заданими початковими умовами (2.7), а  $w(t,x)$  – розв'язок рівняння (2.6) з однорідними умовами. Згідно формули Д'Аламбера

$$z(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \quad (2.9)$$

Покажемо, що

$$w(t,x)=\int_0^t v(t-\tau,x)d\tau, \quad (2.10)$$

де функція  $v(\theta,x)$  ( $\theta=t-\tau$ ) є розв'язком задачі Коші:

$$v_{\theta\theta}(\theta,x)=a^2 v_{xx}(\theta,x), \quad \theta>0 \ (t>\tau), \quad -\infty<x<+\infty, \quad (2.11)$$

$$v(0,x)=0, \quad v_\theta(0,x)=f(\tau,x), \quad -\infty<x<+\infty. \quad (2.12)$$

Дійсно, продиференціювавши (2.10) та врахувавши (2.12), одержи-

мо

$$w_t(t,x) = v(0,x) + \int_0^t v_t(t-\tau,x) d\tau, \quad w_{tt}(t,x) = f(t,x) + \int_0^t v_{tt}(t-\tau,x) d\tau,$$

$$w_{xx}(t,x) = \int_0^t v_{xx}(t-\tau,x) d\tau.$$

Підставивши (2.10) в рівняння (2.6), отримаємо

$$f(t,x) + \int_0^t v_{tt}(t-\tau,x) d\tau = a^2 \int_0^t v_{xx}(t-\tau,x) d\tau + f(t,x) \Rightarrow \int_0^t (v_{tt} - a^2 v_{xx}) d\tau = 0,$$

а  $w(0,x)=0$ ,  $w_t(0,x)=0$ , тобто функція (2.10) є розв'язком рівняння (2.6) і задовольняє однорідні початкові умови.

Згідно формули Д'Аламбера матимемо

$$v(t-\tau,x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z) dz. \quad (2.13)$$

Підставивши (2.13) у (2.10), а потім разом з (2.9) у (2.8), одержимо

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z) dz d\tau. \quad (2.14)$$

Рівняння (2.14) і є розв'язком задачі Коші (2.6), (2.7).

#### 2.1.4. Задача Коші для хвильового рівняння в просторі

Розглянемо в необмеженому просторі  $G = \{(x,y,z,t) \mid -\infty < x,y,z < +\infty, 0 < t < +\infty\}$  задачу Коші: *знайти розв'язок рівняння*

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad (2.15)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z); \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y,z). \quad (2.16)$$

Для побудови розв'язку задачі Коші (2.15), (2.16) розглянемо спочатку задачу: *в області  $G$  знайти розв'язок рівняння (2.15), який задовольняє умови*

$$u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \quad (2.17)$$

Розв'язок такої задачі [1,4] має вигляд

$$u_1(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{t} d\sigma_t, \quad (2.18)$$

де  $S_t(x,y,z)$  – сфера радіусом  $t$  з центром у точці  $M(x,y,z)$ :

$$(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2 = t^2,$$

$(\alpha, \beta, \gamma)$  – змінна точка на сфері.

Розв'язуючи задачу (2.15) з початковими умовами

$$u_2|_{t=0} = 0; \quad u_{2,t}|_{t=0} = \psi(x, y, z),$$

одержимо

$$u_2(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \quad (2.19)$$

Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x, y, z) + u_2(t, x, y, z) \quad (2.20)$$

є розв'язком задачі Коші (2.15), (2.16).

Дійсно, якщо  $u_1(t, x, y, z)$  є розв'язком задачі (2.15), (2.17), то можна довести, що і  $u_1(t, x, y, z)$  також є розв'язком рівняння (2.15), який задовольняє початкову умову  $u_1|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$ , причому

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1)_{t=0} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} |_{t=0} = 0.$$

Тоді, враховуючи однорідність рівняння (2.15), одержимо, що функція, визначена формулою (2.20), є дійсно розв'язком задачі (2.15), (2.16). Підставивши (2.18), (2.19) у (2.20), матимемо

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) називається *формулою Кірхгофа*.

Із формули Кірхгофа випливає, що розв'язок задачі Коші (2.15), (2.16) повністю визначається значеннями  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$  ( $\gamma$  – зовнішня нормаль до  $S_t(x, y, z)$ ) і  $\psi(x, y, z)$  на сфері  $S_t(x, y, z)$ . Цей факт у теорії звуку називають принципом Гюйгенса. Фізичне явище, яке описується розв'язком (2.21) хвильового рівняння, називається поширенням хвиль, а сам розв'язок – хвилею.

### 2.1.5. Задача Коші для вільних коливань мембрани. Формула Пуассона

Розглянемо наступну задачу Коші: в області  $G = \{(x, y, t) | -\infty < x, y < +\infty, t > 0\}$  знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (2.22)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y). \quad (2.23)$$

Вважатимемо, що  $\varphi(x, y)$  тричі диференційована, а  $\psi(x, y)$  двічі диференційована функції.

Для побудови розв'язку задачі (2.22), (2.23) застосуємо так званий метод спуску. Нагадаємо, що формула Кірхгофа дає розв'язок задачі Коші (2.15), (2.16) в просторі. Але з (2.21) випливає, що якщо в початкових умовах (2.16) функції  $\varphi$  та  $\psi$  залежать тільки від змінних  $x, y$ , то і  $u = u(t, x, y)$ , тобто формула Кірхгофа в цьому випадку дає розв'язок задачі Коші (2.22)-(2.23). Отже, матимемо

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t. \quad (2.24)$$

В останній рівності перейдемо від поверхневих до подвійних інтегралів. Для цього використовуємо відому з математичного аналізу формулу

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy,$$

де  $z = z(x, y)$  є рівняння поверхні  $S$ ;  $D$  – проекція поверхні  $S$  на площину  $xOy$ . З рівняння сфери  $S_t(x, y, z)$  одержимо

$$\gamma = z \pm \sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}, \quad \sqrt{1 + (\gamma_\alpha)^2 + (\gamma_\beta)^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}.$$

У зв'язку з тим, що інтегрування по верхній і нижній півсферах приводить до одного і того ж подвійного інтегралу, з (2.24) матимемо

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t(x, y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}, \quad (2.25)$$

де  $K_t(x, y)$  – круг радіуса  $t$  з центром у точці  $(x, y)$ :  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 \leq t^2$ .

Формулу (2.25) називають *формулою Пуассона*. З неї бачимо, що для визначення хвилі  $u(t, x, y)$  в точці  $(t, x, y)$  не досить знати  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  на колі  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = t^2$ . У визначенні  $u(t, x, y)$  в точці  $(t, x, y)$  беруть участь початкові дані у всіх точках круга  $K_t(x, y)$ . Це означає, що у випадку рівняння коливання мембрани принцип Гюйгенса не має місця.

Зуваження. Якщо, у рівняннях (2.15) і (2.22)  $a \neq 1$ , то формули

(2.21) і (2.25) запишуться у вигляді

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x, y, x)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x, y, x)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t,$$

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}(x, y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}.$$

### 2.1.6. Фізична інтерпретація формул Кірхгофа і Пуассона

Формули (2.21) і (2.25) дають можливість з'ясувати фізичну картину поширення сферичних і циліндричних хвиль. Розглянемо спочатку просторовий випадок. Обмежимося при цьому поширенням локального збурення, коли початковий стан (функції  $\varphi > 0$  і  $\psi > 0$ ) відмінний від нуля тільки в деякій обмеженій області  $T_0$ . Розглянемо спочатку зміну стану  $u(M_0, t)$  в точці  $M_0$ , що лежить поза областю  $T_0$ . (рис. 2.1).

Стан  $u$  в точці  $M_0$  в момент часу  $t$  визначається згідно з (2.21) початковим станом у точці, що лежить на сфері  $S_{at}^{M_0}$  радіуса  $at$  з центром в  $M_0$ . Функція  $u(M_0, t)$  відмінна від нуля тільки в тому випадку, якщо сфера

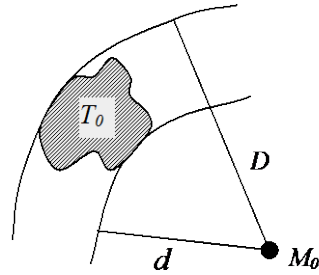


Рис. 2.1.

$S_{at}^{M_0}$  перетинає область початкових значень  $T_0$ . Нехай  $d$  і  $D$  – відстань від точки  $M_0$  до найближчої та найвіддаленішої точок  $T_0$ . Очевидно, якщо  $t$  достатньо мале  $\left(t < t_1 = \frac{d}{a}\right)$ , то сфера  $S_{at}^{M_0}$  не перетинає область  $T_0$  і поверхневі інтеграли у формулі (2.21) дорівнюють нулю: до точки  $M_0$  збурення ще не дійшло. Починаючи з моменту  $t_1 = \frac{d}{a}$  до  $t_2 = \frac{D}{a}$  сфера  $S_{at}^{M_0}$  перетинатиме  $T_0$ , поверхневі інтеграли відмінні від нуля: точка  $M_0$  знаходиться у збуреному стані. При подальшому збільшенні  $t$  сфера  $S_{at}^{M_0}$  буде містити  $T_0$  і поверхневі інтеграли дорівнюватимуть нулю: збурення пройшло точку  $M_0$ . Таким чином, при поширенні локального збурення в просторі явище післядії відсутнє: воно викликає в кожній точці  $M_0$  простору локалізовану

у часі дію, при цьому має місце поширення хвилі з різко окресленими передніми та задніми фронтами (принцип Гюйгенса).

У випадку двох змінних розглядатимемо початкове збурення в області  $S_0$  на площині  $(x, y)$ . Розглянемо зміну стану  $u(M_0, t)$  в точці  $M_0$ , що лежить поза  $S_0$ . Стан  $u(M_0, t)$  в точці  $M_0$  в момент  $t$  визначається, згідно з (2.25), початковими значеннями в точці  $P$ , що належить кругу  $\sum_{at_0}^{M_0}$  – радіуса  $at_0$  з центром в  $M_0$ . Для моментів часу  $t < t_1 = \frac{d}{a}$  ( $d$  – відстань від  $M_0$  до найближчої точки  $S_0$ ) функція  $u(M_0, t) = 0$  – до точки  $M_0$  збурення ще не дійшло. Якщо  $t > t_1$  то  $u(M_0, t) \neq 0$ , а це означає, що, починаючи з  $t = t_1$  в точці  $M_0$  виникає збурення, яке спочатку зростає, а потім поступово зменшується до нуля (при  $t \rightarrow \infty$ ). Тобто присутнє явище післядії, що і відрізняє цей випадок від просторового. Тут принцип Гюйгенса не має місця. Миттєва картина збурення на площині має різко окреслений передній фронт, але не має заднього фронту. Задачу для плоского випадку можна розглядати як просторову, коли початкові збурення задані в нескінченному циліндрі і не залежать від третьої координати. Тоді неважко уявити процес післядії.

## 2.2. Загальна постановка задачі Коші

### 2.2.1. Задача на характеристиках

Як було показано раніше, довільне нелінійне рівняння гіперболічного типу:

$$a_{11}(\xi, \eta) U_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2a_{12}(\xi, \eta) U_{\eta\xi}(\xi, \eta) + a_{22}(\xi, \eta) U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$$

може бути зведене до одного з рівнянь:

$$u_{xt}(t, x) = f_1(x, t, u, u_t, u_x), \quad (2.26)$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f_2(x, t, u, u_t, u_x), \quad (2.27)$$

де коефіцієнти  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $F$  – неперервно диференційовні функції.

Раніше нами розглядалась задача Коші для рівняння (2.27), в якій носієм початкових умов була пряма  $t=0$ . Проте така задача може розглядатися і у випадку, коли носієм початкових умов може бути деяка відмінна від прямої  $t=0$  крива  $L$ . Але сама крива  $L$  при цьому має задовольняти деяким умовам, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно. З'ясуємо ці умови та знайдемо, який вигляд повинні мати самі початкові умови на прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (2.28)$$

Нехай  $u(t, x)$  розв'язок рівняння (2.28) в деякій області  $D$  фазової



площини  $xOt$  з кусково-гладкою жордановою межею  $S$ .

Інтегруючи (2.28) по області  $D$  і використовуючи формулу Гріна

$$\iint_D (Q_x(x,t) - P_t(x,t)) dx dt = \int_S P dx + Q dt,$$

де криволінійний інтеграл у правій частині береться по межі  $S$  області  $D$  у напрямі проти годинникової стрілки, одержимо

$$\iint_D (u_{xx} - u_{tt}) dx dt = \int_S u_x dt + u_t dx. \quad (2.29)$$

Нехай  $L$  – крива з неперервною кривиною і така, що задовольняє умовам:

- 1) кожна пряма з двох сімей характеристик  $x+t=const$ ,  $x-t=const$  рівняння (2.28) перетинає криву  $L$  не більше, ніж в одній точці;
- 2) напрям дотичної до кривої  $L$  в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (2.28).

Таку криву називають “вільною”.

Припустимо, що характеристики прямих  $x-x_1=t-t_1$  і  $x-x_1=t_1-t$ , які виходять з точки  $C$ , перетинаються із кривою  $L$  в точці  $A$  і  $B$  (рис.2.2). Застосовуючи формулу (2.29) в області обмеженою дугою  $AB$  кривої  $L$  і відрізками  $BC$  і  $AC$ , одержимо

$$\int_{AB+[BC]+[CA]} u_x dt + u_t dx = 0. \quad (2.30)$$

Оскільки вздовж  $[BC]$  і  $[AC]$  маємо  $dx=-dt$  і  $dx=dt$  відповідно, то (2.30) запишеться у вигляді:  $\int_{AB} u_x dt + u_t dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0$ . Звідки

$$u(C) = \frac{1}{2}(u(A) + u(B)) + \frac{1}{2} \int_{AB} u_x dt + u_t dx. \quad (2.31)$$

Якщо розв’язок рівняння (2.28) задовольняє умови

$$u|_L = \varphi(x), \quad \left. \frac{du}{dl} \right|_L = \psi(x), \quad (2.32)$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  – задані дійсні відповідно двічі і один раз неперервно диференційовні функції, а  $l$  – заданий на  $L$  достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої  $L$ , то, визначаючи  $u_x$ , і  $u_t$  із рівностей

$$u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}; \quad u_x \frac{dx}{dl} + u_t \frac{dt}{dl} = \psi,$$

де  $s$  – довжина дуги  $L$ , і підставляючи відомі значення  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_t$  у праву частину (2.31), одержимо розв’язок задачі Коші (2.28), (2.32).

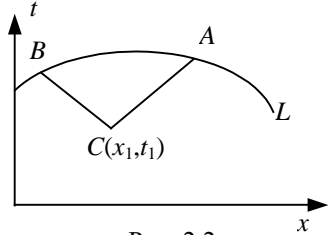


Рис. 2.2.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (2.27). Для рівняння (2.26) характеристиками будуть прямі ( $x=const$ ,  $t=const$ ) паралельні осям координат. Отже, в цьому випадку будь-яка гладка крива  $L$ , яка перетинається не більше, як в одній точці з прямими паралельними осям координат буде “вільною”. Нехай рівняння цієї кривої буде  $t=g(x)$  (або  $x=h(t)$ ). Вважатимемо, що існують відмінні від нуля похідні  $g'(x)$  ( $h'(t)$ ). Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області  $D=\{(t,x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  знайти розв'язок рівняння (2.26), який на кривій  $L$  задовольняє умови

$$u|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=g(x)} = \psi(x). \quad (2.33)$$

Тут умова “вільності” є принциповою для коректної постановки задачі Коші (обґрунтування цього твердження див., напр., [4]).

### 2.2.2. Задача Гурса

Задачу знаходження розв'язку за даними на характеристиках називають задачею Гурса. Така задача є досить цікавою перш за все з точки зору її фізичних застосувань. Зауважимо, що характеристики рівняння гіперболічного типу не можуть бути носіями початкових умов задачі Коші [1,2]. Однак для хвильових рівнянь коректно поставленою є наступна задача Гурса: знайти розв'язок рівняння

$$u_{xt} = f(x, t) \quad (2.34)$$

в області, обмеженій характеристиками  $x=0$  та  $t=0$  (так званому характеристичному конусі), на яких виконуються умови

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad 0 \leq x < +\infty; \quad u(0, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2.35)$$

де  $\mu_1$  і  $\mu_2$  є відомі, двічі диференційовні функції, які задовольняють умову спряження:  $\mu_1(0) = \mu_2(0)$ . Інтегруючи послідовно по  $x$  і  $t$  (2.34), отримаємо

$$u_t(x, t) = u_t(0, t) + \int_0^x f(\xi, t) d\xi, \quad u(x, t) = u(x, 0) + u(0, t) - u(0, 0) + \int_0^t \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\text{або } u(x, t) = \mu_1(x) + \mu_2(t) - \mu_1(0) + \int_0^t \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.36)$$

Таким чином для найпростішого рівняння, що не містить перших похідних  $u_x$  і  $u_t$  та шуканої функції, розв'язок представляється в явній аналітичній формі (2.36). З формули (2.36) безпосередньо випливає єдиність та існування розв'язку поставленої задачі.

### 2.2.3. Метод Рімана

Розглянемо наступну задачу Коші: в області

$$D = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$Lu(t, x) \equiv u_{tx} + a(t, x)u_x + b(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t, x), \quad (2.37)$$

який на "вільній" кривій  $t = g(x)$  ( $g'(x) > 0$ ) задовольняє умови

$$u(g(x), x) = \varphi(x), \quad u_t(g(x), x) = \psi(x). \quad (2.38)$$

Поряд з диференціальним оператором  $Lu(t, x)$  розглянемо так званий спряжений оператор

$$L^*v(t, x) = v_{tx} - (av)_x - (bv)_t + cv.$$

Неважко показати, що

$$v(t, x)Lu(t, x) - u(t, x)L^*v(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (vu_t - uv_t + 2auv) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (vu_x - uv_x + 2buv) \quad (2.39)$$

для довільних функцій  $u(t, x)$  і  $v(t, x)$ .

Візьмемо в області  $D$  довільну точку  $M(t, x)$  і розглянемо область  $B$ , яка обмежена дугою лінії  $t = g(x)$  і двома прямими, паралельними осям координат, які виходять з точки  $M(t, x)$ .

Інтегруючи тотожність (2.39) по області  $B$  (рис. 2.3) та застосовуючи формулу Гріна, одержимо

$$2 \iint_B (vLu - uL^*v) d\xi d\eta = \int_{PQ+QM+MP} Kd\xi + Hd\eta, \quad (2.40)$$

де  $K(t, x) = uv_x - vu_x - 2buv = -(uv)_x + 2u(v_x - bv)$ ,

$$H(t, x) = vu_t - uv_t + 2auv = (uv)_t - 2u(v_t - av).$$

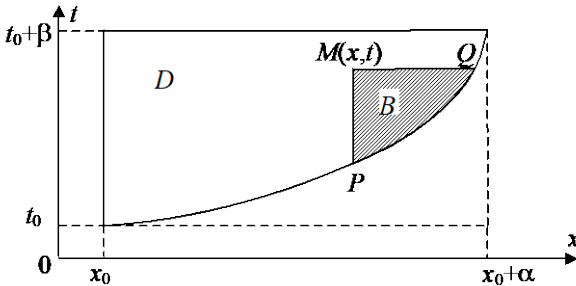


Рис. 2.3.

Обчислимо криволінійний інтеграл в правій частині (2.40) по відрізках  $[QM]$  і  $[MP]$ . Вздовж  $[QM]$   $\eta$  не змінюється (отже,  $d\eta = 0$ ), тоді матимемо

$$\int_{[QM]} Kd\xi + Hd\eta = \int_{[QM]} Kd\xi = (uv)_Q - (uv)_M + \int_{[QM]} 2u(v_\xi - bv)d\xi.$$

Проводячи аналогічні міркування відносно криволінійного інтегра-

ла по відрізьку  $[MP]$ , одержимо

$$\int_{[MP]} Kd\xi + Hd\eta = \int_{[MP]} Hd\eta = (uv)|_P - (uv)|_M + \int_{[MP]} 2u(av - v_\eta)d\eta.$$

Підставляючи знайдені криволінійні інтеграли в (2.40), матимемо

$$u(M)v(M) = \frac{1}{2} \left[ (uv)|_Q + (uv)|_P + \int_{PQ} Kd\xi + Hd\eta + \int_{[QM]} u(v_\xi - bv)d\xi + \int_{[MP]} u(av - v_\eta)d\eta - \iint_B (vLu - uL^*v)d\xi d\eta \right]. \quad (2.41)$$

Припустимо, що функція  $u(t, x)$  є розв'язком задачі Коші (2.37)-(2.38), а  $v(t, x, \eta, \xi)$  задовольняє диференціальне рівняння

$$L^*v(t, x, \eta, \xi) = 0 \quad (2.42)$$

і умови

$$v_\xi - bv = 0 \text{ на } [QM], \quad v_\eta - av = 0 \text{ на } [MP], \quad (2.43)$$

причому  $v(M) = 1$ .

Інтегруючи рівняння (2.43) та враховуючи умову в точці  $M$ , одержимо

$$v(t, x, t, \xi) = e^{\int_b(t, \lambda)d\lambda}, \quad v(t, x, \eta, x) = e^{\int_a(\lambda, x)d\lambda}. \quad (2.44)$$

Задача (2.42), (2.43) є задачею Гурса і має єдиний розв'язок. Цей розв'язок називається *функцією Рімана*, яка не залежить ні від даних Коші, ні від вигляду кривої  $g(x)$ . Для функції Рімана точка  $(\eta, \xi)$  відіграє роль аргументу, а точка  $(t, x)$  – роль параметра.

Підставивши в (2.41) замість  $v$  функцію Рімана і взявши до відома рівняння (2.37), матимемо

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[ (uv)|_Q + (uv)|_P + \int_{PQ} Kd\xi + Hd\eta - \iint_B v f(\eta, \xi) d\eta d\xi \right]. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) називається *формулою Рімана* і дає уявлення про розв'язок диференціального рівняння (2.37) для довільних початкових умов, заданих на довільній "вільній" кривій  $l$ .

## 2.3. Метод відокремлення змінних

### 2.3.1. Рівняння вільних коливань струни

*Метод відокремлення змінних* або *метод Фур'є* є одним з найбільш поширених методів розв'язання рівнянь з частинними похідними. Виклад цього методу проведемо на прикладі задачі про коливання струни, закріп-

леної на кінцях. Математично така задача полягає у відшуванні розв'язку рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.46)$$

що задовольняє однорідні граничні

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (2.47)$$

та початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \quad (2.48)$$

З цією метою розглянемо спочатку допоміжну задачу: *знайдемо розв'язок рівняння  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ , який тотожно не дорівнює нулю, задовольняє однорідні граничні умови*

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \quad (2.49)$$

*та представляється у вигляді добутку*

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \quad (2.50)$$

де  $X(x)$  – функція тільки змінної  $x$ ,  $T(t)$  – функція тільки змінної  $t$ .

Підставляючи (2.50) в (2.46), одержимо  $X''T = \frac{1}{a^2} T''X$ , або поділивши на  $XT$  –

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.51)$$

Функція (2.50) буде розв'язком рівняння (2.46), якщо остання рівність виконується тотожно для всіх значень незалежних змінних  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . Але така рівність можлива тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (2.52)$$

де  $\lambda$  – постійна. Тоді для визначення  $X(x)$  і  $T(t)$  з останнього співвідношення приходимо до звичайних диференціальних рівнянь

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (2.53)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (2.54)$$

Граничні умови з урахуванням (2.50) переписуться у вигляді

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Тоді

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (2.55)$$

бо інакше було б  $T(t) = 0$  і  $u(x,t) = 0$ , а ми шукаємо нетривіальний розв'язок. Таким чином приходимо до найпростішої задачі на власні значення: *знайти ті значення параметра  $\lambda$ , при яких існують нетривіальні розв'язки задачі:*

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad (2.56)$$

та знайти ці розв'язки.

Такі значення параметра  $\lambda$  називаються *власними значеннями*, а відповідні їм нетривіальні розв'язки – *власними функціями*. Зазначимо, що задачі на знаходження власних значень та власних функцій називають *задачами Штурма-Ліувілля*.

Розглянемо окремо наступні випадки.

1. При  $\lambda < 0$  задача не має нетривіальних розв'язків. Дійсно, загальний розв'язок рівняння (2.53) має вигляд  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Граничні умови дають  $X(0) = C_1 + C_2 = 0$ ,  $X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0$ , ( $\alpha = l\sqrt{-\lambda}$ ). Тобто  $C_1 = -C_2$  і  $C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$  або  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  і  $X(x) \equiv 0$ .

2. При  $\lambda = 0$  також не існує нетривіальних розв'язків, оскільки  $X(x) = C_1 x + C_2$ . Граничні умови дають  $X(0) = (C_1 \cdot 0 + C_2) = C_2 = 0$ ;  $X(l) = C_1 l = 0$ ,  $C_1 = 0$ . Отже  $X(x) \equiv 0$ .

3. При  $\lambda > 0$  загальний розв'язок рівняння може бути записано у вигляді  $X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ . Враховуючи граничні умови, одержимо:  $X(0) = D_1 = 0$ ,  $X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ . Якщо ми шукаємо функцію  $X(x)$  не рівну тотожно нулю, то  $D_2 \neq 0$ . Отже

$$\sin \sqrt{\lambda}x = 0, \quad (2.57)$$

або  $\sqrt{\lambda} = \pi n / l$ , де  $n$  – будь-яке додатне ціле число. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (2.56) можливий лише при значеннях  $\lambda = \lambda_n = (\pi n / l)^2$ .

Цим власним значенням відповідають власні функції  $X_n(x) = D_n \sin \pi n x / l$ , де  $D_n$  – довільна стала, яку ми покладемо рівною одиниці. Цим же значенням відповідатимуть розв'язки рівняння (2.54)

$$T_n(t) = A_n \cos \pi n a t / l + B_n \sin \pi n a t / l, \quad (2.58)$$

де  $A_n$  і  $B_n$  – довільні сталі.

Тоді, повертаючись до задачі (2.46)–(2.48), отримаємо функції

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.59)$$

які є частинними розв'язками рівняння (2.46). В силу лінійності і однорідності рівняння (2.46) сума частинних розв'язків

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.60)$$

також задовольнятиме це рівняння і граничні умови (2.47).

Для знаходження  $A_n$  і  $B_n$  скористаємось початковими умовами:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{cases} \quad (2.61)$$

З теорії рядів Фур'є відомо, що задана на проміжку  $0 \leq x \leq l$  кусково-неперервна і кусково-диференційовна функція  $f(x)$  (з регулярними точками розриву), розкладається в ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.62)$$

$$\text{де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (2.63)$$

Якщо функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  задовольняють умови розкладу в ряд Фур'є, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.64)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (2.65)$$

Тоді, порівнюючи (2.61) з (2.64)-(2.65), знаходимо

$$A_n = \varphi_n; \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n. \quad (2.66)$$

Зауважимо, що для обґрунтування методу відокремлення змінних залишається встановити умови, при яких ряд (2.60), де  $A_n$ ,  $B_n$  визначені співвідношеннями (2.66), (2.64), (2.65), рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати два рази по  $t$  і  $x$ . Виявляється, що має місце така теорема (її доведення див., напр., [4]).

**Теорема.** *Якщо  $\varphi(x)$  на відрізьку  $[0, l]$  два рази неперервно диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну і задовольняє умови  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ , а  $\psi(x)$  неперервно диференційовна на  $[0, l]$ , має кусково-неперервну другу і задовольняє умовам узгодженості  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , то функція  $u(x, t)$ , визначена рядом (2.60), має неперервні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння (2.46) і умови (2.47)-(2.48).*

Одержаний розв'язок має наступну інтерпретацію: функцію  $u_n(x,t)$  можна представити у вигляді:

$$u_n(x,t) = (A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at) \sin \frac{\pi n}{l} x = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.67)$$

$$\text{де } \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}. \quad (2.68)$$

Кожна точка струни  $x_0$  здійснює гармонічні коливання

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0 \text{ з амплітудою } \alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

### 2.3.2. Неоднорідне рівняння

Розглянемо задачу для неоднорідного рівняння коливань

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l, \quad (2.69)$$

при початкових

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.70)$$

і однорідних граничних умовах

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.71)$$

Будемо шукати розв'язок такої задачі у вигляді розкладу в ряд Фур'є по змінній  $x$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.72)$$

розглядаючи при цьому змінну  $t$  як параметр. Визначимо функцію  $T_n(t)$ .

Для цього представимо функцію  $f(x,t)$  і початкові умови у вигляді рядів Фур'є:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{array} \right. \quad (2.73)$$

Підставляючи форму (2.72) у вихідне рівняння (2.69), отримаємо



$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) - \ddot{T}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0.$$

Остання рівність буде справедливою тоді, коли

$$\ddot{T}_n(t) + a^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t). \quad (2.74)$$

Для визначення  $T_n(t)$  ми отримали звичайне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами. Початкові умови дають:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Звідки отримаємо:

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{T}_n(0) = \psi_n. \quad (2.75)$$

Ці додаткові умови дозволяють остаточно записати розв'язок рівняння (2.74), який представлється у вигляді  $T_n(t) = T_n^{(I)}(t) + T_n^{(II)}(t)$ , де

$$T_n^{(I)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

є розв'язком неоднорідного рівняння з нульовими початковими умовами, а

$$T_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \quad (2.77)$$

– розв'язком однорідного рівняння з заданими початковими умовами.

Таким чином, шуканий розв'язок запишеться у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l \psi_n}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.78)$$

Тут друга сума представляє розв'язок задачі про вільні коливання струни при заданих початкових умовах. Перша ж сума представляє вимушені коливання струни під дією зовнішньої сили при нульових початкових умовах.

### 2.3.3. Повздовжні коливання стрижня

Розглянемо задачу про повздовжні коливання однорідного пружного стрижня довжиною  $l$ , коли один його кінець  $x=0$  закріплений, а інший  $x=l$  – вільний. Така задача зводиться до розв'язання хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.79)$$

при граничних

$$u(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0 \quad (2.80)$$

та початкових умовах

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x). \quad (2.81)$$

Використовуючи описаний вище метод Фур'є, приходимо до наступної задачі на власні значення:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Аналогічно до п.2.3.1 отримаємо  $X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ ;  
 $D_1 = 0$ ;  $D_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0$ ;  $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2}$ ;  $X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x$ .

Отже,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} at + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} at \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x,$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} \xi d\xi; \quad B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} \xi d\xi.$$

### 2.3.4. Перша крайова задача з неоднорідними крайовими умовами

Розглянемо загальну першу крайову задачу, що описує вимушені коливання струни з рухомими кінцями: *знайти розв'язок рівняння*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.83)$$

що задовольняє умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (2.84)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t) \quad (t \geq 0). \quad (2.85)$$

Введемо нову невідому функцію, поклавши  $u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$  таким чином, що  $v(x,t)$  представляє собою відхилення функції  $u(x,t)$  від деякої відомої функції  $U(x,t)$ . Така функція  $v(x,t)$  визначається як розв'язок рівняння

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

при умовах

$$v(x, 0) = \varphi(x) - U(x, 0), \quad v_t(x, 0) = \psi(x) - U_t(x, 0),$$

$$v(0, t) = \mu_1(t) - U(0, t), \quad v(l, t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Виберемо додаткову функцію  $U(x, t)$  таким чином, щоб  $v(0, t) = 0$  і

$$v(l, t) = 0. \text{ Для цього достатньо покласти } U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тим самим перша крайова задача для функції  $u(x, t)$  зведена до крайової задачі для функції  $v(x, t)$  при нульових граничних умовах, яка була вже розглянута нами раніше.

### 2.3.5. Загальна схема методу відокремлення змінних

Розглянемо задачу: *знайти розв'язок рівняння*

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) \cdot u = \rho(x) \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.86)$$

що задовольняє умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (2.87)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.88)$$

Тут  $k$ ,  $q$  і  $\rho$  – неперервні на відрізку  $0 \leq x \leq l$  додатні функції ( $k > 0, \rho > 0, q \geq 0$ ). Для відшукування частинних розв'язків звернемось, як і раніше, до допоміжної задачі: *знайти нетривіальний розв'язок рівняння (2.86), що задовольняє граничні умови  $u(x, t) = 0, u(l, t) = 0$  і зображається у вигляді добутку  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .*

Підставляючи форму розв'язку в рівняння після відокремлення змінних отримаємо:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0.$$

Для визначення функції  $X(x)$  маємо крайову задачу на власні значення: *знайти ті значення параметра  $\lambda$ , при яких існують нетривіальні розв'язки задачі:*

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0, \quad (2.89)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (2.90)$$

та знайти ці розв'язки.

Нагадаємо, що такі значення параметра  $\lambda$  називають *власними значеннями*, а відповідні нетривіальні розв'язки – *власними функціями задачі (2.89), (2.90)*.

Сформулюємо основні властивості власних функцій і власних значень крайової задачі (2.89), (2.90):

1. Існує зчисленна множина власних значень  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ , яким відповідають нетривіальні розв'язки задачі – власні функції  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$

2. При  $q \geq 0$  всі власні значення  $\lambda_n$  додатні.

3. Власні функції  $X_m(x)$  і  $X_n(x)$  при  $m \neq n$  ортогональні між собою з вагою  $\rho(x)$  на відрізьку  $0 \leq x \leq l$ :

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (2.91)$$

4. (Теорема розкладу В. А. Стеклова). Довільна, двічі неперервно диференційовна функція  $F(x)$ , яка задовольняє крайові умови  $F(0) = F(l) = 0$ , розкладається в рівномірний і абсолютно збіжний ряд за власними функціями  $\{X_n(x)\}$ :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad (2.92)$$

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx. \quad (2.93)$$

5. Кожному власному значенню відповідає з точністю до постійного множника тільки одна власна функція.

Залишаючи сформульовану вище теорему Стеклова без доведення, зупинимось коротко на визначенні коефіцієнтів розкладу. Дійсно, помноживши обидві частини рівності  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$ , на  $\rho(x) X_n(x)$ , проінтег-

рувавши по змінній  $x$  від 0 до  $l$  та враховуючи ортогональність власних функцій, отримаємо записаний вище вираз для коефіцієнтів  $F_n$  (коефіцієнтів Фур'є).

Для визначення функції  $T(t)$  допоміжної до (2.86)–(2.88) задачі маємо рівняння

$$T'' + \lambda_n T = 0. \quad (2.94)$$

В силу додатності  $\lambda_n$  його розв'язок має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

де  $A_n$  і  $B_n$  – невизначені коефіцієнти. Таким чином, допоміжна задача має нескінченну множину розв'язків виду

$$u_n(x,t) = T_n(t) \cdot X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Повернемось до розв'язання задачі з заданими початковими умовами. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (2.95)$$

Формальна схема задоволення початковим умовам (2.88) базується на теоремі розкладу Стеклова і проводиться так само, як і для однорідної струни. З рівностей

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x),$$

знаходимо, що

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \psi_n / \sqrt{\lambda_n}, \quad (2.96)$$

де  $\varphi_n$  і  $\psi_n$  – коефіцієнти Фур'є функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  при розкладі за ортогональною з вагою  $\rho(x)$  системою функцій  $\{X_n(x)\}$ .

### 2.3.6. Вільні коливання прямокутної мембрани

Як було зазначено раніше, відхилення  $u(t,x,y)$  мембрани від положення рівноваги описуються розв'язком диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c, \quad (2.97)$$

який задовольняє початкові

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \quad u_t(0,x,y) = \psi(x,y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c, \quad (2.98)$$

та крайові умови

$$u(t,0,y) = u(t,b,y) = 0, \quad (2.99)$$

$$u(t,x,0) = u(t,x,c) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.100)$$

Як і в попередньому випадку, для побудови розв'язку задачі (2.97)-(2.100) розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: *знайдемо нетривіальні розв'язки рівняння (2.97), які б задовольняли крайові умови (2.99), (2.100).*

Ці розв'язки будемо шукати у вигляді

$$U(t,x,y) = T(t) \cdot V(x,y) \neq 0. \quad (2.101)$$

Підставляючи (2.101) у рівняння (2.97) і крайові умови (2.99), (2.100) та відокремлюючи змінні, одержимо

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (2.102)$$

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \\ V(0,y) = V(b,y) = 0, \quad V(x,0) = V(x,c) = 0, \quad \lambda = const. \end{cases} \quad (2.103)$$

Рівняння  $V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0$  називається *рівнянням Гельмгольца*.

Одержану задачу на власні значення (2.103) для диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Для цього покладемо

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (2.104)$$

Відокремлюючи змінні у задачі (2.103), одержимо

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(b) = 0; \end{cases} \quad (2.105)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(c) = 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

Повторюючи аналогічно до попереднього дослідження одержаних задач на власні значення, матимемо

$$\mu = (\pi n/b)^2, \quad X_n(x) = C_1 \sin(\pi n x/b), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda - \mu = (\pi m/c)^2, \quad Y_m(y) = C_2 \sin(\pi m y/c), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, власними значеннями задачі (2.103) є числа  $\lambda_{n,m} = (\pi n/b)^2 + (\pi m/c)^2$ , яким відповідають власні функції

$$V_{n,m}(x, y) = A_{n,m} \sin(\pi n x/b) \cdot \sin(\pi m y/c), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $A_{n,m} = C_1 \cdot C_2$  – деякий сталий множник. Виберемо його таким чином, щоб норма власної функції  $V_{n,m}(x, y)$  з вагою 1 була рівна одиниці, тобто

$$\iint_{00}^{bc} V_{n,m}^2 dy dx = A_{n,m}^2 \iint_{00}^{bc} \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \cdot \sin^2 \frac{\pi m}{c} y dy dx = 1.$$

З останньої рівності знаходимо  $A_{n,m} = 2(b \cdot c)^{-1/2}$ . Ортогональність функцій  $\{V_{n,m}(x, y)\}$  у прямокутнику, що розглядається, очевидна і не вимагає доведення. Таким чином, система функцій

$$V_{n,m}(x, y) = 2(b \cdot c)^{-1/2} \cdot \sin \pi n x/b \cdot \sin \pi m y/c, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.107)$$

є ортонормованою системою власних функцій прямокутної мембрани.

Відзначимо, що серед знайдених власних значень  $\lambda_{n,m}$  можуть бути і кратні, тобто такі власні значення, яким відповідає не одна, а декілька лінійно незалежних власних функцій. Число лінійно незалежних власних функцій, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m}$ , залежить від кількості розв'язків  $n, m \in N$  рівняння  $(\pi n/b)^2 + (\pi m/c)^2 = \lambda_{n,m}$ .

Підставивши знайдені значення  $\lambda_{n,m}$  у рівняння (2.102) та проінтегрувавши його, одержимо  $T_{n,m}(t) = B_{n,m} \cdot \cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + C_{n,m} \cdot \sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t$ , де  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  – довільні сталі. Підставляючи (2.107) у рівність (2.101), маємо

$$u_{n,m}(t, x, y) = (B_{n,m} \cdot \cos a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + C_{n,m} \cdot \sin a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) V_{n,m}(x, y). \quad (2.108)$$

Ми одержали нескінченну множину частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.97), які задовольняють крайові умови (2.99), (2.100). Тоді і ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(t, x, y) \quad (2.109)$$

також буде розв'язком рівняння (2.97) і задовольняє крайові умови (2.99), (2.100).

Коефіцієнти  $B_{n,m}$ ,  $C_{n,m}$  визначаємо таким чином, щоб ряд (2.109) задовольняв і початкові умови (2.98). Для цього підставимо (2.109) у (2.98):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} V_{n,m}(x, y), \\ \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_{n,m}} C_{n,m} V_{n,m}(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Помноживши ряди (2.110) на функцію  $V_{k,y}(x, y)$  та проінтегрувавши одержані результати по прямокутнику, матимемо

$$B_{n,m} = \iint_{00}^{bc} \varphi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx, \quad C_{n,m} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \iint_{00}^{bc} \psi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx.$$

Підставляючи знайдені значення  $B_{n,m}$ ,  $C_{n,m}$  у ряд (2.109), одержимо розв'язок вихідної задачі (2.97)–(2.100).

### 3. Рівняння параболічного типу

#### 3.1. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності

Нехай  $\Omega$  – обмежена область простору  $R^3$  змінних  $(x, y, z)$ . Позначимо через  $Q$  в просторі  $R^4$  змінних  $(x, y, z, t)$  циліндр, основа якого є область  $\Omega$ , а твірні – паралельні осі  $Ot$ , а саме:  $Q = \Omega \times (0, \infty)$ . Нехай  $Q_T$  – частина цього циліндра, обмежена зверху площиною  $t=T$  ( $T>0$ ). Частину межі циліндра  $Q_T$ , що складається з її нижньої основи ( $t=0$ ) і бічної поверхні, позначимо через  $\Gamma$ .

Розглянемо наступну задачу: знайти в циліндрі  $Q_T$  розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.1)$$

що задовольняє початковій

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \bar{\Omega}) \quad (3.2)$$

і крайовій умові

$$u|_{P \in S} = \psi(P, t) \quad (t \in [0, T]), \quad (3.3)$$

де  $S$  – межа області  $\Omega$ ,  $P$  – точка поверхні  $S$ . Функції  $\varphi$  і  $\psi$  неперервні, причому значення  $\psi$  при  $t=0$  співпадають із значеннями  $\varphi$  на границі  $S$ .

Задача знаходження розв'язку рівняння (3.1) при умовах (3.2), (3.3) називається *першою крайовою задачею для рівняння теплопровідності*.

**Теорема.** *Функція  $u(x, y, z, t)$ , що задовольняє однорідне рівняння теплопровідності (3.1) в середині циліндра  $Q_T$  і неперервна всюди до його границі, набуває найбільше і найменше значення на  $\Gamma$ , тобто або при  $t=0$ , або на бічній поверхні циліндра  $Q_T$ .*

Оскільки теорема про мінімум зводиться до теореми про максимум зміною знаку функції  $u(x, y, z, t)$ , то обмежимося доведенням теореми про максимум.

Позначимо через  $M$  найбільше значення функції  $u(x, y, z, t)$  в циліндрі  $\bar{Q}_T$ , а через  $m$  – найбільше значення  $u(x, y, z, t)$  на  $\Gamma$ . Припустимо, що існує такий розв'язок  $u(x, y, z, t)$ , для якого  $M > m$ , тобто для якого теорема про максимум неправильна. Нехай ця функція приймає значення  $M$  в точці  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ , де  $(x_0, y_0, z_0)$  належить  $\Omega$  і  $0 < t_0 \leq T$ .

Розглянемо функцію

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \frac{M-m}{6d^2} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2],$$



де  $d$  – діаметр області  $\Omega$ . На бічній поверхні циліндра  $Q_T$  і на його нижній основі

$$v(x, y, z, t) \leq m + \frac{M-m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M,$$

а  $v(x_0, y_0, z_0, t_0) = M$ .

Отже,  $v(x, y, z, t)$ , так само, як і  $u(x, y, z, t)$  не приймає найбільшого значення ні на бічній поверхні  $Q_T$ , ні на його нижній основі. Нехай  $v(x, y, z, t)$  приймає найбільше значення в точці  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ , де

$(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$  і  $0 < t_1 \leq T$ . Тоді в цій точці другі похідні  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$  не додатні і  $\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$  (якщо  $t_1 < T$ , то  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , якщо ж  $t_1 = T$ , то  $\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$ ), звідки ви-

пливає, що в точці  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  повинно бути

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \geq 0. \quad (3.4)$$

З іншого боку

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - a^2 \frac{M-m}{d^2} = -a^2 \frac{M-m}{d^2} < 0,$$

що суперечить (3.4). Теорема доведена.

З доведеної теореми безпосередньо випливає, що:

1. Розв'язок першої крайової задачі (3.1)-(3.2) в циліндрі  $Q_T$  єдиний.

Справді, якщо б ми мали два розв'язки  $u_1$  та  $u_2$  задачі, то їх різниця  $w = u_1 - u_2$ , що задовольняє однорідному рівнянню (3.1), перетворилась би на нуль як при  $t=0$ , так і на поверхні  $S$  області  $\Omega$ . Але тоді, в силу принципу максимуму, випливає, що  $w$  тотожно рівна нулю в області  $\Omega$  при  $0 < t \leq T$ , тобто  $u_1 = u_2$ .

2. Розв'язок першої граничної задачі (3.1)-(3.2) неперервно залежить від правих частин початкової і крайової умов.

Дійсно, якщо різниця функцій, що входять відповідно в початкову та крайову умови, за абсолютною величиною не перевищує деякого додатного числа  $\varepsilon$ , то і різниця  $w = u_1 - u_2$  відповідних розв'язків, як розв'язок однорідного рівняння теплопровідності з малими початковими і граничними значеннями, у всьому циліндрі  $Q_T$  за абсолютною величиною не буде перевищувати  $\varepsilon$ .

### 3.2. Метод відокремлення змінних

#### 3.2.1. Однорідне рівняння теплопровідності

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного рівняння теплопровідності: *знайти в області  $(0, l) \times (0, +\infty)$  розв'язок рівняння*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (3.5)$$

*за початкової*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.6)$$

*і однорідних крайових умов*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \quad (3.7)$$

Для формального розв'язання цієї задачі розглянемо, аналогічно до п.2.3.1, спочатку допоміжну задачу: *знайти не рівний тотожно нулю розв'язок рівняння  $u_t = a^2 u_{xx}$ , який задовольняє однорідні крайові умови*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (3.8)$$

*і записується у вигляді*

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (3.9)$$

Підставляючи (3.9) в рівняння (3.5) і поділивши обидві частини на  $a^2 \cdot X \cdot T$ , отримаємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (3.10)$$

де  $\lambda = \text{const}$ . Оскільки ліва частина рівності залежить тільки від  $t$ , а права від  $x$ , то приходимо до наступних звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій  $X$  і  $T$ :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (3.11)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (3.12)$$

Згідно крайових умов (3.8) отримаємо

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.13)$$

Таким чином, для визначення функції  $X(x)$  маємо задачу на власні значення (задачу Штурма-Ліувілля)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (3.14)$$

яка вже досліджувалась нами раніше і, зокрема, одержано

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots); \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.15)$$

Цим значенням  $\lambda_n$  відповідають розв'язки рівняння (3.12)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (3.16)$$

де  $C_n$  – не визначені поки що коефіцієнти.

Таким чином, частинними розв'язками рівняння (3.5), що задовольняють нульові крайові умови, є функції

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cdot \sin \pi n x / l. \quad (3.17)$$

Складемо формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\pi n a / l)^2 t} \sin \pi n x / l. \quad (3.18)$$

Функція  $u(x, t)$  задовольняє крайові умови. Вимагаючи задоволення початкової умови, отримаємо

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.19)$$

тобто  $C_n$  є коефіцієнтами Фур'є функції  $\varphi(x)$  (при формальному її розкладі в ряд за синусами на інтервалі  $(0, l)$ )

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (3.20)$$

Зазначимо, що обґрунтування формально побудованого нами розв'язку пов'язане із встановленням вимог, яким повинна задовольняти функція  $\varphi(x)$ . Справедливим є твердження, що якщо функція  $\varphi(x)$  неперервна, має кусково-неперервну похідну і задовольняє умови  $\varphi(0)=0$  і  $\varphi(l)=0$ , то: 1) дана функція допускає розклад (3.19), (3.20); 2) функція  $u(x, t)$ , що визначається рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] e^{-(\pi n a / l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.21)$$

є неперервною, неперервно диференційовною по  $t$  та двічі неперервно диференційовною по  $x$  (даний ряд є рівномірно збіжним і його можна почленно двічі диференціювати по  $x$  і один раз по  $t$ ); 3) функція  $u(x, t)$  задовольняє рівняння (3.5) та умови (3.6), (3.7).

Перетворимо розв'язок (3.21), замінюючи  $C_n$  їх значеннями

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] \cdot e^{-(\pi n a / l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \int_0^l \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n a / l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Зміна порядків сумування й інтегрування завжди справедливе при  $t > 0$  в силу того, що ряд в дужках збігається рівномірно по  $\xi$  при  $t > 0$ .

Позначимо

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n a / l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (3.22)$$

Користуючись цією функцією, можна представити  $u(x, t)$  у вигляді

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Функція  $G(x, \xi, t)$  називається *функцією миттєвого точкового джерела*.

### 3.2.2. Неоднорідне рівняння теплопровідності

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (3.23)$$

з початковою

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.24)$$

і граничними умовами

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (3.25)$$

Будемо шукати розв'язок  $u(x, t)$  цієї задачі у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі (3.15), тобто за функціями  $\{\sin(\pi n x / l)\}$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\pi n x / l), \quad (3.26)$$

вважаючи при цьому змінну  $t$  параметром. Для цього визначимо спочатку функції  $u_n(t)$ . Припустимо, що функція  $f(x, t)$  допускає розклад у ряд:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\pi n x / l), \quad (3.27)$$

де  $f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin(\pi n \xi / l) d\xi$ .

Підставляючи (3.26) та (3.27) у вихідне рівняння, матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x / l) \{ (\pi n a / l)^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \} = 0.$$

Звідси

$$\dot{u}_n(t) = -a^2(\pi n/l)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (3.28)$$

Користуючись початковими умовами для розв'язку  $u(x,t)$ :

$$u(x,0) = \sum_0^{\infty} u_n(0) \sin(\pi n x/l) = 0,$$

отримаємо початкову умову для  $u_n(t)$ :

$$u_n(0) = 0. \quad (3.29)$$

Розв'язуючи задачу (3.28), (3.29), знаходимо

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-(\pi n/l)^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Підставляючи вираз (3.30) у формулу (3.26), отримаємо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.31)$$

Користуючись виразом (3.27) для  $f_n(\tau)$  і перетворюючи знайдений розв'язок (3.31), остаточно одержимо:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \iint_{00}^{tl} \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2(t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \iint_{00}^{tl} G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.2.3. Перша крайова задача з неоднорідними умовами

Розглянемо таку крайову задачу для рівняння теплопровідності:  
знайти розв'язок рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (3.33)$$

що задовольняє додаткові умови:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t).$$

Введемо нову невідому функцію  $v(x,t)$  таку, що

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t).$$

Функція  $v(x,t)$  буде визначатись як розв'язок рівняння

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x,t), \quad \bar{f}(x,t) = f(x,t) - [U_t - a^2 U_{xx}],$$

що задовольняє додаткові умови

$$v(x,0) = \varphi(x) - U(x,0); \quad v(0,t) = \mu_1(t) - U(0,t); \quad v(l,t) = \mu_2(t) - U(l,t).$$

Виберемо допоміжну функцію  $U(x,t)$  таким чином, щоб  $v(0,t)=0$  і  $v(l,t)=0$ . Для цього достатньо покласти  $U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]$ .

Таким чином, знаходження функції  $u(x,t)$  зведено до знаходження функції  $v(x,t)$ , яка є розв'язком крайової задачі з нульовими крайовими умовами, яка була розглянута нами раніше.

### 3.2. Процеси поширення тепла в необмежених областях. Постановка задачі Коші та існування її розв'язку

Дослідження процесів поширення тепла в необмежених областях будемо розглядати на прикладі задачі в необмеженому однорідному стержні, бічна поверхня якого теплоізолювана. Математично така задача формулюється таким чином: *знайти функцію  $u(x,t)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \geq 0$ ), що задовольняє рівняння теплопровідності*

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0) \quad (3.34)$$

*і початкову умову*

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (3.35)$$

де  $\varphi(x)$  – деяка задана на  $R^1$  функція. Сформульована задача є задачею Коші.

Виявляється, що за умови обмеженості та неперервності функції  $\varphi(x)$  розв'язок такої задачі існує, він єдиний і неперервно залежить від даної функції. А саме, існує обмежена, неперервно диференційовна (один раз по  $t$  та двічі по  $x$ ) функція  $u(x,t)$ , яка в області  $G = (-\infty, +\infty) \times (0, \infty)$  задовольняє рівняння (3.34), допускає неперервне продовження на границю  $t=0$  цієї області та задовольняє умову (3.35).

Покажемо, що розв'язок цієї задачі існує (доведення його єдиності та неперервної залежності від початкових умов можна знайти в [4]). Для цього знайдемо спочатку частинні розв'язки рівняння (3.34) у вигляді

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (3.36)$$

Підставляючи (3.36) в рівняння (3.34) та відокремлюючи змінні, одержимо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.37)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.38)$$

де  $\lambda$  – довільна дійсна стала. Рівняння (3.37) і (3.38) мають обмежені розв'язки тоді, коли  $\lambda \geq 0$ , отже  $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ ,  $T(t) = C_3 e^{-\lambda a^2 t}$ .

Покладемо  $\lambda = k^2$ ,  $-\infty < k < +\infty$ . Тоді, згідно з (3.36) матимемо

$$u_k(t, x) = e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx), \quad (3.39)$$

де  $A(k) = C_1 C_3$ ,  $B(k) = C_2 C_3$  – довільні сталі, які залежать від параметра  $k$ .

Функція  $u_k(t, x)$ , визначена за формулою (3.39), є розв'язком рівняння (3.34) при довільних  $A(k)$  і  $B(k)$ . Тому функція

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk \quad (3.40)$$

також буде розв'язком рівняння (3.34), якщо інтеграл у правій частині (3.40) рівномірно збігається і його можна диференціювати під знаком інтеграла один раз по змінній  $t$  і двічі по змінній  $x$ . Нехай ці умови виконуються.

Згідно з початковою умовою (3.35) матимемо

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk. \quad (3.41)$$

Припустимо, що функція  $\varphi(x)$  допускає її представлення за формулою Фур'є (нехай дана функція є неперервною та обмеженою на всій осі):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \cos kx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi + \sin kx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi \right] dk. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Порівнюючи (3.41) і (3.42), одержимо

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi; \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (3.40), матимемо:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi.$$

В останній рівності використано парність підінтегральної функції, як функції від  $k$ . Змінюючи в ній порядок інтегрування, отримаємо:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) dk.$$

З курсу “Диференціального та інтегрального числення” відома формула

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0.$$

Враховуючи останнє співвідношення, остаточно одержимо розв'язок вихідної задачі

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.43)$$

Формула (3.43) називається *формулою Пуассона*.

Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що функція

$$G(t, x, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \quad (3.44)$$

як функція від  $(t, x)$  є також розв'язком рівняння (3.34), і її називають *фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності*.

Покажемо, що для довільної неперервної і обмеженої функції  $\varphi(x)$  функція (3.43) є розв'язком рівняння теплопровідності (3.34). Для цього потрібно довести, що інтеграл (3.43) та інтеграли, які одержуються із (3.43) шляхом диференціювання під знаком інтеграла один раз по змінній  $t$  і двічі по змінній  $x$ , збігаються рівномірно при  $t > 0$ . Продиференціюємо (3.43) один раз по  $t$  і двічі по  $x$ . Матимемо

$$u_t(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

$$u_x(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi-x}{2a^2 t} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

$$u_{xx}(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi-x)^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Як бачимо, вирази для похідних складаються із суми інтегралів вигляду:

$$I = \frac{1}{t^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) (\xi-x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad (3.45)$$

де  $k$  і  $m$  – деякі невід'ємні сталі.

Покладемо в (3.45)



$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (3.46)$$

Тоді (3.45) запишеться у вигляді

$$I = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2}k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) \alpha^m e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Функція  $\varphi(x)$  обмежена, отже існує таке скінчене число  $M$ , що для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$   $|\varphi(x)| \leq M$ . Тоді при  $t > 0$  підінтегральний вираз мажорується функцією  $M|\alpha|^m e^{-\alpha^2}$ , яка є інтегрованою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Таким чином, інтеграл (3.45) збігається рівномірно при довільних невід'ємних сталих  $k$  і  $m$ , а отже, в (3.43) можна диференціювати під знаком інтеграла один раз по змінній  $t$  і двічі по змінній  $x$ .

Покажемо тепер, що функція (3.43) задовольняє і початкову умову (3.35), тобто  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \varphi(x)$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Для цього у формулі Пуассона замість  $\xi$  введемо нову змінну інтегрування  $\alpha$  за формулою (3.46). Одержимо

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.47)$$

В теорії невластних інтегралів відома рівність

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1. \quad (3.48)$$

Помножимо (3.48) на  $\varphi(x)$  і віднімемо від (3.47). Одержимо

$$u(t, x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

а значить

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.49)$$

Внаслідок обмеженості функції  $\varphi(x)$  для довільних  $x, t, \alpha$  матимемо  $|\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M$ .

Враховуючи останню нерівність в (3.49), одержимо

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} |\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

де  $N$  – довільна стала. В силу збіжності (3.48) для довільного як завгодно

малого числа  $\varepsilon > 0$  можна вибрати настільки велике число  $N$ , що

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^N e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}; \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки функція  $\varphi(x)$  неперервна, то для всіх  $t$ , досить близьких до нуля, і при  $|\alpha| \leq N$  матимемо

$$|\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

А отже, з (3.50) одержимо для  $t$  досить близьких до нуля

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \varepsilon.$$

Із останньої рівності в силу довільності  $\varepsilon$  випливає, що  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \varphi(x)$ , тобто формула Пуассона задовольняє і початкову умову (3.35).

## 4. Рівняння еліптичного типу

### 4.1. Гармонічні функції та їх властивості

#### 4.1.1. Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа

Як уже зазначалось раніше, при дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія та ін.) приходять до рівнянь еліптичного типу. Найбільш поширеним рівнянням цього типу є *рівняння Лапласа*

$$\Delta u = 0.$$

Функція  $u$  називається *гармонічною* в області  $T$ , якщо вона неперервна в цій області разом зі своїми похідними до 2-го порядку і задовольняє рівняння Лапласа. Зауважимо, що при вивченні гармонічних функцій були розроблені різні математичні методи, які виявились досить ефективними і при застосуванні до рівнянь гіперболічного та параболічного типів.

Нагадаємо, що рівняння Лапласа у сферичних і циліндричних координатах відповідно має вигляд

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.1)$$

$$\Delta_{\rho,\varphi,z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.2)$$

За умови сферичної симетрії розв'язку рівняння (4.1) приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU(r)}{dr} \right) = 0.$$

Його частинний розв'язок

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (4.3)$$

називають *фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа в просторі*.

Аналогічно, за умови циліндричної симетрії частинний розв'язок рівняння (4.2)

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (4.4)$$

називають *фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині*.

#### 4.1.2. Гармонічні функції та аналітичні функції комплексної змінної

Досить загальним методом розв'язку рівняння Лапласа є метод, що використовує функції комплексної змінної.

Нехай  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  – деяка функція комплексної змінної  $z = x + iy$ , де  $u$  та  $v$  є дійсними функціями змінних  $x$  і  $y$ . Нагадаємо, що функція  $w$  є аналітичною, якщо  $u$  і  $v$  є неперервно диференційовними функціями та виконуються умови Коші-Рімана

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases} \quad (4.5)$$

З теорії функцій комплексної змінної відомо:

- аналітична в деякій області  $G$  функція, а також її дійсна та уявна частини, мають в цій області похідні всіх порядків;
- дійсна і уявна частини аналітичної функції є гармонічними функціями.
- за кожною гармонічною функцією  $u$  в однозв'язній області завжди можна знайти (з точністю до константи) таку функцію  $v$ , що  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  є аналітичною функцією

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c, \quad \text{де } c = \text{const}; \quad (x_0, y_0) - \text{фіксована}$$

точка, а інтегрування здійснюється вздовж довільного кусково гладкого контура, що сполучає точки  $(x_0, y_0)$  та  $(x, y)$ .

Гармонічні функції, які пов'язані умовами Коші-Рімана, називають спряженими гармонічними функціями.

Розглянемо перетворення

$$\begin{cases} x = x(u, v), & u = u(x, y), \\ y = y(u, v), & v = v(x, y), \end{cases} \quad (4.6)$$

що взаємно однозначно відображає задану область  $G$  площини  $(x, y)$  на деяку область  $G'$  площини  $(u, v)$ .

Нехай  $U = U(x, y)$  – деяка дійсна двічі неперервно диференційована функція, що визначена в області  $G$ .

Обчислимо похідні функції

$$U_x = \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \quad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y \quad (\tilde{U}(u, v) = U(x(u, v), y(u, v))),$$

$$U_{xx} = \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx},$$

$$U_{yy} = \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy},$$

звідки отримаємо

$$U_{xx} + U_{yy} = \tilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \quad (4.7)$$

Якщо  $u$  і  $v$  є спряженими гармонічними функціями, то перетворення (4.6) еквівалентне перетворенню, що здійснюється аналітичною функцією  $w = f(z) = u + iv$  ( $z = x + iy$ ). (4.8)

В силу умов Коші-Рімана (4.5) повинні виконуватись рівності

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

Підставляючи ці співвідношення у формулу (4.7), отримаємо

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv}) \cdot |f'(z)|^2 \quad \text{або} \quad \Delta_{uv} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_{x,y} U. \quad (4.9)$$

Звідси випливає, що в результаті перетворення (4.8) гармонічна функція в області  $G$  функція  $U(x, y)$  переходить у функцію  $\tilde{U} = U(u, v)$ , гармонічну в області  $G'$ , якщо тільки  $f'(z) \neq 0$  в області  $G$ .

*Зауваження.* Легко бачити, що якобіан  $J(x, y)$  перетворення (4.6) співпадає із квадратом модуля похідної відповідної аналітичної функції  $f(z)$ . Дійсно,  $J(x, y) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$ . Отже, умова  $f'(z) \neq 0$  ( $\forall z \in G$ ) є одночасно і умовою взаємної однозначності такого перетворення.

## 4.2. Загальні властивості гармонічних функцій

### 4.2.1. Формули Гріна

Для виведення формул Гріна, які часто використовують при вивченні рівнянь еліптичного типу, скористаємось відомою формулою Остроградського, яка має вигляд

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad (4.10)$$

де  $T$  – деякий об'єм, що обмежений достатньо гладкою поверхнею  $\Sigma$ ,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – довільні, неперервні в  $T + \Sigma$  функції, які мають неперервні похідні в  $T$ ,  $\alpha = (\widehat{nx})$ ,  $\beta = (\widehat{ny})$ ,  $\gamma = (\widehat{nz})$  – кути зовнішньої нормалі  $\mathbf{n}$  до поверхні  $\Sigma$  з координатними осями,  $d\tau = dx dy dz$  – елемент об'єму. Нагадаємо, що формулу (4.10) можна записати ще й так:

$$\iiint_T \operatorname{div} A d\tau = \iint_{\Sigma} A_n d\sigma, \quad (4.11)$$

де  $A = (P, Q, R)$ ,  $\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  і  $A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$  – складова

вектора  $A$  вздовж зовнішньої нормалі.

Перейдемо тепер до виведення формул Гріна. Нехай  $u = u(x, y, z)$  і  $v = v(x, y, z)$  – неперервні разом з своїми першими похідними в  $T + \Sigma$  функції, що мають неперервні другі похідні в  $T$ . Покладемо

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z},$$

і, користуючись формулою Остроградського (4.11), приходимо до так званої *першої формули Гріна*

$$\iiint_T u \Delta v d\tau = \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iint_T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau, \quad (4.12)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$  –

похідна за напрямком зовнішньої нормалі.

Якщо врахувати співвідношення

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

то формулу Гріна можна представити у вигляді

$$\iiint_T u \Delta v d\tau = - \iiint_T \nabla u \nabla v d\tau + \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (4.12')$$

Міняючи місцями функції  $u$  і  $v$ , будемо мати

$$\iiint_T v \Delta u d\tau = - \iiint_T \nabla v \nabla u d\tau + \iint_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (4.13)$$

Віднімаючи від рівності (4.12') рівність (4.13), отримаємо *другу формулу Гріна*

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_\Sigma \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4.14)$$

Для функцій  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$  двох змінних мають місце аналогічні формули Гріна.

Як було показано в 4.1.1, функція  $U_0(M) = 1/r$ , де

$r = r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  – відстань між точками  $M(x, y, z)$  і  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , задовольняє рівняння Лапласа при  $M \neq M_0$ .

Нехай  $u(M)$  – гармонічна функція, неперервна разом зі своїми першими похідними в області  $T+\Sigma$  і така, що має другі похідні в  $T$ . Розглянемо функцію  $v=1/r_{MM_0}$ , де  $M_0$  – деяка внутрішня точка області  $T$ . Оскільки ця функція є розривною в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , то безпосередньо застосувати другу формулу Гріна в області  $T$  до функцій  $u$  і  $v$  не можна. Проте функція  $v=1/r_{MM_0}$  обмежена в області  $T-K_\varepsilon$  з границею  $\Sigma+\Sigma_\varepsilon$ , де  $K_\varepsilon$  – куля радіуса  $\varepsilon$  з центром у точці  $M_0$  і поверхнею  $\Sigma_\varepsilon$ .

Застосовуючи другу формулу Гріна до функцій  $u$  і  $v=1/r_{MM_0}$  в області  $T-K_\varepsilon$ , отримаємо:

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left( u \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta u \right) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (4.15)$$

У правій частині цієї рівності тільки останні два інтеграли залежать від  $\varepsilon$ . Обчислюючи похідну по зовнішній нормалі до області  $T-K_\varepsilon$  на  $\Sigma_\varepsilon$ , знайдемо

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{r=\varepsilon} = - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

звідки

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (4.16)$$

де  $u^*$  – середнє значення функції  $u(M)$  на поверхні  $\Sigma_\varepsilon$ .

Перетворимо третій інтеграл

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (4.17)$$

де  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$  – середнє значення похідної  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на сфері  $\Sigma_\varepsilon$ . Підставляючи вирази (4.16) і (4.17) у формулу (4.15) і враховуючи, що  $\Delta(1/r)=0$  в  $T-K_\varepsilon$ , будемо мати:

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \right) \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*. \quad (4.18)$$

Спрямовуючи радіус  $\varepsilon$  до нуля, одержимо:

1)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$ , оскільки  $u(M)$  – неперервна функція, а  $u^*$  – її середнє значення по сфері радіуса  $\varepsilon$  з центром у точці  $M_0$ ;

2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$ , оскільки з неперервності перших похідних функції  $u(M)$  всередині  $T$  впливає обмеженість похідної по нормалі

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

в околі точки  $M_0$ ;

3) за визначенням невідладного інтеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \Delta u \right) d\tau = \iiint_T \left( -\frac{1}{r} \Delta u \right) d\tau.$$

В результаті вказаного граничного переходу  $\varepsilon \rightarrow 0$  одержимо:

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left[ u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{r_{M_0 P}} d\tau, \quad (4.19)$$

де  $P = P(\xi, \eta, \zeta)$  – біжуча точка поверхні  $\Sigma$ .

Для гармонічної функції  $\Delta u = 0$  і формула (4.19) приймає вигляд

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P \quad (4.20)$$

( $M_0$  – всередині  $T$ ).

Таким чином, значення гармонічної функції в будь-якій внутрішній точці області виражається через значення цієї функції і її похідної по нормалі на поверхні області.

#### 4.2.2. Основні властивості гармонічних функцій

1. Якщо  $v$  – функція, гармонічна в області  $T$ , обмеженій достатньо гладкою поверхнею  $\Sigma$ , то

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (4.21)$$

де  $S$  – будь-яка замкнена достатньо гладка поверхня, що цілком лежить в області  $T$ .

Справді, підставляючи в першу формулу Гріна (4.12') будь-яку гармонічну функцію  $v$  ( $\Delta v = 0$ ) і функцію  $u \equiv 1$ , відразу ж отримуємо формулу (4.21).



2. Якщо функція  $u(M)$  гармонічна в деякій області  $T$ , а  $M_0$  – яка-небудь точка, що лежить в області  $T$ , то має місце формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (4.22)$$

де  $\Sigma_a$  – сфера радіуса  $a$  з центром у точці  $M_0$ , що цілком належить області  $T$  (теорема про середнє значення).

Ця теорема стверджує, що значення гармонічної функції в деякій точці  $M_0$  дорівнює середньому значенню цієї функції на будь-якій сфері  $\Sigma_a$  з центром в  $M_0$ , якщо сфера  $\Sigma_a$  не виходить з області гармонічності функції  $u(M)$ .

3. Якщо функція  $u(M)$ , визначена і неперервна в замкнутій області  $T+\Sigma$ , задовольняє рівняння  $\Delta u=0$  в  $T$ , то максимальне і мінімальне значення функції  $u(M)$  досягається на поверхні  $\Sigma$  (принцип максимального значення).

Припустимо, що функція  $u(M)$  досягає максимального значення в деякій внутрішній точці  $M_0$  області  $T$ , так що  $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$ , де  $M$  – довільна точка області  $T$ . Розглянемо сферичний окіл  $\Sigma_\rho$  точки  $M_0$  радіуса  $\rho$ , що повністю лежить всередині області  $T$ . Оскільки за припущенням  $u(M_0)$  є найбільшим значенням функції  $u(M)$  в  $T+\Sigma$ , то  $u|_\Sigma \leq u(M_0)$ . Користуючись формулою середнього значення (4.22) і замінюючи під інтегралом всюди  $u(M)$  значенням  $u(M_0)$ , отримаємо:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_M \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0). \quad (4.23)$$

Припустимо, що хоча б в одній точці  $M$  сфери  $\Sigma_\rho$   $u(M) < u(M_0)$ . Тоді, очевидно, що замість знаку  $\leq$  будемо мати знак  $<$ , що приводить до протиріччя. Таким чином, на всій поверхні  $\Sigma_\rho$   $u(M) \equiv u(M_0)$ .

Якщо  $\rho_0^m$  – мінімальна відстань від  $M_0$  до поверхні  $\Sigma$ , то  $u(M) \equiv u(M_0)$  для всіх точок, що лежать всередині  $\Sigma_{\rho_0^m}$ . Звідси випливає, що в точках  $M^*$ , що належать спільній частині  $\Sigma_{\rho_0^m}$  і  $\Sigma$ ,  $u(M^*) = u(M_0)$ . Це і доводить теорему, оскільки нами показано, що максимальне значення  $u(M_0)$  досягається в точках границі  $M^*$ .

Аналогічно доводиться теорема і відносно мінімального значення.

*Наслідок.* Якщо функції  $u$  і  $U$  неперервні в області  $T+\Sigma$ , гармонічні в  $T$  і якщо  $|u|\leq U$  на  $\Sigma$ , то  $|u|\leq U$  всюди всередині  $T$ .

#### 4.2.3. Єдиність і стійкість першої крайової задачі

Перша внутрішня крайова задача (внутрішня задача Діріхле) для рівняння Лапласа як правило ставиться наступним чином: *знайти функцію  $u$ , яка визначена і неперервна в замкненій області  $T+\Sigma$ , двічі неперервно диференційовна в  $T$ , задовольняє в  $T$  рівняння  $\Delta u=0$  і приймає на  $\Sigma$  (межі області  $T$ ) задані значення  $f$ .*

Доведемо теорему єдиності: *перша внутрішня крайова задача для рівняння Лапласа не може мати двох різних розв'язків.*

Припустимо протилежне, що існують два різні розв'язки задачі  $u_1$  і  $u_2$ . Тоді і їх різниця буде задовольняти рівняння Лапласа в області  $T$ , неперервна в замкненій області  $T+\Sigma$  і  $u|_{\Sigma}=0$ . Згідно з властивістю 3 різниця  $u=u_1-u_2$  приймає максимальне (і мінімальне) значення на границі області. Отже, така функція  $u\equiv 0$  у всій області  $T$ .

Нагадаємо, що задача називається фізично визначеною, якщо малій зміні умов, що визначають розв'язок задачі, відповідає мала зміна самого розв'язку. Доведемо неперервну залежність розв'язку першої крайової задачі від крайових умов.

Нехай  $u_1$  і  $u_2$  – неперервні в  $T+\Sigma$  і гармонічні в  $T$  функції, для яких  $|u_1-u_2|\leq\varepsilon$  на  $\Sigma$ . Функція  $U\equiv\varepsilon$  є гармонічною функцією. Тоді, на основі наслідку з властивості 3, нерівність  $|u_1-u_2|\leq\varepsilon=U$  виконується і всередині області  $T$ , що й потрібно було довести.

Перша зовнішня крайова задача у випадку трьох змінних полягає в наступному:

*потрібно знайти функцію  $u(x,y,z)$ , що задовольняє умови:*

- 1) *функція  $u$  неперервна в  $T+\Sigma$  і двічі неперервно диференційовна в  $T$ ;*
- 2)  *$\Delta u=0$  в необмеженій області  $T$ ;*
- 3)  *$u|_{\Sigma}=f(x,y,z)$ , де  $f$  – задана на поверхні  $\Sigma$  функція;*
- 4)  *$u(M)$  рівномірно прямує до нуля на нескінченності:  $u(M)\rightarrow 0$  при*

*$M\rightarrow\infty$  ( $|u|<\frac{C}{r}$  при  $r\rightarrow\infty$ ,  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ,  $C$  – деяка константа).*

Остання умова важлива для єдиності розв'язку. Як і у випадку першої внутрішньої крайової задачі, справедлива теорема: *зовнішня перша крайова задача для гармонічних функцій з трьома незалежними змінними має єдиний розв'язок.*

Перша зовнішня крайова задача на площині ставиться так:  
потрібно знайти функцію  $u(x, y)$ , що задовольняє умови:

- 1) функція  $u$  неперервна в  $D+C$  і двічі неперервно диференційовна в  $D$ ;
- 2)  $\Delta u=0$  в нескінченній області  $D$ , обмеженій контуром  $C$ ;
- 3)  $u|_C=f(x, y)$ , де  $f$  – задана на  $C$  функція;
- 4)  $u(M)$  обмежена в нескінченності, тобто існує таке число  $N$ , що  $|u(M)| \leq N$ .

Така задача також має єдиний розв'язок.

#### 4.2.4. Розв'язання першої крайової задачі для круга методом відокремлення змінних

Розв'яжемо першу крайову задачу для круга: для круга (з центром у початку координат, деякого радіуса  $a$ ) знайти функцію  $u$ , що задовольняє рівняння

$$\Delta u=0 \quad (4.24)$$

і умові

$$u=f \quad (4.25)$$

на відповідному колі (межі даного круга), де  $f$  – задана функція.

Введемо полярну систему координат  $(\rho, \varphi)$  з початком у центрі даного круга. Рівняння (4.24) в полярних координатах має вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.26)$$

Частинний розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0$ .

Підставляючи даний вираз у рівняння (4.26), отримаємо

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

де  $\lambda = \text{const}$ . Звідси отримаємо два рівняння:

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi \neq 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda R = 0, \quad R \neq 0. \quad (4.28)$$

З першого рівняння отримуємо:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Зауважимо, що при зміні кута  $\varphi$  на величину  $2\pi$  однозначна функція  $u(\rho, \varphi)$  повинна прийняти вихідне значення, тобто

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi).$$

Звідси випливає, що  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , тобто  $\Phi(\varphi)$  є періодичною функцією кута  $\varphi$  з періодом  $2\pi$ . Це можливо тоді, коли  $\sqrt{\lambda} = n$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots, i$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Функцію  $R(\rho)$  будемо шукати у вигляді  $R(\rho) = \rho^\mu$ . Підставляючи в рівняння (4.28) та скорочуючи на  $\rho^\mu$ , знайдемо:

$$n^2 = \mu^2 \text{ або } \mu = \pm n \ (n > 0).$$

Отже,  $R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$ , де  $C$  і  $D$  – постійні.

Для розв'язання поставленої задачі потрібно покласти  $R = C\rho^n$  ( $\mu = n$ ), оскільки, якщо  $D \neq 0$ , то функція  $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$  перетворюється в нескінченність при  $\rho = 0$  і не є гармонічною функцією у внутрішності круга.

Отже, частинні розв'язки такої задачі матимуть вигляд

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для } \rho \leq a.$$

Суми цих розв'язків

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

при достатньо хорошій збіжності також будуть гармонічними функціями.

Для визначення коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$  використаємо граничні умови

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \quad (4.29)$$

Вважаючи, що  $f$  задана як функція кута  $\varphi$ , розкладемо її у ряд Фур'є

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (4.30)$$

де  $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi$ ,  $\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Порівнюючи ряди (4.29) і (4.30), отримаємо:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Таким чином, ми формально отримали розв'язок першої внутрішньої задачі для круга у вигляді ряду

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (4.31)$$

Зауважимо, що для обґрунтування коректності постановки даної задачі (зокрема, для забезпечення можливості розкладу функції  $f$  у ряд Фур'є на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , рівномірної збіжності ряду (4.31), його двічі неперервної диференційовності) необхідно на задану функцію  $f$  накласти відповідні умови (див., напр., [2], [15], п. 3.2.1).

Легко бачити, що для відшукування розв'язку відповідної зовнішньої задачі потрібно покласти  $R = D\rho^{-n}$  ( $\mu = -n$ , оскільки розв'язок зовнішньої задачі повинен бути обмеженим на нескінченності). В результаті (аналогічно до 4.29–4.31) матимемо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (4.32)$$

### 4.3. Теорія потенціалів

Функція  $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ , яка представляє потенціал

поля одиничної маси (заряду), поміщеної в точці  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ , є розв'язком рівняння Лапласа, що залежить від параметрів  $\xi, \eta, \zeta$ . Інтеграли від цієї функції за параметрами називаються *потенціалами* і мають суттєве значення з точки зору безпосередніх застосувань у фізиці, а також і з точки розвитку методів розв'язання крайових задач.

#### 4.3.1. Об'ємний потенціал

Нехай у деякій точці  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$  розміщена маса  $m_0$ . За законом всесвітнього тяжіння на масу  $m$ , розміщену в точці  $M(x, y, z)$ , діє сила притягання

$$F = -\gamma \frac{mm_0}{R^2} r, \quad (4.33)$$

де  $r = \overline{RM}/R$  – одиничний вектор у напрямку  $\overline{M_0M}$  ( $R = \overline{M_0M}$ ), а  $\gamma$  – гравітаційна постійна. Вибираючи систему одиниць так, щоб  $\gamma=1$ , і поклавши  $m=1$ , отримаємо:

$$F = -\frac{m_0}{R^2} r.$$

Проекції цієї сили на координатні осі будуть:

$$\begin{cases} X = F \cos \alpha = -\frac{m_0}{R^3} (x - \xi), \\ Y = F \cos \beta = -\frac{m_0}{R^3} (y - \eta), \\ Z = F \cos \gamma = -\frac{m_0}{R^3} (z - \zeta), \end{cases} \quad (4.34)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути, утворені вектором  $F$  з координатними осями.

Введемо функцію  $u$ , що називається *потенціалом силового поля* і визначається рівністю

$$F = \text{grad } u \text{ або } X = \frac{\partial u}{\partial x}, Y = \frac{\partial u}{\partial y}, Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В нашому випадку  $u = \frac{m_0}{R}$ .

Потенціал поля  $n$  матеріальних точок внаслідок суперпозиції силових полів буде виражатись формулою

$$u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i}.$$

У випадку неперервно розподіленої маси для визначення потенціалу в точці  $M(x, y, z)$  деякого тіла  $T$  з густиною  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$  розіб'ємо це тіло на досить дрібні частинки  $\Delta\tau$ . Зробимо припущення, що дія елемента  $\Delta\tau$  еквівалентна дії його маси, зосередженої в деякій середній точці об'єму  $\Delta\tau$ . Тоді для компоненти сили, що діє на точку  $M$ , отримаємо вирази:

$$\Delta X = -\frac{\rho \Delta\tau}{R^3} (x - \xi), \text{ де } R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Інтегрування по всьому об'єму  $T$  дає компоненту повної сили притягання точки  $M$  тілом  $T$

$$X = -\iiint_T \rho \frac{(x - \xi)}{R^3} d\tau. \quad (4.35)$$

Потенціал у точці  $M$  буде визначатись формулою

$$u(M) = \iiint_T \rho \frac{1}{R} d\tau. \quad (4.36)$$

Зауважимо, що потенціал  $u(M)$  поза тілом  $T$  задовольняє рівняння Лапласа.

### 4.3.2. Логарифмічний потенціал

Розглянемо розподіл мас у просторі, що залежить лише від двох координат  $(x, y)$ . У будь-якій площині  $z = \text{const}$  характер розподілу потенціалу, очевидно, буде однаковим. Тому достатньо дослідити потенціал у точці  $(x, y)$ , яка лежить у площині  $z=0$ .

Визначимо потенціал однорідної нескінченної прямої  $L$ . Направимо вісь  $z$  уздовж цієї прямої. Нехай погонна густина (маса одиниці довжини) рівна  $\mu$ . Сила притягання елементом  $\Delta z$  точки  $P(x, 0)$  (рис. 4.1) і її складова по осі  $x$  рівні відповідно

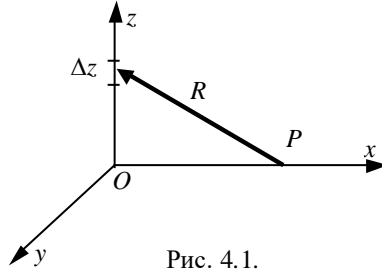


Рис. 4.1.

$$\Delta F = \frac{\mu \Delta z}{R^2} = \frac{\mu \Delta z}{(x^2 + z^2)}, \quad \Delta X = \Delta F \cos \alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}.$$

Звідси

$$X = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = -\frac{2\mu}{x} \left( \frac{z}{x} = \text{tg } \alpha \right).$$

Якщо  $P(x, y)$  – довільна точка, то сила притягання точки лінії  $L$  буде, очевидно, направлена вздовж  $\overrightarrow{OP}$  і дорівнює

$$F = -\frac{2\mu}{\rho}, \quad \text{де } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Потенціал цієї сили називається *логарифмічним потенціалом* і дорівнює

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}. \quad (4.37)$$

Обчислимо компоненти сили притягання точки  $P$  (рис. 4.2)

$$X = F \cos \alpha = -2\mu \frac{x}{\rho^2} \left( \cos \alpha = \frac{x}{\rho} \right),$$

$$Y = F \sin \alpha = -2\mu \frac{y}{\rho^2} \left( \sin \alpha = \frac{y}{\rho} \right).$$

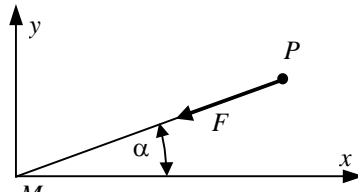


Рис. 4.2.

Якщо є декілька точок (нескінченних прямих з розподіленою

вздовж них масою), то в силу принципу суперпозиції силових полів потенціали додаватимуться.

У випадку області  $S$  з неперервно розподіленою густиною  $\mu(\xi, \eta)$  (рис. 4.3) компоненти сили притягання точки  $P$  визначатимуться співвідношеннями:

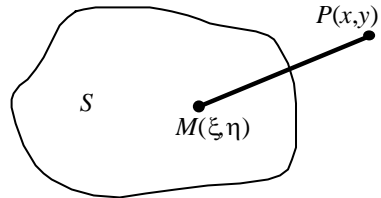


Рис. 4.3.

$$\begin{cases} X = -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta, \\ Y = -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} d\xi d\eta, \end{cases} \quad (4.38)$$

а потенціал буде рівний

$$V(x, y) = 2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta. \quad (4.39)$$

### 4.3.3. Невласні інтеграли

Із (4.38), (4.39) бачимо, що при  $(x, y) \in S$  відповідні підінтегральні функції перетворюються в нескінченність (а саме, при  $(\xi, \eta) = (x, y)$ ).

Такі інтеграли не можна визначити як границю інтегральної суми, оскільки така сума в даному випадку не має границі. Інтеграли від подібних функцій визначаються як інтеграли невластні.

Нехай в області  $T$  задана функція  $F(x, y, z)$ , що перетворюється в нескінченність у деякій точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Розглянемо визначений інтеграл по області  $T - K_\varepsilon$ , де  $K_\varepsilon$  – деякий окіл точки  $M_0$  діаметра, що не перевищує  $\varepsilon$ .

Якщо при довільному стягуванні області  $K_{\varepsilon_n}$  до точки  $M_0$  послідовність інтегралів

$$I_n = \iiint_{T - K_{\varepsilon_n}} F d\tau \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0)$$

має границю, що не залежить від вибору областей  $K_{\varepsilon_n}$ , то цю границю називають невластним інтегралом від функції  $F(x, y, z)$  по області  $T$ .

Розглянемо інтеграли виду



$$\iiint_T \frac{C}{R^\alpha} d\tau_M, \quad (4.40)$$

де  $C$  і  $\alpha > 0$  – деякі сталі,  $R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2}$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка області  $T$ . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що  $T \in$  куля радіуса  $R^*$  з центром в т.  $M_0$ . Візьмемо в якості області  $K_{\varepsilon_n}$  кулю радіуса  $\varepsilon_n$  з центром у точці  $M_0$  і шукатимемо границю послідовності інтегралів

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^\alpha} d\tau &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{\varepsilon_n}^{R^*} \frac{C}{r^{\alpha-2}} dr = 2\pi \cdot 2C \int_{\varepsilon_n}^{R^*} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \\ &= \begin{cases} 4\pi C \frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \Big|_{\varepsilon_n}^{R^*}, & \text{при } \alpha \neq 3, \\ 4\pi C \ln r \Big|_{\varepsilon_n}^{R^*}, & \text{при } \alpha = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Перейшовши до границі при  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , бачимо, що при  $\alpha < 3$  границя існує, а при  $\alpha \geq 3$  – не існує.

Можна показати, що якщо функція  $F(x, y, z)$  невід’ємна і існує границя  $I_n = \iiint_{T-K_{\varepsilon_n}} F d\tau$  ( $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ), де  $\bar{K}_{\varepsilon_n}$  – куля радіуса  $\varepsilon_n$  з центром у точці

$M_0$ , то існує границя інтегралів  $I$  і при довільному виборі послідовності областей  $K_{\varepsilon_n}$ , які стягуються до точки  $M_0$ , і значення цієї границі не залежить від форми області  $K_{\varepsilon_n}$ .

Таким чином, у випадку трьох незалежних змінних невластний інтеграл  $\iiint_T \frac{C}{R^\alpha} d\tau_M$  існує, якщо  $\alpha < 3$ , і не існує, якщо  $\alpha \geq 3$ .

Для іншого числа незалежних змінних критичне значення  $\alpha$ , що визначає границі збіжності інтегралів типу (4.40), дорівнює числу вимірів.

Наприклад,  $\iint_\Sigma \frac{C}{R^\alpha} d\sigma$  при  $\alpha < 2$  є збіжним, а при  $\alpha \geq 2$  – розбіжним.

Зупинимось на ознаках збіжності невластних інтегралів.

*Для збіжності невластного інтегралу*

$$\iiint_T F(x, y, z) dx dy dz \quad (4.41)$$

достатньо, щоб існувала така функція  $\bar{F}(x, y, z)$ , для якої невласний інтеграл по області  $T$  збігається, і щоб мала місце нерівність

$$|F(x, y, z)| < \bar{F}(x, y, z). \quad (4.42)$$

Якщо ж для деякої функції  $F(x, y, z)$  можна вказати таку додатну функцію  $\bar{F}(x, y, z)$ , що  $F(x, y, z) > \bar{F}$ , причому невласний інтеграл від  $\bar{F}$  по області  $T$  розбіжний, то невласний інтеграл (4.41) буде, очевидно, також розбіжний.

*Наслідок:* якщо для деякої функції  $\Phi(M(x, y, z), P(\xi, \eta, \zeta))$ , що перетворюється в нескінченність при  $P=M$ , має місце нерівність

$$|\Phi(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^\alpha}, \text{ де } \alpha = \text{const} < 3, \quad C = \text{const} < \infty,$$

то невласний інтеграл (для довільної області  $T$ , такої що  $M \in T$ )

$$\iiint_T \Phi(M, P) d\tau_P$$

є збіжним.

Оскільки підінтегральна функція невласних інтегралів не є неперервною, то важливим тут є встановлення критерію неперервності самих невласних інтегралів, які залежать від параметра.

Розглянемо невласні інтеграли

$$V(M) = \iiint_T \Phi(P, M) f(P) d\tau_P, \quad (4.43)$$

де  $\Phi(P, M)$  – функція, що перетворюється в нескінченність при співпадінні аргументів і неперервна за  $M$ , а  $f(P)$  – обмежена функція.

Інтеграл (4.43) називається рівномірно збіжним у точці  $M_0$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta(\varepsilon)$ , що має місце нерівність

$$\left| \iiint_{T_{\delta(\varepsilon)}} \Phi(P, M) f(P) d\tau_P \right| \leq \varepsilon$$

для будь-якої точки  $M$ , відстань від якої до точки  $M_0$  менше  $\delta(\varepsilon)$ , і для будь-якої області  $T_{\delta(\varepsilon)}$ , що містить точку  $M_0$  і діаметр якої  $d \leq \delta(\varepsilon)$ .

Можна довести, що рівномірно збіжний у точці  $M_0$  інтеграл  $V(M) = \iiint_T \Phi(P, M) f(P) d\tau_P$  є неперервною функцією в точці  $M_0$ . Ана-

логічні твердження справедливі не тільки для інтегралів по об'єму, але й для інтегралів по поверхнях та лініях.

Розглянемо потенціал

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P \quad (4.44)$$

і відповідні компоненти сили

$$\begin{cases} X(M) = -\iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (x-\xi) d\tau_P; \\ Y(M) = -\iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (y-\eta) d\tau_P; \\ Z(M) = -\iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (z-\zeta) d\tau_P; \end{cases} \quad (4.45)$$

в точках, що лежать всередині притягуючого тіла  $T$ . Невласні інтеграли (4.44) і (4.45) є збіжними, якщо густина  $\rho(M)$  обмежена ( $\rho(M) < C$ ) і інтегрована в  $T$ . Для потенціалу  $V(M)$  це очевидно, оскільки

$$\frac{|\rho|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha=1<3).$$

Для компонент сили притягання це впливає з нерівності

$$\frac{|\rho|}{R^2} \frac{|x-\xi|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha=2<3),$$

оскільки  $|x-\xi| < R$ .

Можна також показати, що інтеграли (4.44) і (4.45) є неперервними функціями.

#### 4.3.4. Перші та другі похідні об'ємного потенціалу

Функції, що стоять в (4.45) під знаком інтегралів є похідними за відповідними змінними від функції, що стоїть під знаком інтеграла

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P.$$

Якщо для функції  $V$  можливе диференціювання під знаком інтеграла, то

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (4.46)$$

тобто  $V$  є потенціалом поля, компоненти якого дорівнюють  $X, Y, Z$ .

Якщо точка  $M$  лежить поза областю  $T$ , то функція

$$\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_{MP}}$$

неперервна по обох аргументах  $M(x, y, z)$  і  $P(\xi, \eta, \zeta)$ . Отже, в цьому випадку диференціювання під знаком інтеграла  $V$  законне.

Похідні більш високого порядку можна також обчислити шляхом диференціювання під знаком інтеграла всюди поза  $T$ . Звідси випливає, що потенціал поза притягуючих мас задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta V = 0 \text{ поза } T.$$

Можна також довести, що обчислення похідних потенціалу  $V$  можна виконувати шляхом диференціювання під знаком інтеграла і в тому випадку, коли точка  $M$  лежить у внутрішності  $T$ . Зокрема, можна довести, що існують похідні  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$ , які відповідно дорівнюють  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

При знаходженні другої похідної об'ємного потенціалу, відповідний невластний інтеграл

$$\iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) d\tau_P = - \iiint_T \rho(P) \left( \frac{1}{R^3} - 3 \frac{(x-\xi)^2}{R^5} \right) d\tau \quad (4.47)$$

не збігається абсолютно для внутрішніх точок  $P$  тіла  $T$ . В цьому випадку мажоранта для підінтегральної функції має вигляд  $\frac{C}{R^\alpha}$  при  $\alpha=3$ .

Можна показати, що

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial x^2} = \iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau_P - \frac{4\pi}{3} \rho(M_0), \quad (4.48)$$

де  $\iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau_P = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_{T-T_1} \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau_P$ ,  $T_1 = K_\delta(M_0)$  – куля радіуса  $\delta$  з центром в точці  $M_0$ , всередині якої функція  $\rho$  диференційовна.

Останній інтеграл одержаний при спеціальному способі граничного переходу, коли області, що стягуються до т.  $M_0$ , є кулями. Тобто інтеграл в (4.48) слід розглядати як умовно збіжний.

Аналізуючи формулу (4.48), можемо зробити висновок, що знаходження других похідних потенціалу за допомогою формального диференціювання під знаком інтеграла привело б до неправильного результату.

Для похідних  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  і  $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  можна записати аналогічні вирази. Підс-

тавляючи значення всіх трьох похідних у вираз для оператора Лапласа,

знайдемо:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \iiint_T \rho(P) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R} \right) \right) d\tau_P - \quad (4.49)$$

$$-4\pi\rho(M_0) = -4\pi\rho(M_0),$$

оскільки  $\frac{1}{R}$  – гармонічна функція.

Тобто, об'ємний потенціал задовольняє рівняння Пуассона  $\Delta V = -4\pi\rho$  у внутрішності  $T$ , і рівняння Лапласа  $\Delta V = 0$  поза  $T$ .

### 4.3.5. Поверхневі потенціали

Згідно формули (4.20)

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MP}} \right) \right) d\sigma_P,$$

довільна гармонічна функція може бути представлена з допомогою інтегралів, які є поверхневими потенціалами.

Розглянемо поле, утворене розподіленою на поверхні масою, та визначимо потенціал цього поля. Поверхневою густиною  $\mu(P)$  в точці  $P$  поверхні  $\Sigma$  називають границю відношення маси, що знаходиться на деякому елементі  $d\sigma$  поверхні  $\Sigma$ , що містить точку  $P$ , до його площі при стягуванні  $d\sigma$  до точки  $P$ . Потенціал цих мас представляється поверхневим інтегралом

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{r_{MP}} d\sigma_P \quad (4.50)$$

і називається *потенціалом простого шару*.

Іншим типом поверхневого потенціалу є потенціал подвійного шару. Для його визначення розглянемо диполь утворений двома масами  $-m$  і  $+m$ , розміщеними в точках  $P_1$  і  $P_2$  на відстані  $\Delta l$  (рис. 4.4). Добуток  $m \cdot \Delta l = N$  називають *моментом диполя*. Потенціал диполя в деякій точці  $M(x, y, z)$  дорівнює

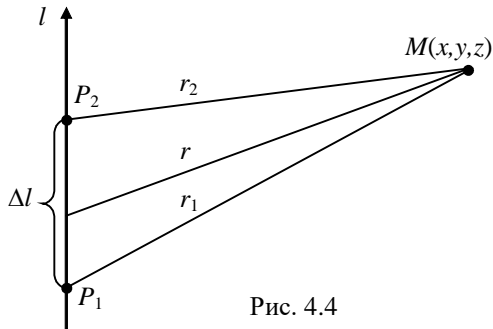


Рис. 4.4

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = N \cdot \frac{1}{\Delta l} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

де  $r_1$  і  $r_2$  – відстань від точки  $M$  до т.  $P_1$  і  $P_2$ . Якщо  $\Delta l$  мале по відношенню з відстанню до точки  $M$  ( $\Delta l/r_1 \ll 1$ ), то можемо записати

$$V = N \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{r} \right), \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

де похідна береться у напрямку від відштовхуючої маси до притягуючої і  $r$  – відстань від точки  $M(x, y, z)$  до середньої точки  $P(\xi, \eta, \zeta)$  відрізка  $[P_1 P_2]$  довжини  $\Delta l$ .

Похідна за напрямком  $l$  дорівнює

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\cos \varphi}{r^2},$$

де вектор  $r$  направлений від диполя до фіксованої точки  $M$ , а  $\varphi$  – кут між векторами  $l$  і  $r$ . Таким чином, потенціал диполя дорівнюватиме

$$V(M) = N \frac{\cos \varphi}{r^2} \quad (4.51)$$

де  $N$  – момент диполя.

Нехай на двох поверхнях  $\Sigma$  і  $\Sigma'$  (рис. 4.5), що знаходяться одна від одної на малій відстані  $\delta$ , маси розподілені таким чином, що маса кожного елемента поверхні  $\Sigma'$  дорівнює по величині і протилежна за знаком масі відповідного елемента поверхні  $\Sigma$ . Позначимо через  $n$  спільну нормаль до поверхні  $\Sigma$  і  $\Sigma'$  направлену від відштовхуючої маси до притягуючої. Переходячи до границі при  $\delta \rightarrow 0$ , одержимо подвійний шар як сукупність двох простих шарів зі взаємно протилежними густинами, що знаходяться один від одного на малій відстані. Якщо  $\nu$  поверхнева густина моменту, то момент елемента поверхні  $d\sigma_P$  буде дорівнювати

$$dn = \nu d\sigma_P.$$

Для потенціалу елемента  $d\sigma$  в точці  $M(x, y, z)$  будемо мати:

$$\nu \frac{d}{dn_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \nu(P) \frac{\cos \varphi_1}{R_{MP}^2} d\sigma_P,$$

$$\text{де } \varphi_1 = \widehat{(n, PM)}.$$

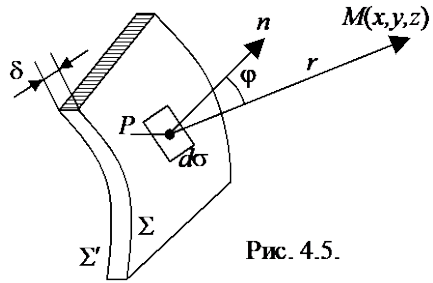


Рис. 4.5.

Назвемо *потенціалом подвійного шару* інтеграл

$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P . \quad (4.52)$$

Це визначення, очевидно, відповідає такому випадку, коли зовнішня сторона поверхні є відштовхуючою, а внутрішня – притягуючою.

Очевидно, що

$$W = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P ,$$

де  $\varphi$  – кут між внутрішньою нормаллю і напрямком з точки поверхні  $P$  на фіксовану точку  $M$ . Якщо поверхня незамкнена, то потрібно її рахувати двома сторонами, оскільки потенціал подвійного шару визначається тільки для таких поверхонь.

Потенціали простого і подвійного шарів у випадку двох незалежних змінних мають вигляд

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} ds , \quad (4.53)$$

$$W = - \int_C v(P) \frac{d}{dn_P} \left( \ln \frac{1}{R_{MP}} \right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} v(P) ds , \quad (4.54)$$

де  $C$  – деяка крива,  $\mu$  – лінійна густина простого шару,  $v$  – густина моменту лінійного подвійного шару,  $\varphi$  – кут між внутрішньою нормаллю до лінії  $C$  і напрямком на фіксовану точку.

Якщо точка спостереження  $M(x, y, z)$  знаходиться поза поверхнею (поза притягуючими масами), то підінтегральні функції і їх похідні по  $x, y, z$  будь-якого порядку у формулах потенціалів простого і подвійного шарів неперервні за змінними  $x, y, z$ . Тому в точках, що лежать поза поверхнею  $\Sigma$ , похідні поверхневих потенціалів можна обчислювати шляхом диференціювання під знаком інтегралу. Звідси, в силу принципу суперпозиції випливає, що поверхневі потенціали задовольняють рівняння Лапласа всюди поза притягуючими масами.

## Рекомендована література

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 396с.
2. *Кошляков М.С. и другие.* Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1970. – 712с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1981. – 512с.
4. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 1993. – 248с.
5. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики.– М.: Высш. шк., 1964. – 559с.
6. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики.–М.: Наука, 1979. – 392с.
7. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Гостехиздат, 1953. – 360с.
8. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1964. – 288с.
9. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными.– М.: Мир, 1985. – 205с.
10. *Арсенин В.Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции.– М.: Наука, 1966. – 368с.
11. *Ладженская О.А.* Краевые задачи математической физики.–М.: Наука, 1973. – 407с.
12. *Михлин С.Г.* Курс математической физики.– М.: Наука, 1968. – 575с.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.– М.: Мир, 1964. – 830с.
14. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики.–М.: Наука, 1966. – 444с.
15. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.–М.: Наука, 1964. – 204с.
16. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики.–М.: Наука, 1976. – 296с.
17. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.– М.: Наука, 1976. – 391с.
18. *Гончаренко В.М.* Основы теории уравнений с частными производными.– К.: Вища школа, 1985. – 311с.
19. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных.– М.: Высшая школа, 1977. – 431с.
20. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 448с.
21. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: Навч. посібник /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 455с.



## ЧАСТИНА 2

# ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

## 1. Постановка крайових задач математичної фізики

### 1.1. Рівняння теплопровідності

#### Питання для повторення

1. Наведіть приклади коректно поставлених крайових задач математичної фізики?
2. В чому полягає фізичний зміст задачі Коші для рівняння теплопровідності?

#### Методичні вказівки

Поставити задачу математичної фізики, яка описує фізичний процес, що розглядається, означає, по перше, вибрати зручну систему координат в залежності від умов заданої фізичної задачі, по друге, вибрати функцію (величину), яка характеризує б заданий фізичний процес, по третє, вибрати модель фізичного явища (тобто реальний фізичний процес замінити деякими ідеальними процесами, але так, щоб зберегти основні властивості реального процесу), по четверте, в рамках вибраної моделі, використовуючи фізичні закони, побудувати диференціальне рівняння для функції, яка характеризує даний процес, по п'яте, встановити крайові та початкові умови для шуканої функції, тобто записати значення фізичних характеристик в початковий момент часу, а також умови процесу на границі області, що розглядається. Якщо процес розглядається в необмеженій області (у всьому просторі), то умови поведінки процесу записуються в нескінченності.

#### Завдання 1.

Поставити крайову задачу знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура є сталою. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел. Розглянути випадки, коли:

- а) на кінцях стержня підтримується задана температура;
- б) на кінці стержня зовні подається заданий тепловий потік;

в) на кінцях стержня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого задана.

### Розв'язок.

Будемо вважати, що стержень має сталий поперечний переріз  $\sigma = \text{const}$ . Оскільки поперечні розміри стержня значно менші від його довжини, приймемо гіпотезу (модель), що поперечні перерізи стержня є ізотермічними поверхнями [1]. Напрявляючи вісь координат  $Ox$  вздовж осі стержня, можемо вважати (у рамках обраної моделі), що температура в стержні буде залежати лише від однієї просторової координати  $x$  і часу  $t$ . При цьому в даній задачі  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . В якості функції, що характеризує процес, виберемо температуру стержня  $u = u(x, t)$ . Складемо для неї диференціальне рівняння. З цією метою запишемо рівняння теплового балансу (закон збереження теплової енергії) для елемента стержня  $(x, x + \Delta x)$ . Нехай  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності стержня. Використовуючи закон Фур'є (закон внутрішньої теплопровідності у твердих тілах)  $q = -k\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$  для потоку тепла  $q$  через площадку  $\sigma$  у напрямку нормалі  $\vec{n}$  до неї, запишемо кількість тепла, що надходить в одиницю часу у виділений елемент стержня через перерізи  $x$  і  $x + \Delta x$ :

$$q_1 = -k\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x+\Delta x} - k\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_x = k\sigma \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x+\theta\Delta x} \cdot \Delta x,$$

де  $0 < \theta < 1$ . Тут ми скористалися теоремою Лагранжа про скінченні прирости. Крім того, у стержні виділяється тепло від неперервно розподілених у ньому джерел, густину яких позначимо через  $f(x, t)$ . За одиницю часу у виділений елемент стержня від цих джерел надійде кількість тепла  $q_2 = f(x, t)\sigma\Delta x$ . Тепло, що надійшло в стержень, йде на зміну температури у часі. За час  $\Delta t$  температура в точці  $x$  зміниться на величину

$$\Delta_t u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t),$$

а за одиницю часу – на величину

$$\frac{\Delta_t u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t).$$

На це буде потрібна кількість тепла, яка дорівнює

$$q_3 = c\rho\sigma\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right).$$

Тут  $\rho$  – густина стержня. Прирівнюючи  $q_1 + q_2 = q_3$  одержуємо

$$k\sigma \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x+\theta\Delta x} \Delta x + f(x, t)\Delta x\sigma = c\rho\sigma\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right).$$

Поділимо отриману рівність на  $\sigma\Delta x$  і перейдемо до границі при

$\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . В результаті остаточно одержимо диференціальне рівняння для функції  $u$  у точці  $(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c\rho} f(x, t), \quad (1.1)$$

де  $a = \sqrt{k/c\rho}$ .

Отримане рівняння називають *рівнянням теплопровідності* (або *рівнянням Фур'є*) для стержня. Його потрібно розглядати при  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . Початкова умова матиме вигляд:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.2)$$

Тут  $\varphi(x)$  – відома (задана) функція.

Сформулюємо крайові умови у рамках прийнятої моделі (при  $x=0$  і  $x=l$ ) для перерахованих в умові задачі випадків:

а) кінці стержня підтримуються при заданій температурі, тобто

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0. \quad (1.3a)$$

Функції  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відомі;

б) використовуючи закон Фур'є, можемо відразу записати співвідношення для значень теплових потоків, що подаються у стержень через перерізи  $x=0$  та  $x=l$ :

$$q_1 = -k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad q_2 = k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad t > 0.$$

Звідси матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{q_1(t)}{k\sigma}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{q_2(t)}{k\sigma}, \quad t > 0, \quad (1.3b)$$

де  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  – відомі функції.

Якщо  $q_1(t) = q_2(t) = 0$ , то отримаємо крайову умову у випадку теплової ізоляції кінців стержня;

в) у цьому випадку скористаємось законом Ньютона (законом конвективного теплообміну між поверхнею твердого тіла і навколишнім рідким або газоподібним середовищем), згідно якого кількість тепла  $q$ , що перетікає за одиницю часу через площадку  $\sigma$  поверхні тіла у навколишнє середовище дорівнює  $q = -\sigma h(u - u_0)$ . Тут  $u$  – температура поверхні тіла,  $u_0$  – температура навколишнього середовища,  $h$  – коефіцієнт теплообміну (або коефіцієнт зовнішньої теплопровідності). Тоді на лівому кінці будемо мати:

$$k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h\sigma(u - u_0) \Big|_{x=0},$$

а на правому:

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = h\sigma(u - u_0) \Big|_{x=l}.$$

З цих співвідношень і випливають крайові умови

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{k} u \right) \Big|_{x=0} = \frac{h}{k} v_1(t), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{k} u \right) \Big|_{x=l} = \frac{h}{k} v_2(t), \quad t > 0. \quad (1.3\text{в})$$

Тут  $v_1(t)$  і  $v_2(t)$  – значення температури навколишнього середовища біля кінців стержня, що вважаються відомими.

**Зуваження.** У результаті виконання завдання 1 нами поставлено не одну, а декілька різних задач. Перша задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння (1.1) в області  $0 < x < l$  при  $t > 0$  та заданих початковій (1.2) та крайових умов (1.3а). Інші відрізняються крайовими умовами, тобто наступними задачами будуть: (1.1), (1.2), (1.3б) та (1.1), (1.2), (1.3в). Іноді на одному кінці стержня можуть бути задані умови виду (1.3а), а на іншому – виду (1.3б) чи (1.3в).

## 1.2. Хвильове рівняння

### Питання для повторення

1. Яке рівняння називається хвильовим? Які фізичні процеси воно описує?
2. Який фізичний зміст мають початкові умови для хвильового рівняння?

### Завдання 1.

Пружний прямокутний стержень довжини  $l$  виведений зі стану спокою тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зміщення та швидкості. Крім того, на стержень у повздовжньому напрямку діє зовнішня сила з густиною  $f(x, t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу. Розглянути випадки, коли: а) кінці стержня закріплені жорстко; б) кінці стержня рухаються у повздовжньому напрямку за заданим законом; в) один кінець стержня закріплений жорстко, а до іншого прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ ,  $t > 0$ ; г) кінці стержня закріплені пружно, тобто на кожен з кінців з боку кріплення діє повздовжня сила, яка пропорційна зміщенню і направлена протилежно зміщенню.

### Розв'язок.

Як і раніше, направимо вісь  $Ox$  вздовж стержня та помістимо початок координат в один з кінців стержня (наприклад, в лівий), тобто  $0 < x < l$ .

Приймаємо гіпотезу (модель), яка полягає в тому, що поперечні перерізи увесь час залишаються плоскими (так звані “малі коливання”, коли деформацією поперечних перерізів нехтуємо). Позначимо через  $\rho$  – густину,  $E$  – модуль Юнга матеріалу стержня.

В якості функції, що характеризуватиме повздовжні коливання стержня, виберемо  $u(x,t)$  – величину зміщення (відхилення від положення рівноваги) поперечного перерізу стержня з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ . Розглянемо деякий елемент стержня  $[x, x + \Delta x]$ . Підрахуємо масу  $m = \rho \sigma \Delta x$ , яка зосереджена в точці  $x$  та запишемо закон руху виділеного елемента (другий закон Ньютона):

$$F = ma.$$

Сила  $F$  складається із повздовжніх зовнішніх сил густиною  $f(x,t)$  та внутрішніх сил пружності, які визначаються за законом Гука:

$$T = E\sigma\varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – відносне видовження. Знайдемо значення  $\varepsilon$ . Стержень, довжина якого в початковий момент часу  $l_0 = \Delta x$ , після початку коливань у момент часу  $t > 0$  має довжину  $l_1 = u(x + \Delta x, t) - u(x, t) + \Delta x$ , тому

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\theta\Delta x}.$$

Спрямувавши  $\Delta x \rightarrow 0$ , одержимо  $\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Тому згідно із законом

Гука маємо:

$$T = -E\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + E\sigma \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} = E\sigma \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x+\theta\Delta x} \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Запишемо тепер закон руху елемента стержня  $\Delta x$ . З огляду на те,

що прискорення  $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , можемо записати

$$f(x,t)\sigma\rho\Delta x + E\sigma \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x+\theta\Delta x} \Delta x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho\sigma\Delta x.$$

Поділивши останній вираз на  $\sigma\Delta x$  та спрямувавши після цього  $\Delta x$  до нуля, одержимо рівняння в для точки  $(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

де  $a^2 = \frac{E}{\rho} > 0$ .

Згідно з умовою задачі, у початковий момент часу нам відомі початкові зміщення  $u(x,0)=\varphi_0$ ,  $0 \leq x \leq l$  та початкові швидкості

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \text{ Запишемо тепер крайові умови для перерахованих}$$

вище випадків:

а)  $u(0,t)=u(l,t)=0$ ,  $t \geq 0$ , оскільки кінці стержня  $x=0$  та  $x=l$  закріплені жорстко;

а')  $u(0,t)=\mu_1(t)$ ,  $u(l,t)=\mu_2(t)$ ,  $t \geq 0$ , де  $\mu_1$  та  $\mu_2$  – задані функції;

б) кінець  $x=0$  закріплений жорстко, отже  $u(0,t)=0$ ,  $t \geq 0$ . До кінця  $x=l$  прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ . Тоді для граничного елемента  $[l-\Delta x, l]$ , згідно з другим законом Ньютона, будемо мати:

$$\rho \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = F(t) - E \sigma \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{l-\Delta x},$$

звідки при  $\Delta x \rightarrow 0$  остаточно одержимо крайову умову

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{1}{E \sigma} F(t), \quad t > 0;$$

в) на кінець  $x=0$  діє повздовжня сила  $-ku(0,t)$ , а з правого боку на елемент  $[0, \Delta x]$  діє сила пружності  $E \sigma \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\Delta x}$ , тоді згідно з другим законом

Ньютона будемо мати:

$$\rho \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = E \sigma \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} - ku(0, t).$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  одержимо крайову умову на кінці  $x=0$ :

$$0 = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \alpha u(0, t), \quad t > 0, \quad \alpha = \frac{k}{E \sigma}.$$

$$\text{Аналогічно на кінці } x=l: \sigma \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -E \sigma \frac{\partial u(l-\Delta x, t)}{\partial x} - ku(x, t) \Big|_{x=l},$$

$$\text{або при } \Delta x \rightarrow 0: 0 = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} + \alpha u(l, t), \quad t > 0, \quad \alpha = \frac{k}{E \sigma}.$$

## **Завдання 2.**

Сформулювати крайову задачу про повздовжні коливання тонкого стержня змінного перерізу, припустивши, що його поперечні перерізи увесь час залишаються плоскими. При цьому один кінець стержня закріплений, а інший розтягнений силою  $F$ , дія якої у початковий момент часу припиняється. Розглянути випадок кінцевого стержня.

**Розв'язок.**

Розташуємо стержень уздовж осі  $Ox$ . Тоді в якості величини, яка буде характеризувати процес, вибираємо значення зміщення  $u(x, t)$  перерізу  $x$  в момент часу  $t$  [1,2]. Поперечний переріз стержня є відомою функцією  $\sigma(x)$ . Оскільки стержень тонкий, то масовими силами можна знехтувати. Розглянемо деякий елемент стержня  $[x, x + \Delta x]$ . Приймаючи до уваги закон Гука, матимемо:

$$F_1 = -E\sigma(x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + E\sigma(x + \Delta x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x + \Delta x}.$$

Сили інерції рівні:

$$F_2 = -ma = - \int_x^{x + \Delta x} \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = -\rho \sigma(x + \theta \Delta x) \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x + \theta \Delta x} \cdot \Delta x,$$

де  $0 < \theta < 1$ .

Тоді закон руху запишеться:

$$\left( E\sigma(x + \Delta x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x + \Delta x} - \delta(x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right) - \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u(x + \theta \cdot \Delta x)}{\partial t^2} \Delta x = 0$$

або 
$$E \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x + \tilde{\theta} \Delta x} \cdot \Delta x = \rho \sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x + \theta \Delta x} \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \tilde{\theta} < 1.$$

Поділивши на  $\Delta x$  та перейшовши до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  в останній рівності, одержимо рівняння:

$$\frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

У випадку кінцевого стержня  $\sigma(x) = \sigma(0) \frac{(l-x)^2}{l^2}$ , останнє рівняння

приймає вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2}{l-x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Нехай кінець  $x=0$  стержня закріплений, тоді  $u(0, t) = 0$ . Для другого кінця  $x=l$ , який в початковий момент часу розтягнений силою  $F$ , згідно з законом Гука матимемо:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{l=0} = \frac{F}{E\sigma} \quad \text{або} \quad u(x, 0) = \frac{F}{E\sigma} x.$$

Таким чином, початковими умовами будуть:  $u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$

Крайові умови мають вигляд:  $u(0,t)=0$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$  (оскільки дія сили при  $t > 0$  припиняється).

### Завдання 3.

Сформулювати крайову задачу для поперечного коливання важкої струни, якщо вона обертається з кутовою швидкістю  $\omega = const$  відносно вертикального положення рівноваги. Верхній кінець струни жорстко закріплений, а нижній вільний.

**Розв'язок.** Розмістимо вісь  $Ox$  вздовж струни у положенні рівноваги, причому початок осі помістимо у жорстко закріпленому кінці струни. Нехай  $u(x,t)$  – поперечне відхилення точок струни від положення рівноваги. Вважатимемо струну однорідною, а коливання – малими. Виділимо елемент струни  $\Delta x$  з перерізами  $x$  та  $x+\Delta x$ . Оскільки коливання малі (тобто  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ , так що можемо знехтувати квадратом цієї величини у по-

рівнянні з її першою степенню), то  $\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2} dx \approx \Delta x$ , тобто ви-

довженням струни у процесі коливань також можемо знехтувати. Звідси, враховуючи закон Гука, впливає, що величина натягу  $T$  в кожній точці струни не змінюється з часом. У даному випадку рух струни буде складеним. Коливання струни відносно осі буде відносним рухом, обертання – переносним. Складемо для елемента струни, що розглядається, диференціальне рівняння динаміки відносного руху

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F + S_l + S_c.$$

Тут  $F$  – рівнодійна сил натягу, які виникають внаслідок протидії вазі струни:

$$T_x = -g\rho(l-x), \quad T_{x+\Delta x} = g\rho(l-x-\Delta x),$$

де  $g$  – прискорення сили тяжіння. Проекція на вісь  $Ou$  рівнодійної цих сил буде дорівнювати:

$$(l-(x+\Delta x))g\rho \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - (l-x)g\rho \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = g\rho(l-x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\theta\Delta x} \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тут нами враховано, що  $\sin \alpha(x) = \frac{tg \alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$ , де  $\alpha(x)$

– кут між дотичною в точці з абсцисою  $x$  до струни у момент часу  $t$  і по-



зитивним напрямком осі  $Ox$ .

Відцентрова сила  $S_l$  напрямлена вздовж осі  $Ou$  і дорівнює  $S_l = \rho \omega^2 l \Delta x$ . Проекція сил Коріоліса  $S_c$  на вісь  $Ou$  дорівнює нулю. Таким чином, одержимо рівність:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = g \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( (l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\theta \Delta x} \cdot \Delta x + \rho \omega^2 u \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поділивши її на  $\rho \Delta x$  і переходячи до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , одержимо рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( (l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Початкові умови:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $0 < x < l$ . Функції

$f(x)$  і  $\varphi(x)$  задані. Крайові умови: верхній кінець  $x=0$  жорстко закріплений, тобто  $u(0, t) = 0$ ; нижній кінець  $x=l$  вільний, тобто  $u(l, t)$  – обмежена величина.

**Зауваження.** Якщо початок координат помістити у вільний кінець, то рівняння прийме вигляд

$$g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

### 1.3. Рівняння стаціонарної теплопровідності та електростатики

#### Питання для повторення

1. Яке рівняння описує стаціонарне теплове поле в заданому об'ємі?
2. Записати крайові умови першого, другого і третього роду та дати їх фізичну інтерпретацію.

#### Завдання 1.

Сформулювати крайову задачу про визначення стаціонарного розподілу температури твердого тіла, що має форму обмеженого циліндра, якщо до його нижньої основи підведений постійний тепловий потік  $q$ , бічна поверхня теплоізолювана, а верхня основа підтримується при заданій температурі.

#### Розв'язок.

Оскільки задане тіло має форму циліндра, то для зручності виберемо циліндричну систему координат:  $\rho, \varphi, z$ . Тоді задане тіло в обраній сис-

темі координат співпадатиме з областю  $\Omega = \{(\rho, \varphi, z): 0 \leq \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < z < h\}$ . Тут  $h$  – висота,  $a$  – радіус основи циліндра. Таким чином, стаціонарна температура точок тіла  $\Omega$ , буде описуватись функцією  $u = u(\rho, \varphi, z)$ , яка задовольнятиме в області  $\Omega$  рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$ . При цьому оператор Лапласа  $\Delta$  у циліндричній системі координат має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}.$$

Крайовими умовами будуть:

– на нижній основі:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = q = \text{const}, \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

– на бічній поверхні:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0, \quad 0 < z < h, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

– на верхній основі:

$$u(\rho, \varphi, h) = f(\rho, \varphi), \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

де  $f(\rho, \varphi)$  – відома функція своїх аргументів. Крім того, координата  $\varphi$  задається неоднозначно, а тому на шукану функцію  $u$  варто накласти додаткову умову періодичності за змінною  $\varphi$ , тобто

$$u(\rho, \varphi, z) = u(\rho, \varphi + 2\pi, z).$$

При  $\rho = 0$  рівняння Лапласа має особливість, яка приводить до появи необмежених при  $\rho = 0$  розв'язків рівняння Лапласа. Оскільки точки, у яких  $\rho = 0$ , належать області, яка розглядається, то розв'язок тут не може бути необмеженим (що впливає з фізичної постановки задачі), а тому на шуканий розв'язок необхідно також накласти умову обмеженості при  $\rho = 0$ :

$$|u|_{\rho=0} < M < \infty.$$

### **Завдання 2.**

Виходячи з системи рівнянь Максвелла, показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, яка пропорційна об'ємній густині зарядів. Дати електростатичну інтерпретацію нульових крайових умов першого і другого роду.

### **Розв'язок.**

Запишемо рівняння Максвелла [2] для електромагнітного поля в однорідному ізотропному середовищі:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{H\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (1.7)$$

Тут  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  – вектори відповідно електричних і магнітних полів,  $\varepsilon$  – діелектрична стала,  $\mu$  – магнітна проникність,  $c$  – швидкість світла,  $\rho$  і  $j$  – густина зарядів і струму, які є джерелами полів. У випадку електростатичного поля  $\vec{E}$  не залежить від часу,  $j=0$ , тоді з рівняння (1.4) одержимо:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

тобто  $\vec{E}$  – потенціальний вектор:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U,$$

де  $U = U(M)$  потенціал поля в точці  $M$ . Підставимо  $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$  у рівняння (1.6) і врахуємо, що  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$  (оператор Лапласа). В результаті одержимо рівняння Пуассона:

$$\Delta U = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

де права частина представляє собою константу  $4\pi/\varepsilon$ , помножену на густина зарядів  $\rho$ .

Крайові умови першого роду означають, що на межі заданий потенціал  $U$ . Якщо маємо провідні поверхні, то на них тангенціальна складова електричного поля дорівнює нулю:  $E_s = -\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ . Звідси одержимо, що на поверхні провідника потенціал має бути сталим:  $U = \text{const}$ . Якщо провідник заземлений, то потенціал  $U = 0$ . Фізичний зміст однорідної крайової умови другого роду на  $\Sigma$  ( $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$ ,  $\vec{n}$  – нормаль) стає зрозумілим, якщо записати закон Ома:  $j_n = \sigma E_n$ . Тут  $\sigma$  – провідність середовища (величина обернено пропорційна опору),  $j_n$  – струм провідності у напрямку  $\vec{n}$ . Оскільки для потенційного вектора  $E_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ , то маємо на поверхні  $\Sigma$ :

$j_n = \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , тобто поверхня є ізолятором (діелектриком).

#### 1.4. Завдання для самостійної роботи

1. Сформулювати крайову задачу про охолодження тонкого кільця, на поверхні якого проходить конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця знехтувати.

2. На бічній поверхні стержня проходить конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого є заданою функцією часу. Нехтуючи деформацією ізотермічних поверхонь, сформулювати крайову задачу про визначення температури в стержні, якщо початкова температура є довільною функцією  $x$ . Розглянути випадки, коли

а) кінці стержня підтримуються при заданій температурі;

б) на кінці стержня подається зовні тепловий потік;

в) на кінцях стержня проходить конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого відома.

3. Вивести рівняння для температури тонкого дроту, що нагрівається постійним електричним струмом, якщо на його поверхні проходить конвективний теплообмін за законом Ньютона з оточуючим повітрям, температура якого відома. Сформулювати крайову задачу для визначення температури в цьому дроті, якщо його кінці зафіксовані в масивні клеми з заданою теплоємністю і дуже великою теплопровідністю.

4. Вивести рівняння дифузії зважених частинок з урахуванням осідання, вважаючи, що швидкість частинок, викликана силою тяжіння, є постійною, а концентрація частинок залежить тільки від однієї геометричної координати  $z$  (висоти) і часу  $t$ . Записати крайові умови, що відповідають непроникній перегородці.

5. *Потенціальний рух нестисненої рідини.* Показати, що потенціал швидкості стаціонарного потоку нестисненої рідини задовольняє рівняння Лапласа. Записати крайову умову на поверхні твердого тіла, що не рухається або рухається з деякою заданою швидкістю.

6. Сформулювати крайову задачу про визначення стаціонарного розподілу температури плоскої кругової пластинки, якщо температура на контурі відома, а на пластинці розподілені джерела тепла сталої густини.

7. Поставити крайову задачу про визначення електростатичного поля в середині куба з ребром  $l$ , якщо його бічні грані заземлені, верхня основа ізольована і потенціал нижньої основи відомий.

8. Пружний прямолінійний стержень виведений зі стану спокою тим, що його поперечним перерізам у момент часу  $t=0$  надані малі по-

вздовжні зміщення і швидкості. Вважаючи, що поперечні перерізи стержня весь час залишаються плоскими, сформулювати крайову задачу для визначення зміщень поперечних перерізів стержня при  $t > 0$ . Розглянути випадки, коли кінці стержня:

- а) закріплені жорстко,
- б) рухаються в повздовжньому напрямку за заданим законом,
- в) вільні,
- г) закріплені пружно.

9. Поміщений в циліндричній трубці ідеальний газ здійснює повздовжні малі коливання. Плоскі поперечні перерізи, що складаються з частинок газу, не деформуються, і всі частини газу рухаються паралельно осі циліндра. Сформулювати крайову задачу для визначення зміщення  $u$  частинок газу у випадках, коли кінці трубки:

- а) закриті жорсткими непроникними перегородками;
- б) відкриті;

в) закриті поршнями з нескінченно малою масою, що насажені на пружини з коефіцієнтами жорсткості  $\nu$  і які ковзають без тертя всередині трубки.

10. Сформулювати крайову задачу про малі поперечні коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості, вважаючи, що кінці струни закріплені нерухомо.

11. Сформулювати крайову задачу про малі поперечні коливання прямокутної мембрани зі сторонами  $a$  і  $b$ , якщо дві її протилежні сторони закріплені жорстко, а дві інші вільні. У момент часу  $t=0$  до поверхні мембрани прикладено рівномірно розподілене навантаження  $f = P_0 \sin \omega t$ .

## 2. Класифікація рівнянь з частинними похідними другого порядку

### 2.1. Тип і канонічний вигляд рівняння

#### Питання для повторення

1. Які типи рівнянь з частинними похідними другого порядку ви знаєте?
2. Як проводиться класифікація (в точці та області) рівнянь з частинними похідними другого порядку?
3. Написати канонічний вигляд рівняння еліптичного, гіперболічного і параболічного типів.
4. Як привести до канонічного вигляду рівняння з частинними похідними другого порядку, якщо невідома функція залежить від  $m$  змінних ( $m \geq 3$ ) ?
5. Як привести до канонічного вигляду рівняння з частинними похідними другого порядку, якщо невідома функція залежить від двох змінних ( $m = 2$ ) ?

#### Методичні вказівки

Привести до канонічного вигляду і встановити тип рівняння

$$\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right), \quad a_{jk} = a_{kj}, \quad (2.1)$$

у випадку  $m \geq 3$  можна в деякій фіксованій точці  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ . Для цього [1,2,3] записують квадратичну форму  $\Phi = \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x^0) P_j P_k$  і за допо-

могою перетворення  $P_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} q_i$  приводимо її до канонічного вигляду

$\Phi = \sum_{k=1}^N \pm q_k^2$ ,  $N \leq m$ . Якщо  $N = m$  і всі коефіцієнти мають той самий знак,

то рівняння (2.1) у точці  $x^0$  належить еліптичному типу; якщо  $N = m - 1$  і всі коефіцієнти однакового знаку, то – параболічному; якщо  $N = m$  і один з коефіцієнтів має знак протилежний знаку інших, то – гіперболічному. При цьому, щоб привести рівняння (2.1) до канонічного вигляду, потрібно зробити заміну змінних  $\xi = T x$ , де матриця  $T$  є транспонованою до матриці  $\|\alpha_{ij}\|$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

У випадку  $m=2$  рівняння (2.1) приймає вигляд:

$$a_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x_2} + a_{22}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right). \quad (2.2)$$

Для того, щоб привести рівняння (2.2) до канонічного вигляду, потрібно знайти характеристики рівняння (2.2), які є інтегральними кривими наступного рівняння характеристик:

$$a_{11}(x_1, x_2)(dx_1)^2 - 2a_{12}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + a_{22}(x_1, x_2)(dx_2)^2 = 0. \quad (2.3)$$

Якщо для рівняння (2.2) вираз  $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  зберігає знак у деякій області, то його можна віднести до одного з наступних типів у цій області:

- а)  $\delta > 0$  – гіперболічний тип;
- б)  $\delta < 0$  – еліптичний тип;
- в)  $\delta = 0$  – параболический тип.

У випадку рівняння *гіперболічного типу* (а)  $\delta > 0$ ) рівняння характеристик (2.3) має два сімейства інтегральних кривих, що є характеристиками рівняння (2.2):  $\varphi_1(x_1, x_2) = C_1$  і  $\varphi_2(x_1, x_2) = C_2$ .

У цьому випадку заміна змінних  $\xi = \varphi_1(x_1, x_2)$ ,  $\eta = \varphi_2(x_1, x_2)$  приводить рівняння (2.2) до *першого канонічного вигляду*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Заміна змінних  $\xi = 0,5(\varphi_1 + \varphi_2)$ ,  $\eta = 0,5(\varphi_1 - \varphi_2)$  приводить рівняння (2.2) до *другого канонічного вигляду*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

У випадку, коли рівняння (2.2) належить *еліптичному типу* (б)  $\delta < 0$ ), воно не має дійсних характеристик. У цьому випадку характеристики будуть комплексно-спряженими:  $\varphi(x_1, x_2) \pm i\psi(x_1, x_2) = const$ .

Заміна змінних  $\xi = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $\eta = \psi(x_1, x_2)$  приводить рівняння (2.2) до *канонічного вигляду*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Якщо рівняння (2.2) *параболічного типу* (в)  $\delta = 0$ ), то воно має одне сімейство дійсних характеристик  $\varphi(x_1, x_2) = const$ . У цьому випадку заміна змінних, яка приводить рівняння (2.2) до *канонічного вигляду*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

має вигляд:  $\xi = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $\eta = \eta(x_1, x_2)$ , де  $\eta(x_1, x_2)$  – довільна функція, для якої Якобіан в області, що розглядається,  $\varphi_{x_1} \eta_{x_2} - \varphi_{x_2} \eta_{x_1} \neq 0$ .

### Завдання 1.

Визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду:

$$u_{xx} + 2u_{yy} + 2u_{xy} + 4u_{yx} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0.$$

### Розв'язок.

Оскільки рівняння має постійні коефіцієнти, а  $m = 3$ , то розглядаємо квадратичну форму  $\Phi = P_1^2 + 2P_2^2 + 2P_1P_2 + 4P_2P_3 + 5P_3^2$ . Приведемо його до канонічного вигляду *методом Лагранжа*:

$$\Phi = (P_1 + P_2)^2 + (P_2 + 2P_3)^2 + P_3^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$

Оскільки всі коефіцієнти є одиницями, то рівняння належить до еліптичного типу. При цьому перетворення, що привело квадратичну форму до канонічного вигляду, має вигляд:

$$P_1 = q_1 - q_2 + 2q_3, \quad P_2 = q_2 - 2q_3, \quad P_3 = q_3.$$

Матриця цього перетворення записується наступним чином:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю шуканого перетворення, що переводить вихідне рівняння у канонічне, визначаємо з даної матриці транспонуванням:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

У вихідному рівнянні переходимо до нових незалежних змінних:  $\xi_1 = x$ ,  $\xi_2 = -x + y$ ,  $\xi_3 = 2x - 2y - z$ .

Частинні похідні у нових змінних запишуться:

$$u_x = u_{\xi_1} - u_{\xi_2} + 2u_{\xi_3}, \quad u_y = u_{\xi_2} - 2u_{\xi_3}, \quad u_z = u_{\xi_3},$$

$$u_{xx} = u_{\xi_1\xi_1} - 2u_{\xi_1\xi_2} + 4u_{\xi_1\xi_3} + u_{\xi_2\xi_2} - 4u_{\xi_2\xi_3} + 4u_{\xi_3\xi_3},$$

$$u_{yy} = u_{\xi_2\xi_2} - 4u_{\xi_2\xi_3} + 4u_{\xi_3\xi_3}, \quad u_{zz} = u_{\xi_3\xi_3}, \quad u_{yz} = u_{\xi_2\xi_2} - 2u_{\xi_2\xi_3},$$

$$u_{xy} = u_{\xi_1\xi_2} - 2u_{\xi_1\xi_3} - u_{\xi_2\xi_2} + 4u_{\xi_2\xi_3} - 4u_{\xi_3\xi_3}.$$

Підставимо їх у рівняння і після приведення подібних членів одержимо канонічний вигляд заданого рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = 0.$$



**Завдання 2.**

Привести до канонічного вигляду рівняння  $u_{xx} + uu_{yy} = 0$  в кожній з областей, де його тип зберігається.

**Розв'язок.**

Порівнюючи це рівняння з (2.3), знаходимо  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = u$ , тоді  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -u$ . При  $u > 0$  рівняння еліптичне, при  $u < 0$  – гіперболічне, а при  $u = 0$  – параболічне. Розглянемо детальніше такі випадки.

1)  $u > 0$ . Диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{i\sqrt{y}} = dx, \quad \frac{dy}{i\sqrt{y}} = -dx,$$

звідки  $2i\sqrt{y} + x = C_1$ ,  $-2i\sqrt{y} + x = C_2$ .

За нові незалежні змінні оберемо дійсну та уявну частини загальних розв'язків  $\xi = x$ ,  $\eta = 2\sqrt{y}$ .

Знаходимо частинні похідні у нових змінних

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}; \quad u_{yy} = u_{\eta\eta} \frac{1}{y} - \frac{1}{2} u_{\eta} \frac{1}{\sqrt{y^3}}.$$

Підставляючи одержані вирази у вихідне рівняння, матимемо:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} u_{\eta} = 0.$$

2)  $u < 0$ . З рівнянь характеристик

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = dx, \quad \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -dx,$$

маємо  $2\sqrt{-y} + x = C_1$ ,  $2\sqrt{-y} - x = C_2$ . Замінімо змінні  $\xi = x + 2\sqrt{-y}$ ,  $\eta = x - 2\sqrt{-y}$  та знаходимо

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = -u_{\xi\xi} \frac{1}{y} + 2u_{\xi\eta} \frac{1}{y} - u_{\eta\eta} \frac{1}{y} + \frac{1}{2} u_{\xi} \frac{1}{y\sqrt{-y}} - \frac{1}{2} u_{\eta} \frac{1}{y\sqrt{-y}}.$$

Підстановка цих значень у вихідне рівняння дає

$$4u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}(u_{\xi} - u_{\eta}) \frac{1}{\sqrt{-y}} = 0 \quad \text{або} \quad u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.$$

**Завдання 3.**

Визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду у кожній з областей, де його тип зберігається:  $xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

**Розв'язок.**

Тут  $a_{11} = xy$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 1$ , отже  $\delta = -xy$ . Рівняння належить:

а) гіперболічному типу, якщо  $x < 0$ ,  $y > 0$  або  $x > 0$ ,  $y < 0$  (тобто в другій та четвертій чвертях);

б) параболічному типу, якщо  $x = 0$  або  $y = 0$  (тобто на осях координат);

в) еліптичному типу, якщо  $x > 0$ ,  $y > 0$  або  $x < 0$ ,  $y < 0$  (тобто у першій та третій чвертях).

Запишемо рівняння характеристик

$$xy(dy)^2 + (dx)^2 = 0 \text{ або } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{xy}.$$

Нехай  $x < 0$ ,  $y > 0$  (випадок (а)). Тоді рівняння характеристик можна записати (враховуючи, що  $-x > 0$ ):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(-x)y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{-x}\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}dy = \pm \frac{dx}{\sqrt{-x}}.$$

Характеристики даного рівняння в цьому випадку мають вигляд

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \mp 2\sqrt{-x} = \text{const}.$$

Введемо заміну змінних:  $\xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{-x}$ ,  $\eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{-x}$ .

Знайдемо частинні похідні у нових змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2(-x)^{3/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$u_{yy} = y \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

підставимо у рівняння, і після зведення подібних членів одержимо перший канонічний вигляд рівняння:

$$4y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y}{2\sqrt{-x}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Після спрощення, враховуючи, що  $\sqrt{-x} = \frac{1}{4}(\xi - \eta)$ ,  $y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}(\xi + \eta)$ ,

остаточно маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{6(\xi + \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Заміна змінних  $\xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ ,  $\eta = 2\sqrt{-x}$  приводить рівняння до другого

канонічного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{3\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Аналогічно приводиться рівняння до канонічного вигляду і в другій чверті; потрібно лише врахувати, що тут  $-y > 0$ .

У випадку б) при  $x=0$  або  $y=0$  маємо відразу канонічний вигляд рівняння  $u_{yy} = 0$ .

У випадку рівняння еліптичного типу (наприклад, якщо  $x < 0$ ,  $y < 0$ ) рівняння характеристик можна записати наступним чином:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = -\frac{1}{(-x)(-y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \frac{1}{\sqrt{(-x)(-y)}}.$$

Таким чином його комплексно-спряжені характеристики мають вигляд:  $-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \pm i(-x)^{\frac{1}{2}} = const$ .

Заміна змінних  $\xi = -\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$ ,  $\eta = 2\sqrt{-x}$  приведе це рівняння до канонічного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{3\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Аналогічним способом здійснюємо перетворення при  $x > 0$ ,  $y > 0$  (у першій чверті), де рівняння характеристик можна записати:

$$\sqrt{y} dy = \pm i \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

#### **Завдання 4.**

Визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду. За допомогою заміни невідомої функції вигляду  $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x + \beta y}$  спростити отримане рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

$a, b, c$  – постійні числа.

**Розв'язок.** Тут  $a_{11} = a_{12} = a_{22}$ , тому  $\delta = a^2 - a^2 = 0$ , тобто рівняння належить до параболічного типу. Знайдемо його характеристику. Оскільки

$$ady^2 - 2adydx + adx^2 = 0 \Rightarrow dy = dx,$$

то  $y - x = const$  є характеристикою заданого рівняння. Покладаємо  $\xi = y - x$ , а в якості  $\eta$  можемо взяти будь-яку функцію, за умови, що Якобiан не дорівнює нулю. Наприклад,  $\eta = x$ . Тоді  $J = -1 - 0 = -1 \neq 0$ . Отже, маємо заміну:  $\xi = y - x$ ,  $\eta = x$ . Знаходимо частинні похідні у нових змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Канонічний вигляд даного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{b}{a} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{c-b}{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Введемо нову функцію  $v(\xi, \eta)$  співвідношенням  $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\alpha\xi + \beta\eta}$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  – довільні числа. Знайдемо їх, прирівнявши до нуля, які-небудь два коефіцієнти у перетвореному рівнянні. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\alpha\xi + \beta\eta} + \alpha v e^{\alpha\xi + \beta\eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\alpha\xi + \beta\eta} + \beta v e^{\alpha\xi + \beta\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} e^{\alpha\xi + \beta\eta} + 2\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\alpha\xi + \beta\eta} + \beta^2 v e^{\alpha\xi + \beta\eta},$$

так, що рівняння мають вигляд (після скорочення на  $e^{\alpha\xi + \beta\eta}$ ):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \left(2\beta + \frac{b}{a}\right) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{c-b}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} + (1 + c\alpha - b\alpha + a\beta^2)v = 0.$$

Знайдемо  $\alpha, \beta$  з умов:  $2\beta + \frac{b}{a} = 0$ ,  $1 + c\alpha - b\alpha + b\beta + a\beta^2 = 0$ , так що

$$\beta = -\frac{b}{2a}; \quad \alpha = \frac{b^2 - 4a}{4a(c-b)}.$$

Тепер рівняння має вигляд:  $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{c-b}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ .

**Завдання 5.**

в області  $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$  знайти загальний розв'язок рівняння

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

**Розв'язок.**

Спочатку приведемо рівняння до канонічного вигляду. Оскільки  $\delta = xy > 0$ , то дане рівняння в області  $x > 0, y > 0$  належить до гіперболічного типу, має дві дійсні характеристики  $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = const$  і заміною змінних  $\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \eta = \sqrt{x} - \sqrt{y}$  зводиться до першого канонічного вигляду  $u_{\xi\eta} = 0$ . Загальний розв'язок останнього рівняння одержимо у вигляді:  $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$ , де  $\varphi(\xi)$  і  $\psi(\eta)$  – довільні функції своїх аргументів. Переходячи до змінних  $x, y$  отримаємо, що загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:  $u(x, y) = \varphi(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ .

**2.2. Завдання для самостійної роботи**

В задачах 1-8 привести рівняння до канонічного виду в кожній з областей, де його тип зберігається.

1.  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ .
2.  $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$ .
3.  $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ .
4.  $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$ .
5.  $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$ .
6.  $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$ .
7.  $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ .
8.  $u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0$ .

В задачах 9, 10 визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду. За допомогою заміни шуканої функції  $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x + \beta y}$  спростити рівняння зі сталими коефіцієнтами:

9.  $2au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + 2bu_x + 2cu_y + u = 0$ .
10.  $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$ .
11. Привести до канонічного вигляду рівняння  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$ .

### 3. Рівняння гіперболічного типу

#### 3.1. Задача Коші для рівняння коливань струни та крайові задачі для напівобмеженої струни. Метод характеристик

##### Питання для повторення

1. Сформулювати задачу Коші для рівняння коливань струни.
2. Написати формулу Д'Аламбера.
3. Викласти метод Д'Аламбера розв'язання задачі про коливання напівобмеженої струни.

##### Методичні вказівки

*Задача Коші* для рівняння

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = F(x, y) \quad (3.1)$$

з умовами

$$u|_{\Gamma} = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial l}|_{\Gamma} = u_1(x, y) \quad (3.2)$$

полягає в наступному. Нехай в області  $D$  задано рівняння (3.1) гіперболічного типу ( $b^2 - ac > 0$ ) і на кривій  $\Gamma$ , яка належить області  $D$  або є частиною границі області  $D$ , задані функції  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$  і напрямком  $l(x, y)$ . Потрібно знайти функцію  $u(x, y)$ , яка в області  $D$  є розв'язком рівняння (3.1) і на кривій  $\Gamma$  задовольняє умовам (3.2).

Якщо в кожній точці кривої  $\Gamma$  напрямком  $l$  не є дотичним до кривої  $\Gamma$  і дотичний напрямком до кривої  $\Gamma$  не є характеристичним, то в області  $D$ , обмеженій характеристиками, що проходять через кінці кривої  $\Gamma$ , при достатній гладкості коефіцієнтів рівняння (3.1) і даних умов (3.2) існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.1)-(3.2).

*Класичною задачею Коші для хвильового рівняння* називають задачу знаходження функції  $u(X, t)$  ( $X = (x, y, z)$ ) класу  $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ , що задовольняє при  $t > 0$  рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(X, t) \quad (3.3)$$

і початковим умовам

$$u|_{t=0} = \varphi(X), \quad u_t|_{t=0} = \psi(X), \quad (3.4)$$

де  $f, \varphi, \psi$  – задані функції.

Якщо виконуються умови

$$f \in C^1(t \geq 0), \quad \varphi \in C^2(R^n), \quad \psi \in C^1(R^n), \quad n=1;$$

$$f \in C^2(t \geq 0), \quad \varphi \in C^3(R^n), \quad \psi \in C^2(R^n), \quad n=2,3,$$

то розв'язок задачі Коші (3.3)-(3.4) існує, він єдиний та виражається при  $n=1$  формулою Д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau; \quad (3.5)$$

при  $n=2$  формулою Пуассона

$$u(X, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|\xi-X| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\alpha-x)^2 - (\beta-y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi-X| < at} \frac{\psi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-X|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi-X| < at} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-X|^2}}; \quad (3.6)$$

при  $n=3$  формулою Кірхгофа

$$u(X, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\xi-X| < at} \frac{1}{|\xi-X|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi-X|}{a}\right) d\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\xi-X|=at} \psi(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \int_{|\xi-X|=at} \varphi(\xi) dS \right]. \quad (3.7)$$

*Зауваження.* Відомі результати теорем про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних (див., напр., [8]) дають можливість будувати наближення розв'язків даних задач, коли початкові функції  $\varphi$ ,  $\psi$  не задовольняють записані вище умови.

### **Завдання 1.**

*Біжучі хвилі.* Необмежена струна збурена локальним початковим відхиленням, заданим у вигляді рівнобедреного трикутника (рис. 3.1). Побудувати (накреслити) положення струни для моментів часу  $t_k = kl/(4a)$ , де  $k=0, 1, 2, 3, 5$ .

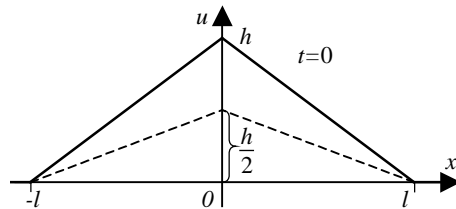


Рис. 3.1

### **Розв'язок.**

Процес коливання струни буде описуватись задачею Коші

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

А оскільки струна здійснює коливання лише внаслідок початкових відхилень її точок від положення рівноваги, то тут  $\psi(x) = 0$ . Тоді розв'язок

Д'Аламбера (3.5), матиме вигляд  $u(x,t) = (\varphi(x-at) + \varphi(x+at))/2$ .

Ця формула є законом руху струни для випадку, коли в початковий момент вона відхилена і нерухома. Вона визначає дві біжучі хвилі: хвилю  $u_1(x,t) = \varphi(x-at)/2$ , що поширюється у додатньому напрямку осі  $Ox$ , і хвилю  $u_2(x,t) = \varphi(x+at)/2$  – у протилежному напрямку; величини швидкостей обох хвиль однакові і дорівнюють  $a$ .

Відхилення точок струни у хвилі  $u_1$  в початковий момент часу  $t=0$  дорівнюють  $u_1(x,0) = \varphi(x-a\cdot 0)/2 = \varphi(x)/2$ , тобто становлять половину від повних відхилень. З часом відповідний півпрофіль зсувається як ціле з швидкістю  $a$  вправо у напрямку осі  $Ox$ , утворюючи хвилю  $u_1$ , яка і “біжить” вправо (пряма хвиля). Аналогічно у хвилі  $u_2$  відхилення точок у момент часу  $t=0$  також дорівнюють  $\varphi(x)/2$ , але її профіль зсувається з швидкістю  $a$  вліво вздовж осі  $Ox$  (зворотна хвиля).

Отже, задане початкове відхилення поділяється на дві однакові хвилі, що поширюються в протилежних напрямках зі сталою швидкістю  $a$ . Повне відхилення точок струни в довільний момент часу  $t$  є сумою відхилень прямої та зворотної хвиль. На рис. (3.2) наведені профілі струни для моментів  $t_k = kl/(4a)$  ( $k=1,2,3,5$ ).

### Завдання 2.

Необмежена струна збурена локальним початковим відхиленням, як у завданні 1, у формі рівнобедреного трикутника (див. рис. 3.1). Початкові швидкості дорівнюють нулю. Використовуючи метод характеристик, знайти: а) формули, що представляють профіль струни при  $t>0$ ; б) формули, що представляють закон руху точок струни з різними абсцисами при  $t>0$ .

### Розв'язок.

Відповідно до умови задачі, відхилення точок струни в початковий момент часу визначатимуться за формулою

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ h \left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x \geq l. \end{cases}$$

Щоб отримати необхідні формули, побудуємо у фазовому просторі  $(x,t)$  характеристики  $x-at = \pm l$ ,  $x+at = \pm l$  при  $t \geq 0$  (рис. 3.3). При цьому



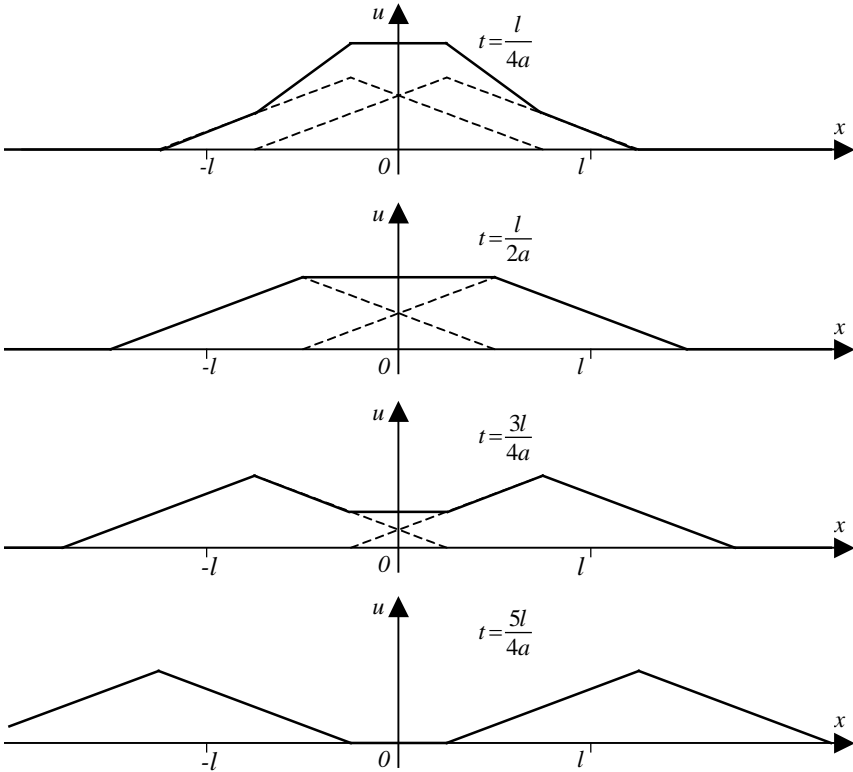


Рис. 3.2

півплощина  $t \geq 0$  розбивається на шість частин. Коливання проходять тільки в тих точках і в ті моменти часу, які відповідають зонам I, II, III. В зоні II діє тільки пряма хвиля, в зоні III – тільки зворотна, а в зоні I – і пряма, і зворотна хвилі. В точках, які відповідають зонам IV і V, коливання ще не відбуваються, тому що до них ще не дійшли передні фронти відповідно прямої та зворотної хвиль, а в точках, які відповідають зоні VI, коливання уже немає, тому що через них уже пройшли задні фронти прямої та зворотної хвиль. Тепер, зафіксувавши час і рухаючись уздовж прямої  $t = t_0$ , легко записати вирази для функції  $u(x, t_0)$  для довільної точки  $x$ .

а) При  $t_0 < \frac{l}{a}$  точка фазової площини при русі зліва направо перетинає послідовно зони V, III, I, II, і IV. В цьому випадку одержимо

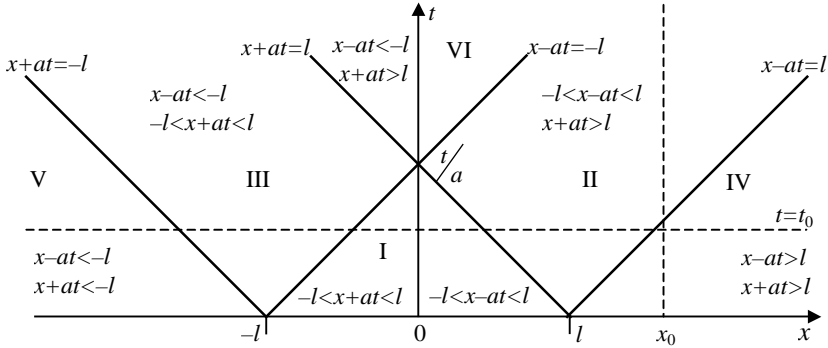


Рис. 3.3.

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2} \varphi(x + at_0) & \text{при } -at_0 - l < x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at_0) + \varphi(x - at_0)] & \text{при } at_0 - l < x < l - at_0, \\ \frac{1}{2} \varphi(x - at_0) & \text{при } l - at_0 < x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } l + at_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Аналогічно записується вираз для  $u(x, t_0)$  при  $t_0 > l/a$ :

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2} \varphi(x + at_0) & \text{при } -at_0 - l < x < l - at_0, \\ 0 & \text{при } l - at_0 < x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2} \varphi(x - at_0) & \text{при } at_0 - l < x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } l + at_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

б) Зафіксувавши довільну точку  $x_0$  струни і піднімаючись вгору по прямій  $x = x_0$ , аналогічно до попереднього, можемо записати вирази для функції  $u(x_0, t)$  в довільний момент часу  $t$  в кожному з інтервалів  $-\infty < x < -l$ ,  $-l < x < 0$ ,  $0 < x < l$  та  $l < x < +\infty$ .

### Завдання 3.

Знайти розв'язок рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , що задовольняє

початковим умовам  $u(x, 0) = 3x^2$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ .

**Розв'язок.**

Спочатку приведемо рівняння до канонічного вигляду і знайдемо його загальний розв'язок:

$$u(x, y) = F_1(y - 3x) + F_2(y + x),$$

де  $F_1$  і  $F_2$  – довільні функції своїх аргументів. Визначимо їх так, щоб виконувалися початкові умови. Для цього знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_1'(y - 3x) + F_2'(y + x).$$

Тут штрих означає похідні функції за проміжними аргументами (диференціюємо функцію як складну). При  $y = 0$  маємо

$$\begin{cases} 3x^2 = F_1(-3x) + F_2(x), \\ 0 = F_1'(-3x) + F_2'(x). \end{cases}$$

Другу рівність інтегруємо по змінній  $x$  і одержимо

$$\begin{cases} 3x^2 = F_1(-3x) + F_2(x) \\ c = F_2(x) - \frac{1}{3}F_1(-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1(-3x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}c, \\ F_2(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}c. \end{cases}$$

Або:  $F_1(z) = \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{4}c$ ,  $F_2(z) = \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}c$ .

Підставляючи знайдені функції  $F_1$  й  $F_2$  у загальний розв'язок рівняння, знаходимо розв'язок поставленої задачі

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(y - 3x)^2 - \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}(y + x)^2 + \frac{3}{4}c = y^2 + 3x^2.$$

**Завдання 4.**

Кінець напівобмеженої струни  $x > 0$ , починаючи з моменту  $t = 0$ , рухається за законом  $u(0, t) = \mu(t)$ . Знайти відхилення  $u(x, t)$  точок струни при  $t > 0$ , якщо початкові швидкості і відхилення дорівнюють нулю.

**Розв'язок.**

Спочатку сформулюємо описану вище фізичну задачу як крайову: потрібно знайти розв'язок рівняння струни  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$  при початкових умовах:  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $x > 0$  і крайовій умові  $u(0, t) = \mu(t)$ ,  $t > 0$ .

Як ми переконалися раніше, загальний розв'язок рівняння коливання струни можна представити у вигляді суми прямої і зворотної хвилі. Оскільки збурення задані в точці  $x = 0$ , а розв'язок поставленої задачі потрібно знайти при  $x > 0$ , то будемо шукати його у вигляді прямої хвилі:

$$u(x, t) = F(x - at).$$

Тут  $F$  – довільна функція свого аргументу. З крайової умови при  $x=0$  одержимо:

$$\mu(t) = F(-at), \quad t > 0 \quad (a > 0).$$

Тим самим функцію  $F(z)$  визначили для від'ємних значень аргументу  $z$  ( $z = -at < 0$ ) як  $\mu(-\frac{z}{a})$ ,  $-\frac{z}{a} > 0$ .

Поклавши для  $z > 0$  функцію  $F(z) \equiv 0$ , задовольнимо нульові початкові умови:  $u(x,0) = F(x) \equiv 0$ ,  $x > 0$  і  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ ,  $x > 0$ .

Таким чином, розв'язок поставленої задачі запишеться:

$$u(x,t) = F(x-at) = \begin{cases} \mu(t - \frac{x}{a}), & \text{якщо } t > \frac{x}{a}, \\ 0, & \text{якщо } 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Аналогічно розв'язується і крайова задача з крайовою умовою другого роду на кінці  $x=0$ :  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \gamma(t)$ ,  $t > 0$ .

Розв'язок цієї задачі записується у вигляді:

$$u(x,t) = \begin{cases} -a \int_0^{t-x/a} \gamma(\xi) d\xi, & \text{якщо } t > \frac{x}{a}, \\ 0, & \text{якщо } 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

### 3.2. Завдання для самостійної роботи

1. *Хвилі імпульсу.* Точкам необмеженої струни на відрізку  $-l \leq x \leq l$  в початковий момент часу  $t=0$  надана швидкість  $v_0$ . Початкові відхилення струни дорівнюють нулю. Побудувати (накреслити) положення струни для моментів часу  $t_k = kl/2a$ , де  $k=0,4$ .

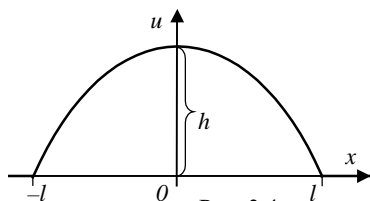


Рис. 3.4.

2. Необмежена струна збурена локальним початковим відхиленням, що має форму квадратичної параболи (рис. 3.4). Початкові швидкості дорівнюють нулю. Використовуючи метод Д'Аламбера, знайти: а) формули, що представляють профіль струни при  $t > 0$ ; б) формули, що представляють закон руху точок струни з різними абсцисами при  $t > 0$ .

3. В момент часу  $t=0$  необмежена струна збурена початковим відхиленням, що має форму, зображену на рис. 3.5. В якій точці  $x$  і в який момент часу  $t>0$  відхилення струни буде максимальним? Яка величина цього відхилення?

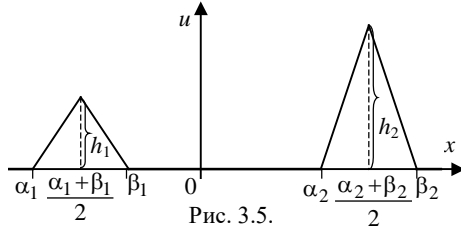


Рис. 3.5.

4. Необмеженій струні на відріжку  $-l \leq x \leq l$  надана поперечна початкова швидкість  $v_0 = const$ , поза цим відрізком початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти формули, що представляють закон руху точок струни з різними абсцисами при  $t>0$ .

5. Напівобмежена струна, яка закріплена на кінці, збурена початковим відхиленням, зображеним на рис. 3.6. Накреслити положення струни для моментів часу

$$t = \frac{c}{a}; \quad t = \frac{3c}{2a}; \quad t = \frac{2c}{a}; \quad t = \frac{7c}{2a}.$$

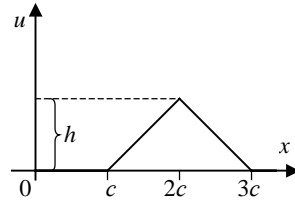


Рис. 3.6.

6. Знайти розв'язок задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 4x, \quad -\infty < x < \infty,$$

та дати її фізичну інтерпретацію.

7. Напівобмеженій струні із закріпленим кінцем у початковий момент часу  $t=0$  з допомогою поперечного удару переданий імпульс  $I$  у точці  $x = x_0$ . Знайти відхилення  $u(x, t)$  точок струни від положення рівноваги при  $t>0$ , якщо початкові відхилення  $u(x, 0) = 0$ , а початкові швидкості в точках  $x \neq x_0$  також дорівнюють нулю.

8. Кінець напівобмеженої струни  $0 < x < +\infty$ , починаючи з моменту  $t=0$ , рухається за законом  $u(0, t) = \mu(t)$ . Знайти відхилення  $u(x, t)$  точок струни при  $0 < t < +\infty$ , якщо початкові швидкості і відхилення рівні нулю.

9. Знайти розв'язок задачі і дати її фізичну інтерпретацію

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x, \quad -\infty < x < \infty.$$

10. Знайти розв'язок рівняння  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ , якщо задані умови:  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_y(x, 0) = x + \cos x$ .

### 3.3. Метод Фур'є (метод відокремлення змінних)

#### Методичні вказівки

Метод Фур'є, або метод відокремлення змінних, є одним з найпоширеніших методів розв'язання крайових задач не тільки для рівняння коливання струни, але і для інших рівнянь математичної фізики [2]. Для його застосування істотним є лінійність крайової задачі, а не тип диференціального рівняння в частинних похідних. Цей метод, як правило, застосовується у випадках, коли криві (поверхні), на яких задані крайові умови, є координатними кривими (поверхнями) в обраній для заданої задачі системі координат. Основна ідея цього методу полягає в тому, що розв'язок крайової задачі зводиться до розв'язання допоміжних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, або для рівняння в частинних похідних, але з меншим числом незалежних змінних. Розв'язок вихідного рівняння в частинних похідних буде у вигляді добуток розв'язків допоміжних крайових задач. Після цього розв'язок заданої крайової задачі записується у вигляді лінійної комбінації цих розв'язків з постійними коефіцієнтами.

У процесі розв'язання крайових задач методом Фур'є важливе значення має задача на власні значення, зокрема задача Штурма-Ліувілля. Наведемо коротко основні моменти, що стосуються цієї задачі.

Нехай задано диференціальний оператор

$$Lu \equiv (p(x) \cdot u'(x))' - q(x)u(x)$$

на відріжку  $[a, b]$  де  $p(x) \in C^1[a, b]$ ,  $q(x) \in C[a, b]$ ,  $p(x) > 0$  на  $[a, b]$ . Функція  $u(x)$  належить до області визначення  $D(L)$  оператора  $L$ , якщо  $u(x) \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$  і задовольняє крайовим умовам:

$$R_1(u) \equiv (\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a)) \sqrt{p(a)} = 0, \quad (3.8)$$

$$R_2(u) \equiv (\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b)) \sqrt{p(b)} = 0,$$

де  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\alpha_i + \beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Поставимо наступну задачу: знайти ті значення параметра  $\lambda$  (власні значення задачі (3.8)-(3.9)), при яких рівняння

$$Lu = \lambda \rho u \quad (3.9)$$

має ненульовий розв'язок з  $D(L)$  (власні функції задачі (3.8)-(3.9)). Задану, додатно визначену та неперервну на  $[a, b]$  функцію  $\rho(x)$  називають ваговою функцією.

Поставлена задача називається задачею Штурма-Ліувілля. Приведемо основні властивості її розв'язків.

1. Усі власні значення оператора  $L$  (чи крайової задачі (3.8), (3.9))

дійсні і при  $q \geq 0$  є невід'ємними. Множина власних значень зчисленна:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

2. Кожному власному значенню відповідає одна власна функція.

3. Власні функції оператора  $L$  (чи крайової задачі (3.8), (3.9)), що відповідають різним власним значенням, ортогональні в  $L_2[a, b]$  з вагою  $\rho(x)$ , тобто якщо  $u_k(x)$  – власна функція, що відповідає  $\lambda_k$ , а  $u_n(x)$  – власна функція, що відповідає  $\lambda_n$  і  $\lambda_k \neq \lambda_n$ , то

$$\int_a^b u_k(x) u_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

4. Має місце теорема Стеклова: якщо функція  $\Phi(x) \in C^2[a, b]$  і задовольняє крайовим умовам (3.8), то вона розкладається у рівномірній й абсолютно збіжний ряд Фур'є за власними функціями крайової задачі (3.8), (3.9):

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k(x).$$

Помноживши рівність на  $\rho(x) u_n(x)$  та інтегруючи по відрізьку  $[a, b]$ , знаходимо коефіцієнти Фур'є  $\varphi_n$ , використовуючи ортогональність (властивість 3):

$$\varphi_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_a^b \Phi(x) u_n(x) \rho(x) dx, \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x) \rho(x) dx. \quad (3.10)$$

5. Якщо  $\Phi(x) \in L_2[a, b]$ , то її ряд Фур'є  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k(x)$  збігається до

$\Phi(x)$  у середньому з вагою  $\rho(x)$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \rho(x) \left[ \Phi(x) - \sum_{k=1}^n \varphi_k u_k(x) \right]^2 dx = 0.$$

### 3.3.1. Крайові задачі для однорідного рівняння коливання струни

#### Питання для повторення

1. Написати рівняння малих поперечних коливань струни.
2. Написати рівняння малих повздовжніх коливань струни.

3. Дати фізичну інтерпретацію початкових умов для рівняння струни.
4. Дати фізичну інтерпретацію крайових умов першого, другого і третього роду для рівняння струни.
5. Викласти метод відокремлення змінних для однорідного рівняння струни.

### Завдання 1.

Використовуючи метод Фур'є (метод відокремлення змінних), визначити закон коливання струни, закріпленої на кінцях  $(0, l)$ , яка в початковий момент має форму параболи, симетричної відносно своєї середини; максимальне відхилення дорівнює  $h$  (рис. 3.7). Початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю.

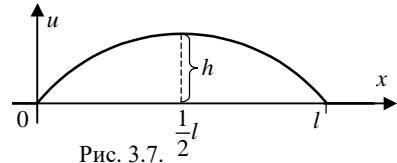


Рис. 3.7.

### Розв'язок.

Сформулюємо задану фізичну задачу як крайову: знайти розв'язок однорідного рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.11)$$

що задовольняє наступні крайові і початкові умови:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.13)$$

Оскільки парабола проходить через точки  $x=0$  і  $x=l$ , її рівняння буде  $u = Ax(l-x)$ ,  $A$  – стала, яку знаходимо з умови  $u|_{x=l/2} = h$ . Маємо

$$A = \frac{4h}{l^2}, \quad \text{тому} \quad \varphi(x) = \frac{4h}{l^2} x(l-x).$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , що тотожно не дорівнює нулю та задовольняє крайові умови (3.12). Підставляючи вказану форму розв'язку у (3.11) та відокремлюючи змінні, одержимо рівняння:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.14)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (3.15)$$

Враховуючи крайові умови (3.12), для знаходження функцій  $X(x)$  отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Власні значення і власні функції задачі (3.16) мають вигляд:



$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

де  $D_n$  – довільна стала, яку покладемо рівною одиниці. Цим значенням відповідають розв'язки рівняння (3.14)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t, \quad (3.17)$$

Тоді, повертаючись до задачі (3.11)–(3.13), отримаємо розв'язок

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.18)$$

Для знаходження  $A_n$  і  $B_n$  розкладемо функцію  $\varphi(x)$  у ряд Фур'є та скористаємось початковими умовами. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{8h}{\beta^3} \int_0^l \xi(1-\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi = \frac{8h}{\beta^3} \left\{ -\frac{l}{\pi} \xi(1-\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{\pi} \int_0^l (1-2\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right\} = \\ &= \frac{8h}{\beta^3} \left\{ \frac{l}{\pi} \left[ \frac{l(1-2\xi)}{\pi} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \Big|_0^l + 2l \int_0^l \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right] \right\} = \frac{8h}{\beta^3} \left\{ -\frac{2l^3}{n^3 \pi^3} \cos \frac{\pi n \xi}{l} \Big|_0^l \right\} = \\ &= \frac{8h}{\beta^3} \cdot \frac{2l^3(1-\cos \pi n)}{n^3 \pi^3} = \frac{16h}{n^3 \pi^3} (1-(-1)^n) (n=0, 1, 2, \dots); \quad B_n = 0. \end{aligned}$$

За формулою (3.18) розв'язок задачі запишеться у вигляді

$$u(x, t) = \frac{16h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \cos \frac{\pi n a t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.19)$$

Оскільки при парних  $n$  коефіцієнт дорівнює нулю, а при непарних – двом, остаточно:

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

Коливання струни періодичне з частотою  $\pi a/l$  і періодом  $2l/a$ .

### Завдання 2.

Один кінець стержня ( $x=l$ ) закріплений пружно, а інший ( $x=0$ ) – жорстко. Знайти закон повздовжніх коливань стержня при довільно заданих початкових умовах.

#### Розв'язок.

Сформулюємо задану фізичну задачу як крайову: знайти розв'язок однорідного рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.20)$$

що задовольняє наступні крайові і початкові умови:

$$u(0,t)=0, \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = 0, t > 0, \quad (3.21)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < l. \quad (3.22)$$

Тут  $h = \frac{k}{E\delta}$ ,  $k$  – коефіцієнт, що характеризує жорсткість закріплення. Будемо шукати часткові розв'язки рівняння (3.22) у вигляді добутку

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3.23)$$

що тотожно не дорівнюють нулю та задовольняють крайові умови (3.21). Підставляючи (3.23) у (3.20), одержимо

$$T''(t)X(x) - a^2 X''(x)T(t) = 0,$$

або, відокремлюючи змінні,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda. \quad (3.24)$$

З (3.24) одержимо:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.25)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (3.26)$$

Підставляючи (3.23) у (3.21), отримаємо:

$$T(t) \cdot X(0) = 0 \text{ і } T(t)(X'(l) + hX(l)) = 0.$$

Оскільки  $T(t)$  тотожно не дорівнює нулеві [адже шукаємо ненульовий розв'язок рівняння (3.24)], то одержимо наступні граничні умови:

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \quad (3.27)$$

Таким чином, для знаходження функцій  $X(x)$  отримали задачу (3.26), (3.27), яка є задачею Штурма-Ліувілля. Тут

$$p(x) = \rho(x) = 1, \quad q(x) = 0; \quad a = 0, \quad b = l, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = h.$$

Знайдемо власні значення і власні функції задачі (3.26), (3.27). Припустимо, що  $\lambda \geq 0$  (властивість 1), тоді загальні розв'язки рівняння (3.26) при  $\lambda = 0$  має вигляд:

$$X(x) = C_0 x + D_0,$$

а при  $\lambda > 0$ :

$$X(x) = C \sin \sqrt{\lambda} x + D \cos \sqrt{\lambda} x.$$

У випадку  $\lambda = 0$  врахування крайових умов (3.27) дають для сталих  $C_0$  та  $D_0$  систему рівнянь:

$$\begin{cases} D_0 = 0, \\ C_0 + h(C_0 l + D_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 0, \\ D_0 = 0, \end{cases}$$

тобто  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

При  $\lambda > 0$  з крайових умов (3.27) одержимо

$$\begin{cases} D_0 = 0, \\ \sqrt{\lambda}(C \cos \sqrt{\lambda} l - D \sin \sqrt{\lambda} l) + h(C \cos \sqrt{\lambda} l + D \sin \sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} D = 0, \\ C(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l) = 0, \end{cases} \quad C \neq 0,$$

тобто, для визначення  $\lambda$  одержимо трансцендентне рівняння:

$$(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l = 0) \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \mu = -\frac{hl}{\mu},$$

де  $\mu = \sqrt{\lambda} l$ . Корені цього рівняння можна визначити графічним або наближеним чисельним методом. Нехай  $\mu_k$ ,  $k \in N$  – корені рівняння

$$\mu_k \operatorname{ctg} \mu_k = -hl. \text{ Тоді власні значення } \lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in N, \text{ а } X_k(x) = \sin \frac{\mu_k x}{l} -$$

власні функції нашої задачі. Знайдемо норму власних функцій  $X_k(x)$  у просторі  $L_2(0, l)$ :

$$\begin{aligned} \|X_k(x)\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \frac{\mu_k x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\mu_k x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \sin \frac{2\mu_k x}{l} \Big|_0^l = \\ &= \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \sin 2\mu_k = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \mu_k}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu_k} = \frac{l}{2} + \frac{l}{4\mu_k} \cdot \frac{2\mu_k}{hl \left(1 + \frac{\mu_k^2}{h^2 l^2}\right)} = \frac{l}{2} \cdot \frac{h^2 l^2 + hl + \mu_k^2}{h^2 l^2 + \mu_k^2}. \end{aligned}$$

При  $\lambda = \lambda_k$  загальний розв'язок рівняння (3.25) має вигляд:

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{l},$$

де  $A_k$ ,  $B_k$  – довільні постійні. Таким чином, функції

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = \left( A_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{l} \right) \sin \frac{\mu_k x}{l}$$

задовольняють рівняння (3.20) і крайові умови (3.21) при  $\forall A_k, B_k$ . В силу лінійності й однорідності рівняння (3.20) будь-яка лінійна комбінація з функцій  $u_k(x, t)$  буде також розв'язком рівняння (3.20) при умовах (3.21).

Таким чином, функція

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{l} \right) \sin \frac{\mu_k x}{l} \quad (3.28)$$

при будь-яких значеннях постійних  $A_k, B_k$  задовольняє рівняння (3.20) і крайові умови (3.21). Коефіцієнти  $A_k, B_k$  визначимо з початкових умов (3.22), що приймають вигляд

$$u(x,0) \equiv \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\mu_k x}{l},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{a\mu_k}{l} \sin \frac{\mu_k x}{l}. \quad (3.29)$$

Формули (3.29) представляють собою розклад заданих функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  у ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (3.26)-(3.27). Коефіцієнти Фур'є вказаних розкладів обчислюються за відомими формулами [власність (3.20), формула (3.19)]:

$$A_k = \frac{2}{l} \cdot \frac{\mu_k^2 + h^2 l^2}{\mu_k^2 + h^2 l^2 + hl} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\mu_k x}{l} dx,$$

$$B_k = \frac{l}{a\mu_k} \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{\mu_k^2 + h^2 l^2}{\mu_k^2 + h^2 l^2 + hl} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\mu_k x}{l} dx. \quad (3.30)$$

Таким чином, розв'язок задачі (3.20)-(3.22) представляється рядом (3.28), де  $A_k, B_k$  визначаються формулами (3.30).

### Завдання 3.

Вивчити вимушені коливання струни, кінець  $x=0$  якої закріплений, а на кінець  $x=l$  діє гармонійна сила, що викликає зміщення  $A \sin \omega t$ .

### Розв'язок.

Для вирішення поставленої фізичної задачі, необхідно знайти розв'язок рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

що задовольняє наступні крайові та початкові умови:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = A \sin \omega t, \quad t > 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Оскільки крайова умова в точці  $x=l$  не нульова, то відразу відокремити змінні не можна. Спочатку потрібно перетворити задачу таким чином, щоб були однорідні крайові умови. З цією метою підберемо функцію  $W(x,t) = F(x) \cdot \sin \omega t$  так, щоб вона задовольняла однорідне рівняння

коливання струни і задані крайові умови. Тоді отримаємо:

$$F''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} F(x) = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(l) = A.$$

Звідси матимемо

$$F(x) = A \left( \sin \frac{\omega l}{a} \right)^{-1} \sin \frac{\omega x}{a},$$

а, отже, функція

$$W(x, t) = A \left( \sin \frac{\omega l}{a} \right)^{-1} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t$$

задовольняє рівняння та задані крайові умови.

Тепер представимо розв'язок поставленої задачі у вигляді суми

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t),$$

де  $V(x, t)$  – нова невідома функція. Для її визначення маємо наступну крайову задачу з нульовими крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$V(0, t) = V(l, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$V(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{A \omega \sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}, \quad 0 < x < l.$$

Для знаходження функції  $V(x, t)$  застосуємо метод Фур'є. Власними функціями задачі будуть  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ , власні значення  $\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2$ ,

$n=1, 2, 3, \dots$ .  $\|X_n(x)\|^2 = \frac{l}{2}$ . Тоді

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{a n \pi t}{l} + B_n \sin \frac{a n \pi t}{l} \right) \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

З початкових умов знаходимо:

$$A_n = 0, \quad B_n = 2(-1)^{n-1} A \omega \left| \omega^2 l^2 - n^2 \pi^2 a^2 \right|^{-1/2}.$$

Тоді остаточно матимемо

$$u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\sin \frac{\omega l}{a}} + 2A \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 l^2 - n^2 \pi^2 a^2} \sin \frac{n \pi a t}{l} \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

Тут ми вважаємо, що частота вимушених коливань  $\omega$  не співпадає з частотою власних коливань  $n\pi a/l$ , тобто  $\omega \neq n\pi a/l$  ні при одному  $n \in N$ . У протилежному випадку підбирати функцію потрібно інакше.

### 3.3.2. Крайові задачі для неоднорідного рівняння коливань струни

#### Питання для повторення

1. Дати визначення однорідних крайових умов.
2. Як застосовувати метод Фур'є у випадку, коли крайові умови неоднорідні?
3. Викласти метод Фур'є для неоднорідного рівняння коливань струни.

#### Методичні вказівки

Нульові крайові умови (при  $x=0$  і  $x=l$ ) відносяться до так званих однорідних крайових умов [2].

Крайові умови називають *однорідними*, якщо з того факту, що їм задовольняють функції  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , випливає, що їм задовольняють і будь-яка лінійна комбінація, яка складена з цих функцій.

До однорідних крайових умов, крім нульових, відносяться умови періодичності функцій з одним і тим же періодом, умови обмеженості функції на нескінченості. Якщо крайові умови однорідні, то для розв'язання такої задачі можна застосовувати метод Фур'є. Якщо ж вони неоднорідні, то спочатку потрібно перетворити задачу так, щоб крайові умови були однорідними. При цьому рівняння може стати неоднорідним, а тому не вдається відокремити змінні так, як це зроблено у тих випадках, що розглядалися раніше. Перейдемо до розгляду конкретних прикладів крайових задач для неоднорідного рівняння коливань струни, які будемо розв'язувати методом Фур'є.

#### Завдання 1.

Знайти закон повздовжніх коливань стержня  $0 < x < l$  під дією сили  $F(t) = At^3$ ,  $A = \text{const}$ , прикладеної з моменту часу  $t=0$  до кінця  $x=l$ , при умові, що кінець  $x=0$  закріплений жорстко.

#### Розв'язок.

Математична постановка вихідної фізичної задачі наступна:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{A}{ES} t^3, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l.$$

Щоб позбутись неоднорідності в граничній умові, будемо шукати розв'язок поставленої задачі у вигляді

$$u(x,t) = \frac{A}{ES}xt^3 + V(x,t), \quad (3.31)$$

що приводить до наступної крайової задачі з однорідними крайовими умовами для нової невідомої функції  $V(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{6A}{ES}xt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (3.32)$$

$$V(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.33)$$

$$V(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad t > 0. \quad (3.34)$$

Оскільки для визначення функції  $V(x,t)$  одержали неоднорідне рівняння, то будемо шукати його розв'язок відразу у вигляді ряду Фур'є з невідомими коефіцієнтами  $A_n(t)$ :

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_n(x). \quad (3.35)$$

Тут  $A_n(t)$  – функції, які потрібно визначити, а  $X_n(x)$  – власні функції задачі

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l; \quad X(0) = X'(l) = 0. \quad (3.36)$$

Розв'язуючи задачу (3.36), одержимо

$$\lambda_n = \left[ \frac{\pi(2n-1)}{2l} \right]^2, \quad n \in N; \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l}, \quad \|X_n(x)\|^2 = \frac{l}{2},$$

так, що ряд (3.35) приймає вигляд:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l}. \quad (3.35')$$

Неважко перевірити, що функція  $V(x,t)$  задовольняє крайові умови (3.33). Підставимо ряд (3.35) у рівняння (3.32), розклавши при цьому праву частину рівняння у ряд за власними функціями цієї задачі, тобто представивши її у вигляді

$$-\frac{6At}{ES}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l},$$

$$\text{де } f_n(t) = -\frac{6At}{ES} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} dx = \beta_n t, \quad \text{і } \beta_n(t) = \frac{(-1)^n \cdot 48 A l^2}{ES \pi^2 (2n-1)^2}.$$

Тоді маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n''(t) + \left( \frac{\pi a(2n-1)}{2l} \right)^2 A_n(t) \right] \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l},$$

звідки випливає, що для всіх  $n \in N$  повинно виконуватись співвідношення

$$A_n''(t) + \left( \frac{\pi a(2n-1)}{2l} \right)^2 A_n(t) = \beta_n t, \quad t > 0. \quad (3.37)$$

Підстановка ряду (3.35) у початкові умови (3.34) дає:

$$A_n(0) = 0, \quad A_n'(0) = 0. \quad (3.38)$$

Отже, для визначення функції  $A_n(t)$  одержали задачу Коші (3.37), (3.38), розв'язок якої неважко визначити:

$$A_n(t) = \frac{4l^2 \beta_n t}{\pi^2 a^2 (2n-1)^2} - \frac{8l^3 \beta_n \sin \frac{\pi a(2n-1)t}{2l}}{\pi^3 a^3 (2n-1)^3}.$$

Таким чином, розв'язком вихідної задачі буде функція

$$u(x,t) = \frac{A}{ES} x t^3 + \frac{4l^2}{\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left( t - \frac{2l}{\pi a(2n-1)} \right) \sin \frac{\pi a(2n-1)t}{2l} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l},$$

$$\beta_n = \frac{(-1)^n \cdot 48 A l^2}{ES \pi^2 (2n-1)^2}.$$

*Зауваження.* Більш раціональним є відшукування розв'язку даної задачі у вигляді (замість (3.31))

$$u(x,t) = \frac{A t^3}{ES} \cdot \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} + V(x,t).$$

### **Завдання 2.**

До струни  $0 < x < l$  з жорстко закріпленими кінцями починаючи з моменту часу  $t=0$  прикладається неперервно розподілена сила з лінійною густиною  $\Phi(x,t) = x^3 \sin \omega t$ . Знайти закон коливання струни у середовищі без опору; дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

### **Розв'язок.**

В даному випадку нам необхідно знайти розв'язок крайової задачі для неоднорідного рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} x^3 \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

що задовольняє наступні початкові та крайові умови:



$$u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, 0 < x < l; u(0,t)=0, u(l,t)=0, t > 0.$$

Власні значення і власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l; X(0) = 0, X(l) = 0$$

нами вже знаходились та мають вигляд:

$$\lambda_n = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{m\pi x}{l}, \|X_n\|^2 = \frac{l}{2}, n \in N.$$

Тепер розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів Фур'є  $A_n(t)$  на основі рівняння і початкових умов одержимо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} A_n''(t) + \left(\frac{m\pi a}{l}\right)^2 A_n(t) = \frac{\beta_n}{\rho} \sin \omega t, \beta_n = (-1)^n \frac{2f^3 n^2 \pi^2 - 12l^2}{n^3 \pi^3}, t > 0 \\ A_n(0) = 0, A_n'(0) = 0, n \in N. \end{cases} \quad (3.39)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли  $\omega \neq n\pi/l$ , тобто частота вимушених коливань не співпадає з частотою власних коливань. Тоді розв'язком задачі Коші будуть функції

$$A_n(t) = \frac{\beta_n}{\rho} \frac{l^2 \sin \omega t - \frac{\omega l^3}{m\pi a} \sin \frac{m\pi a t}{l}}{n^2 \pi^2 a^2 - \omega^2 l^2}, n \in N, \quad (3.40)$$

а розв'язок поставленої задачі запишеться

$$u(x,t) = \frac{2}{\rho a \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2 \pi^2 l - 6) \left( m\pi a \sin \omega t - \omega l \sin \frac{m\pi a t}{l} \right)}{n^4 (n^2 \pi^2 l^2 - \omega^2 l^2)} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Нехай тепер  $\omega = \pi n_0/l$ , тобто частота вимушених і власних коливань при  $n = n_0$  співпадають (цей випадок називається резонансним). При  $n \neq n_0$  розв'язок задачі Коші (3.39), як і раніше, має вигляд (3.40), оскільки  $\omega = n\pi/l, n \neq n_0$ . Знайдемо розв'язок задачі Коші (3.39) у випадку  $n = n_0$  і  $\omega = \pi n_0/l$ . У цьому випадку задача може бути переписана у вигляді:

$$A_{n_0}''(t) + \omega^2 A_{n_0}(t) = \frac{\beta_{n_0}}{\rho} \sin \omega t, t > 0; A_{n_0}(0) = A_{n_0}'(0) = 0. \quad (3.41)$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.41) шукаємо у вигляді:

$$\bar{A}_{n_0}(t) = t(B \cos \omega t + C \sin \omega t).$$

Одержимо:

$$C=0, \quad B = -\frac{1}{2\omega\rho} \beta_{n_0}.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.41) матиме вигляд:

$$A_{n_0}(t) = -\frac{\beta_{n_0} t}{2\omega\rho} \cos \omega t + E_{n_0} \sin \omega t + D_0 \cos \omega t,$$

а розв'язком задачі Коші (3.41) буде:

$$A_{n_0}(t) = -\frac{\beta_{n_0} t}{2\omega\rho} \cos \omega t + \frac{1}{2\omega^2\rho} \beta_{n_0} \sin \omega t.$$

Розв'язок поставленої задачі в цьому випадку можемо записати у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{\beta_{n_0}}{2\omega^2\rho} (\sin \omega t - t\omega \cos \omega t) \operatorname{Sin} \omega x + \\ + \frac{2}{\pi^4 \rho} \sum_{n=1, n \neq n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 \pi^2 l - 6) \left( m a \sin \omega t - \omega l \sin \frac{\pi a t}{l} \right)}{n^4 (n^2 \pi^2 l^2 - \omega^2 l^2)} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

### 3.3.3. Крайові задачі для рівняння коливань мембрани

#### Питання для повторення

1. Записати рівняння поперечних коливань мембрани.
2. Записати оператор Лапласа в циліндричній системі координат.
3. Записати рівняння Бесселя і дати характеристику його розв'язків.

#### Методичні вказівки

При розв'язанні крайових задач у кругових областях, які володіють "циліндричною" симетрією у [1,2] часто приходять до звичайного диференціального рівняння

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0, \quad \nu = \text{const}, \quad (3.42)$$

яке називають *рівнянням циліндричних функцій  $\nu$ -го порядку* або *рівнянням Бесселя  $\nu$ -го порядку*.

Рівнянням Бесселя  $\nu$ -го порядку має особливу точку при  $x=0$ , тому його розв'язок  $u(x)$  шукають у вигляді степеневого ряду

$$u(x) = x^\mu (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots),$$

де  $\mu$  – характеристичний показник, який необхідно визначати. При  $\mu = \nu \geq 0$  отримаємо частинний розв’язок рівняння (3.42) у вигляді *функції Бесселя першого роду  $\nu$ -го порядку*

$$I_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (3.43)$$

Якщо вибрати  $\mu = -\nu$ , то знайдемо ще один частинний розв’язок рівняння (3.42)

$$I_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (3.44)$$

При нецілих значеннях  $\nu$  функції  $I_{\nu}(x)$  і  $I_{-\nu}(x)$  є лінійно незалежними, так що загальний розв’язок рівняння (3.42) у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$u(x) = C_1 I_{\nu}(x) + C_2 I_{-\nu}(x). \quad (3.45)$$

Якщо  $\nu = n$  – ціле, то  $I_n(x)$  і  $I_{-n}(x)$  лінійно залежні, а тому у цьому випадку не можна записати загальний розв’язок рівняння (3.42) у вигляді (3.45). Функція Неймана (Вебера)

$$Y_{\nu}(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} (I_{\nu}(x) \cos \pi \nu - I_{-\nu}(x))$$

при будь-якому  $\nu \geq 0$  також є частинним розв’язком рівняння (3.42), лінійно незалежним з  $I_{\nu}(x)$ . Її називають *функцією Бесселя другого роду  $\nu$ -го порядку*. Таким чином, загальний розв’язок рівняння (3.42) завжди можна записати у вигляді лінійної комбінації функцій Бесселя першого і другого роду  $\nu$ -го порядку:

$$u(x) = C_1 I_{\nu}(x) + C_2 Y_{\nu}(x).$$

Наведемо властивості функцій Бесселя, які використовуються у прикладних задачах.

Мають місце рекурентні і граничні співвідношення

$$\begin{aligned} I'_{\nu}(x) &= I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_{\nu}(x), & Y'_{\nu}(x) &= Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_{\nu}(x), \\ I'_{\nu}(x) &= -I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_{\nu}(x), & Y'_{\nu}(x) &= -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_{\nu}(x), \\ \frac{d}{dx} [x^{\nu} I_{\nu}(x)] &= x^{\nu} I_{\nu-1}(x), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_\nu(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } \nu < 0 \\ 1 & \text{при } \nu = 0 \\ 0 & \text{при } \nu > 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} Y_\nu(x) = \infty \quad \text{при } \nu > 0. \quad (3.47)$$

Для рівняння (3.42) поставимо задачу Штурма-Ліувілля [2]:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda x^2 - \nu^2)y(x) = 0, & 0 < x < l, \\ |y(0)| < \infty, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} \alpha y(l) + \beta y'(l) = 0, & \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

У самоспряженому виді рівняння (3.48) має вигляд:

$$(xy'(x))' - \frac{\nu^2}{x} y(x) + \lambda xy(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.48')$$

Тут коефіцієнти (див. п. 3.3 ч. 2)  $p = x > 0$ ,  $\rho = x > 0$ ,  $q = \frac{\nu^2}{x} > 0$ ,  $0 < x < l$ ,  $a = 0$ ,  $b = l$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta$ ,  $\alpha + \beta > 0$ , тому  $\lambda > 0$ . Зробимо заміну змінних  $\tau = \sqrt{\lambda}x$ . При цьому рівняння (3.48') перетвориться до вигляду

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \tau \frac{dy}{d\tau} + (\tau^2 - \nu^2)y = 0,$$

а його загальний розв'язок запишеться:  $y(\tau) = C_1 I_\nu(\tau) + C_2 Y_\nu(\tau)$ . Повертаючись до змінної  $x$ , запишемо загальний розв'язок рівняння (3.48):

$$y(x) = C_1 I_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x).$$

Враховуючи першу умову з (3.49) і співвідношення (3.47), маємо  $C_2 = 0$ . На основі другої умови (3.49) одержимо рівняння для знаходження власних значень  $\lambda_k$  задачі (3.48), (3.49):

$$\alpha I_\nu(\sqrt{\lambda}l) + \beta I'_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0. \quad (3.50)$$

У випадку першої крайової задачі будемо мати  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  і рівняння (3.50) прийме вигляд

$$I_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0. \quad (3.50')$$

Це рівняння має зчисленну множину дійсних коренів (які визначають за таблицями), позначимо їх  $\mu_k^{(\nu)}$ ,  $k \in N$ . Тоді власні значення задачі (3.48), (3.49) будуть  $\lambda_k = \left(\mu_k^{(\nu)} / l\right)^2$ ,  $k \in N$ , а відповідні їм власні функції:  $y_k(x) = I_\nu\left(\mu_k^{(\nu)} x / l\right)$ . Норма  $\|y_k(x)\|$  визначається співвідношенням

$$\|y_k(x)\|^2 = \int_0^l I_v^2(\mu_k^{(v)} x/l) dx = \frac{l^2}{2} [I_v(\mu_k^{(v)})]^2. \quad (3.51)$$

У випадку другої крайової задачі  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$  і рівняння (3.50) матиме вигляд

$$I_v'(\sqrt{\lambda}l) = 0. \quad (3.50'')$$

Позначаючи корені цього рівняння  $\omega_k^{(v)}$ ,  $k \in N$ , одержимо розв'язок задачі (3.48), (3.49) для цього випадку:

$$\lambda_k = (\omega_k^{(v)}/l)^2, \quad y_k(x) = I_v(\omega_k^{(v)} x/l), \quad \|y_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{(\omega_k^{(v)})^2}\right) I_v(\omega_k^{(v)}) \quad (3.51')$$

Аналогічно розв'язується і третя крайова задача. У цьому випадку в рівнянні (3.50)  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Якщо  $\gamma_k^{(v)}$  – корінь рівняння (3.50), то власні значення задачі (3.48), (3.49)  $\lambda_k = (\gamma_k^{(v)}/l)^2$ ,  $k \in N$ , власні функції

$$y_k(x) = I_v(\gamma_k^{(v)} x/l), \quad \|y_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2 - v^2 \beta^2}{\beta^2 (\gamma_k^{(v)})^2}\right) I_v^2(\gamma_k^{(v)}). \quad (3.51'')$$

### Завдання 1.

Знайти закон власних поперечних коливань однорідної круглої мембрани радіусом  $l$ , закріпленої по колу, що її обмежує, якщо у початковий момент вона представляє поверхню параболоїда обертання, а початкові швидкості дорівнюють нулю.

### Розв'язок.

Оскільки задане тіло (мембрана) має форму круга, то виберемо полярну систему координат  $(r, \varphi)$  з початком координат у центрі круга. Тоді задане тіло співпадає з областю  $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq r < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ . Відхилення точок мембрани від положення рівноваги будемо характеризувати функцією  $u = u(r, \varphi, t)$ , де  $t$  – час. Вона задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega, t > 0, \quad \text{де } \Delta \equiv \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Початкові умови мають вигляд:

$$u(r, \varphi, 0) = A \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega.$$

Крайові умови:  $u(l, \varphi, t) = 0$ ,  $t > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

При  $r=0$  на шуканий розв'язок накладаємо умову обмеженості:

$$|u|_{r=0} < \infty.$$

Неважко помітити, що поставлена задача має *осьову симетрію*, оскільки: а) область  $\Omega$  є осесиметричною (при перетині її прямої  $\varphi = \text{const}$  одержимо відрізок  $[0, l]$ ); б) змінна  $\varphi$  не входить явно в умову задачі. На цій основі розв'язок матиме вигляд  $u = u(r, t)$ , а отже  $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0$  і

вихідне рівняння коливань мембрани спрощується:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 \leq r < l, t > 0.$$

Як бачимо, крайові умови (за змінною  $r$ ) та рівняння однорідні, тому скористаємось методом відокремлення змінних:  $u(r, t) = R(r) \cdot T(t)$ .

На основі рівняння для  $u(r, t)$  і крайових умов одержимо рівняння для функції  $T(t)$  і крайову задачу для функції  $R(r)$ :

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} (rR'(r))' + \lambda R(r) = 0, & 0 \leq r < l, \\ |R(0)| < \infty, & R(l) = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Крайова задача (3.53) є частинним випадком задачі (3.48), (3.49) при  $\nu = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ . Її розв'язок має вигляд:

$$\lambda_k = (\mu_k/l)^2, \quad R_k(r) = I_0(\mu_k r/l),$$

де  $I_0 \equiv 0$ ,  $k \in N$ . При цьому  $\left\| I_0 \left( \frac{\mu_k}{l} r \right) \right\|^2 = \frac{l^2}{2} [I_0(\mu_k)]^2 = \frac{l^2}{2} I_1^2(\mu_k)$ .

Загальний розв'язок рівняння (3.52) при  $\lambda = \lambda_k = (\mu_k/l)^2$  запишеться:

$$T_k(t) = C_k \cos(a\mu_k t/l) + D_k \sin(a\mu_k t/l). \quad (3.54)$$

Складемо ряд

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + D_k \sin \frac{a\mu_k t}{l} \right) I_0 \left( \frac{\mu_k r}{l} \right).$$

З початкових умов знаходимо

$$A \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_0 \left( \frac{\mu_k r}{l} \right), \quad 0 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot \frac{a\mu_k}{l} I_0 \left( \frac{\mu_k r}{l} \right).$$

Звідси визначаємо довільні сталі  $C_k$ ,  $D_k$ :

$$D_k = 0,$$

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{2A}{I^2 I_1^2(\mu_k)} \int_0^I \left(1 - \frac{r^2}{I^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_k r}{I}\right) \cdot r dr = \left| \frac{\mu_k r}{I} = y \right| = \frac{2A}{I^2 I_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} \left(1 - \frac{y^2}{\mu_k^2}\right) I_0^2(y) dy = \\
&= \frac{2A}{\mu_k^2 I_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} \left(1 - \frac{y^2}{\mu_k^2}\right) d(\mathcal{Y}_1(y)) = \frac{2A}{\mu_k^2 I_1^2(\mu_k)} \left( \mu_k I_1(\mu_k) - \mu_k I_1(\mu_k) + \frac{2}{\mu_k^2} \times \right. \\
&\times \left. \int_0^{\mu_k} y^2 I_1(y) dy \right) = -\frac{4A}{\mu_k^4 I_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} y^2 I_0'(y) dy = -\frac{4A}{\mu_k^4 I_1^2(\mu_k)} \left( \mu_k^2 I_0(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} \mathcal{Y}_0(y) dy \right) = \\
&= \frac{8A}{\mu_k^3 I_1(\mu_k)}, \quad k \in N.
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок поставленої задачі має вигляд

$$u(r, t) = 8A \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 I_1(\mu_k))^{-1} \cos \frac{a \mu_k t}{I} I_0\left(\frac{\mu_k r}{I}\right).$$

### **Завдання 2.**

Знайти закон вимушених коливань прямокутної мембрани зі сторонами  $p$  та  $q$ , дві протилежні сторони якої закріплені жорстко, а дві інші вільні. Коливання відбуваються під дією зовнішньої сили, щільність якої  $\varphi(x, y, t) = f(t) \sin(2\pi x/p) \cos(\pi y/q)$ . Початкові відхилення і початкові швидкості відсутні.

### **Розв'язок.**

Вибираючи декартову систему координат  $(x, y)$  і вважаючи закріпленими сторони  $x=0$ ,  $x=p$ , а вільними сторони  $y=0$ ,  $y=q$ , приходимо до наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= f(t) \sin \frac{2\pi x}{p} \cdot \cos \frac{\pi y}{q}, \quad 0 < x < p, 0 < y < q, t > 0, \\
u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad 0 < x < p, 0 < y < q, \quad u|_{x=0} = u|_{x=p} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=q} = 0.
\end{aligned}$$

Враховуючи неоднорідність рівняння, розв'яжемо спочатку наступну задачу на власні значення і власні функції:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v &= 0, \quad 0 < x < p, 0 < y < q; \\
v|_{x=0} = v|_{x=p} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=q} = 0.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Задачу (3.55) будемо розв'язувати методом Фур'є, прийнявши

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \tag{3.56}$$

Підставляючи (3.56) у (3.55), одержимо дві задачі Штурма-Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, & 0 < x < p, \\ X(0) = X(p) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) + \gamma Y(y) = 0, & 0 < y < q, \\ Y(0) = Y(q) = 0 \end{cases}$$

при цьому  $\lambda = \mu + \gamma$ . Розв'язками цих задач будуть функції

$$\mu_k = (k\pi/p)^2, \quad X_k(x) = \sin(k\pi x/p), \quad k=1,2,\dots;$$

$$\gamma_m = (m\pi/q)^2, \quad Y_m(y) = \cos(m\pi y/q), \quad m=0,1,2,\dots$$

Таким чином, власні значення і власні функції задачі (3.55) мають вигляд:

$$\lambda_{km} = \pi^2 \left( \frac{k^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right), \quad k=1,2,\dots, \quad m=0,1,2,\dots; \quad v_{km}(x,y) = \sin \frac{k\pi x}{p} \cdot \cos \frac{m\pi y}{q}.$$

Знайдемо тепер розв'язок задачі (3.54) у вигляді ряду Фур'є з невідомими коефіцієнтами  $A_{km}(t)$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{p} \cdot \cos \frac{m\pi y}{q}. \quad (3.57)$$

Підставляючи (3.57) у вихідне рівняння для  $u(x, y, t)$ , одержимо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_{km}''(t) + a^2 \lambda_{km} A_{km}(t) \right) \sin \frac{k\pi x}{p} \cdot \cos \frac{m\pi y}{q} = f(t) \sin \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{\pi y}{q}.$$

Звідси та з нульових початкових умов одержимо задачу Коші для визначення функції  $A_{km}(t)$ :

$$\begin{cases} A_{km}''(t) + a^2 \lambda_{km} A_{km}(t) = 0, & k=1,3,4,\dots; \quad m=0,1,3,4,\dots; \quad t > 0, \\ A_{21}''(t) + a^2 \pi^2 \left( \frac{4}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) A_{21}(t) = f(t), & t > 0, \\ A_{km}(0) = 0, \quad A_{km}'(0) = 0, & k=1,2,3,\dots; \quad m=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Визначаючи розв'язок цієї задачі у вигляді

$$A_{km}(t) = 0, \quad k \neq 2, \quad m \neq 1, \quad A_{21}(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t f(\tau) \sin \alpha(t-\tau) d\tau, \quad \alpha = \frac{a\pi}{pq} \sqrt{4q^2 + p^2},$$

остаточно знаходимо шукану функцію

$$u(x, y, t) = \frac{pq}{a\pi \sqrt{4q^2 + p^2}} \left( \int_0^t f(\tau) \sin \alpha(t-\tau) d\tau \right) \sin \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{\pi y}{q}.$$

### 3.4. Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи метод відокремлення змінних (метод Фур'є),



визначити закон коливання струни з закріпленими кінцями  $x=0$  та  $x=l$ , якщо початкова швидкість точок струни дорівнює нулю, а початкове відхилення має форму трикутника з вершинами в точці  $(c, h)$  (рис. 3.8).

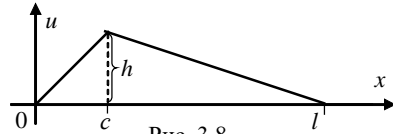


Рис. 3.8.

2. Струна  $0 \leq x \leq l$  з жорстко закріпленими кінцями до моменту  $t=0$  знаходилась у стані рівноваги під дією поперечної сили  $F_0 = const$ , прикладеної до точки  $x_0$  струни перпендикулярно до незбуреного положення струни. В початковий момент часу  $t=0$  дія сили  $F_0$  раптово припиняється. Методом відокремлення змінних знайти закон коливання струни при  $t > 0$ .

3. Струна з жорстко закріпленими кінцями збурюється ударом жорсткого плоского молотка, що надає їй розподіл швидкостей

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

Методом відокремлення змінних знайти закон коливань струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю.

4. Методом відокремлення змінних знайти закон повздовжніх коливань стержня, один кінець якого ( $x=0$ ) закріплений жорстко, а другий ( $x=l$ ) вільний, при початкових умовах  $u(x,0) = kx$ ,  $u_t(x,0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

5. Знайти розв'язок задачі 1 при умові, що коливання струни здійснюються в середовищі, опір якого пропорційний швидкості.

6. До струни  $0 \leq x \leq l$  з жорстко закріпленими кінцями з моменту часу  $t=0$  прикладена сила з лінійною густиною  $\Phi(x,t) = \Phi(x) \sin \omega t$ .

Методом відокремлення змінних знайти закон коливання струни в середовищі без опору.

7. Один кінець стержня ( $x=l$ ) закріплений пружно, а до другого ( $x=0$ ) прикладена повздовжня сила  $F_0 = const$ , під дією якої стержень знаходиться у стані рівноваги. Знайти коливання стержня після того, як у початковий момент часу сила  $F_0$  миттєво зникає, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю.

8. Знайти повздовжні коливання стержня  $0 \leq x \leq l$ , лівий кінець якого закріплений жорстко, а до правого з моменту часу  $t=0$  прикладена сила  $F(t) = At$ ,  $0 < t < +\infty$ ,  $A = const$ , вважаючи, що середовище не чинить опору коливанням.

9. Знайти повздовжні коливання стержня  $0 \leq x \leq l$  в середовищі без

опору, якщо кінець  $x=0$  стержня закріплений жорстко, а до кінця  $x=l$ , починаючи з моменту  $t=0$  прикладена сила  $F(t) = A \sin \omega t$ ,  $0 < t < +\infty$ .

10. Знайти коливання струни  $0 \leq x \leq l$  з жорстко закріпленими кінцями під дією розподіленої сили, прикладеної з моменту  $t=0$ , яка має щільність  $F(x, t) = \Phi(x)t^m$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 < t < +\infty$ ,  $m > -1$ , вважаючи, що середовище не чинить опору коливанням.

## 4. Рівняння параболічного типу

### 4.1. Крайові задачі для рівняння теплопровідності стержня

#### Питання для повторення

1. Записати рівняння, що описує процес теплопровідності у стержні.
2. Дати фізичну інтерпретацію крайових умов першого, другого і третього роду для цього рівняння.
3. Записати рівняння, що описує процес теплопровідності у кулі.

#### Завдання 1.

Знайти закон розподілу температури в стержні  $0 \leq x \leq l$  з теплоізоляованою бічною поверхнею, якщо на його кінцях підтримується нульова температура, а початкова температура  $u_0 = \text{const}$ .

#### Розв'язок.

Математична постановка сформульованої фізичної задачі полягає у знаходженні розв'язку однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (4.1)$$

що задовольняє початкову

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.2)$$

та однорідні граничні умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (4.3)$$

Відповідно до схеми методу відокремлення змінних, будемо шукати нетривіальний розв'язок рівняння (4.1), що задовольняє однорідні граничні умови (4.3) і представляється у вигляді

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (4.4)$$

Підставляючи форму розв'язку (4.4) в рівняння (4.1) та поділивши обидві частини на  $a^2 X \cdot T$ , після відокремлення змінних приходимо до наступних звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій  $X$  і  $T$ :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.5)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (4.6)$$

де  $\lambda = \text{const}$ . Скориставшись граничними умови (4.3), отримаємо наступну задачу на власні значення

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (4.7)$$

розв'язками якої є

$$\lambda_n = (\pi n / l)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad X_n(x) = \sin(\pi n x / l). \quad (4.8)$$

Цим значенням  $\lambda_n$  будуть відповідати наступні розв'язки рівняння (4.6)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (4.9)$$

де  $C_n$  – поки що невідомі коефіцієнти.

Таким чином, частинними розв'язками рівняння (4.1), що задовольняють нульові граничні умови, є функції

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (4.10)$$

Тоді і ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (4.11)$$

також буде задовольняти рівняння (4.1) та граничні умови (4.3).

Вимагаючи задоволення початкової умови, отримаємо

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x = u_0, \quad (4.12)$$

тобто  $C_n$  є коефіцієнтами Фур'є функції  $u_0$  при розкладі її в ряд за синусами на інтервалі  $(0,l)$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi = -\frac{2u_0}{l} \cdot \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi n \xi}{l} \Big|_0^l = \frac{2u_0}{\pi} (1 - \cos \pi n) = \frac{2u_0}{\pi} (1 - (-1)^n).$$

За формулою (4.11) розв'язок задачі запишеться у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{\pi} (1 - (-1)^n) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Оскільки при парних  $n$  коефіцієнт дорівнює нулю, а при непарних – двом, остаточно:

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x.$$

### **Завдання 2.**

Початкова температура стержня  $0 \leq x \leq l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею дорівнює  $u_0 = \text{const}$ , а на його кінцях підтримується постійна температура  $u(0,t) = u_1 = \text{const}$ ,  $u(l,t) = u_2 = \text{const}$ ,  $0 < t < +\infty$ . Знайти закон розподілу температури стержня при  $t > 0$  і знайти стаціонарну температуру  $\tilde{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t)$ .

### **Розв'язок.**

Закон розподілу температури стержня буде визначатись як розв'язок рівняння  $u_t = a^2 u_{xx} (0 < x < l, 0 < t < \infty)$ , що задовольняє початкову

$u(x,0)=u_0$  ( $0 < x < l$ ) та граничні умови  $u(0,t)=u_1$ ,  $u(l,t)=u_2$  ( $0 < t < +\infty$ ).

Шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді  $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ , де функція  $v(x,t)$  буде визначатись як розв'язок рівняння

$$v_t = a^2 v_{xx} + [a^2 w_{xx} - w_t],$$

що задовольняє умови

$$v(x,0) = \bar{v}(x), \quad \bar{v}(x) = u_0 - w(x,0);$$

$$v(0,t) = \bar{v}_1(t), \quad \bar{v}_1(t) = u_1 - w(0,t); \quad v(l,t) = \bar{v}_2(t), \quad \bar{v}_2(t) = u_2 - w(l,t).$$

Допоміжну функцію  $w(x,t)$  виберемо таким чином, щоб  $\bar{v}_1(t) = 0$  і  $\bar{v}_2(t) = 0$ . Для цього достатньо покласти  $w(x,t) = u_1 + x[u_2 - u_1]/l$ .

Враховуючи значення функції  $w(x,t)$ , задача для знаходження функції  $v(x,t)$  переписеться у вигляді

$$v_t = a^2 v_{xx}; \quad v(x,0) = u_0 - u_1 + (u_2 - u_1)x/l, \quad v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

ІІ розв'язок  $v(x,t)$  знаходимо аналогічно до завдання 1.

Визначимо коефіцієнт  $C_n$  у формулі (4.11):

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \left( u_0 - u_1 - \frac{\xi}{l} (u_2 - u_1) \right) \sin \frac{\pi \xi}{l} d\xi = \frac{2(u_0 - u_1)}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi \xi}{l} d\xi + \frac{2(u_1 - u_2)}{l^2} \times \\ &\times \int_0^l \xi \sin \frac{\pi \xi}{l} d\xi = -\frac{2(u_0 - u_1)}{l} \cdot \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi \xi}{l} \Big|_0^l + \frac{2(u_1 - u_2)}{l^2} \left[ -\frac{l}{\pi} \xi \cos \frac{\pi \xi}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{\pi} \times \right. \\ &\times \int_0^l \cos \frac{\pi \xi}{l} d\xi \left. \right] = \frac{2(u_0 - u_1)}{\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{2(u_1 - u_2)}{l^2} \left[ \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{\pi \xi}{l} \Big|_0^l - \frac{(-1)^n l^2}{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \times \\ &\times (u_0 - u_1) (1 - (-1)^n) + \frac{2(-1)^{n+1} (u_1 - u_2)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left( (u_0 - u_1) (1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} (u_1 - u_2) \right). \end{aligned}$$

Тоді розв'язок  $v(x,t)$  запишеться у вигляді

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( (u_0 - u_1) (1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} (u_1 - u_2) \right) e^{-(\pi n/l)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

А розв'язок вихідної задачі буде

$$u(x,t) = u_1 + \frac{x(u_2 - u_1)}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( (u_0 - u_1) (1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} (u_1 - u_2) \right) e^{-(\pi n a/l)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Знайдемо стаціонарну температуру

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( (u_0 - u_1) (1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} (u_1 - u_2) \right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\left. + u_1 + x(u_2 - u_1)/l \right\} = u_1 + x(u_2 - u_1)/l. \end{aligned}$$

**Завдання 3.**

Початкова температура стержня  $0 \leq x \leq l$  є довільною функцією  $f(x)$ , а температури кінців постійні:  $u(0,t) = u_1 = \text{const}$ ,  $u(l,t) = u_2 = \text{const}$ ,  $0 < t < +\infty$ . На бічній поверхні проходить теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого рівна  $u_0 = \text{const}$ . Знайти закон розподілу температури стержня при  $t > 0$ . Розглянути частковий випадок, коли  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $f(x) = 0$ .

**Розв'язок.**

Закон розподілу температури стержня в даному випадку є розв'язком крайової задачі

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0) \quad (0 < x < l, 0 < t < +\infty),$$

що задовольняє умови

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < l), \quad u(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_2 \quad (0 < t < +\infty).$$

Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + w(x) + v(x,t). \quad (4.13)$$

Підставляючи форму розв'язку (4.13) у вихідне рівняння та умови, одержимо

$$v_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} - h(w + v).$$

$$u(x,0) = u_0 + w(x) + v(x,0) = f(x),$$

$$u(0,t) = u_0 + w(0) + v(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_0 + w(l) + v(l,t) = u_2.$$

Функцію  $w(x,t)$  шукаємо як розв'язок рівняння  $a^2 w_{xx} - hw = 0$ , що задовольняє умови  $w(0) = u_1 - u_0$ ,  $w(l) = u_2 - u_0$ .

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$w(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x}.$$

Враховуючи граничні умови, знаходимо

$$C_1 = \frac{u_2 - u_0 - (u_1 - u_0)e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}l}}{e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}l}}, \quad C_2 = \frac{(u_1 - u_0)e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l} - u_2 + u_0}{e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}l}},$$

і, остаточно,

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{(u_2 - u_0) \left( e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x} \right) + (u_1 - u_0) \left( e^{\frac{\sqrt{h}}{a}(l-x)} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}(l-x)} \right)}{\left( e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}l} \right)} = \\ &= \frac{(u_2 - u_0) sh \frac{\sqrt{h}}{a}x + (u_1 - u_0) sh \frac{\sqrt{h}}{a}(l-x)}{sh \frac{\sqrt{h}}{a}l}. \end{aligned}$$

Функцію  $v(x,t)$  шукаємо як розв'язок рівняння

$$v_t = a^2 v_{xx} - hv, \quad (4.14)$$

який задовольняє умови

$$v(x,0) = f(x) - w(x) - u_0, \quad v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0.$$

Для знаходження розв'язку цієї задачі скористаємось методом відокремлення змінних, тобто шукатимемо функцію  $v(x,t)$  у вигляді  $v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ .

Підставляючи цю форму розв'язку у рівняння (4.14) та поділивши ліву і праву частину рівності на  $a^2 X(x)T(t)$ , одержимо

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} + \frac{h}{a^2} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Враховуючи граничні умови, для визначення функції  $X(x)$  приходимо до наступної задачі на власні значення

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Звідки матимемо  $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ ,  $X_n(x) = \sin(\pi n x/l)$ .

Для визначення функції  $T(t)$  маємо рівняння  $T' + (h + \pi^2 n^2 a^2/l^2)T = 0$ , розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-(h + \pi^2 n^2 a^2/l^2)t}.$$

Використовуючи далі стандартну схему методу відокремлення змінних, одержимо розв'язок задачі у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(h + \pi^2 n^2 a^2/l^2)t} \sin(\pi n x/l),$$

де коефіцієнти  $A_n$ , з врахуванням початкової умови, визначаються за формулою

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l [f(\xi) - w(\xi) - u_0] \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Підставляючи знайдені вирази для функцій  $w(x)$  та  $v(x,t)$  у формулу (4.13), остаточно знаходимо розв'язок вихідної задачі.

У випадку, коли  $u_1 = u_2 = 0$  і  $f(x) = 0$ , матимемо:

$$w(x) = -u_0 \frac{sh \frac{\sqrt{h}}{a} x + sh \frac{\sqrt{h}}{a} (l-x)}{sh \frac{\sqrt{h}}{a} l},$$

$$v(x,t) = -\frac{4hl^2 u_0}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 \pi^2 a^2 + hl^2)} e^{-(h + \pi^2 (2k-1)^2 a^2/l^2)t} \sin \frac{\pi(2k-1)x}{l}.$$

## 4.2. Крайові задачі для рівняння теплопровідності у просторових областях

### Завдання 1.

Температура поверхні кулі радіусом  $l$  підтримується при сталій температурі  $u_0$ . Визначити температуру внутрішніх точок кулі, якщо початкова температура залежить лише від відстані цієї точки до центра кулі.

### Розв'язок.

Виберемо сферичну систему координат  $(r, \varphi, \theta)$  з початком координат у центрі кулі. Тоді задача зводиться до інтегрування рівняння теплопровідності

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad t > 0,$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

при початковій умові  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $0 \leq r < l$ ,

та граничних умовах:  $u|_{r=l} = u_0$ ,  $|u|_{r=0} < \infty$ .

Оскільки задача володіє радіальною симетрією, то шукатимемо функцію  $u = u(r, t)$ , що задовольняє рівняння виду  $u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$ .

Введемо функцію  $v(r, t) = r(u(r, t) - u_0)$ . Тоді для  $v$  одержимо:  $v_t = r u_t$ ,  $v_r = (u - u_0) + r u_r$ ,  $v_{rr} = 2u_r + r u_{rr}$ , і вона є розв'язком наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad 0 \leq r < l, \quad t > 0,$$

$$v(r, 0) = r(f(r) - u_0), \quad 0 \leq r < l, \quad v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

Розв'язок цієї задачі знаходимо так само, як і у завданні 1 п.4.1. Він має вигляд:

$$v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k l \frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2} \cdot \sin \frac{k\pi r}{l}, \quad \text{де } C_k = \frac{2}{l} \int_0^l (f(r) - u_0) r \cdot \sin \frac{k\pi r}{l} dr.$$

### Завдання 2.

Дано необмежений круговий циліндр радіуса  $l$ . Знайти розподіл температури у внутрішніх точках циліндра в момент часу  $t > 0$ , якщо на поверхні циліндра увесь час  $t > 0$  підтримується нульова температура та відома початкова температура точок циліндра:  $u|_{t=0} = A I_0(\mu_k r/l)$ , де  $\mu_k$  –



корінь рівняння  $I_0(\mu_k) = 0$ .

**Розв'язок.** Виберемо циліндричну систему координат  $(r, \varphi, z)$ , направивши вісь  $Oz$  по осі циліндра. Тоді температура  $u = u(r, \varphi, z, t)$  точок циліндра буде визначатись розв'язком наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \quad -\infty < z < \infty;$$

$$u|_{t=0} = A I_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad 0 \leq r < l; \quad u|_{r=l} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty.$$

Оскільки задача володіє осьовою симетрією і є до того ж плоско-паралельною [по-перше, змінна  $z$ , як і  $\varphi$ , не входить явно в умову задачі і, по-друге, при перетині циліндра площинами  $z = \text{const}$  одержимо один і той самий круг радіуса  $l$ ]. Тому природно шукати функцію  $u = u(r, t)$  як розв'язок крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = A I_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad 0 \leq r < l; \quad u|_{r=l} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty.$$

Розв'язок цієї задачі має вид:

$$u(r, t) = A e^{-\left(\frac{a\mu_k}{l}\right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

### 4.3. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжиною  $l$  зі сталою початковою температурою  $u_0$ , якщо в лівому кінці стержня температура змінюється за законом  $u_0 \cos \omega t$  ( $\omega = \text{const}$ ), а в правому – підтримується температура  $u_0$ . Бічна поверхня стержня теплоізолювана.

2. Дано тонкий однорідний ізотропний стержень довжини  $l$ , початкова температура якого рівна нулю. На кінці  $x=l$  підтримується нульова температура, а на кінці  $x=0$  вона зростає пропорційно часу, що минає:  $u(t, 0) = At$ ,  $A = \text{const}$ . Бічна поверхня теплоізолювана. Знайти закон зміни температури всередині стержня.

3. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному сте-

ржні довжини  $l$  при вільному теплообміні, якщо його початкова температура задана рівністю  $u(0,x)=u_0\left(\frac{x}{l}\right)$ ,  $u_0=const$ . Бічна поверхня та лівий кінець стержня теплоізовані, а в правому кінці підтримується стала температура  $u_0$ .

4. Дано тонкий однорідний стержень довжини  $l$ , початкова температура якого рівна  $u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$ ,  $u_0, u_1 = const$ . Кінець стержня  $x=0$  має сталу температуру  $u_0$ , а кінець  $x=l$  – сталу температуру  $u_1$ . Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із оточуючим середовищем, температура якого рівна нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .

5. Дано тонкий однорідний стержень довжини  $l$ , початкова температура якого рівна  $u_0 = const$ . На кінці  $x=l$  підтримується стала температура  $u_0$ , а на кінці  $x=0$  і через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого рівна нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .

6. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини  $l$  при вільному теплообміні, якщо початкова температура цього стержня рівна нулю, а на лівому кінці вона змінюється за законом  $A(1 - e^{-\alpha t})$ ,  $A\alpha = const$ , а через правий – проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого рівна нулю. Бічна поверхня стержня теплоізована.

7. Знайти розв'язок та дати фізичну інтерпретацію крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0 = const, \quad 0 < x < l;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = Q = const, \quad \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \right|_{x=l} = \alpha u_0, \quad t > 0, \quad \alpha = const.$$

8. Дано тонку однорідну прямокутну пластинку, контур якої підтримується при сталій температурі. Початковий розподіл температури відомий. Визначити температуру точок пластинки при  $t > 0$ .

9. Визначити температуру усередині однорідної кулі радіусом  $l$ , якщо на поверхні кулі відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона із середовищем, що має нульову температуру, а  $u|_{t=0} = f(r)$ .

10. Знайти розподіл температури в брусі прямокутного перерізу, дві протилежні грані  $y=0$  та  $y=b$  якого знаходяться відповідно при темпе-

ратурі 0 і  $u_0 = const$ . Дві інші грані  $x=0$  і  $x=l$  теплоізолювані. Початкова температура бруса відома.

11. Визначити температуру точок куба з ребром  $l$ , бічна поверхня якого теплоізолювана, на верхній основі підтримується нульова температура, а на нижній – змінюється за законом  $u|_{z=0} = \varphi(t)$ ,  $t > 0$ . У початковий момент часу куб був нагрітий рівномірно.

12. Знайти температуру нескінченного кругового циліндра  $0 \leq r \leq r_0$ , якщо його початкова температура дорівнює  $u|_{t=0} = u_0 \equiv const$ , а на його поверхню з моменту часу  $t=0$  зовні подається постійний тепловий потік щільності  $q$ .

13. Знайти розв'язок крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + t I_0(\mu_1 r), \quad 0 \leq r < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty, \quad t > 0; \quad u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < 1,$$

де  $\mu_1$  – корінь рівняння  $I_0(\mu_1) \equiv 0$ . Дати фізичну інтерпретацію задачі.

14. Знайти температуру паралелепіпеда  $0 \leq x \leq l_1$ ,  $0 \leq y \leq l_2$ ,  $0 \leq z \leq l_3$ , на поверхні якого проходить конвективний теплообмін з середовищем нульової температури, якщо його початкова температура дорівнює  $f(x, y, z)$ . Розглянути частковий випадок, коли  $f(x, y, z) = u_0 \equiv const$ .

15. Визначити температуру точок нескінченного кругового циліндра радіуса  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо початкова температура  $u|_{t=0} = u_0 = const$ .

## 5. Рівняння еліптичного типу

### 5.1. Найпростіші задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона

#### Завдання 1.

Для круга радіуса  $a$  з центром у початку координат знайти розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа, якщо а)  $u|_{\rho=a} = A$ ; в)  $u|_{\rho=a} = A + By$ ; б)  $u|_{\rho=a} = A \cos \varphi$ ; г)  $u|_{\rho=a} = Axy$ ; д)  $u|_{\rho=a} = A + B \sin \varphi$  (тут  $(\rho, \varphi)$  – полярні, а  $(x, y)$  – прямокутні координати).

#### Розв'язок.

При побудові розв'язків скористаємось тим, що функції  $x$ ,  $y$ ,  $xy$ ,  $x^2 - y^2$  та їх лінійна комбінація є гармонічними функціями.

а) Безпосередньою підстановкою функції  $u = A$  переконаємось, що вона задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Крім того, ця функція задовольняє також і граничну умову. Таким чином  $u = A$  є шуканим розв'язком.

б) Перейдемо від полярних координат  $(\rho, \varphi)$  до прямокутних  $(x, y)$ .

Гранична умова при цьому буде мати вид  $u = Ax/a$ . Звідси шуканим розв'язком буде гармонічна функція

$$u(x, y) = \frac{A}{a}x \quad \text{або} \quad u(\rho, \varphi) = \frac{A}{a}\rho \cos \varphi.$$

Використовуючи аналогічні міркування, можемо відшукати і розв'язки в інших випадках.

#### Завдання 2.

Визначити стаціонарний розподіл температури всередині сферичного шару  $a < r < b$ , якщо сфера  $r = a$  підтримується при температурі  $u_1$ , а сфера  $r = b$  – при температурі  $u_2$ .

#### Розв'язок.

Стаціонарний розподіл температури визначається розв'язком рівняння Лапласа, яке у сферичних координатах записується у вигляді

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

Розв'язок такого рівняння має вид  $u(r) = C_1 + C_2/r$ .

Враховуючи граничні умови  $u(a) = u_1 = C_1 + C_2/a$ ,  $u(b) = u_2 = C_1 + C_2/b$ , знахо-

димо вирази для коефіцієнтів  $C_1$  та  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{u_2 b - u_1 a}{b - a}, \quad C_2 = \frac{(u_1 - u_2) b a}{b - a},$$

і остаточно шуканий розв'язок

$$u(r) = \frac{u_1 a (b-1) - u_2 b (a-1)}{(b-a)r}.$$

## 5.2. Метод Фур'є розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу

### Питання для повторення

1. Сформулювати задачу Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутнику. Дати її фізичну інтерпретацію
2. Викласти схему застосування методу Фур'є для такої задачі.
3. Дати фізичну інтерпретацію крайовим умовам другого і третього роду (для рівняння Пуассона).

### Методичні вказівки

Розв'язок крайових задач теорії потенціалу в кругових областях можна отримати методом відокремлення змінних [2]. Виклад цього методу здійснимо на прикладі розв'язання внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса  $a$ :

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (5.1)$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (5.2)$$

В силу однозначності шуканого розв'язку задачі необхідно довізнати умовою періодичності шуканої функції  $u(r, \varphi)$  за змінною  $\varphi$ :

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi). \quad (5.3)$$

З вимоги неперервності і гармонічності розв'язку в крузі впливає його обмеженість при  $r=0$ :  $|u(0, \varphi)| < \infty$ .

Рівняння (5.1) в полярній системі координат  $(r, \varphi)$  запишеться:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (5.4)$$

Розв'язок задачі (5.1)-(5.4) шукатимемо у вигляді

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi).$$

На основі рівняння (5.4) і умови (5.3) отримаємо задачу на визначення власних функцій і власних значень:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad (5.5)$$

і рівняння

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \quad (5.6)$$

Розв'язок задачі (5.5) існує при  $\lambda \geq 0$ , точніше при  $\lambda = \lambda_n = n^2$  ( $n=0,1,2,\dots$ ), і має вигляд

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (5.7)$$

Значенню  $\lambda = \lambda_0 = 0$  відповідає одна власна функція  $\Phi_0(\varphi) = 1$ ,  $\|\Phi_0\|^2 = 2\pi$ . Значенню  $\lambda = \lambda_n = n^2$ ,  $n \neq 0$  відповідають дві власні функції  $\Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos n\varphi$  і  $\Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin n\varphi$   $\|\Phi_n^{(1)}\|^2 = \|\Phi_n^{(2)}\|^2 = \pi$ . При  $\lambda_0 = 0$  рівняння (5.6) запишеться у вигляді  $(rR_0(r))' = 0$  і його загальним розв'язком буде  $R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r$ .

При  $\lambda_n = n^2$ ,  $n \neq 0$ , рівняння (5.6) є рівнянням Ейлера

$$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0.$$

Поклавши  $R_n(r) = r^\alpha$ , знаходимо  $\alpha^2 = n^2$ , тобто  $\alpha = \pm n$ , так що загальний розв'язок цього рівняння при  $n \neq 0$  можна записати

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}. \quad (5.8)$$

Складемо тепер лінійну комбінацію із отриманих розв'язків і, враховуючи обмеженість шуканого розв'язку при  $r=0$  (покладемо  $D_n=0$ ,  $n=0,1,2,\dots$ ), отримаємо

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r/a)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (5.9)$$

При будь-яких значеннях сталих  $C_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) функції виду (5.9) є періодичними розв'язками рівняння (5.4), обмеженими при  $r=0$ . Коефіцієнти  $C_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  знаходимо з граничної умови (5.2):

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (5.10)$$

Підставляючи їх в ряд (5.9) та сумуючи його, отримаємо

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \left[ \left( \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \right) \cos n\varphi + \left( \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \right) \sin n\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \varphi) \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{in(\theta - \varphi)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (r/a)^n e^{-in(\theta-\varphi)} \Big] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left[ 1 + \frac{(r/a)e^{i(\theta-\varphi)}}{1-(r/a)e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{(r/a)e^{i(\varphi-\theta)}}{1-(r/a)e^{i(\varphi-\theta)}} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{1+(r^2/a^2)-(r^2/a^2)-(r^2/a^2)}{1+(r^2/a^2)-(r/a)(e^{i(\theta-\varphi)}+e^{-i(\theta-\varphi)})} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{a^2-r^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)} d\theta.
\end{aligned}$$

Тут нами враховано, що відношення  $r/a < 1$  ( $r < a$ ). Отриманий розв'язок задачі Діріхле в крузі відомий як *інтеграл Пуассона*.

### Завдання 1.

Методом відокремлення змінних знайти розв'язок внутрішньої та зовнішньої крайових задач для рівняння Лапласа, якщо на границі круга задані умови  $u|_{r=a} = A \sin \varphi$ .

### Розв'язок.

Шуканий розв'язок для внутрішньої задачі визначається співвідношенням (див. (5.9))

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r/a)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Для отримання розв'язку зовнішньої задачі врахуємо його обмеженість на нескінченності, що приводить до необхідності покласти у виразі (5.8)  $C_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тоді для зовнішньої задачі отримаємо

$$u(r, \varphi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a/r)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Коефіцієнти  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  знаходимо з врахуванням граничної умови за співвідношеннями (5.10):

$$C_0 = D_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi d\psi = -\frac{A}{\pi} \cos \psi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{A}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{A \sin^2 \psi}{\pi \cdot 2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi \cos n\psi d\psi = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(1+n)\psi + \sin(1-n)\psi) d\psi = \\
&= (A/2\pi) \left( (1+n)^{-1} \cos(1+n)\psi + (1-n)^{-1} \cos(1-n)\psi \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n=2, 3, \dots),
\end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi \sin \psi d\psi = \frac{A}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \psi d\psi = \frac{A}{\pi} \left( \frac{\psi}{2} - \frac{\sin 2\psi}{4} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = A,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi = \frac{A}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi \sin n\psi \, d\psi = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(1-n)\psi - \cos(1+n)\psi) \, d\psi =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left( \frac{1}{1-n} \sin(1-n)\psi - \frac{1}{1+n} \sin(1+n)\psi \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n=2,3,\dots).$$

Отже для загальних розв'язків остаточно одержимо вирази:

$u(r,\varphi) = (Ar/a)\sin\varphi$  для внутрішньої задачі,

$u(r,\varphi) = (Aa/r)\sin\varphi$  для зовнішньої задачі.

### 5.3. Крайові задачі в циліндричних і сферичних областях

#### Методичні вказівки

Рівняння вигляду

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \gamma(\gamma+1)y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (5.11)$$

називається *рівнянням Лежандра* [2]. Воно має обмеження на відрізку  $[-1;1]$  розв'язку, в тому і лише в тому випадку, коли  $\gamma = n$ ,  $n \geq 0$  – ціле.

Розв'язками рівняння (5.11) при  $\gamma = n \in$  поліноми Лежандра

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Зокрема,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ,  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$  і т.д.

Поліноми Лежандра утворюють ортогональну систему функцій в  $L_2(-1,1)$ , тобто

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

#### Завдання 1.

Знайти стаціонарний розподіл температури всередині одиничної кулі, якщо на її поверхні  $S$  підтримується постійна температура:

$$u|_S = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

#### Розв'язок.

Виберемо сферичну систему координат  $(r,\varphi,\theta)$  і, враховуючи осьову



симетрію задачі, отримаємо для функції  $u(r, \theta)$  крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$u(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

$|u(r, \theta)| < \infty$ , тобто обмежена при  $r=0$ ,  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$ . Розв'язок задачі

шукаємо у вигляді

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Phi(\theta).$$

Для визначення функції  $\Phi(\theta)$  отримаємо крайову задачу типу узгальної задачі Штурма-Ліувілля:

$$|\Phi(0)| < \infty, \quad |\Phi(\pi)| < \infty, \quad \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \cdot \Phi'(\theta))' + \lambda \Phi(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Розв'язком цієї задачі є функції

$$\Phi_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

де  $P_n(t)$  – поліноми Лежандра, і власні значення  $\lambda_n = n \cdot (n+1)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$

Для визначення функцій  $R_n(r)$  маємо систему рівнянь

$$r^2 R_n''(r) + 2r R_n'(r) - n(n+1) R_n(r) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Обмеженими в нулі розв'язками цієї системи є  $R_n(r) = A_n r^n$ . Складемо лінійну комбінацію отриманих розв'язків

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

та скористаємось умовою на  $S$  ( $r=1$ ) для визначення коефіцієнтів  $A_n$ :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta),$$

звідки

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \Big|_{\cos \theta = t} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt = \\ &= \frac{2n+1}{2} U_0 \int_0^1 P_n(t) dt. \end{aligned}$$

## 5.4. Метод функції Гріна розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу

### Питання для повторення

1. Дати визначення функції Гріна оператора Лапласа.
2. Який фізичний зміст має фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа?
3. Викласти на прикладі метод відображень побудови функції Гріна.
4. Для яких задач функція Гріна може бути побудована методом конформних відображень?
5. Записати інтегральне представлення розв'язків крайових задач теорії потенціалу за допомогою функції Гріна.

### Завдання 1.

Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для області  $D$ , яка представляє собою прямий двограний кут.

### Розв'язок.

Виберемо систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , направивши вісь  $Ox_3$  вздовж ребра заданого двогранного кута. Функція Гріна задачі Діріхле представляється у вигляді

$$G(x, x_0) = 1/r + g(x, x_0), \quad r = |x - x_0|, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Тут  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in D$  – фіксована точка, в якій розміщений позитивний одиничний заряд (потенціальна функція поля, що породжується цим зарядом, є  $1/r$  – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа при  $m=3$ ). Функцію  $g(x, x_0)$  шукаємо у вигляді потенціальної функції поля, яке породжується зарядами, які розміщені за межами області  $D$ , у точках, симетрично відображених по відношенню до точки  $x_0$  відносно границі області

$D$  (тобто площин  $x_1=0$  і  $x_2=0$ ) В ці точки  $(x_0^* = (-x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ,  $x_0^{**} = (x_1^0, -x_2^0, x_3^0)$  та  $x_0^{***} = (-x_1^0, -x_2^0, x_3^0)$ ) помістимо, відповідно, заряди  $-1$ ,  $-1$ ,  $+1$ . Потенціальна функція такого поля матиме вигляд

$$U(x) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r^{**}} + \frac{1}{r^{***}},$$

де  $r^* = |x - x_0^*|$ ,  $r^{**} = |x - x_0^{**}|$ ,  $r^{***} = |x - x_0^{***}|$ . Безпосередньою перевіркою можемо переконатись, що при  $x_1=0$  та  $x_2=0$  ця функція перетворюється в нуль. Таким чином шукана функція Гріна має вигляд

$$G(x, x_0) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^{***}} - \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r^{**}}.$$

**Завдання 2.**

Методом функцій Гріна знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа всередині кута розхилу  $\alpha = \pi/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , якщо на його сторонах задані наступні граничні умови:

$$u|_{\theta=\alpha} = 0, \quad u|_{\theta=0} = U = \text{const}.$$

**Розв'язок.**

Введемо полярні координати  $(\rho, \theta)$  і нехай  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$  – точки з області  $D = \{(\rho, \theta): 0 < \rho < \infty, 0 < \theta < \alpha\}$ , що розглядається. Побудуємо функцію Гріна цієї задачі методом конформних відображень [2]. Функція  $w_1(z) = z^n$  відображає область  $D$  на верхню півплощину  $\text{Im } w_1 > 0$ . Використовуючи далі дробово-лінійне відображення

$$w(z, z_0) = \frac{w_1(z) - w_1^0}{w_1(z) - \bar{w}_1^0},$$

де  $w_1^0 = w_1(z_0)$ , відобразимо область  $D$  на одиничне коло так, щоб  $w(z_0, z_0) = 0$ . Таким чином, шукана функція Гріна має вигляд  $G(z, z_0) = \ln|z^n - \bar{z}_0^n| - \ln|z^n - z_0^n|$ . Відмітимо, що

$$|z^n - z_0^n| = |\rho^n e^{in\theta} - \rho_0^n e^{in\theta_0}| = \sqrt{\rho^{2n} + \rho_0^{2n} - 2\rho^n \rho_0^n \cos n(\theta - \theta_0)}.$$

Розв'язок задачі Діріхле записується у вигляді [1], [2]:

$$u(r_0, \varphi_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(\rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \gamma} G(z, z_0) d\Gamma.$$

Тут  $\Gamma$  – границя області  $D$ , що складається з променів  $\theta=0$  та  $\theta=\alpha$ ,  $\bar{\gamma}$  – зовнішня нормаль до  $\Gamma_\infty$ . Враховуючи задані граничні умови, маємо

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty U \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} G(z, z_0) \Big|_{\theta=0} \cdot d\rho.$$

Обчислимо похідну:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{2n\rho^n \rho_0^n \sin n\theta_0 \cdot 2}{\rho^{2n} + \rho_0^{2n} - 2\rho^n \rho_0^n \cos n\theta_0} \right) = \frac{2n\rho^n \rho_0^n \sin n\theta_0}{\rho^{2n} + \rho_0^{2n} - 2\rho^n \rho_0^n \cos n\theta_0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi_0) &= \frac{U}{\pi} \rho_0^n \sin n\theta_0 \int_0^\infty \frac{n\rho^{n-1} d\rho}{\rho^{2n} + \rho_0^{2n} - 2\rho^n \rho_0^n \cos n\theta_0} = \frac{U}{\pi} \arctg \frac{\rho^n - \rho_0^n \cos n\theta_0}{\rho_0^n \sin n\theta_0} \Big|_0^\infty = \\ &= (U/\pi)(\pi/2 + \arctg(\text{ctgn}\theta_0)) = U(1 - \theta_0/\alpha). \end{aligned}$$

**Завдання 3.**

Побудувати функцію Гріна задачі Неймана для півплощини  $x_2 > 0$ .

**Розв'язок.**

Запишемо функцію Гріна у вигляді  $G(x, x_0) = \ln \frac{1}{r} + g(x, x_0)$ ,  $r = |x - x_0|$

і, використовуючи метод відображення, в якості функції  $g(x, x_0)$  виберемо потенціальну функцію одиничного позитивного заряду, розміщеного у точці  $\bar{x}_0 = (x_1^0, -x_2^0)$ , симетричну точці  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  відносно границі  $x_2 = 0$  області, що розглядається. Нагадаємо фізичний зміст нульових граничних умов другого роду. Потенціальна функція поля, що породжується позитивними зарядами в точках  $x_0$  та  $\bar{x}_0$  буде

$$v(x, x_0) = \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{\bar{r}}, \quad r = |x - x_0|, \quad \bar{r} = |x - \bar{x}_0|.$$

Перевіримо, чи задовольняє ця функція умову  $\left. \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0$ . Дійсно,

оскільки  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$  та  $\bar{r} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 + x_2^0)^2}$ , то

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \frac{-x_2^0 + x_2^0}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} = 0.$$

Таким чином, шукана функція Гріна матиме вигляд:

$$G(x, x_0) = -\ln r - \ln \bar{r} = \ln \frac{1}{r\bar{r}}, \quad r = |x - x_0|, \quad \bar{r} = |x - \bar{x}_0|.$$

## 5.5. Метод інтегральних рівнянь розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу

### Питання для повторення

1. Дати визначення та назвати властивості об'ємного потенціалу (логарифмічного поверхневого потенціалу).
2. Дати визначення та назвати властивості потенціалу подвійного шару (логарифмічного потенціалу подвійного шару).
3. Дати визначення та назвати властивості потенціалу простого шару (логарифмічного потенціалу простого шару).
4. Записати інтегральні рівняння внутрішньої і зовнішньої задач Діріхле.
5. Записати інтегральні рівняння внутрішньої і зовнішньої задач Неймана.

**Завдання 1.**

Обчислити об'ємний потенціал для кулі  $|x| < R$  з густиною  $\rho(x) = |x|$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

**Розв'язок.**

Розмістимо початок координат у центрі кулі. За визначенням об'ємного потенціалу

$$I(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{m-2}} d\xi, \quad m \geq 3.$$

Область  $\Omega$  представляє собою кулю радіусом  $R$  ( $m=3$ ), тому вибираємо сферичну систему координат  $\xi = (r, \theta, \varphi)$ , причому кут  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) будемо відраховувати від осі, що проходить через початок координат і точку  $x = (r_0, 0, 0)$ . Тоді, враховуючи, що якобіан  $|J| = r \sin \theta$ , отримаємо

$$I(x) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^3 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = 2\pi \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} =$$

$$= \frac{2\pi}{r_0} \int_0^R r^2 (|r+r_0| - |r-r_0|) dr = \begin{cases} \frac{2\pi}{r_0} \int_0^R r^2 (r+r_0 + r-r_0) dr = \frac{\pi}{r_0} R^4, & r_0 > R; \\ \frac{2\pi}{r_0} \left( \int_0^{r_0} r^2 2r dr + \int_{r_0}^R r^2 2r_0 dr \right) = \frac{\pi}{3} (4R^3 - r_0^3), & r_0 < R. \end{cases}$$

**5.6. Завдання для самостійної роботи**

1. Знайти функцію  $u = u(\rho, \varphi)$ , яка є гармонічною всередині кільця  $a < \rho < b$  і задовольняє граничні умови  $u|_{\rho=a} = u_1$ ,  $u|_{\rho=b} = u_2$ .

2. Знайти функцію  $u(z)$ , гармонічну всередині нескінченного про шарку, обмеженого площинами  $z=0$  і  $z=h$ , якщо  $u|_{z=0} = u_1$ ,  $u|_{z=h} = u_2$ .

3. Знайти розв'язок рівняння Пуассона  $\Delta u = 1$  всередині круга радіуса  $\rho = a$ , якщо  $u|_{\rho=a} = 0$ .

4. Знайти розв'язок рівняння  $\Delta u = A$  всередині кільця  $a < \rho < b$  при наступних граничних умовах: а)  $u|_{\rho=a} = u_1$ ,  $u|_{\rho=b} = u_2$ ; б)  $u|_{\rho=a} = u_1$ ,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\rho=b} = C.$$

5. Знайти розв'язок задачі про обтікання нерухомого нескінченного циліндра, якщо на нескінченності швидкість рідини дорівнює нулю.

6. Розв'язати задачу про обтікання нерухомого твердого шару потоком рідини, що на нескінченності має швидкість  $u_0$ .

7. Знайти стаціонарний розподіл температури  $u(x, y)$  у прямокутній однорідній пластинці  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , якщо його сторони  $x = a$  і  $y = b$  покриті тепловою ізоляцією, дві інші сторони ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) підтримуються при нульовій температурі. В пластинці виділяється тепло з постійною щільністю  $q$ .

8. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині куба з ребром  $a$ , якщо потенціал нижньої основи дорівнює  $v_0 = const$ , верхня основа заземлена, а бічні сторони ізольовані. Припускається, що всередині куба немає електричних зарядів.

9. Знайти розв'язок крайової задачі та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b = \infty;$$

$$u(0, y) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, 0 < y < \infty; u(x, 0) = 7 \sin \frac{5\pi x}{2a} + 2 \sin \frac{5\pi x}{2a}, u(x, \infty) = 0.$$

10. Визначити гармонічну функцію в кільці  $a < r < b$ ,  $b > a > 0$ , якщо  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = A \cos \varphi$ ;  $u(r, b) = A \sin 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $A = const$ . Дати фізичну інтерпретацію задачі.

11. Знайти розв'язок рівняння Пуассона  $\Delta u = -Axy$ ,  $A = const$ , за межами круга радіуса  $a$  з центром у початку координат, якщо

$$u(a, \varphi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ A \sin \varphi, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

12. Записати розв'язок другої крайової задачі для рівняння  $\Delta u = 0$ : а) всередині і б) зовні круга.

13. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для півкола  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } z > 0$ ,  $z = (x, y) = x + iy$ .

14. Знайти стаціонарний розподіл температури  $u(x, y)$  в напівнескінченному тілі, обмеженому площиною  $y = 0$ , частина якого ( $|x| < a$ ) знаходиться при заданій температурі  $T_0 = const$ , а інша ( $|x| > a$ ) частина –

при нульовій температурі.

15. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле:

а) для смуги  $0 < \text{Im } z < 1$ ,  $z = x + iy$ ;

б) для півсмуги  $0 < \text{Re } z < 1$ ,  $\text{Im } z < 0$ ,  $z = x + iy$ .

16. Розв'язати з допомогою функції джерела першу крайову задачу для рівняння Лапласа у півплощині  $y > 0$ , якщо

$$u|_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ V & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

17. Побудувати функцію джерела для задачі Діріхле:

а) всередині півкруга,

б) всередині четвертої частини круга,

в) всередині сектора з кутом розхилу  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .

18. Звести крайову задачу для рівняння Пуассона до відповідної крайової задачі для рівняння Лапласа. *Вказівка: див. [2], с. 128.*

19. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного циліндра радіуса  $R$  при умові, що на границі підтримується задана температура. *Вказівка: Врахувати те, що задача плоскопаралельна, тобто  $u = u(\rho, \theta)$  в циліндричних координатах, і розглянути внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі  $\rho < R$ . Див. [3], с. 400.*

20. Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа у крузі радіуса  $a$ . *Вказівка: див [3], с. 400.*

21. Знайти розв'язок задачі Неймана за межами круга, використовуючи потенціал простого шару.

## 6. Завдання та методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

### 6.1. Метод відокремлення змінних для задач вільних коливань закріпленої струни

**Мета:** Чисельна реалізація розв'язків задачі про вільні коливання закріпленої струни.

**Постановка задачі та короткі теоретичні відомості:**

1. В області  $G = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < \infty(T)\}$  знайти розв'язок рівняння

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (6.1)$$

за граничних

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty], \quad (6.2)$$

та початкових

$$u(x, 0) = g(x), \quad u'_t(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, l] \quad (6.3)$$

умов, де  $g(0) = g(l) = 0$ ,  $g(x) \in C^2_{[0, l]}$ ,  $h(x) \in C^1_{[0, l]}$ .

2. Розв'язок задачі (6.1)-(6.3):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left( a_n \cos \frac{a \pi n}{l} t + b_n \sin \frac{a \pi n}{l} t \right), \quad (6.4)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\tilde{x}) \sin \frac{\pi n}{l} \tilde{x} d\tilde{x}, \quad b_n = \frac{2}{a \pi n} \int_0^l h(\tilde{x}) \sin \frac{\pi n}{l} \tilde{x} d\tilde{x}. \quad (6.5)$$

**Етапи виконання завдань:**

#### Варіант I.

1. За формулами (6.5) обчислити коефіцієнти  $a_n$  та  $b_n$ , де  $n = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – наперед задане натуральне число.

*Зауваження:* При обчисленні інтегралів та ін. можна використовувати відповідні програмні продукти.

2. За формулою  $u(x, t) \approx \bar{u}_m(x, t)$ , де

$$\bar{u}_m(x, t) = \sum_{n=1}^m u_n(x, t) \quad (6.6)$$

обчислити наближено значення функції  $u(x, t)$  у вузлах  $(x_j, t_j)$  області

$$G_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}: \quad x_j = \Delta x \cdot i, \quad i = \overline{0, m_0}, \quad \Delta x = l/m_0, \quad t_j = \Delta t \cdot j, \quad j = \overline{0, m_*},$$



$$\Delta t = T/m_*$$

3. Результати обчислень роздрукувати (при можливості), або вивести на екран у вигляді таблиць ( $t_j$  – рядки,  $x_i$  – стовпці), або графіків функції  $u_j = u(x_i, t_j)$ ,  $i = \overline{1, m_0}$ .

### Варіант 2.

Числовий параметр  $m$  знайти ітераційно з умови  $\|u_{m+1}(x_i, t_j) - u_m(x_i, t_j)\| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – наперед задане число (точність),  $\|\cdot\|$  – одна із норм:

$$\text{а) } \|u_{m+1}(x_i, t_j) - u_m(x_i, t_j)\| = \max_{i=0, m_0, j=1, m_k} |u_{m+1}(x_i, t_j) - u_m(x_i, t_j)|;$$

$$\text{б) } \|u_{m+1}(x_i, t_j) - u_m(x_i, t_j)\| = \frac{\left( \sum_{i=0}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_k} (u_{m+1}(x_i, t_j) - u_m(x_i, t_j))^2 \right)^{1/2}}{m_0 m_k}.$$

### Висновки (очікувані результати):

Зробити порівняльний аналіз коливань в залежності від початкового відхилення  $g(x)$  струни від положення рівноваги та початкової швидкості  $h(x)$ .

Варіанти завдань:  $g(x) = \alpha x(l-x)$ ,  $h(x) = \beta$ , де

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } k=3k_0 \\ 2, & \text{при } k=3k_0+1 \\ 3, & \text{при } k=3k_0+2 \end{cases}; \quad \beta = \begin{cases} 3, & \text{при } k=3k_0 \\ 2, & \text{при } k=3k_0+1 \\ 1, & \text{при } k=3k_0+2 \end{cases}, \quad l = \begin{cases} 2, & \text{при } k=2k_0 \\ 3, & \text{при } k=2k_0+1 \end{cases}$$

$k$  – номер студента.

### Завдання максимум (для бажаючих):

1. Побудувати комп'ютерну модель процесу вільних коливань закріпленої струни.

2. Шляхом розв'язку задачі:  $a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_{tt}$ ;  $u(0, t) = u_0(t)$ ,  $u(l, t) = u_l(t)$ ;  $u(x, 0) = g(x)$ ,  $u'_t(x, 0) = h(x)$  ( $f(x, t) = x^2(l-x)^2 t + 1$ ,  $u_0(t) = t$ ,  $u_l(t) = t^2$ ) дослідити відповідні вимушені коливання незакріпленої струни.

## 6.2. Метод відокремлення змінних для задач теплопровідності

**Мета:** Побудувати комп'ютерну модель процесу нагрівання чи охолодження стержня.

### Постановка задачі і короткі теоретичні відомості:

Відомо, що процес теплопровідності у стержні у простішому випадку може бути описаний з допомогою диференціального рівняння

$$a^2 u_{xx} = u_t \quad (6.7)$$

де  $a^2$  – коефіцієнт “теплової дифузії”,  $u = u(x, t)$  – температура в точці  $x \in (0, l)$  ( $l$  – довжина стержня) в момент часу  $t$ . На кінцях стержня (у точках  $x=0$  та  $x=l$ ) є відомими закони перерозподілу тепла з плином часу:

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(l, t) = u_l(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (6.8)$$

Відомим також є початковий розподіл тепла у стержні

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < l, \quad g(0) = u_0(0), \quad g(l) = u_l(0). \quad (6.9)$$

Знайти  $u(x, t)$ ,  $\forall x \in (0, l)$ ,  $\forall t \in (0, \infty)$ .

Задача зводиться до розв'язку в області  $G = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < \infty(T)\}$  рівняння (6.7) за умов (6.8), (6.9).

Її розв'язок отримується за формулою

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot e^{-\frac{a \pi n}{l} t}, \quad (6.10)$$

$$\text{де } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\tilde{x}) \sin \frac{\pi n}{l} \tilde{x} d\tilde{x}. \quad (6.11)$$

### Етапи виконання завдань:

1. Ввести  $a^2$ ,  $l$ ,  $g(x)$  ( $x \in [0, l]$ ),  $m$  – кількість членів суми,  $m_0$ ,  $m_*$  – параметри сітки  $G_T^*$ ,  $t_*$  (див. п.6.1).

2. За формулою (6.11) обчислити  $a_n$ ,  $n = \overline{0, m}$ .

3. За формулою  $u(x, t) \approx \bar{u}_m(x, t) = \sum_{n=1}^m u_n(x, t)$  обчислити наближено значення функції  $u(x, t)$  у вузлах  $(x_j, t_j)$  області  $G_T$  (див. п.6.1).

4. Результати розрахунку роздрукувати (при можливості), або вивести на екран у вигляді таблиць, або графіків (аналогічно до п.6.1).

Аналогічно до п.6.1 за заданим рівнем точності  $\epsilon$  підібрати  $m$ . А та-

кож за заданим  $\delta$  (мале число) підібрати  $t_*$  таке, що  $|u(x, t_*)| \leq \delta$  при  $t \geq t_*$ .

**Висновки (очікувані результати):**

Порівняльний аналіз процесу перерозподілу тепла у стержні в залежності від його початкового температурного стану.

*Варіанти завдань:*  $g(x) = \alpha x(1-x)$ ,

де  $I = \begin{cases} 2, & \text{якщо } k = 2k_0 \\ 3, & \text{якщо } k = 2k_0 + 1 \end{cases}$ ,  $k$  – номер студента (за журналом),

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 3k_0 \\ 2, & \text{при } k = 3k_0 + 1 \\ 3, & \text{при } k = 3k_0 + 2 \end{cases}; \quad \beta = \begin{cases} 3, & \text{при } k = 3k_0 \\ 2, & \text{при } k = 3k_0 + 1 \\ 1, & \text{при } k = 3k_0 + 2 \end{cases}$$

### 6.3. Крайові задачі для рівняння Лапласа

**Мета:** Провести чисельний експеримент.

**Постановка задачі, короткі теоретичні відомості:**

Математична постановка задачі полягає у знаходженні розв'язку рівняння Лапласа  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  у внутрішності прямокутника

$G = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$  за умов  $u(0, y) = u_1(y)$ ,  $u(a, y) = u_3(y)$ ,  $u(x, 0) = u_2(x)$ ,  $u(x, b) = u_4(x)$ . Її розв'язок:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

$$\text{де } v(x, t) = \frac{\left( u_1(y) + \frac{u_3(y) - u_1(y)}{a} x \right) y(y-b) + \left( u_2(x) + \frac{u_4(x) - u_2(x)}{b} y \right) x(x-a)}{y(y-b) + x(x-a)},$$

$w(x, y)$  – розв'язок задачі:

$$w_{xx} + w_{yy} + f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = v_{xx} + v_{yy} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m y}{b},$$

$$a_{nm} = \iint_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy, \quad w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0,$$

$$\text{а саме } w(x, y) = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{b} y, \quad \text{де } \alpha_{nm} = \frac{a^2 b^2 a_{nm}}{\pi^2 (a^2 m^2 + b^2 n^2)}.$$

**Етапи виконання завдань:**

1. Ввести  $a, b, u_1(y), u_3(y), u_2(x), u_4(x), p_0, m_0$  – параметри сіткової області  $G^0$ ,  $p_*$ ,  $m_*$  – параметри сумування

2. У вузлах  $(x_i, t_j)$  області  $G^0$ , обчислити  $v(x_i, y_j) = v_{ij}$ .

3. Обчислити  $a_{nm}$  та  $\alpha_{nm}$ ,  $n = \overline{1, p_*}$ ,  $m = \overline{1, m_*}$ ,  $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ ;  
 $u(x_i, y_j) = v_{ij} + w_{ij}$ .

4. Результати розрахунку  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$  вивести на екран (по можливості – роздрукувати).

5\*. За заданим  $\varepsilon$  аналогічно до п.б.1, п.б.2 підібрати  $p_*$ ,  $m_*$ .

**Висновки (очікувані результати):**

Провести порівняльний аналіз точності в залежності від  $p_*$  та  $m_*$ .

*Варіанти завдань:*  $u_0(y) = 0$ ,  $u_3(y) = \alpha y + 1$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ .  $u_2(x) = x/a$ ,

$u_4(x) = (\alpha b + 1)x/a$ ,  $k = 5k_0$ ,  $k = 5k_0 + a$ ,  $k = 3k_0 + b$ .

## 6.4. Задача Коші для рівняння теплопровідності в необмеженій області

**Мета:** Провести чисельний експеримент.

**Постановка задачі і короткі теоретичні відомості:**

Необхідно знайти обмежену в області  $G = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, 0 < t < \infty\}$  функцію  $u(x, t)$ , яка задовольняє рівняння

$$a^2 u_{xx} = u_t,$$

та початкову умову  $u(x, 0) = g(x)$ ,  $0 < x < \infty$ .

Розв'язок

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tilde{x}) \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{x})^2}{4a^2 t}} d\tilde{x}.$$

**Допоміжні факти:**

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$  – інтеграл помилок (функція Лапласа).

1)  $\Phi(0) = 0$ ; 2)  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  ( $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ ); 3)  $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +1$ .

**Задача 1.**

$$g(x) = \begin{cases} a_1, & x > 0 \\ a_2, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Розв'язок } u(x,t) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \quad (6.12)$$

**Задача 2.**

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in [x_*, x^*] \\ 0, & x \notin [x_*, x^*] \end{cases}.$$

$$\text{Розв'язок } u(x,t) = \frac{1}{2} \left( \Phi\left(\frac{x^* - x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x_* - x}{2a\sqrt{t}}\right) \right). \quad (6.13)$$

**Етапи виконання завдань:**

1. За формулами (6.12) та (6.13) отримати розв'язки задач в точках  $x = x_j = i$ ,  $i \in (-100, 100)$ ,  $i \in Z$  в моменти часу  $t = 1, 2, 10, 100$ .
2. Вказати час “комп'ютерної” стабілізації процесу.
- 3\*. Вивести результати обчислень в дані моменти часу в точках  $x_j = 10 \cdot j$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10$ .

**Висновки**

Зробити порівняльний аналіз  $u(x_j, t_j)$  за часом.

*Варіанти завдань:*

$$k = 3k_0 + a_1, \quad k = 2k_0 + a_2, \quad \alpha = \alpha_* + 1, \quad k = 2k_0 + \alpha_*, \quad a^2 = 1,$$

$k$  – порядковий номер студента в журналі:  $k = 2k_0 + x_*$ ,  $k = 3k_0 + x^*$ .

## 7. Завдання для самостійних та контрольних робіт

### Завдання 1.

1. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $f(x)$ , на кінці  $x=0$  підтримується нульова температура, а на кінець  $x=l$  зовні подається тепловий потік.

2. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $f(x)$ , на кінці  $x=0$  підтримується температура  $u_0 = \text{const}$ , а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю.

3. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $u_0$ , на кінці  $x=0$  підтримується постійна температура  $u_1$ , а на кінці  $x=l$  – температура  $u_2$ .

4. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура  $g(x)$ , на кінець  $x=0$  зовні подається тепловий потік, а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю.

5. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$ , якщо його початкова температура рівна нулю, на кінці  $x=0$  підтримується нульова температура, а на кінець  $x=l$  зовні подається тепловий потік. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел.

6. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$ , якщо його початкова температура  $u_0 = \text{const}$ , на кінці  $x=0$  підтримується постійна температура  $u_1$ , а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел.

7. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$ , якщо його початкова температура  $u_0 = \text{const}$ , на кінці  $x=0$  підтримується постійна температура  $u_1$ , а на кінці  $x=l$  – температура  $u_2$ . В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел.

8. Записати математичну постановку задачі для знаходження температури стержня довжиною  $l$ , якщо в момент часу  $t=0$  його температура дорівнює  $u_0 = \text{const}$ , на кінець  $x=0$  зовні подається тепловий потік, а на кінці  $x=l$  відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулю. В стержні виділяється тепло від неперервно розподілених в ньому джерел.

9. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви та швидкості. Кінець стержня  $x=0$  закріплений жорстко, а правий  $x=l$  – пружно.

10. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі швидкості. До кінця стержня  $x=0$  прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ ,  $t>0$ , а правий  $x=l$  закріплений жорстко.

11. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви. Кінець стержня  $x=0$  закріплений пружно, а правий  $x=l$  рухається за законом  $A \sin \omega t$ .

12. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви та швидкості. Кінець стержня  $x=0$  закріплений пружно, а правий  $x=l$  – жорстко. На стержень діє зовнішня сила з щільністю  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу.

13. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі швидкості. До кінця стержня  $x=0$  рухається за законом  $A \cos t$ , а правий  $x=l$  закріплений жорстко. На стержень діє зовнішня сила з щільністю  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу.

14. Записати математичну постановку задачі про коливання стержня довжиною  $l$ , який виведений зі стану рівноваги тим, що його поперечним перерізам у початковий момент часу надані малі повздовжні зсуви. Кінець стержня  $x=0$  закріплений пружно, а правий  $x=l$  прикладена розтягуюча сила  $F(t)$ ,  $t>0$ . На стержень діє зовнішня сила з щільністю  $f(x,t)$ , яка прикладена з початкового моменту часу.

15. Записати математичну постановку задачі про малі поперечні коливання струни у середовищі з опором, пропорційному першій степені швидкості при умові, що кінець струни  $x=0$  закріплений жорстко, а  $x=l$  – вільний.

16. Записати математичну постановку задачі про малі поперечні коливання струни у середовищі з опором, пропорційному першій степені швидкості при умові, що кінець струни  $x=0$  вільний, а  $x=l$  – рухається за законом  $\sin \omega t$ .

17. Записати математичну постановку задачі про стаціонарний розподіл температури в тонкій прямокутній пластинці  $OABC$  з сторонами  $OA=a$ ,  $OB=b$ , якщо на бічних сторонах підтримуються задані температури.

18. Записати математичну постановку задачі про стаціонарний розподіл температури в тонкій прямокутній пластинці  $OABC$  з сторонами  $OA=a$ ,  $OB=b$ , якщо на сторонах  $OA$  і  $OB$  задані теплові потоки, а сторони  $BC$  і  $AC$  теплоізовані.

19. Записати математичну постановку задачі для визначення стаціонарного розподілу температури всередині циліндра радіуса  $R$  і висоти  $h$ , якщо температура верхньої і нижньої основ є заданою функцією від  $r$ , а бічна поверхня теплоізована.

20. Записати математичну постановку задачі для визначення стаціонарного розподілу температури всередині циліндра радіуса  $R$  і висоти  $h$ , якщо температура верхньої і нижньої основ є заданою функцією від  $r$ , а бічна поверхня має температуру, що залежить лише від  $z$ .

## Завдання 2.

В задачах 1-10 визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду у кожній з областей, де його тип зберігається:

$$1. u_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

$$2. yu_{xx} + x^2u_{yy} = 0.$$

$$3. y^2u_{xx} - xu_{yy} = 0.$$

$$4. y^2u_{xx} + 4xu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$$

$$5. u_{xx} + 4yu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$$

$$6. u_{xx} + 2u_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$$

$$7. x^2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

$$8. yu_{xx} + (x-y)u_{xy} + xu_{yy} = 0.$$

$$9. u_{xx} + xu_{xy} + u_{yy} = 0.$$

$$10. x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0.$$

В задачах 11-20 визначити тип рівняння і привести його до канонічного вигляду:

$$11. u_{xx} - u_{xy} + u_{zz} - 2u_{zy} + 2u_{yy} = 0.$$

$$12. u_{xx} + u_{xy} - u_{zz} - u_{zy} + 4u_{yy} = 0.$$



13.  $u_{xx}+2u_{xz}+2u_{xy}+2u_{zy}=0$ .      14.  $u_{xy}+2u_{xz}+u_{xt}+4u_{zt}=0$ .  
 15.  $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+2u_{yz}+3u_{zz}=0$ .      16.  $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{yy}+u_{yz}-u_{zz}=0$ .  
 17.  $u_{xx}+u_{xy}-u_{xz}+3u_{yy}-3u_{zz}=0$ .      18.  $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+2u_{zz}=0$ .  
 19.  $u_{xx}+2u_{yy}-2u_{xy}+4u_{yx}+5u_{zz}=0$ .      20.  $u_{xx}-2u_{xy}+2u_{yz}+5u_{zz}+u_x+u_y=0$ .

### Завдання 3.

Використовуючи формулу Д'Аламбера, знайти розв'язок та дати фізичну інтерпретацію задачі.

1.  $u_{tt}=u_{xx}+6x$ ;  $u|_{t=0}=x^2$ ,  $u_t|_{t=0}=4x$ .
2.  $u_{tt}=4u_{xx}+xt$ ;  $u|_{t=0}=x^2$ ,  $u_t|_{t=0}=x$ .
3.  $u_{tt}=u_{xx}+\sin x$ ;  $u|_{t=0}=\sin x$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
4.  $u_{tt}=u_{xx}+e^x$ ;  $u|_{t=0}=\sin x$ ,  $u_t|_{t=0}=x+\cos x$ .
5.  $u_{tt}=9u_{xx}+\sin x$ ;  $u|_{t=0}=1$ ,  $u_t|_{t=0}=1$ .
6.  $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin \omega x$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
7.  $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin t$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
8.  $u_{tt}=u_{xx}+6t$ ;  $u|_{t=0}=x^2$ ,  $u_t|_{t=0}=4x$ .
9.  $u_{tt}=u_{xx}+4xt$ ;  $u|_{t=0}=x$ ,  $u_t|_{t=0}=1$ .
10.  $u_{tt}=u_{xx}+\cos x$ ;  $u|_{t=0}=\cos x$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
11.  $u_{tt}=2u_{xx}+e^x$ ;  $u|_{t=0}=\cos x$ ,  $u_t|_{t=0}=x$ .
12.  $u_{tt}=16u_{xx}+\cos x$ ;  $u|_{t=0}=2$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
13.  $u_{tt}=4u_{xx}+\sin 2x$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
14.  $u_{tt}=9u_{xx}+\cos t$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
15.  $u_{tt}=4u_{xx}+10$ ;  $u|_{t=0}=x^2$ ,  $u_t|_{t=0}=2x$ .
16.  $u_{tt}=u_{xx}+2xt$ ;  $u|_{t=0}=x^2$ ,  $u_t|_{t=0}=1$ .
17.  $u_{tt}=4u_{xx}+\cos x$ ;  $u|_{t=0}=2\cos x$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .
18.  $u_{tt}=4u_{xx}+e^x$ ;  $u|_{t=0}=\sin x$ ,  $u_t|_{t=0}=\cos x$ .
19.  $u_{tt}=25u_{xx}+5\sin x$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=1$ .
20.  $u_{tt}=9u_{xx}+\cos x$ ;  $u|_{t=0}=0$ ,  $u_t|_{t=0}=0$ .

#### Завдання 4.

1. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < \pi$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму синусоїди  $\varphi(x) = \sin 2x$ .

2. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму ламаної  $OABC$ , де  $O(0,0)$ ,  $A(c,h)$ ,  $B(d,h)$ ,  $C(l,0)$ ,  $0 < c < d < l$ .

3. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $-l < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму параболи, віссю симетрії якої служить пряма  $x=0$ , а вершиною – точка  $M(0,h)$ .

4. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , один кінець якого ( $x=0$ ) закріплений жорстко, а інший ( $x=l$ ) – пружно. Початкові зміщення поперечних перерізів стержня визначаються за формулою  $\varphi(x) = kx$ , а їх початкові швидкості дорівнюють нулю.

5. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення задаються формулою  $\varphi(x) = \cos x$ .

6. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $-c < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму ламаної  $ABC$ , де  $A(-c,0)$ ,  $B(0,h)$ ,  $C(l,0)$ .

7. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $a < x < b$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму параболи, віссю симетрії якої служить пряма  $x = \frac{b-a}{2}$ , а вершиною – точка  $M\left(\frac{b-a}{2}, h\right)$ .

8. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , один кінець якого ( $x=0$ ) закріплений жорстко, а інший ( $x=l$ ) – пружно. Початкові зміщення поперечних перерізів стержня визначаються за формулою  $\varphi(x) = kx^2$ , а їх початкові швидкості дорівнюють нулю.

9. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $-l < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму ламаної  $ABCD$ , де  $A(-l,0)$ ,  $B(-c,h)$ ,  $C(c,h)$ ,  $D(l,0)$ ,  $0 < c < l$ .

10. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму синусоїди  $\varphi(x) = 2\sin\frac{\pi nx}{l}$  ( $n$  – ціле).

11. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , якщо його кінці вільні. Початкові зміщення поперечних перерізів стержня визначаються за формулою  $\varphi(x) = kx$ , а їх початкові швидкості дорівнюють нулю.

12. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $-l < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкові відхилення мають форму ламаної  $ABC$ , де  $A(-l,0)$ ,  $B(0,h)$ ,  $C(l,0)$ .

13. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться у спокої ( $\varphi(x) = 0$ ), а початкова швидкість  $\psi$  задається формулою  $\psi(x) = v_0 = \text{const}$ ,  $x \in [0, l]$ .

14. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , один кінець якого ( $x=0$ ) закріплений жорстко, а інший ( $x=l$ ) – вільний. Початкові зміщення поперечних перерізів стержня визначаються за формулою  $\varphi(x) = kx$ , а їх початкові швидкості дорівнюють нулю.

15. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться у спокої ( $\varphi(x) = 0$ ), а початкова швидкість  $\psi$  задається формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0, & \text{при } x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{при } x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

де  $0 \leq \alpha < \beta \leq l$ .

16. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , до кінця  $x=0$  якого з моменту часу  $t=0$  прикладена сила  $F(t) = At$ ,  $A = \text{const}$ , а інший  $x=l$  – закріплений жорстко.

17. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться у спокої ( $\varphi(x)=0$ ), а початкова швидкість  $\psi$  задається формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, & \text{при } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \\ 0, & \text{при } x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \end{cases}$$

де  $0 \leq x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leq l$ .

18. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , до кінця  $x=0$  якого з моменту часу  $t=0$  прикладена сила  $F(t)=t^2$ , а інший  $x=l$  – закріплений жорстко.

19. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про коливання струни  $0 < x < l$  із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться у спокої ( $\varphi(x)=0$ ), а початкова швидкість  $\psi$  задається формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

20. Методом Фур'є знайти розв'язок задачі про повздовжні коливання однорідного стержня  $0 < x < l$ , один кінець якого ( $x=0$ ) закріплений жорстко, а на інший ( $x=l$ ) діє сила  $F_0 = \text{const}$ . Початкові зміщення поперечних перерізів стержня визначаються за формулою  $\varphi(x)=kx$ , а їх початкові швидкості дорівнюють нулю.

### Завдання 5.

Використовуючи метод відокремлення змінних, знайти розв'язок та дати фізичну інтерпретацію задачі.

1.  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = Ax(l-x)$ ,  $A = \text{const}$ .

2.  $u_t = u_{xx} - u$ ,  $0 < x < l$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = 1$ .

3.  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=1} = 0$ ,  $u|_{t=0} = x^2 - 1$ .

4.  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ,  $u|_{t=0} = x^2 - \pi x$ .

5.  $u_t = u_{xx} - 4u$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ,  $u|_{t=0} = x^2 - \pi x$ .

6.  $u_t = 9u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = 1$ ,  $u|_{t=0} = 0$ .

7.  $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, u|_{t=0} = Ax(l-x), A = \text{const}.$
8.  $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < 1, u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, u|_{t=0} = x^2 - 1.$
9.  $u_t = 16u_{xx}, 0 < x < 1, u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, u|_{t=0} = 10.$
10.  $u_t = u_{xx} - 9u, 0 < x < l, u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, u|_{t=0} = 3x(l-x)$
11.  $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = u|_{x=l} = 10, u|_{t=0} = Ax(l-x).$
12.  $u_t = u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 5, u|_{t=0} = \frac{A}{l}x, A = \text{const}.$
13.  $u_t = 25u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 5, u|_{x=l} = 1, u|_{t=0} = x^2 - lx.$
14.  $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = \cos 2t, u|_{x=l} = 2, u|_{t=0} = 0.$
15.  $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 2, u|_{x=l} = \sin t, u|_{t=0} = 0.$
16.  $u_t = u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = t, u|_{x=l} = 0, u|_{t=0} = 0.$
17.  $u_t = 16u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 10, u|_{x=l} = 5t, u|_{t=0} = 0.$
18.  $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < l, u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 1, u|_{t=0} = 1.$
19.  $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < l, u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 20, u|_{t=0} = 0.$
20.  $u_t = u_{xx}, 0 < x < l, u|_{x=0} = 1 - e^{-t}, u|_{x=l} = 1, u|_{t=0} = 0.$

## Рекомендована література

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977. – 735 с.
2. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М., 1964. – 554 с.
3. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М., 1968. – 506 с.
4. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М., 1972. – 688 с.
5. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. М., 1975. – 126 с.
6. *Кошляков М.С. и другие.* Уравнения в частных производных математической физики М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики М.: Наука, 1981. – 512 с.
8. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. К.: Либідь, 1993. – 248 с.
9. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. – 436 с.
10. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. – 830 с.
11. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985. – 205 с.
12. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964. – 204 с.
13. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. – 512 с.
14. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983. – 424 с.
15. *Владимиров В.С. и другие.* Сборник задач по математической физики. М.: Наука, 1982. – 256 с.
16. *Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977. – 224 с.
17. *Вірченко Н.О.* Деякі типові крайові задачі математичної фізики та методи їх розв'язання. – К.: Вища школа, 1976. – 56с.
18. *Антонова А.М.* Методические указания к практическим занятиям по уравнениям математической физики для студентов механико-математического факультета. К.: Изд-во Киевского ун-та, 1985. – 48 с.
19. *Барановський С.В., Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Рівняння математичної фізики: конспект лекцій. – Рівне. Редакційно-видавничий центр Міжнародного університету “РЕГІ” імені академіка Степана Дем'янчука. 2003. – 102 с.

## ЧАСТИНА 3

# ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ ТА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

## 1. Розпаралелювання розв'язку крайових задач для дивергентних рівнянь у шаруватих середовищах

### 1.1. Розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатшаровій смузі

Ряд фізичних процесів моделюються крайовими задачами для еліптичного рівняння

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (1.1)$$

де  $\chi(x, y) \geq \chi_0 > 0, f(x, y)$  визначені в деякій області  $G$ . При цьому, якщо  $\chi(x, y)$  стрибками змінюється в області  $G$  (що нерідко трапляється в задачах теплопровідності, фільтрації, напівпровідників), то ефективність відомих наближених методів розв'язування таких задач суттєво знижується. Викликано це в основному зростанням числа обумовленості матриць, супроводжуючих чисельний розв'язок рівняння (1.1). У таких випадках доречно складати алгоритми так, щоб розв'язок рівняння (1.1) в  $G$  звести до розв'язку його в області  $\chi(x, y)$ . Цей підхід лежить в основі викладеної в [1] методики, ефективність якої залежить від розмірів області, де визначається розв'язок. Уникнути такого недоліку і поширити підхід із [1], зокрема, на необмежені області (наприклад, нескінченні смуги) дозволяє методика, запропонована в даній роботі. Тут ідея альтернуючого методу Шварца [2] поєднана з ефектом інтегральних перетворень методу Р-трансформацій [3].

Розглянемо крайову задачу: у смузі  $G = \{(x, y) | -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq c\}$  знайти розв'язок рівняння (1.1), що на межі  $G$  задовольняє крайові умови

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), & -\infty < x < \infty, \\ \frac{\partial u(x,C)}{\partial y}=\psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (1.2)$$

де

$$\chi(x,y)=\begin{cases} \chi_1, & 0 \leq y \leq a, \\ \chi_2, & a < y \leq b, \\ \chi_3, & b < y \leq c, \end{cases} \quad (1.3)$$

$\chi_1, \chi_2, \chi_3$ , – сталі. При цьому на лініях  $y=a, y=b$  розриву функції  $\chi(x,y)$  виконуються умови

$$|u|_{y=\alpha} = \left[ \chi \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=\alpha} = 0, \quad (1.4)$$

де  $\| \cdot \|_{y=\alpha}$  – стрибок функції на  $\alpha=a, b$ .

Введемо у площині  $Oxy$  рівномірну прямокутну сітку

$$w_h = \{(x_i, y_k) | x_i = x_0 + ih, y_k = y_0 + kh; i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

де  $h, h_1$  – кроки сітки. Покладемо:  $x_0 = y_0 = 0, y_{N_1} = a, y_{N_2} = b, y_{N+1} = c$ .

Застосовуючи інтегро-інтерполяційний метод [6], поставимо у відповідність задачі (1.1)-(1.4) наступну скінченно-різницьку задачу:

$$\begin{cases} \frac{\chi_1}{2} \tilde{L}_h u_0(x_i) + r^2 \chi_1 u_1(x_i) = h^2 \tilde{f}_0(x_i), \\ \chi_1 \tilde{L}_h u_k(x_i) + r^2 \chi_1 [u_{k-1}(x_i) + u_{k+1}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \tilde{L}_h u_{N_1}(x_i) + r^2 [\chi_1 u_{N_1-1}(x_i) + \chi_2 u_{N_1+1}(x_i)] = h^2 f_{N_1}(x_i), \\ \chi_2 \tilde{L}_h u_k(x_i) + r^2 \chi_2 [u_{k-1}(x_i) + u_{k+1}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \tilde{L}_h u_2(x_i) + r^2 [\chi_2 u_{N_2-1}(x_i) + \chi_3 u_{N_2+1}(x_i)] = h^2 f_{N_2}(x_i), \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \chi_3 \tilde{L}_h u_k(x_i) + r^2 \chi_3 [u_{k-1}(x_i) + u_{k+1}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ (k = N_2 + 1, N_2 + 2, \dots, N - 1), \\ \chi_3 \tilde{L}_h u_N(x_i) + r^2 \chi_3 u_{N-1}(x_i) = h^2 f_N(x_i), (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases} \quad (1.6)$$

Тут використано позначення:

$$u_k(x_i) = u(x_i, y_k), \quad r = h/h_1^{-1},$$

$$\tilde{L}_h u_k(x_i) = u_k(x_{i+1}) - 2(1+r^2)u_k(x_i) + u_k(x_{i-1})),$$

$$\tilde{f}_0(x_i) = 0.5 f_0(x_i) + \chi_1 r h \psi(x_i), \quad \tilde{f}_N(x_i) = f_N(x_i) - \chi_3 h_1^{-2} \varphi(x_i).$$

Для розв'язку таких нескінченновимірних систем можливо застосу-



вання методу Р-трансформацій [4]. Втім, у випадку двох і більше точок розриву  $\chi(x, y)$  в  $G$  реалізація відповідних формул Р-трансформацій спряжена із складною і трудомісткою процедурою обчислення власних значень і власних векторів матриць [5]. Таких недоліків позбавлена наступна методика розв'язування задачі (1.5)-(1.6).

Визначимо дві сіткові смуги:

$$G_1^h = \{(x_i, y_k) | (x_i, y_k) \in w_h; 0 \leq k \leq N_2; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$$G_2^h = \{(x_i, y_k) | (x_i, y_k) \in w_h; N_1 \leq k \leq N_1 + 1; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\};$$

У областях  $G_1^h$  і  $G_2^h$  визначимо дві послідовності сіткових функцій  $\{V_k^{(n)}(x_i)\}_{n=0}^{\infty}$  та  $\{W_k^{(n)}(x_i)\}_{n=0}^{\infty}$  відповідно. Для цього розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5\chi_1 \tilde{L}_h V_0^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_1 V_1^{(n)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_0(x_i), \\ \chi_1 \tilde{L}_h V_k^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_1 [V_{k-1}^{(n)}(x_i) + V_{k+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ (k=1, 2, \dots, N_1-1), \\ 0,5(\chi_1 + \chi_2) \tilde{L}_h V_{N_1}^{(n)}(x_i) + r^2 [\chi_1 V_{N_1-1}^{(n)}(x_i) + \chi_2 V_{N_1+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_{N_1}(x_i), \\ \chi_2 \tilde{L}_h V_k^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_2 [V_{k-1}^{(n)}(x_i) + V_{k+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_{N_1}(x_i), \\ (k=N_1+1, N_1+2, \dots, N_2-1), \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_2 \tilde{L}_h W_{N_1+1}^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_2 W_{N_1+2}^{(n)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_{N_1+1}^{(n-1)}(x_i), \\ \chi_2 \tilde{L}_h W_k^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_2 [W_{k-1}^{(n)}(x_i) + W_{k+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ (k=N_1+2, N_1+3, \dots, N_2-1), \\ 0,5(\chi_2 + \chi_3) \tilde{L}_h W_{N_2}^{(n)}(x_i) + r^2 [\chi_2 W_{N_2-1}^{(n)}(x_i) + \chi_3 W_{N_2+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_{N_2}(x_i), \\ \chi_2 \tilde{L}_h V_{N_2-1}^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_2 V_{N_2-2}^{(n)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_{N_2-1}^{(n)}(x_i), \\ \chi_3 \tilde{L}_h W_k^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_3 [W_{k-1}^{(n)}(x_i) + W_{k+1}^{(n)}(x_i)] = h^2 f_k(x_i), \\ (k=N_2+1, N_2+2, \dots, N-1), \\ \chi_3 \tilde{L}_h W_N^{(n)}(x_i) + r^2 \chi_3 W_{N-1}^{(n)}(x_i) = h^2 \tilde{f}_N(x_i), \\ \tilde{f}_{N_1+1}^{(n-1)}(x_i) = f_{N_1+1}(x_i) - h_1^{-2} \chi_2 V_{N_1}^{(n-1)}(x_i), \\ \tilde{f}_{N_2+1}^{(n-1)}(x_i) = f_{N_2+1}(x_i) - h_1^{-2} \chi_2 V_{N_2}^{(n-1)}(x_i), \\ (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Прийmemo позначення:

$$\vec{V}^{(n)}(x_i) = \{V_k^{(n)}(x_i)\}_{k=1}^{N_2-1}, \quad \vec{W}^{(n)}(x_i) = \{W_k^{(n)}(x_i)\}_{k=N_1+1}^N.$$

Для розв'язку системи (1.7)-(1.8) застосовуємо метод Р-трансформації [5]. Отримаємо

$$\vec{V}^{(n)}(x_i) = -P_1 h^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} A^{(1)}(i,t) P_1^T \vec{F}_1^{(n)}(x_t), \quad (1.9)$$

$$\vec{W}^{(n)}(x_i) = -P_2 h^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} A^{(2)}(i,t) P_2^T \vec{F}_2^{(n)}(x_t), \quad (1.10)$$

де елементи матриць  $P_1 = (p_{kj}^{(1)})_{k,j=0}^{N_2-1}$ ,  $P_2 = (p_{kj}^{(2)})_{k,j=1}^{N-N_1}$  знаходяться із співвідношень

$$P_{kj}^{(1)} = C_j^{(1)} \begin{cases} \cos k\theta_j^{(1)}, & k=0,1,2,\dots,N_1, \\ \alpha_j^{(1)} \sin(N_2-k)\theta_j^{(1)}, & k=N_1+1, N_1+2,\dots,N_2-1, \end{cases}$$

$$P_{kj}^{(2)} = C_j^{(2)} \begin{cases} \sin k\theta_j^{(2)}, & k=1,2,\dots,N_2-N_1, \\ \alpha_j^{(2)} \sin(N-N_1-k+1)\theta_j^{(2)}, & k=N_2-N_1+1,\dots,N-N_1, \end{cases}$$

$\theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}$  – корені рівнянь

$$\cos N_2\theta + \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_2 + \chi_1} \cos(N_2 - 2N_1)\theta = 0,$$

$$\sin(N - N_1 + 1)\theta + \frac{\chi_2 - \chi_3}{\chi_2 + \chi_3} \sin(N - 2N_2 + N_1 + 1)\theta = 0$$

в інтервалі  $(0, \pi)$  відповідно,

$$\alpha_j^{(1)} = \begin{cases} \frac{\cos(N_1\theta_j^{(1)})}{\sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(1)}}, & \sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(1)} \neq 0, \\ \chi_1\chi_2^{-1}, \sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_j^{(2)} = \begin{cases} \frac{\sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(2)}}{\sin(N - N_2 + 1)\theta_j^{(2)}}, & \sin(N - N_2 + 1)\theta_j^{(2)} \neq 0, \\ -\frac{\chi_2 \cos(N_2 - N_1)\theta_j^{(2)}}{\chi_3 \cos(N - N_2 + 1)\theta_j^{(2)}}, & \sin(N - N_2 + 1)\theta_j^{(2)} = 0, \end{cases}$$

$$C_j^{(1)} = \left[ \frac{\chi_1}{2} \left( N_1 + \frac{\cos N_1\theta_j^{(1)} \sin(N_1+1)\theta_j^{(1)}}{\sin\theta_j^{(1)}} \right) + \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \cos^2 N_1\theta_j^{(1)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\chi_2}{2} \alpha_j^{(1)2} \left( N_2 - N_1 - \frac{\cos(N_2 - N_1 - 1)\theta_j^{(1)} \sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(1)}}{\sin\theta_j^{(1)}} \right)^{-1/2}, \\
C_j^{(2)} & = \left( \frac{\chi_2}{2} \left( N_2 - N_1 - \frac{\cos(N_2 - N_1 - 1)\theta_j^{(2)} \sin(N_2 - N_1)\theta_j^{(2)}}{\sin\theta_j^{(2)}} \right) + \right. \\
& + \frac{\chi_2 + \chi_3}{2} \sin^2(N_2 - N_1)\theta_j^{(2)} + \\
& \left. + \frac{\chi_3 \alpha_j^{(2)2}}{2} \left( N - N_2 + 1 - \frac{\cos(N - N_2)\theta_j^{(2)} \sin(N - N_2 + 1)\theta_j^{(2)}}{\sin\theta_j^{(2)}} \right)^{-1/2} \right).
\end{aligned}$$

Елементи діагональних матриць

$$diag A^{(1)}(i, t) = \{A_0^{(1)}(i, t), A_1^{(1)}(i, t), \dots, A_{N_2-1}^{(1)}(i, t)\},$$

$$diag A^{(2)}(i, t) = \{A_1^{(2)}(i, t), A_2^{(2)}(i, t), \dots, A_{N-N_1}^{(2)}(i, t)\}$$

визначають із співвідношень

$$A_K^{(j)}(i, t) = v_{jk}^{i-t} (\mu_{jk} - v_{jk})^{-1},$$

$$\mu_{jk} = v_{jk}^{-1} = \eta_{jk} + \sqrt{\eta_{jk}^2 - 1}, \quad \eta_{jk} = 1 + r^2(1 - \cos\theta_k^{(j)}), \quad j=1,2;$$

вектори

$$\vec{F}_1^{(n)}(x_t) = \{\tilde{f}_0^{(n)}(x_t), f_1^{(n)}(x_t), \dots, f_{N_2-2}^{(n)}(x_t), \tilde{f}_{N_2-1}^{(n)}(x_t)\},$$

$$\vec{F}_2^{(n)}(x_t) = \{\tilde{f}_{N_1+1}^{(n)}(x_t), f_{N_1+2}^{(n)}(x_t), \dots, f_{N-1}^{(n)}(x_t), \tilde{f}_N^{(n)}(x_t)\},$$

$$P_1^T, P_2^T \text{ – матриці, транспоновані до } P_1, P_2 \text{ відповідно.}$$

Тепер задамо довільним чином  $V_{N_1}^{(0)}(x_i)$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Застосовуючи формули (1.9), (1.10), отримаємо послідовно:

$$\vec{W}^{(1)}(x_i), \vec{V}^{(1)}(x_i), \vec{V}^{(2)}(x_i), \vec{W}^{(3)}(x_i), \dots$$

**Теорема.** Для сіткових функцій (1.9), (1.10) справедливі оцінки

$$\|V^{(n)} - U\|_1 \leq q^n \|V^{(0)} - U\|_1, \|W^{(n)} - U\|_2 \leq q^{n-1} \|V^{(0)} - U\|_2, \quad (1.11)$$

$$\text{де } q = \frac{c-b}{c-a} < 1, \|z\|_\alpha = \max_{(x_i, y_k) \in G_\alpha^h} |z_k(x_i)|, \alpha=1,2.$$

Доведення теореми здійснюється за схемою, викладеною в [1].

Таким чином, отримані послідовності сіткових функцій  $\{V_n^{(n)}(x_i)\}_{n=1}^\infty$  та  $\{W_n^{(n)}(x_i)\}_{n=1}^\infty$  є збіжними до розв'язку  $u_k(x_i)$  задачі (1.5)-(1.6), що апрокс-

симує розв'язок  $u(x, y)$  вихідної задачі (1.1)-(1.4) з порядком  $O(\hbar^2)$  на  $W_h$ , де  $\hbar = \max(h, h_1)$  [4].

Зауважимо, що ітераційний процес (1.9)-(1.10) є чисельним аналогом класичного методу Шварца [2].

## 1.2. Метод декомпозиції та розпаралелювання розв'язку одного класу задач теорії фільтрації

Надзвичайна складність екологічних та відповідних технологічних задач призводить до необхідності використання математичного моделювання в якості основного методу дослідження. Крім проблем інформаційного забезпечення, такі задачі характеризуються, зокрема, великою розмірністю. Тому доречними є розробки підходів, які б забезпечували зниження розмірності моделі.

Розглянемо відповідну вказаній ідеї зниження розмірності методику, яка може бути основою науково обгрунтованих розрахунків, необхідних при проектуванні важливих в екосистемах очисних та захисних гідроспоруд, гідрохімічного режиму ґрунтів та ґрунтових вод, тощо. Основні засади методики викладемо на прикладі розрахунку фільтраційного поля в неоднорідному середовищі.

Як правило, в природніх умовах фільтраційний потік здійснюється в середовищі, що є неоднорідним, зокрема, по вертикалі. При моделюванні фільтраційних процесів прошарки із близькими значеннями коефіцієнта фільтрації зводяться до розрахункового прошарку з осередненим коефіцієнтом фільтрації. В результаті весь водоносний пласт моделюється областю фільтрації з шаруватою структурою.

**1. Напірна фільтрація.** Розглянемо приклад плоскої напірної фільтрації води в багат шаруватому пласті скінченної потужності, що моделюється наступною крайовою задачею: в області  $\Omega = \{(x, y) | x \in (-\infty, +\infty), y \in (a, b)\}$  знайти функцію напору  $u(x, y)$  як розв'язок рівняння

$$\operatorname{div}(\kappa(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.12)$$

який на межі  $\partial\Omega$  задовольняє крайовим умовам

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty); \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, a); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (1.14)$$

Нехай, при цьому:

$$\kappa(x, y) = \kappa_i, \quad \text{при } (x, y) \in G, \quad y \in (b_{i-1}, b_i), \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.15)$$

$$0=b_0 < b_1 < \dots < b_n = b, \quad \kappa_i = \text{const}(i), \quad i = \overline{1, n}.$$

На лініях розриву  $\kappa(x, y)$  покладемо

$$[u] = 0, \quad \left[ \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad (1.16)$$

де  $[\cdot]$  означає стрибок функції:  $[u]_{y=\xi} = u(x, \xi+0) - u(x, \xi-0)$ .

Вважаємо, що напір  $\varphi(x)$  та інтенсивність джерел  $f(x, y)$  – задані функції, для яких існує єдиний розв'язок крайової задачі (1.13)-(1.16) [7].

Застосовуючи методику, викладену в [8], будемо шукати розв'язок  $u(x, y)$  у вигляді ряду

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(s)}(x, y), \quad (1.17)$$

де  $s=i$  при  $y \in (b_{i-1}, b_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Згідно з [10] для визначення  $u_k^{(s)}(x, y)$  отримуюмо рекурентну послідовність відповідних крайових задач  $(k, s)$

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(1)}(x, y) = f(x, y), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (0, b_1); \\ u_0^{(1)}(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty); \\ \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, a); \quad \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=b_1} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(s)}(x, y) = f(x, y), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{s-1}, b_s), \quad s = \overline{2, n}; \\ \left. \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial y} \right|_{y=b_{s-1}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial y} \right|_{y=b_s} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad s = \overline{2, n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_k^{(1)}(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (0, b_1); \\ u_k^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty); \quad \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, a); \\ \left( \left. \kappa_1 \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y} = \kappa_1 \frac{\partial u_{k-1}^{(1)}}{\partial y} - \alpha_1 (u_{k-1}^{(2)} - u_{k-1}^{(1)}) \right) \right|_{y=b_1}, \quad x \in (-\infty, \infty); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_k^s(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{s-1}, b_s), \quad s = \overline{2, n-1}; \\ \left( \kappa_s \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial y} = \kappa_s \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial y} - \alpha_{s-1}(u_{k-1}^{(s)} - u_{k-1}^{(s-1)}) \right)_{y=b_{s-1}}, \quad x \in (-\infty, \infty); \\ \left( \kappa_s \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial y} = \kappa_s \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial y} - \alpha_s(u_{k-1}^{(s+1)} - u_{k-1}^{(s)}) \right)_{y=b_s}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad s = \overline{2, n-1}; \\ \Delta u_k^n(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{n-1}, b); \\ \left( \kappa_n \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial y} = \kappa_n \frac{\partial u_{k-1}^{(n)}}{\partial y} - \alpha_{n-1}(u_{k-1}^{(n)} - u_{k-1}^{(n-1)}) \right)_{y=b_{n-1}}, \quad x \in (-\infty, \infty); \\ \left. \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \end{array} \right.$$

розв'язки яких легко отримати методом Р-трансформацій [8, 3]. Тут  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $k = \overline{0, \infty}$ .

**2. Безнапірна фільтрація.** Розглянемо випадок стаціонарної плоскої фільтрації води через неоднорідне пористе середовище земляної греблі, що зведена на проникий шаруватій основі скінченної потужності зі шпунтом АМ (рис.1.1).

Для визначення основних характеристик відповідного фільтраційного потоку достатньо знайти функцію напору  $u(x, y)$  як розв'язок рівняння

$$\operatorname{div}(\kappa(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in G, \quad (1.18)$$

при:

$$u|_{EAB} = H_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right|_{BC} = 0, \quad (u + y)_{BCL} = 0, \quad (1.19)$$

$$u|_{LDF} = H_2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right|_{EF'} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{AM} = 0, \quad (1.20)$$

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_0(x, y), & (x, y) \in G, \quad y \leq 0, \\ \kappa_i, & (x, y) \in G, \quad y \in (b_{i-1}, b_i), \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1.21)$$

$$[u]_{y=b_i} = 0, \quad \left[ \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=b_i} = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (1.22)$$

де  $G$  – область фільтрації,  $\kappa(x, y)$  – коефіцієнт фільтрації в точці  $(x, y) \in G$ ,  $H_1, H_2$  – рівні напору у верхньому і нижньому б'єфах,  $\overline{\mathbf{v}}$  – одиничний вектор внутрішньої нормалі до межі області,  $n$  – число розривів

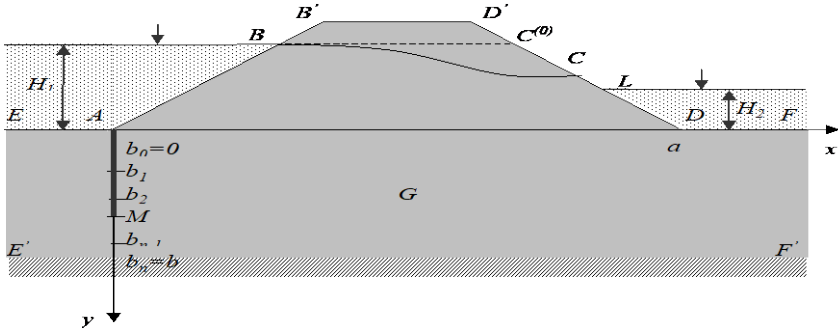


Рис. 1.1

коефіцієнта  $\kappa(x, y)$ ,  $y_M = b_{s_0}$  – ордината точки  $M$ ,  $s_0 < n$ ,  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = b$ ,  $\kappa_i = \text{const}(i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Зауважимо, що для області  $G$  невідомим є положення кривої депресії  $BC$  і його необхідно знайти при розв'язуванні задачі (1.18)–(1.22), яка має єдиний класичний розв'язок [7].

Нехай крива  $BC$  визначена, наприклад, рівнянням  $y = g(x)$ ,  $x \in [0, a]$ , де неперервна фінітна функція  $g(x) \leq 0$  для  $x \in [0, a]$ .

Розв'язок  $u(x, y)$ , як і вище, шукаємо у вигляді ряду (1.17), де  $s=0$  при  $g(x) \leq y \leq b_0$ ,  $s=i$  при  $b_{i-1} < y \leq b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Аналогічно, для визначення  $u_k^{(s)} = u_k^{(s)}(x, y)$  отримуємо рекурентну послідовність крайових задач

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(0)}(x, y) = 0, (x, y) \in G_0; u_0^{(0)}|_{AB} = H_1, \left. \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{BC} = 0, (u_0^{(0)} + y)|_{CL} = 0, \\ u_0^{(0)}|_{LD} = H_2, \left. \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, x \in (0, a); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(1)}(x, y) = 0, x \in (-\infty, \infty), y \in (0, b_1); \\ u_0^{(1)}(x, 0) = H_1, x \in (-\infty, 0]; u_0^{(1)}(x, 0) = H_2, x \in [a, +\infty); \\ \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, x \in (0, a); \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=b_1} = 0, x \in (-\infty, \infty); \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, y \in (0, b_1]; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0^{(s)}(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{s-1}, b_s), \quad s = \overline{2, n}; \\ \left. \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial y} \right|_{y=b_{s-1}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial y} \right|_{y=b_s} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad s = \overline{2, n}; \\ \left. \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad y \in (b_{s-1}, b_s], \quad s = \overline{2, s_0}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_k^{(0)}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G_0; \quad u_k^{(0)}|_{AB \cup CD} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{BC} = 0; \\ \left( \kappa_0 \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y} = \kappa_0 \frac{\partial u_{k-1}^{(0)}}{\partial y} - \alpha_0 (u_{k-1}^{(1)} - u_{k-1}^{(0)}) \right) \Big|_{y=0}, \quad x \in (0, a); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_k^{(1)}(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (0, b_1); \quad u_k^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty); \\ \left( \kappa_1 \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y} = \kappa_1 \frac{\partial u_{k-1}^{(1)}}{\partial y} - \alpha_0 (u_{k-1}^{(1)} - u_{k-1}^{(0)}) \right) \Big|_{y=0}, \quad x \in (0, a); \\ \left( \kappa_1 \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y} = \kappa_1 \frac{\partial u_{k-1}^{(1)}}{\partial y} - \alpha_1 (u_{k-1}^{(2)} - u_{k-1}^{(1)}) \right) \Big|_{y=b_1}, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad \left. \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad y \in (0, b_1]; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_k^{(s)}(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{s-1}, b_s), \quad s = \overline{2, n}; \quad \left. \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad y \in [b_{s-1}, b_s], \quad s = \overline{2, s_0}; \\ \left( \kappa_s \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial y} = \kappa_s \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial y} - \alpha_{s-1} (u_{k-1}^{(s)} - u_{k-1}^{(s-1)}) \right) \Big|_{y=b_{s-1}}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad s = \overline{2, n-1}; \\ \left( \kappa_s \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial y} = \kappa_s \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial y} - \alpha_s (u_{k-1}^{(s+1)} - u_{k-1}^{(s)}) \right) \Big|_{y=b_s}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad s = \overline{2, n-1}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_k^{(n)}(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (b_{n-1}, b); \\ \left( \kappa_n \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial y} = \kappa_n \frac{\partial u_{k-1}^{(n)}}{\partial y} - \alpha_{n-1} (u_{k-1}^{(n)} - u_{k-1}^{(n-1)}) \right) \Big|_{y=b_{n-1}}, \quad x \in (-\infty, \infty); \\ \left. \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{array} \right.$$

Тут  $G_0 = \{(x, y) | (x, y) \in G, y \leq 0\}$ .

Для розв'язування задач  $(k, 0)$ ,  $(k=0, 1, 2, \dots)$  застосуємо метод скінче-



них елементів [9]. З цієї метою перейдемо до еквівалентної варіаційної задачі, яка полягає у наступному. Потрібно знайти функцію  $u_k^{(0)}(x,y) \in H$ , яка забезпечує мінімум функціоналу енергії

$$F(u) = \iint_{(G_0)} \kappa(x,y) \text{grad} u(x,y)^2 dx dy,$$

де  $H$  – множина функцій на  $G_0$ , які мають узагальнені перші похідні і задовольняють заданим крайовим умовам першого роду. При знаходженні наближеного розв'язку задач  $(k,0)$  здійснюємо триангуляцію області  $G_0$  (розбиваємо на трикутники). В якості базису відповідного  $H$  скінченно-мірного простору  $H^N$  ( $N$  – число вузлів триангуляції області  $G_0$ ) виберемо поліноми першого степеня (лінійні на кожному трикутнику розбиття області  $G_0$ ).

В результаті реалізації стандартної методики МСЕ [12] спочатку одержимо наближені значення  $u_0^{(0)}(x,y)$  у вузлах триангуляції області  $G_0$ . Тепер розв'язок задач  $(0,s)$  ( $s=\overline{1,n}$ ) знайдемо у вигляді формул Р-трансформацій [8, 3]. Розв'язки наступних задач  $(k,s)$  ( $k=\overline{1,\infty}; s=\overline{0,n}$ ) знаходимо відповідно методами МСЕ та Р-трансформацій паралельно за схемою, наведеною в [10].

Збіжність ряду (1.17) забезпечується при відповідному виборі релаксаційних параметрів  $\alpha_s$  ( $s=\overline{0,n-1}$ ) [11].

Знаходження кривої  $y=g(x)$ ,  $x \in (a,b)$  здійснюється методом ітерацій наступним чином. Спочатку криву  $BC$  задаємо наближено, наприклад, прямою  $BC^{(0)}$  (рис. 1.1). При цьому, одержуємо наближення  $G^{(0)}$  області  $G$ . Проміжок височування  $CL$  замінюється наближенням – відрізком  $C^{(0)}L$ . В  $G^{(0)}$  за викладеною вище схемою розв'язується задача (1.18)-(1.22) без умови  $(u+y)_{BC^{(0)}}=0$ . В результаті у вузлових точках області  $G^{(0)}$  отримуємо значення  $u^{(0)}(x,y)$  – наближення  $u(x,y)$ . Якщо у вузлових точках на межі  $BC^{(0)}$

$$|u^{(0)}(x,y) + y| > \varepsilon, \quad (1.23)$$

то в якості наступного наближення  $BC$  вибирається ламана  $BC^{(1)}$ , вершинами якої є точки  $(x_i; u^{(0)}(x_i, y_i))$ , де  $(x_i, y_i)$  – вузли триангуляції на межі  $BC^{(0)}$ . Критерієм зупинки ітераційного процесу є нерівність (1.23) для достатньо малого значення  $\varepsilon > 0$ . Збіжність  $BC^{(m)}$  до  $BC$  при  $m \rightarrow \infty$  у відповідному визначенні доведена в [12]. При цьому можливі певні модифікації способу визначення проміжку височування  $CL$  [13].

**Підсумовуючи**, зауважимо наступні переваги запропованої методики.

Процес розв'язування задачі “розпаралелюється”, що є актуальним заходом в організації ефективного математичного забезпечення розрахунку на ЕОМ задач масопереносу в суцільному середовищі. Методика забезпечує розв'язок розглянутої задачі для достатньо складних за конфігурацією областей при значній кількості ліній розриву коефіцієнта  $\kappa(x, y)$ , що природно для задач підземної гідромеханіки. Явний вид наближеного розв'язку, що забезпечують задіяні тут методи Р-трансформацій і скінченних елементів, дозволяє здійснювати вибірковість рахунку в наперед вибраній множині вузлів. Цей факт важливий з огляду на звичні диспропорції у розмірах області фільтрації. Нарешті, такий комбінований підхід дозволяє уникнути проблеми розв'язування нестійких за своєю природою систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що появились би, при розв'язуванні вихідної задачі, наприклад, методом скінченних різниць [6]. Методика достатньо зручна для комп'ютерної реалізації.

Зауважимо, що викладені тут алгоритми чисельного розрахунку задач фільтрації без складнощів можуть бути адаптовані до ряду інших складних випадків конфігурації області та зміни коефіцієнта фільтрації, а також на випадок трьохмірної фільтрації.

Відмітимо, що декомпозицію вихідної задачі, подібно до вище викладеного алгоритму, можна достатньо ефективно здійснити на основі альтернуючого методу Шварца [14, 15].

Очевидно, що запропоновані тут підходи з успіхом можуть бути поширені на відповідні випадки нестационарної фільтрації в неоднорідних складній конфігурації областях [16].

Таким чином, ідея декомпозиції у викладеному вище варіанті реалізації має ряд переваг, забезпечує зниження розмірності вихідної задачі і може з успіхом використовуватись для розрахунку, зокрема, фільтраційного фону, що є основою в задачах дослідження гідрологічних процесів у природних та створених цивілізацією екологічних системах.

### 1.3. Розв'язування однієї крайової задачі для диференційного рівняння в частинних похідних з розривними коефіцієнтами та періодичністю в крайових умовах

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \\ u|_{x=a} = \phi(y), \quad u|_{x=b} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \bar{u}|_{y=2\pi}, \\ \kappa(x, y) = \kappa_s \text{ при } a_{s-1} < x < a_s, \quad s = \overline{1, n}, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \\ [u]_{x=a_s} = 0, \quad \left[ \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=a_s} = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \end{array} \right. \quad (1.24)$$

$$G = \bigcup_{s=1}^n G^{(s)}, \quad G^{(s)} = \{(x, y) \mid a_{s-1} < x < a_s, \quad 0 \leq y \leq 2\pi\}, \quad s = \overline{1, n},$$

де дужки [ ] позначають стрибок функції;  $0 < a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  – задані числа,  $f(x, y)$ ,  $\phi(y)$ ,  $\varphi(y)$  – задані функції, при яких існує єдиний розв'язок задачі (1.24).

Ця постановка узагальнює крайову задачу, що розглядалася в [17]. В даній роботі пропонується та обґрунтовується алгоритм розв'язання задачі (1.24).

Поряд із задачею (1.24) розглянемо наступну крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(x, y) \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(x, y) \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \\ \tilde{u}|_{x=a} = \phi(y), \quad \tilde{u}|_{x=b} = \varphi(y), \quad \tilde{u}|_{y=0} = \bar{\tilde{u}}|_{y=2\pi}, \\ \kappa(x, y) = \kappa_s \text{ при } a_{s-1} < x < a_s, \quad s = \overline{1, n}, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \\ \left. \left[ \kappa_s \frac{\partial \tilde{u}^{(s)}}{\partial x} \right]_{x=a_s} = \varepsilon \left( \kappa_s \frac{\partial \tilde{u}^{(s)}}{\partial x} - \alpha_s [\tilde{u}] \right) \right|_{x=a_s}, \quad \left[ \kappa \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]_{x=a_s} = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \end{array} \right. \quad (1.25)$$

де  $\tilde{u}^{(s)}(x, y) = \tilde{u}(x, y)$  при  $a_{s-1} \leq x < a_s$ ,  $\alpha_s$  – поки-що невідомі релаксаційні параметри, які будуть визначені далі,  $s = \overline{1, n}$ .

Розв'язок задачі (1.25) шукатимемо у вигляді ряду

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y). \quad (1.26)$$

Оскільки при  $\varepsilon=1$  задачі (1.24) і (1.26) співпадають, то функція

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y) \quad (1.27)$$

буде розв'язком задачі (1.24).

Для знаходження функцій  $u_k(x, y)$  підставляємо (1.27) в (1.24) і отримуємо  $n$  самостійних крайових задач в  $G^{(s)}$  ( $s=\overline{1, n}$ ) для  $k=0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(1)} = f^{(1)}, (x, y) \in G^{(1)}, \\ u_0^{(1)} \Big|_{x=a=\varphi(y)}, \quad \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=a_1} = 0, \quad u_0^{(1)} \Big|_{y=0} = u_0^{(1)} \Big|_{y=2\pi}, \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(s)} = f^{(s)}, (x, y) \in G^{(s)}, \\ \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{s-1}} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_s} = 0, \quad u_0^{(s)} \Big|_{y=0} = u_0^{(s)} \Big|_{y=2\pi}, \quad s = \overline{2, n-1}, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} \Delta u_0^{(n)} = f^{(n)}, (x, y) \in G^{(n)}, \\ \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{n-1}} = 0, \quad u_0^{(n)} \Big|_{x=b=\varphi(y)}, \quad u_0^{(n)} \Big|_{y=0} = u_0^{(n)} \Big|_{y=2\pi}, \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\begin{cases} \Delta u_k^{(1)} = 0, (x, y) \in G^{(1)}, \\ u_k^{(1)} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=a_1} = \frac{\partial u_{k-1}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=a_1} - \frac{\alpha_1}{\kappa_1} (u_{k-1}^{(1)} - u_{k-1}^{(2)}) \Big|_{x=a_1}, \\ u_k^{(1)} \Big|_{y=0} = u_k^{(1)} \Big|_{y=2\pi}, \quad k \geq 1, \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{cases} \Delta u_k^{(s)} = 0, (x, y) \in G^{(s)}, \\ \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{s-1}} = \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{s-1}} - \frac{\alpha_{s-1}}{\kappa_s} (u_{k-1}^{(s-1)} - u_{k-1}^{(s)}) \Big|_{x=a_{s-1}}, \\ \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_s} = \frac{\partial u_{k-1}^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=a_s} - \frac{\alpha_s}{\kappa_s} (u_{k-1}^{(s)} - u_{k-1}^{(s+1)}) \Big|_{x=a_s}, \\ u_k^{(s)} \Big|_{y=0} = u_k^{(s)} \Big|_{y=2\pi}, \quad k \geq 1, \quad s = \overline{2, n-1}, \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} \Delta u_k^{(n)} = 0, (x, y) \in G^{(n)}, \\ \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{n-1}} = \frac{\partial u_{k-1}^{(n)}}{\partial x} \Big|_{x=a_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\kappa_n} (u_{k-1}^{(n-1)} - u_{k-1}^{(n)}) \Big|_{x=a_{n-1}}, \\ u_k^{(n)} \Big|_{x=b} = 0, \quad u_k^{(n)} \Big|_{y=0} = u_k^{(n)} \Big|_{y=2\pi}, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

Тут  $f^{(s)} = f(x, y) \cdot \kappa_s^{-1}$ ,  $s = \overline{1, n}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Для розв'язування задач (1.28)-(1.33) на площині введемо рівномірну прямокутну сітку:

$$\omega^h = \left\{ (x_i, y_j) \left| \begin{array}{l} x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m_n, \quad a = m_0 < m_1 < \dots < m_n = b, \quad x_{m_s} = a_s, \\ y_j = jh_l, \quad j = 0, 1, \dots, l, \quad y_0 = 0, \quad y_l = 2\pi, \quad l > 0, \quad h, h_l > 0, \quad s = \overline{1, n} \end{array} \right. \right\}.$$

Задачам (1.28)-(1.33) поставимо у відповідність скінченно-різницеви задачі, розв'язки яких знайдемо методом сумарних зображень [18, 4, 6]:

$$\bar{u}_k^{(s)}(x_i) = P \left[ \bar{A}_k^{(s)} \mu^i + \bar{B}_k^{(s)} \nu^l - h^2 \sum_{t=m_{s-1}+1}^{m_s-1} \frac{\nu^{|i-t|}}{\mu^{-\nu}} P^* \bar{f}(x_t) \right], \quad (1.34)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = m_{s-1} + 1, m_{s-1} + 2, \dots, m_s; \quad s = \overline{1, n}.$$

Тут:  $\bar{u}_k^{(s)}(x_i) = \{u_{k,i,j}^{(s)}\}_{j=1}^l$ ,  $u_{k,i,j}^{(s)} = u_k^{(s)}(x_i, y_j)$ ,  $s = \overline{1, n}$ ;

$$\bar{f}(x_i) = \{f_{i,j}\}_{j=1}^l, \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j); \quad (\bar{f}(x_i) \equiv 0 \text{ при } k=0)$$

$$\bar{A}_k^{(s)} = \{A_{kj}^{(s)}\}_{j=1}^l, \quad \bar{B}_k^{(s)} = \{B_{kj}^{(s)}\}_{j=1}^l, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = \overline{1, n};$$

$$P = \{P_{rj}\}_{r,j=1}^l, \quad P_{rj} = \begin{cases} 1/\sqrt{l}, & r = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, l} \\ \sqrt{2/l} \cos(rj\pi/l), & r = \overline{1, l}, \quad j = 2, 4, \dots, l-1, \\ \sqrt{2/l} \sin(r(j-1)\pi/l), & r = \overline{1, l}, \quad j = 3, 5, \dots, l, \\ (-1)^r / \sqrt{l}, & r = \overline{1, l}, \quad j = l, \text{ якщо } l - \text{ парне.} \end{cases}$$

Елементи діагональних матриць  $\mu = \{\mu_j\}_{j=1}^l$ ,  $\nu = \{\nu_j\}_{j=1}^l$ ,

$\frac{\nu^{|i-t|}}{\mu^{-\nu}} = \left\{ \frac{\nu_j^{|i-t|}}{\mu_j^{-\nu_j}} \right\}_{j=1}^l$  визначаються наступним чином:

$$\mu_j = \nu_j^{-1} = \eta_j + \sqrt{\eta_j^2 - 1}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \eta_j = 1 + \gamma^2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{l} \text{Entier} \left( \frac{j}{2} \right) \right) \right), \quad j = \overline{1, l-1},$$

$$\eta_l = \begin{cases} 1 + \gamma^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi(l-1)}{l} \right), & \text{якщо } l - \text{ парне,} \\ 1 + 2\gamma^2, & \text{якщо } l - \text{ непарне, } \quad \gamma = h/h_l. \end{cases}$$

$A_{kr}^{(s)}$  і  $B_{kr}^{(s)}$  визначаються із систем рівнянь:

$$\begin{cases}
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(1)} + B_{0r}^{(1)} - \sum_{t=m_0+1}^{m_1-1} h^2 \frac{v_r^t}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = \varphi_j, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(1)} (\mu_r^{m_1-1} - \mu_r^{m_1}) + B_{0r}^{(1)} (v_r^{m_1-1} - v_r^{m_1}) - \sum_{t=m_0+1}^{m_1-1} h^2 \frac{v_r^{m_1-t} (1-v_r)}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = 0, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(s)} (\mu_r^{m_{s-1}} - \mu_r^{m_{s-1}+1}) + B_{0r}^{(s)} (v_r^{m_{s-1}} - v_r^{m_{s-1}+1}) - \sum_{t=m_{s-1}+1}^{m_s-1} h^2 \frac{v_r^{m_{s-1}-t} (1-v_r)}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = 0, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(s)} (\mu_r^{m_s-1} - \mu_r^{m_s}) + B_{0r}^{(s)} (v_r^{m_s-1} - v_r^{m_s}) - \sum_{t=m_{s-1}+1}^{m_s-1} h^2 \frac{v_r^{m_s-t} (1-v_r)}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = 0, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(n)} (\mu_r^{m_{n-1}} - \mu_r^{m_{n-1}+1}) + B_{0r}^{(n)} (v_r^{m_{n-1}} - v_r^{m_{n-1}+1}) - \sum_{t=m_{n-1}+1}^{m_n-1} h^2 \frac{v_r^{m_{n-1}-t} (1-v_r)}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = 0, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{0r}^{(n)} \mu_r^{m_n} + B_{0r}^{(n)} v_r^{m_n} - \sum_{t=m_{n-1}+1}^{m_n-1} h^2 \frac{v_r^{m_n-t}}{\mu_r - v_r} P_{rj} f_{tj} \right) = \psi_j, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} (A_{kr}^{(1)} + B_{kr}^{(1)}) = 0, \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{kr}^{(1)} (\mu_r^{m_1-1} - \mu_r^{m_1}) + B_{kr}^{(1)} (v_r^{m_1-1} - v_r^{m_1}) \right) = u_{k-1, m_1-1, j}^{(1)} - u_{k-1, m_1, j}^{(1)} - \frac{\alpha_1}{\kappa_1} (u_{k-1, m_1, j}^{(1)} - u_{k-1, m_1, j}^{(2)}), \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{kr}^{(s)} (\mu_r^{m_{s-1}} - \mu_r^{m_{s-1}+1}) + B_{kr}^{(s)} (v_r^{m_{s-1}} - v_r^{m_{s-1}+1}) \right) = u_{k-1, m_{s-1}, j}^{(s)} - \\
- u_{k-1, m_{s-1}+1, j}^{(s)} - \frac{\alpha_{s-1}}{\kappa_s} (u_{k-1, m_{s-1}, j}^{(s-1)} - u_{k-1, m_{s-1}, j}^{(s)}), \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{kr}^{(s)} (\mu_r^{m_s-1} - \mu_r^{m_s}) + B_{kr}^{(s)} (v_r^{m_s-1} - v_r^{m_s}) \right) = u_{k-1, m_s-1, j}^{(s)} - \\
- u_{k-1, m_s, j}^{(s)} - \frac{\alpha_s}{\kappa_s} (u_{k-1, m_s, j}^{(s-1)} - u_{k-1, m_s, j}^{(s)}), \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} \left( A_{kr}^{(n)} (\mu_r^{m_{n-1}} - \mu_r^{m_{n-1}+1}) + B_{kr}^{(n)} (v_r^{m_{n-1}} - v_r^{m_{n-1}+1}) \right) = u_{k-1, m_{n-1}, j}^{(n)} - \\
- u_{k-1, m_{n-1}+1, j}^{(n)} - \frac{\alpha_{n-1}}{\kappa_n} (u_{k-1, m_{n-1}, j}^{(n-1)} - u_{k-1, m_{n-1}, j}^{(n)}), \\
\sum_{r=1}^l P_{jr} (A_{kr}^{(n)} \mu_r^{m_n} + B_{kr}^{(n)} v_r^{m_n}) = 0, \quad k \geq 1, \quad j = \overline{1, l}, \quad s = \overline{1, n-1}.
\end{cases}$$

Визначивши  $u_k^{(s)}(x, y)$  за формулою (1.34), формуємо ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(s)}(x,y)$ ,  $(x,y) \in G^{(s)}$ ,  $s=1, \overline{n}$ . Для забезпечення збіжності цього ряду до

розв'язку вихідної задачі  $u(x,y)$  вибираємо  $\alpha_s$  (аналогічно [19]) за умовою:

$$\frac{-2\kappa_s \kappa_{s+1}}{\kappa_s(a_{s+1}-a_s) + \kappa_{s+1}(a_s - a_{s-1})} < \alpha_s < 0 \quad (s=1, \overline{n}). \quad (1.35)$$

Таким чином, маємо обґрунтований алгоритм розв'язування крайової задачі (1.24) із довільною кількістю ліній розриву коефіцієнта  $\kappa(x,y)$  та періодичністю в крайових умовах. Комп'ютерна реалізація цього алгоритму достатньо прозора і може здійснюватися за схемою розпаралелювання, наведеною в [10].

## 2. Чисельні методи теорії функцій комплексної змінної розв'язання крайових задач типу “фільтрація”

### 2.1. Застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення

Розглянемо напочатку модельну задачу про знаходження гармонічної функції  $\varphi = \varphi(x,y)$  (потенціалу) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області  $G_z = ABCD$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій чотирма гладкими кривими  $AB = \{z: f_1(x,y) = 0\}$ ,  $BC = \{z: f_2(x,y) = 0\}$ ,  $CD = \{z: f_3(x,y) = 0\}$ ,  $DA = \{z: f_4(x,y) = 0\}$ , які в точках  $A, B, C, D$  перетинаються під прямими кутами, при умовах:

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0, \quad \text{де } n \text{ – зовнішня нормаль до відповідної кривої.}$$

Ввівши гармонічну функцію  $\psi = \psi(x,y)$  (функцію течії), комплексно спряжену до  $\varphi = \varphi(x,y)$  і замінивши останні дві граничні умови на умови:  $\psi|_{BC} = Q$ ,  $\psi|_{AD} = 0$ , де стала  $Q$  – повна витрата (невідомий параметр), яку можна визначити із рівності:

$$Q = \int_{EF} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int_{EF} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

( $E \in AD, F \in BC$ ), ми, як відомо [20,21,22,27], можемо дану задачу замінити більш загальною задачею на конформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$  області  $G_z$  на прямокутник (область комплексного потенціалу)  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  при відповідності чотирьох кутових точок [25]. Обернена до неї крайова задача на конформне відображення

області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$ , що має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (2.1)$$

зводиться до розв'язування в  $G_\omega$  рівнянь Лапласа  $\Delta x = 0, \Delta y = 0$  при заданих крайових умовах та умовах Коші-Рімана на границі  $\partial G_\omega$  області  $G_\omega$  [20,21,22].

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній сітковій області  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j : \varphi_i = \varphi_* + h_0 i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = h_1 j, j = \overline{0, n+1}; h_0 = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, h_1 = \frac{Q}{n+1}, \gamma = h_0/h_1\}$  запишемо у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, i = \overline{1, m}, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma(y_{i,1} - y_{i,0}), \quad y_{i,0} - y_{i+1,0} = \gamma(x_{i,1} - x_{i,0}), \quad i = \overline{1, m}, \\ x_{1,j} - x_{0,j} = \gamma(y_{0,j+1} - y_{0,j}), \quad y_{0,j} - y_{1,j} = \gamma(x_{0,j+1} - x_{0,j}), \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}, \quad (2.5)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ .

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (2.2) у внутрішніх і граничних по горизонталі вузлах сіткового прямокутника  $G_\omega^\gamma$  через значення в граничних вузлах по вертикалі згідно з формулами сумарних зображень Г.Положого [3, 4] має вигляд:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^m P_{i,k} \left( \mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (P_{1,k} x_{0,t} + P_{m,k} x_{m+1,t}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^m P_{i,k} \left( \mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^n \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (P_{1,k} y_{0,t} + P_{m,k} y_{m+1,t}) \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n+1},$$

де  $P_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{ik\pi}{m+1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$ ,  $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,  $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ .

Невідомі  $A_k, B_k, C_k, D_k$ ,  $x_{0,t}, y_{0,t}, x_{m+1,t}, y_{m+1,t}$  визначаються в результаті



розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & f_1(x_{0,j}, y_{0,j})=0; \\
 & f_2\left(\sum_{k=1}^m P_{i,k}\left(\mu_k^{n+1}A_k + v_k^{n+1}B_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^{n+1-t}}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}x_{0,t} + P_{m,k}x_{m+1,t})\right),\right. \\
 & \quad \left.\sum_{k=1}^m P_{i,k}\left(\mu_k^{n+1}C_k + v_k^{n+1}D_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^{n+1-t}}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}y_{0,t} + P_{m,k}y_{m+1,t})\right)\right)=0; \\
 & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})=0; \\
 & f_4\left(\sum_{k=1}^m P_{i,k}\left(A_k + B_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}x_{0,t} + P_{m,k}x_{m+1,t})\right),\right. \\
 & \quad \left.\sum_{k=1}^m P_{i,k}\left(C_k + D_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}y_{0,t} + P_{m,k}y_{m+1,t})\right)\right)=0; \\
 & \sum_{k=1}^m (P_{i,k} - P_{i+1,k})(C_k + D_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}y_{0,t} + P_{m,k}y_{m+1,t}))= \\
 & = \gamma \sum_{k=1}^m P_{i,k}((\mu_k - 1)A_k + (v_k - 1)B_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{(\mu_k - 1)v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}x_{0,t} + P_{m,k}x_{m+1,t})); \\
 & \sum_{k=1}^m (P_{i+1,k} - P_{i,k})(A_k + B_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}x_{0,t} + P_{m,k}x_{m+1,t}))= \\
 & = \gamma \sum_{k=1}^m P_{i,k}((\mu_k - 1)C_k + (v_k - 1)D_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{(\mu_k - 1)v_k^t}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}y_{0,t} + P_{m,k}y_{m+1,t})); \\
 & \sum_{k=1}^m P_{1,k}\left(\mu_k^j A_k + v_k^j B_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^{j-t}}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}x_{0,t} + P_{m,k}x_{m+1,t})\right) - x_{0,j} = \gamma(y_{0,j+1} - y_{0,j}); \\
 & y_{0,j} - \sum_{k=1}^m P_{1,k}\left(\mu_k^j C_k + v_k^j D_k + \gamma^2\sum_{t=1}^n \frac{v_k^{j-t}}{\mu_k - v_k}(P_{1,k}y_{0,t} + P_{m,k}y_{m+1,t})\right) = \gamma(x_{0,j+1} - x_{0,j}); \\
 & \quad \overline{i=1,m}, \quad \overline{j=1,n}, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

де невідома  $\gamma$  представлена за формулою (2.5).

Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульове наближення невідомої величини  $\gamma$  (так, щоб число  $\alpha = \Delta\varphi \cdot (n+1)/\gamma$  не перевищувало шуканої витрати  $Q$ ). Розв'язуємо систему (2.7) при заданому значенні  $\gamma$ , наприклад, за методом Ньютона [23,2] та перевіряємо виконання умови (2.5). В залежності від одержаної нев'язки вибираємо наступне наближення невідомої величини  $\gamma$  і т.д. Умовою закінчення

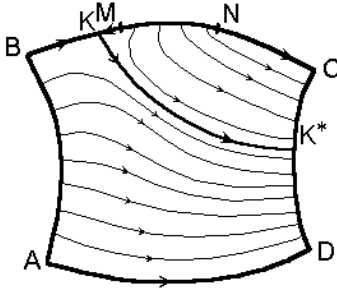


Рис. 2.1.

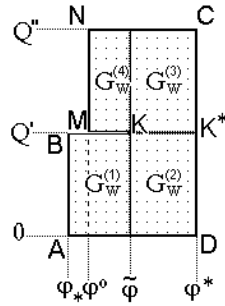


Рис. 2.2.

процесу може бути нерівність:  $|\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}| < \varepsilon$ .

Ефективність запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків (2.7) за умови (2.5), породжених лише граничними умовами (2.3) та умовами Коші-Рімана (2.4) [21,26].

Нехай  $M$  та  $N$  деякі точки кривої  $BC$ ,  $\varphi_M = \varphi(M)$ ,  $\varphi_N = \varphi(N)$ . Покладемо тепер  $\varphi|_{MN} = \varphi^\circ$ . Очевидно, що в залежності від значення  $\varphi^\circ$  можливі різні випадки формування течії в області  $G_z$  [28, 29]. Розглянемо той із них, коли межова точка розділу потоків  $K(K \in \partial G_z)$  належить до ділянки  $BM$  (рис.2.1) та  $\varphi_* < \varphi^\circ < \varphi_M$ . При цьому область комплексного потенціалу  $G_\omega$  має вигляд (рис.2.2)  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q'\} \cup \{\omega: \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q'\} \cup \{\omega: \varphi^\circ < \varphi < \varphi^*, Q' < \psi < Q''\}$ .

Обернена крайова задача на конформне відображення області  $G_\omega$  на область  $G_z$  при невідомих  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $\varphi^\circ$ ,  $\tilde{\varphi}$ , запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, & f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q', \\ f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}, & f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, & \tilde{\varphi} \geq \varphi \geq \varphi^\circ, \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = 0, & Q' \leq \psi \leq Q'', & f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) = 0, & \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & Q'' \geq \psi \geq 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_*, \end{cases} \quad (2.8)$$

де  $\tilde{\varphi} = \varphi|_K$ ;  $Q' = \int_A^B \frac{\partial \Psi}{\partial S} ds$  – потік, що входить в область  $G_z$  через ділянку

$AB$ ,  $Q'' = \int_D^C \frac{\partial \Psi}{\partial S} ds$  – сумарний потік, що виходить із неї через ділянку  $CD$

( $Q'' - Q'$  – потік, що входить в область  $G_z$  через ділянку  $MN$ ).

Різницевий аналог цієї крайової задачі у сітковій області

$G_\omega^{(l)} = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}$ , де  $G_\omega^{(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Phi_p + h_\varphi(i - a_1), i = \overline{a_1, a_2}; \psi_j = \Psi_p + h_\psi(j - b_1),$

$j = \overline{b_1, b_2}; h_\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1}, h_\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1}, \gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi}\}$ , а параметри  $\Phi_p, \Phi_k, a_1, a_2, \Psi_p, \Psi_k$ ,

$b_1, b_2$  в залежності від значення  $l$  визначаються згідно таблиці:

$l$	$\Phi_p$	$\Phi_k$	$a_1$	$a_2$	$\Psi_p$	$\Psi_k$	$b_1$	$b_2$
1	$\varphi_*$	$\tilde{\varphi}$	0	$m_1$	0	$Q'$	0	$n_0$
2	$\tilde{\varphi}$	$\varphi^*$	$m_1$	$m+1$	0	$Q'$	0	$n_0$
3	$\tilde{\varphi}$	$\varphi^*$	$m_1$	$m+1$	$Q'$	$Q''$	$n_0$	$n+1$
4	$\varphi^\circ$	$\tilde{\varphi}$	$m_0$	$m_1$	$Q'$	$Q''$	$n_0$	$n+1$

запишемо у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^{(l)2})x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma^{(l)2})y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ i = \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, j = \overline{b_1 + 1, b_2 - 1}, l = \overline{1, 4}; \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} f_2(x_{i,n_0}^{(1)}, y_{i,n_0}^{(1)}) = 0, & f_4(x_{i,0}^{(1)}, y_{i,0}^{(1)}) = 0, & i = \overline{0, m_1}, \\ f_1(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, & j = \overline{0, n_0}, \\ f_4(x_{i,0}^{(2)}, y_{i,0}^{(2)}) = 0, & f_2(x_{i,n+1}^{(3)}, y_{i,n+1}^{(3)}) = 0, & i = \overline{m_1, m+1}, \\ f_3(x_{m+1,j}^{(3)}, y_{m+1,j}^{(3)}) = 0, & f_2(x_{m_0,j}^{(4)}, y_{m_0,j}^{(4)}) = 0, & j = \overline{n_0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}^{(4)}, y_{i,n+1}^{(4)}) = 0, & f_2(x_{i,n_0}^{(4)}, y_{i,n_0}^{(4)}) = 0, & i = \overline{m_0, m_1}; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
x_{i,0}^{(l)} - x_{i-1,0}^{(l)} &= \gamma^{(l)}(y_{i,1}^{(l)} - y_{i,0}^{(l)}) \\
y_{i-1,0}^{(l)} - y_{i,0}^{(l)} &= \gamma^{(l)}(x_{i,1}^{(l)} - x_{i,0}^{(l)})
\end{aligned} \right\} & \begin{aligned}
i &= \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, \\
l &= \overline{1, 2},
\end{aligned} \\
& \left. \begin{aligned}
x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)}(y_{m+1,j+1}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)}) \\
y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} &= \gamma^{(l)}(x_{m+1,j+1}^{(l)} - x_{m+1,j}^{(l)})
\end{aligned} \right\} & \begin{aligned}
j &= \overline{b_1 + 1, b_2 - 1}, \\
l &= \overline{2, 3},
\end{aligned} \\
& \left. \begin{aligned}
x_{i,n_0}^{(4)} - x_{i-1,n_0}^{(4)} &= \gamma^{(4)}(y_{i,n_0+1}^{(4)} - y_{i,n_0}^{(4)}) \\
y_{i-1,n_0}^{(4)} - y_{i,n_0}^{(4)} &= \gamma^{(4)}(x_{i,n_0+1}^{(4)} - x_{i,n_0}^{(4)})
\end{aligned} \right\} & i = \overline{m_0 + 1, m_1 - 1};
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
x_{i,n_0}^{(2)} &= x_{i,n_0}^{(3)}, \quad y_{i,n_0}^{(2)} = y_{i,n_0}^{(3)}, \\
\gamma^{(2)}(x_{i,n_0}^{(2)} - x_{i,n_0-1}^{(2)}) &= \gamma^{(3)}(x_{i,n_0+1}^{(3)} - x_{i,n_0}^{(3)})
\end{aligned} \right\} & \begin{aligned}
i &= \overline{m_1 + 1, m}, \\
& i = \overline{m_1, m + 1},
\end{aligned} \\
& \left. \begin{aligned}
\gamma^{(2)}(y_{i,n_0}^{(2)} - y_{i,n_0-1}^{(2)}) &= \gamma^{(3)}(y_{i,n_0+1}^{(3)} - y_{i,n_0}^{(3)})
\end{aligned} \right\} \\
& \left. \begin{aligned}
x_{m_1,j}^{(l_1)} &= x_{m_1,j}^{(l_2)}, \quad y_{m_1,j}^{(l_1)} = y_{m_1,j}^{(l_2)}, \\
\gamma^{(l_2)}(x_{m_1,j}^{(l_1)} - x_{m_1-1,j}^{(l_1)}) &= \gamma^{(l_1)}(x_{m_1+1,j}^{(l_2)} - x_{m_1,j}^{(l_2)})
\end{aligned} \right\} & \begin{aligned}
j &= \overline{b_1 + 1, b_2 - 1}, \\
l_1 &= \overline{1, 4}, \quad l_2 = \overline{2, 3},
\end{aligned} \\
& \left. \begin{aligned}
\gamma^{(l_2)}(y_{m_1,j}^{(l_1)} - y_{m_1-1,j}^{(l_1)}) &= \gamma^{(l_1)}(y_{m_1+1,j}^{(l_2)} - y_{m_1,j}^{(l_2)})
\end{aligned} \right\} & j = \overline{b_1, b_2},
\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{(l)} &= \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \times \quad l = \overline{1, 4} \\
& \times \sum_{i,j=a_1, b_1}^{a_2-1, b_2-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)})^2 + (y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)})^2}},
\end{aligned} \quad (2.13)$$

де  $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $(\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{(l)}$ ,  $l = \overline{1, 4}$ .

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (2.9), згідно з формулами (2.6), запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
x_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k} \left( \mu_k^j A_k^{(l)} + \nu_k^j B_k^{(l)} + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{a_1+1,k} x_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} x_{a_2,t}^{(l)}) \right), \\
y_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=a_1+1}^{a_2-1} p_{i,k} \left( \mu_k^j C_k^{(l)} + \nu_k^j D_k^{(l)} + \gamma^{(l)2} \sum_{t=b_1+1}^{b_2-1} \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{a_1+1,k} y_{a_1,t}^{(l)} + p_{a_2-1,k} y_{a_2,t}^{(l)}) \right), \\
i &= \overline{a_1 + 1, a_2 - 1}, \quad j = \overline{b_1, b_2}, \quad l = \overline{1, 4},
\end{aligned} \quad (2.14)$$

де  $p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}} \sin \frac{(i - a_1)(k - a_1)\pi}{a_2 - a_1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^{(l)2} - \gamma^{(l)2} \cos \frac{(k - a_1)\pi}{a_2 - a_1}$ ,  $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,

$\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ .

Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомо-

мих параметрів  $A_k^{(l)}, B_k^{(l)}, C_k^{(l)}, D_k^{(l)}, x_{a_1,t}^{(l)}, x_{a_2,t}^{(l)}, y_{a_1,t}^{(l)}, y_{a_2,t}^{(l)}$  ( $l=\overline{1,4}$ ) формується аналогічно до системи (2.7) на основі рівнянь (2.10), (2.11) із додавкою умов склеювання (2.12) та використанням формул сумарних зображень (2.14) і умов (2.13). При її розв'язанні (аналогічно до системи (2.7)) умовою закінчення процесу може бути нерівність: 
$$\sum_{l=1}^4 \left| \gamma^{(l)} - \gamma^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо тепер випадок, коли область  $G_\omega$  (рис.2.2) є заданою, тобто величини  $\varphi_*, \varphi^\circ, \tilde{\varphi}, \varphi^*, Q', Q''$  – відомі ( $\varphi_* < \varphi^\circ < \tilde{\varphi} < \varphi^*, 0 < Q' < Q''$ ), та можливе її покриття рівномірною сіткою, а  $G_z$  – вільною, а саме:  $BC = \{z: f_2(x, y) = \rho\}$ ,  $K(x_K, y_K), M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$  – плаваючі точки на вільній кривій  $BKMNC$ , де  $f_2(x, y)$  задана гладка функція,  $\rho, x_K, x_M, x_N$  – невідомі параметри. Тоді обернена крайова задача на конформне відображення даної області  $G_\omega$  на відповідну  $G_z$  знову зводиться до розв'язування в  $G_\omega$  рівнянь Лапласа  $\Delta x = 0, \Delta y = 0$  при нелінійних крайових умовах  $f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, f_2(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = \rho, f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) = \rho, f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) = \rho, f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0$ , умовах Коші-Рімана на границі  $\partial G_\omega$  області  $G_\omega$  та умов склеювання на лінії розділу течії  $KK^*$  (рис.2.1).

Різницевий аналог цієї крайової задачі у рівномірній сітковій області  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi_* + h_\varphi i, i = \overline{0, m+1}, \psi_j = h_\psi j, j = \overline{0, n_0}\} \cup \{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi^\circ + h_\varphi(i - m_0), i = \overline{m_0, m+1}, \psi_j = Q' + h_\psi(j - n_0), j = \overline{n_0, n+1}\} = G'_\omega \cup G''_\omega$  (відповідно), де  $h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1} = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi_*}{m_1} = \frac{\varphi^\circ - \varphi_*}{m_0} = \frac{\varphi^* - \varphi^\circ}{m+1-m_0} = \frac{\varphi^* - \tilde{\varphi}}{m+1-m_1} = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi^\circ}{m_1 - m_0}$  та  $h_\psi = \frac{Q'' - Q'}{n+1} = \frac{Q'}{n_0} = \frac{Q'' - Q'}{n+1-n_0}$  ( $\gamma = h_\varphi / h_\psi$ ) запишемо у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \\ \text{якщо } \omega \in G'_\omega, \text{ то } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n_0 - 1}, \\ \text{якщо } \omega \in G''_\omega, \text{ то } i = \overline{m_0 + 1, m}, j = \overline{n_0 + 1, n}, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x'_{0,j}, y'_{0,j})=0, \quad j=\overline{0, n_0}, & f_2(x'_{i, n_0}, y'_{i, n_0})=\rho, \quad i=\overline{0, m_1}, \\ f_2(x''_{i, n_0}, y''_{i, n_0})=\rho, \quad i=\overline{m_0, m_1}, & f_2(x''_{m_0, j}, y''_{m_0, j})=\rho, \quad j=\overline{n_0, n+1}, \\ f_2(x''_{i, n+1}, y''_{i, n+1})=\rho, \quad i=\overline{m_0, m+1}, & f_3(x''_{m+1, j}, y''_{m+1, j})=0, \quad j=\overline{n_0, n+1}, \\ f_3(x'_{m+1, j}, y'_{m+1, j})=0, \quad j=\overline{0, n_0}, & f_4(x'_{i, 0}, y'_{i, 0})=0, \quad i=\overline{0, m+1}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} x'_{i, 0} - x'_{i-1, 0} = \gamma(y'_{i, 1} - y'_{i, 0}) \\ y'_{i-1, 0} - y'_{i, 0} = \gamma(x'_{i, 1} - x'_{i, 0}) \end{array} \right\} & i=\overline{1, m}, \\ \left. \begin{array}{l} x'_{m+1, j} - x'_{m, j} = \gamma(y'_{m+1, j+1} - y'_{m+1, j}) \\ y'_{m, j} - y'_{m+1, j} = \gamma(x'_{m+1, j+1} - x'_{m+1, j}) \end{array} \right\} & j=\overline{1, n_0-1}, \\ \left. \begin{array}{l} x''_{i, n_0} - x''_{i-1, n_0} = \gamma(y''_{i, n_0+1} - y''_{i, n_0}) \\ y''_{i-1, n_0} - y''_{i, n_0} = \gamma(x''_{i, n_0+1} - x''_{i, n_0}) \end{array} \right\} & i=\overline{m_0+1, m_1-1}, \\ \left. \begin{array}{l} x''_{m+1, j} - x''_{m, j} = \gamma(y''_{m+1, j+1} - y''_{m+1, j}) \\ y''_{m, j} - y''_{m+1, j} = \gamma(x''_{m+1, j+1} - x''_{m+1, j}) \end{array} \right\} & j=\overline{n_0+1, n}, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} x'_{i, n_0} = x''_{i, n_0}, \quad y'_{i, n_0} = y''_{i, n_0}, \\ x'_{i, n_0} - x'_{i, n_0-1} = x''_{i, n_0+1} - x''_{i, n_0}, \\ y'_{i, n_0} - y'_{i, n_0-1} = y''_{i, n_0+1} - y''_{i, n_0}. \end{array} \right\} & i=\overline{m_1+1, m}, \\ & i=\overline{m_1, m+1}, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

де  $x'_{i, j} = x(\Phi_i, \Psi_j), y'_{i, j} = y(\Phi_i, \Psi_j), (\Phi_i, \Psi_j) \in G'_\omega$ ,

$x''_{i, j} = x(\Phi_i, \Psi_j), y''_{i, j} = y(\Phi_i, \Psi_j), (\Phi_i, \Psi_j) \in G''_\omega$ .

Розв'язок рівнянь Лапласа (2.15) знаходимо згідно формул (2.6):

$$\left. \begin{array}{l} x'_{i, j} = \sum_{k=1}^m p_{i, k} \left( \mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n_0-1} \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1, k} x'_{0, t} + p_{m, k} x'_{m+1, t}) \right), \\ y'_{i, j} = \sum_{k=1}^m p_{i, k} \left( \mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{n_0-1} \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1, k} y'_{0, t} + p_{m, k} y'_{m+1, t}) \right), \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$i=\overline{1, m}, j=\overline{0, n_0}$ , де  $p_{i, k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{ik\pi}{m+1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$ .

$$\left. \begin{array}{l} x''_{i, j} = \sum_{k=m_0+1}^m p_{i, k} \left( \mu_k^j A_k + \nu_k^j B_k + \gamma^2 \sum_{t=n_0+1}^n \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{m_0+1, k} x''_{m_0, t} + p_{m, k} x''_{m+1, t}) \right), \\ y''_{i, j} = \sum_{k=m_0+1}^m p_{i, k} \left( \mu_k^j C_k + \nu_k^j D_k + \gamma^2 \sum_{t=n_0+1}^n \frac{\nu_k^{j-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{m_0+1, k} y''_{m_0, t} + p_{m, k} y''_{m+1, t}) \right), \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$i=\overline{m_0+1, m}, j=\overline{n_0, n+1}$ ,

де  $p_{i, k} = \sqrt{\frac{2}{m+1-m_0}} \sin \frac{(i-m_0)(k-m_0)\pi}{m+1-m_0}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{(k-m_0)\pi}{m+1-m_0}$ . Тут

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}.$$

Невідомі  $A_k, B_k, C_k, D_k$ ,  $x'_{0,j}, y'_{0,j}$ ,  $x'_{m+1,j}, y'_{m+1,j}$ ,  $x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}$ ,  $x''_{m+1,j}, y''_{m+1,j}$  визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.16), (2.17), (2.18), де  $x'_{i,0}, y'_{i,0}$ ,  $x'_{i,1}, y'_{i,1}$ ,  $x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}$ ,  $x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}$ ,  $x''_{i,n_0+1}, y''_{i,n_0+1}$ ,  $x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}$ ,  $x'_{m,j}, y'_{m,j}$ ,  $x''_{m,j}, y''_{m,j}$  представлені за формулами (2.19), (2.20). Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин  $\rho, x_K = x_{m_1, n_0}, x_M = x_{m_0, n_0}, x_N = x_{m_0, n+1}$ , розв'язуємо систему, наприклад, за методом Ньютона [23,2] та перевіряємо виконання умов:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{m_1+1} \sum_{i=0}^{m_1} f_2(x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}) + \frac{1}{m_1-m_0+1} \sum_{i=m_0}^{m_1} f_2(x''_{i,n_0}, y''_{i,n_0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n-n_0+2} \sum_{j=n_0}^{n+1} f_2(x''_{m_0,j}, y''_{m_0,j}) + \frac{1}{m-m_0+2} \sum_{i=m_0}^{m+1} f_2(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}) \right), \\ x_K &= \frac{(x'_{m_1, n_0-1} - x''_{m_1, n_0+1})\gamma + x'_{m_1+1, n_0} + x''_{m_1+1, n_0}}{2}, \\ x_M &= \frac{x''_{m_0+1, n_0} + x''_{m_0, n_0+1}}{1+\gamma}, \quad x_N = \frac{x''_{m_0+1, n+1} + x''_{m_0, n}}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

В залежності від отриманих нев'язок вибираємо наступні наближення невідомих параметрів і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність:

$$\left| \rho^{(k+1)} - \rho^{(k)} \right| + \left| x_K^{(k+1)} - x_K^{(k)} \right| + \left| x_M^{(k+1)} - x_M^{(k)} \right| + \left| x_N^{(k+1)} - x_N^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

## 2.2. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення

**1. Крайові задачі в ізотропних середовищах.** Розглянемо модельну нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції  $\varphi = \varphi(x, y)$  (потенціалу) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області (пористому пласті)  $G_z = ABCD$ , обмеженій чотирма гладкими кривими  $AB = \{z = x + iy: f_1(x, y) = 0\}$ ,  $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$ ,  $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$ , ортогональними між собою в точках їх перетину:

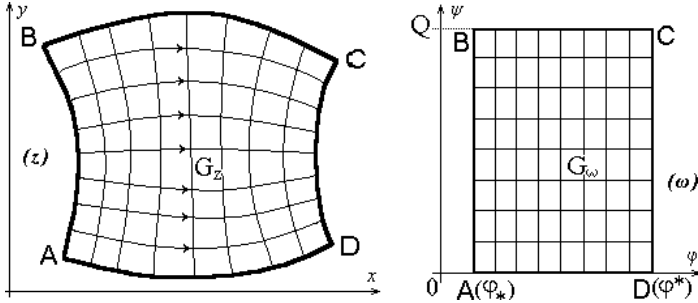


Рис. 2.3. Фізична область  $G_z$  та відповідна їй область квазікомплесного потенціалу  $G_\omega$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad (2.21)$$

де  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ ,  $n$  – зовнішня нормаль до відповідної кривої,  $\kappa(x, y, \varphi, \psi)$  – обмежена неперервно диференційована функція, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій,  $\psi = \psi(x, y)$  – відповідна функція течії. Замінивши останні дві із граничних умов (2.21) на відповідні умови для функції  $\psi(x, y)$ , квазікомплесно спряженої до функції  $\varphi(x, y)$  (див., напр., [21, 22, 30–33]), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне при  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \text{const}$ ) відображення  $\omega = \alpha(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  даної області  $G_z$  на відповідну область квазікомплесного (комплесного, якщо  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \text{const}$ ) потенціалу  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  (див. рис. 2.3):

$$\kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (2.22)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

де стала  $Q$  – повна витрата (невідомий параметр). Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$  запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{\kappa(x, y, \varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (2.23)$$



$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi))=0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi))=0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q))=0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0))=0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (2.24)$$

Зауважимо, що тут, на відміну від часткового випадку, коли  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(\varphi, \psi)$ , відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  є взаємно залежними, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa'_\varphi(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y, \varphi, \psi)} + \\ + \kappa(x, y, \varphi, \psi) \left( \kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa'_\psi(x, y, \varphi, \psi) \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa'_\varphi(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y, \varphi, \psi)} + \\ + \kappa(x, y, \varphi, \psi) \left( \kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa'_\psi(x, y, \varphi, \psi) \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0. \end{aligned}$$

**1.1.** Якщо  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(\varphi, \psi)$ , то, замість вище одержаних рівностей, матимемо:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\kappa(\varphi, \psi)} + \kappa(\varphi, \psi) \kappa'_\psi(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(\varphi, \psi)} + \kappa(\varphi, \psi) \kappa'_\psi(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Різницевий аналог рівнянь (2.25), крайових умов (2.24), приграничних умов ортогональності та умов “квазіконформної подібності в малому” відповідних чотирикутників [21,22,30-32], у відповідній рівномірній сітковій області  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = 0, m+1; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = 0, n+1;$

$\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, m, n \in \mathbf{N}$  запишемо у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) x_{i,j} + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) + \\ + \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \gamma \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi_{i,j}} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \right) = 0, \\ y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \\ + \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \gamma \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right) = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j})=0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})=0, & j=\overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i, n+1}, y_{i, n+1})=0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0})=0, & i=\overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} f_3'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f_3'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j})=0, \\ f_1'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f_1'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j})=0, & j=\overline{0, n+1}; \\ f_2'(x_{i, n+1}, y_{i, n+1})(y_{i,n} - y_{i, n+1}) - f_2'(x_{i, n+1}, y_{i, n+1})(x_{i,n} - x_{i, n+1})=0, \\ f_4'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_4'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0})=0, & i=\overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \left( \frac{1}{\kappa_{i+1/2, j+1/2}} \times \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1, j+1} - x_{i, j+1})^2 + (y_{i+1, j+1} - y_{i, j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i, j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i, j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1, j+1} - x_{i, j+1})^2 + (y_{i+1, j+1} - y_{i, j+1})^2}} \right), \quad (2.29)$$

де  $x_{i,j} = x(\Phi_i, \Psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\Phi_i, \Psi_j)$ ,  $\kappa_{i,j} = \kappa(\Phi_i, \Psi_j)$ .

Тоді алгоритм розв'язання відповідної (2.23), (2.24) різницевої задачі у цьому випадку побудуємо наступним чином. Початкові наближення граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}$ ,  $y_{0,j}^{(0)}$ ,  $x_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $y_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $x_{i, n+1}^{(0)}$ ,  $y_{i, n+1}^{(0)}$ ,  $x_{i,0}^{(0)}$ ,  $y_{i,0}^{(0)}$  задаємо так, щоб виконувалися умови (2.27):  $f_1(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})=0$ ,  $f_2(x_{i, n+1}^{(0)}, y_{i, n+1}^{(0)})=0$ ,  $f_3(x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)})=0$ ,  $f_4(x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)})=0$ ,  $i=\overline{0, m+1}$ ,  $j=\overline{0, n+1}$ . Початкові наближення внутрішніх вузлів  $x_{i,j}^{(0)}$ ,  $y_{i,j}^{(0)}$  вибираємо, наприклад, як середні арифметичні чотирьох координат відповідних граничних вузлів:  $x_{i,j}^{(0)} = 0,25(x_{i,0}^{(0)} + x_{i, n+1}^{(0)} + x_{m+1,j}^{(0)} + x_{0,j}^{(0)})$ ,  $y_{i,j}^{(0)} = 0,25(y_{i,0}^{(0)} + y_{i, n+1}^{(0)} + y_{m+1,j}^{(0)} + y_{0,j}^{(0)})$ ,  $i=\overline{1, n}$ ,  $j=\overline{1, m}$ . Для задання початкового наближення  $\gamma^{(0)}$  невідомої величини  $\gamma$  використаємо формулу (2.29):  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ .

Далі ітераційно знаходимо послідовні наближення значень: *внутрішніх вузлів* (згідно з формулами (2.26)) –

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \left( x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{\Delta\Phi}{2} (\gamma^{(k)} \kappa_{i,j} \kappa'_{\Psi_{i,j}} (x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}) - \frac{\kappa'_{\Phi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)})) \right) / \left( 1 + \gamma^{(k)2} \kappa_{i,j}^2 \right),$$

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \left( y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{\Delta\Phi}{2} (\gamma^{(k)} \kappa_{i,j} \kappa'_{\Psi_{i,j}} (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}) - \frac{\kappa'_{\Phi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)})) \right) / \left( 1 + \gamma^{(k)2} \kappa_{i,j}^2 \right),$$

$$-\frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)})}{\kappa_{i,j}} \Big) \Big) \Big/ \left( 2 \left( 1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right) \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

величини  $\gamma$  за формулою (2.29) –  $\gamma^{(k+1)} = \gamma(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$  (при цьому наближення витрати  $Q$  знаходимо за формулою  $Q = \Delta\varphi \cdot (n+1)/\gamma$ );

*граничних вузлів* за формулами (2.27), (2.28) –

$$\begin{cases} f_{3x}'(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)})(y_{m,j}^{(k+1)} - y_{m+1,j}^{(k)}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)})(x_{m,j}^{(k+1)} - x_{m+1,j}^{(k)}) = 0, \\ f_{1x}'(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)})(y_{1,j}^{(k+1)} - y_{0,j}^{(k)}) - f_{1y}'(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)})(x_{1,j}^{(k+1)} - x_{0,j}^{(k)}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)})(y_{i,n}^{(k+1)} - y_{i,n+1}^{(k)}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)})(x_{i,n}^{(k+1)} - x_{i,n+1}^{(k)}) = 0, \\ f_{4x}'(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)})(y_{i,1}^{(k+1)} - y_{i,0}^{(k)}) - f_{4y}'(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)})(x_{i,1}^{(k+1)} - x_{i,0}^{(k)}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ f_{1j}(x_{0,j}^{(k+1)}, y_{0,j}^{(k+1)}) = 0, \quad f_{3j}(x_{m+1,j}^{(k+1)}, y_{m+1,j}^{(k+1)}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{2j}(x_{i,n+1}^{(k+1)}, y_{i,n+1}^{(k+1)}) = 0, \quad f_{4j}(x_{i,0}^{(k+1)}, y_{i,0}^{(k+1)}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \end{cases}$$

де  $k=0,1,\dots$  – крок ітерації, і перевіряємо виконання умов:

$$\left| D^{(k+1)} - 1 \right| < \varepsilon_*, \quad \left| D_{i,j}^{(k+1)} - D_{i,j}^{(k)} \right| < \varepsilon. \quad (2.30)$$

Тут  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_* > 0$ ,  $D = \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{D_{i,j}}{(m+1)(n+1)}$ ,  $D_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$  –

відношення довжин діагоналей відповідного криволінійного чотирикутника. Умовами закінчення процесу, окрім (2.30), є:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} (|x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}|) < \varepsilon, \quad |Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon. \quad (2.31)$$

У випадку невиконання умов закінчення процесу (2.30)–(2.31) знову переходимо до уточнення внутрішніх вузлів і т.д. [23]. Якщо не виконуються лише перша із умов (2.30), то узгоджуємо співвідношення між точністю  $\varepsilon_*$  та заданою кількістю кроків розбиття  $m, n$  (в першу чергу, шляхом збільшення останніх).

**1.2.** Особливістю такого підходу побудови алгоритму при  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(x, y)$  є те, що лінійна вихідна задача переходить у суттєво нелінійну обернену до неї задачу (у попередньому випадку ми мали перехід суттєвої нелінійності вихідної задачі до локалізованої нелінійності оберненої задачі). Дійсно, тут замість формул (2.25) матимемо:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{1}{\kappa} \left( \kappa'_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa \left( \kappa'_x \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{1}{\kappa} \left( \kappa'_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa \left( \kappa'_x \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0.$$

І все ж, процес побудови наближень розв'язку даної задачі збігатиметься і в цьому випадку, якщо внести наступні видозміни до побудованого алгоритму: 1) послідовні наближення коефіцієнта провідності  $\kappa(x, y)$  на даному кроці у  $(i, j)$ -вузлах сітки  $G_\omega^y$  знаходимо тепер після наближень відповідних значень  $x_{i,j}, y_{i,j}$ , а саме  $\kappa_{i,j}^{(k)} = \kappa(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ ; 2) послідовні наближення внутрішніх вузлів отримуються на основі різницевого аналогу формул (2.32):

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k+1)} &= \left( x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{1}{4} \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j} (\kappa'_{x_{i,j}} (x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)})) + \right. \\ &+ \kappa'_{y_{i,j}} (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}) \left. \right) \left( x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \frac{1}{4\kappa_{i,j}} (\kappa'_{x_{i,j}} (x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)})) + \\ &+ \kappa'_{y_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}) \left. \right) \left( x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \left. \right) / 2 \left( 1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right), \\ y_{i,j}^{(k+1)} &= \left( y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{1}{4} \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j} (\kappa'_{x_{i,j}} (x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)})) + \right. \\ &+ \kappa'_{y_{i,j}} (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}) \left. \right) \left( y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \frac{1}{4\kappa_{i,j}} (\kappa'_{x_{i,j}} (x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)})) + \\ &+ \kappa'_{y_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}) \left. \right) \left( y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \left. \right) / 2 \left( 1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

**2. Крайові задачі в анізотропних середовищах.** Як відомо [25, 41], стаціонарний процес фільтрації в неоднорідному анізотропному середовищі описується за допомогою рівняння руху (закон Дарсі) та рівняння нерозривності:

$$\vec{v} = -\chi \operatorname{grad} h = \kappa \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.33)$$

Тут  $h = h(x, y)$  – напір,  $\kappa = \chi_*^{-1} \chi = (\kappa_{i,j})_{i,j=1,2}$ ,  $\chi = (\chi_{i,j})_{i,j=1,2}$  – тензор фільтрації ( $\chi_*$  – його характерний розмір),  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  – швидкість фільтрації, а  $\varphi = -\chi_* h$  – її потенціал. Дані рівняння забезпечують існування функції течії  $\psi = \psi(x, y)$ :

$$\kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.34)$$

Як і раніше, вихідну задачу (у диференціальній формі), аналогічно до (2.21)–(2.22), зводимо до розв'язання в області  $G_z$  системи диференціальних рівнянь (2.34) при граничних умовах (2.22)

$$\varphi|_{AB}=\varphi^*, \quad \varphi|_{CD}=\varphi^*, \quad \psi|_{DA}=0, \quad \psi|_{BC}=Q, \quad (2.35)$$

з допомогою відповідного квазіконформного відображення  $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$  області  $G_z$  на область  $G_\omega$ . З метою забезпечення гладкості даного відображення у кутових точках  $A, B, C, D$  на функції  $f_i(x,y)=0, i=\overline{1,4}$ , накладаємо наступні умови:

$$\Theta_M + \tilde{\Theta}_M = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{де } \cos\Theta_M = \frac{f_{i-1x}'(M)f_{ix}'(M) + f_{i-1y}'(M)f_{iy}'(M)}{\sqrt{f_{i-1x}^2(M) + f_{i-1y}^2(M)}\sqrt{f_{ix}^2(M) + f_{iy}^2(M)}},$$

$$\cos\tilde{\Theta}_M = \frac{\kappa_{11}f_{jx}^2(M) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{jx}'(M)f_{jy}'(M) + \kappa_{22}f_{jy}^2(M)}{\sqrt{f_{jx}^2(M) + f_{jy}^2(M)}\sqrt{(\kappa_{11}f_{jx}'(M) + \kappa_{12}f_{jy}'(M))^2 + (\kappa_{21}f_{jx}'(M) + \kappa_{22}f_{jy}'(M))^2}},$$

$$M = A, B, C, D, \quad f_0(M) \stackrel{df}{=} f_4(M), \quad j = \begin{cases} 1, & i=1,2, \\ 3, & i=3,4. \end{cases}$$

Ці умови означають, що у даних точках  $M$  дотичні до відповідних ліній течії повинні на стільки відхилитись від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, на скільки анізотропія відхилляє вектор швидкості від даних нормалей. Є й інший варіант позбутися особливості у кутових точках: кути вважати прямими, а в даних точках покласти  $\kappa_{12}=\kappa_{21}=0, \kappa_{11}=\kappa_{22}$ .

Аналоги умов ортогональності (2.28) в околах граничних ділянок при цьому приймуть вигляд:

$$-f_{kx}'(x,y)y_\varphi + f_{ky}'(x,y)x_\varphi = \sqrt{f_{kx}^2(x,y) + f_{ky}^2(x,y)}\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}\sqrt{1 - \cos^2\Theta_k}, \quad k=1,3,$$

$$\cos\Theta_k = \frac{\kappa_{11}f_{kx}^2(x,y) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{kx}'(x,y)f_{ky}'(x,y) + \kappa_{22}f_{ky}^2(x,y)}{\sqrt{f_{kx}^2(x,y) + f_{ky}^2(x,y)}\sqrt{(\kappa_{11}f_{kx}'(x,y) + \kappa_{12}f_{ky}'(x,y))^2 + (\kappa_{21}f_{kx}'(x,y) + \kappa_{22}f_{ky}'(x,y))^2}},$$

$$f_{lx}'(x,y)y_\psi - f_{ly}'(x,y)x_\psi = \sqrt{f_{lx}^2(x,y) + f_{ly}^2(x,y)}\sqrt{x_\psi^2 + y_\psi^2}\sqrt{1 - \cos^2\Theta_l}, \quad l=2,4,$$

$$\cos\Theta_l = \frac{\kappa_{11}f_{lx}^2(x,y) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{lx}'(x,y)f_{ly}'(x,y) + \kappa_{22}f_{ly}^2(x,y)}{\sqrt{f_{lx}^2(x,y) + f_{ly}^2(x,y)}\sqrt{(\kappa_{11}f_{lx}'(x,y) + \kappa_{12}f_{ly}'(x,y))^2 + (\kappa_{21}f_{lx}'(x,y) + \kappa_{22}f_{ly}'(x,y))^2}}.$$

Зауважимо при цьому, що косинус кута відхилення вектора швидкості  $\vec{v}$  від градієнта напору  $\text{grad}\varphi$  в довільній внутрішній точці

$z = x + iy$  обчислюється за формулою

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{\kappa_{11}\varphi_x'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})\varphi_x'\varphi_y' + \kappa_{22}\varphi_y'^2}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2} \sqrt{(\kappa_{11}\varphi_x' + \kappa_{12}\varphi_y')^2 + (\kappa_{21}\varphi_x' + \kappa_{22}\varphi_y')^2}}.$$

**2.1.** У випадку, коли  $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(\varphi, \psi)$  (нелінійна пряма задача), обернена задача до (2.34)-(2.35)  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  на квазіконформне відображення області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$  запишеться у вигляді:

$$\kappa_{11}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa_{21}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (2.37)$$

де  $Q = \int_{AB} v_n dl$ ,  $dl$  – елемент довжини дуги. При цьому відповідні рівняння

другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + A(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} + B(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + C(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + D(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + A(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + B(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} + E(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0, \end{cases}$$

де  $A = \kappa_{12} - \kappa_{21}$ ,  $B = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}$ ,

$$C = \frac{\kappa_{11\psi}\kappa_{21} - \kappa_{11\varphi}}{\kappa_{11}} - \kappa_{21\psi}, \quad E = \kappa_{12\psi} - \frac{\kappa_{22\psi}\kappa_{12} + \kappa_{22\varphi}}{\kappa_{22}},$$

$$D = \kappa_{22\psi}\kappa_{11} + \kappa_{12\varphi} - \kappa_{21\psi}\kappa_{12} - \kappa_{12\psi}\kappa_{21} + \frac{\kappa_{11\psi}\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{12}\kappa_{11\varphi}}{\kappa_{11}},$$

$$F = \kappa_{11\psi}\kappa_{22} - \kappa_{21\varphi} - \kappa_{21\psi}\kappa_{12} - \kappa_{12\psi}\kappa_{21} + \frac{\kappa_{22\psi}\kappa_{21}\kappa_{12} + \kappa_{21}\kappa_{22\varphi}}{\kappa_{22}}.$$

Відповідні різницеві аналоги в області  $G_\omega^\gamma$  запишемо, наприклад, у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})x_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4}A_{i,j}(x_{i+1,j+1} + \\ + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \frac{\Delta\varphi}{2}(\gamma D_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + C_{i,j}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})) = 0, \\ y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})y_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4}A_{i,j}(y_{i+1,j+1} + \\ + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \frac{\Delta\varphi}{2}(\gamma F_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + E_{i,j}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \\ & = \sqrt{f_{1x}^2(x_{0,j}, y_{0,j}) + f_{1y}^2(x_{0,j}, y_{0,j})} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{10,j}}, \\ & -f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}} \times \\ & \times \sqrt{f_{3x}^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) + f_{3y}^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2}, \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{2i,n+1}} \times \\ & \times \sqrt{f_{2x}^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f_{2y}^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2}, \\ & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{4i,0}} \times \\ & \times \sqrt{f_{4x}^2(x_{i,0}, y_{i,0}) + f_{4y}^2(x_{i,0}, y_{i,0})} \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,0})^2 + (y_{i,1} - y_{i,0})^2}, \\ & i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \times \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{a1 + a2}, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} a1 &= \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2}, \\ a2 &= \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) - \kappa_{12}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) - \kappa_{22}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}))^2}, \end{aligned}$$

де  $A_{i,j} = A(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $B_{i,j} = B(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $C_{i,j} = C(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $D_{i,j} = D(\varphi_i, \psi_j)$ ,  
 $E_{i,j} = E(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $F_{i,j} = F(\varphi_i, \psi_j)$ .

Відповідний алгоритм наближення розв'язку цієї задачі будується

аналогічно до п.1.1. При цьому відзначимо, що замість раніше утворених прямокутників в малому в області  $G_z$  тепер фігуруватимуть відповідні паралелограми.

**2.2.** Якщо  $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(x, y)$ , то, як і в п.1.2, обернена задача є суттєво нелінійною, а саме рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  в дивергентній формі матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \end{cases}$$

Формули (2.38)-(2.41), відповідно при цьому, запишуться так:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})x_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j}(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \gamma D_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + C_{i,j}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) = 0, \\ y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})y_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j}(y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \gamma F_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + E_{i,j}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{10,j}} \times \\ & \times \sqrt{f_{1x}^2(x_{0,j}, y_{0,j}) + f_{1y}^2(x_{0,j}, y_{0,j})} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2}, \\ & -f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}} \times \\ & \times \sqrt{f_{3x}^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) + f_{3y}^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2}, \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{2i,n+1}} \times \\ & \times \sqrt{f_{2x}^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f_{2y}^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2}, \\ & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{4i,0}} \times \\ & \times \sqrt{f_{4x}^2(x_{i,0}, y_{i,0}) + f_{4y}^2(x_{i,0}, y_{i,0})} \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,0})^2 + (y_{i,1} - y_{i,0})^2}, \\ & i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}; \end{aligned}$$



$$\gamma = \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{(m+1)(n+1)(a_1+a_2)},$$

$$a_1 = \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1}-y_{i,j}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i,j+1}-y_{i,j}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2},$$

$$a_2 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \quad a_3 = (\kappa_{11}(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}) - \kappa_{12}(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})),$$

$$a_4 = (\kappa_{21}(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}) - \kappa_{22}(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}))$$

де  $A_{i,j} = \kappa_{12} - \kappa_{21}$ ,  $B_{i,j} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}$ ,

$$C_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left( \left( \frac{\kappa_{21}\kappa_{11x}}{\kappa_{11}} - \kappa_{21x} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left( \frac{\kappa_{21}\kappa_{11y}}{\kappa_{11}} - \kappa_{21y} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) - \frac{1}{4\kappa_{11}} (\kappa_{11x}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \kappa_{11y}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}))$$

$$E_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left( \left( \kappa_{12x} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{22x}}{\kappa_{22}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left( \kappa_{12y} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{22y}}{\kappa_{22}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) - \frac{1}{4\kappa_{22}} (\kappa_{22x}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \kappa_{22y}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}))$$

$$D_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left( \left( \kappa_{11}\kappa_{22x} - \kappa_{12}\kappa_{21x} - \kappa_{21}\kappa_{12x} + \frac{\kappa_{21}\kappa_{12}\kappa_{11x}}{\kappa_{11}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left( \kappa_{11}\kappa_{22y} - \kappa_{12}\kappa_{21y} - \kappa_{21}\kappa_{12y} + \frac{\kappa_{21}\kappa_{12}\kappa_{11y}}{\kappa_{11}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{1}{4} \left( \left( \kappa_{12x} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{11x}}{\kappa_{11}} \right) (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \left( \kappa_{12y} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{11y}}{\kappa_{11}} \right) (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right),$$

$$F_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left( \left( \kappa_{22}\kappa_{11x} - \kappa_{12}\kappa_{21x} - \kappa_{21}\kappa_{12x} + \frac{\kappa_{21}\kappa_{12}\kappa_{22x}}{\kappa_{22}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left( \kappa_{22}\kappa_{11y} - \kappa_{12}\kappa_{21y} - \kappa_{21}\kappa_{12y} + \frac{\kappa_{21}\kappa_{12}\kappa_{22y}}{\kappa_{22}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\kappa_{21}\kappa_{22x}}{\kappa_{22}} - \kappa_{21x} \right) (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \left( \frac{\kappa_{21}\kappa_{22y}}{\kappa_{22}} - \kappa_{21y} \right) (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right),$$

$$\kappa_{11} = \kappa_{11}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{21} = \kappa_{21}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{22} = \kappa_{22}(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

**3. Чисельна реалізація методу.** Зауважимо, що на даний час є декілька інших варіантів чисельної реалізації ідеї конформного та квазіконформного обернення конкретних типів крайових задач (див., напр., [34-40]). Так у роботах [34,35] у випадку  $\kappa=1$  кроки розбиття  $\Delta\varphi$  та  $\Delta\psi$  задавалися однаковими, а у процесі розв'язку задачі уточнювались параметри

ри  $m$  та  $n$ .

Описані вище алгоритми чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення реалізовані у вигляді пакетів програм для персональних комп'ютерів.

На рис. 2.4-2.7 подані результати таких розрахунків у випадку  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = 1$ ,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ . У відповідних таблицях, окрім заданих параметрів розбиття  $m \times n$  та шуканої витрати  $Q$  фігурують необхідна кількість кроків ітерації  $kD$ ,  $kM$ ,  $kQ$  для виконання відповідних умов типу (2.30)-(2.31) та величина  $\varepsilon_*$ , що характеризує похибку конформності. Зазначимо при цьому, що величина  $\varepsilon_*$  різко погіршується при наявності особливих точок на границі області, де порушується конформність (див.: рис.2.5 – точки  $A, B, C, D$ ; рис.2.6 – точка  $C$ ; рис.2.7 – точки  $A$  і  $B$ ).

Зауважимо, що аналогічні результати можна отримати, як розв'язуючи безпосередньо систему Коші-Рімана (відповідно рівняння Лапласа), так і розв'язуючи частковий випадок – задачу п.1, коли  $\kappa(\varphi, \psi) = 1$  або  $\kappa(x, y) = 1$ , а також – задачу п.2 при  $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$ ,  $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$ . Тоді відповідне відображення є конформним (функції  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  задовольнятимуть систему Коші-Рімана, а кожна з них – рівняння Лапласа).

На рис.2.8,2.9 та рис.2.10,2.11 (відповідно до рис.2.4,2.6) зображені результати розрахунків при  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$  та при  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{xy}$ ,  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{xy}$  відповідно.

№	1	2	3
$m \times n$	10×10	17×17	24×24
$kM$	238	551	1006
$kQ$	79	179	296
$kD$	177	368	577
$Q$	1.354236	1.356746	1.357470
$\varepsilon_*$	4.4E-05	1.6E-05	7.8E-06

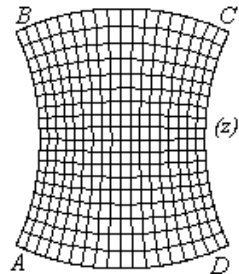


Рис.2.4.  $f_1 = \frac{(x+2\sqrt{2})^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$ ,  $f_2 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$ ,  $f_3 = \frac{(x-2\sqrt{2})^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$ ,  $f_4 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$ .

№	1	2	3
$m \times n$	10 × 10	17 × 17	24 × 24
$kM$	419	892	1768
$kQ$	346	626	1192
$kD$	339	606	334
$Q$	0.721580	0.742006	0.749643
$\varepsilon_*$	1.2E-01	8.2E-02	5.8E-02

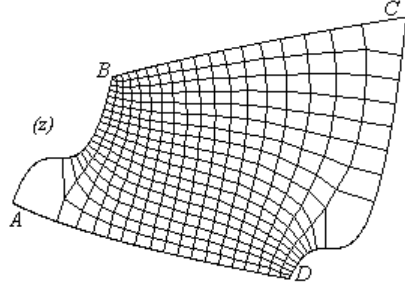


Рис.2.5.  $f_1 = y - (x-2)^3 - 5$ ,  $f_2 = y - 5 - \sqrt{x}$ ,  $f_3 = y - (x-8)^3 - 3$ ,  $f_4 = y - 5 + \sqrt{x}$ .

№	1	2	3
$m \times n$	10 × 10	17 × 17	24 × 24
$kM$	341	796	1499
$kQ$	118	238	435
$kD$	194	568	1051
$Q$	1.164625	1.164265	1.164164
$\varepsilon_*$	9.7E-03	1.3E-02	1.3E-02

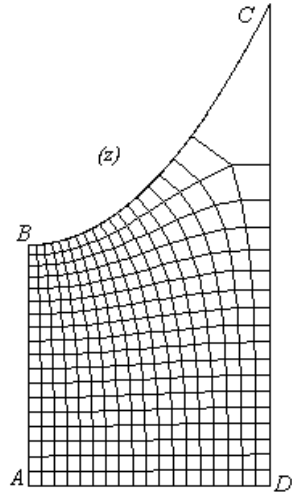


Рис.2.6.  $f_1 = x$ ,  $f_2 = y - x^2 - 1$ ,  
 $f_3 = x - 1$ ,  $f_4 = y$ .

№	1	2	3
$m \times n$	7 × 14	12 × 24	16 × 32
$kM$	17194	20132	16911
$kQ$	182	6120	1012
$kD$	15142	11711	530
$Q$	1.752219	1.755933	1.755212
$\varepsilon_*$	2.8E-02	6.4E-03	3.6E-03

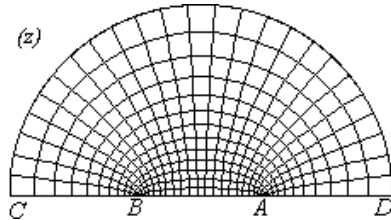
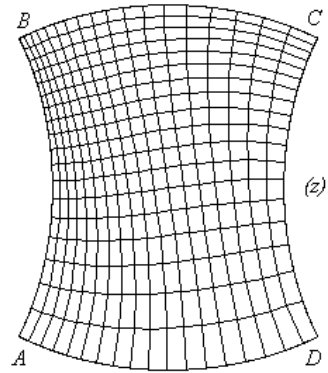
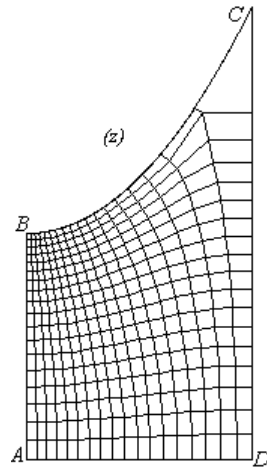


Рис.2.7.  $f_1 = y - 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $f_2 = y - 1$ ,  $-3 \leq x < -1$ ,  
 $f_3 = x^2 + (y-1)^2 - 9$ ,  $y > 0$ ,  $f_4 = y - 1$ ,  $1 < x \leq 3$ .

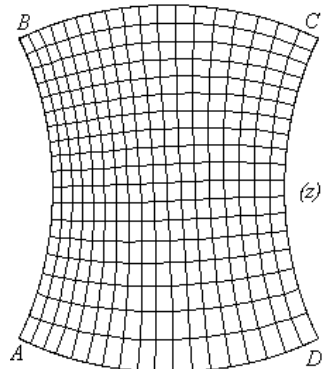
№	1	2	3
$m \times n$	10 × 10	17 × 17	24 × 24
$kM$	281	771	906
$kQ$	267	652	696
$kD$	267	658	757
$Q$	2.453394	2.466361	2.470002
$\varepsilon_*$	.1E-03	1.0E-03	4.8E-04

Рис.2.8.  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$ .

№	1	2	3
$m \times n$	10 × 10	17 × 17	24 × 24
$kM$	247	633	1180
$kQ$	235	592	1081
$kD$	169	443	840
$Q$	1.775070	1.800786	1.810148
$\varepsilon_*$	1.8E-02	6.8E-03	2.9E-03

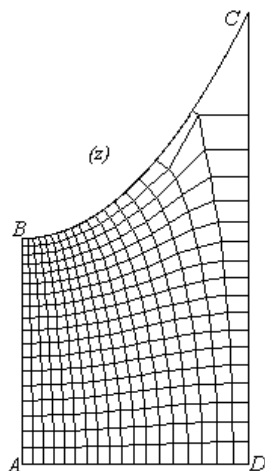
Рис.2.9.  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$ .

№	1	2	3
$m \times n$	10 × 10	17 × 17	24 × 24
$kM$	282	653	1241
$kQ$	88	238	447
$kD$	238	572	1033
$Q$	2.029356	2.032525	2.033442
$\varepsilon_*$	1.5E-04	4.9E-04	5.0E-04

Рис.2.10.  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\frac{xy}{10}}$ .

№	1	2	3
$m \times n$	10×10	17×17	24×24
$kM$	316	839	1570
$kQ$	269	618	1055
$kD$	276	642	1195
$Q$	1.493329	1.501277	1.503683
$\varepsilon_*$	4.0E-02	2.3E-02	1.6E-02

Рис.2.11.  $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{-xy}$ .



### 3. Чисельно-асимптотичні методи розв'язання задач типу “фільтрація–конвекція–дифузія”

#### 3.1. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених нелінійних задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів квазіпотенціалу та коефіцієнта провідності середовища

**Вступ.** У роботах [42-45] побудовані асимптотичні наближення розв'язків сингулярно збурених мішаних задач для рівнянь параболічного типу – математичних моделей процесів конвективної дифузії при фільтрації в пористому середовищі у випадку переважання їх конвективних складових над дифузійними, а в [46-48] – алгоритми чисельного обернення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в областях, обмежених лініями течії та еквіквізіпотенціальними лініями. Запропонований підхід дозволяє знаходити паралельно характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал та його градієнт, повну витрату і поле швидкостей та будувати динамічну сітку.

На даний час актуальними і мало вивченими є задачі моделювання впливу градієнтів (зокрема, великих, що перевищують критичні їх значення) на вихідні характеристики середовища (в першу чергу на коефіцієнт провідності). Перевищення діючими градієнтами деякого їх критичного значення  $I_{кр}$  [49,50] у придренній (чи присвердловинній) зоні зумов-

люють втрату фільтраційної міцності ґрунту за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що викликають зміни коефіцієнта фільтрації. У роботах [49,50] проведено математичне моделювання нелінійних процесів осесиметричної фільтрації з урахуванням суфозійних явищ і зроблено методичку розв'язання відповідних нелінійних задач з післядією руху води до дрени (свердловини) та із зволожувача в ґрунт. Також отримані аналітичні вирази для знаходження фільтраційної витрати, напорів і їх градієнтів, встановлено співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується в залежності від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу; розв'язана задача фільтрації у випадку формування збурених зон змінним коефіцієнтом фільтрації із врахуванням нерівномірного заповнення пор ґрунту суфозійними частинками у випадку осесиметричної фільтрації.

Розробці алгоритму чисельного розв'язання нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення в неоднорідних анізотропних середовищах із одночасним врахуванням взаємовпливу коефіцієнта провідності середовища та діючих градієнтів потенціалу в довільних криволінійних чотирикутних областях присвячена дана робота. Загальна схема його побудови запозичена у [46,47], де аналогічні задачі розв'язувались без врахування взаємовпливу коефіцієнта провідності та діючих градієнтів потенціалу. Асимптотичні розвинення розв'язків відповідних "дифузійних" задач в даній роботі отримуються аналогічно [42-44] у припущенні, що "фільтраційно-суфозійний фон" стабілізований.

**1. Загальна постановка задачі.** Як відомо [42-45,41], процес конвективної дифузії при фільтрації в пористому середовищі може бути описаний системою диференціальних рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad \varepsilon \cdot \Delta c - \nabla c \cdot \vec{v} = \sigma(t) \frac{\partial c}{\partial t},$$

де  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  – вектор, а  $\varphi = \varphi(x, y)$  – квазіпотенціал швидкості фільтрації в точці  $z = x + iy$ ,  $c = c(x, y, t)$  – концентрація розчинних у фільтраційному потоці речовин у точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\varepsilon$  – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр),  $\sigma(t)$  – пористість, а  $\kappa = \kappa(I(x, y))$  – величина, що характеризує фільтраційну провідність середовища,  $I(x, y) = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = |\operatorname{grad} \varphi|$  [49,50].

Розглянемо такий процес в чотирикутній криволінійній області (пласт, що піддається деформації)  $G_z = ABCD$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій двома гладкими екіпотенціальними лініями  $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$ ,

( $\varphi|_{AB}=\varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD}=\varphi^*$ ,  $-\infty<\varphi_*<\varphi^*<+\infty$ ) та двома гладкими лініями течії  $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$ ,  $AD=\{z: f_4(x,y)=0\}$ , ( $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{BC}=0$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{AD}=0$ , де  $n$  – зовнішня

нормаль до відповідної кривої). Крайові і початкову умови для “конвективно-дифузійної складової” даного процесу задамо так:

$$c|_{AB}=c_*(M,t), \frac{\partial c}{\partial n}|_{CD}=0, c|_{AD}=c_*^0(M,t), \frac{\partial c}{\partial n}|_{BC}=0, c|_{t=0}=c_0^0(x,y),$$

де  $M$  – біжуча точка відповідної кривої;  $c_*(M,t)$ ,  $c_*^0(M,t)$ ,  $c_0^0(x,y)$  – задані достатньо гладкі функції, що задовольняють умови узгодженості.

Аналогічно до [46,47], ввівши функцію течії  $\psi=\psi(x,y)$  (квазікомплексно спряжену до  $\varphi=\varphi(x,y)$ ) та замінивши останні дві із граничних умов на відповідні умови для функції  $\psi(x,y)$ , приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне, у випадку  $\kappa=1$ ) відображення  $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$  даної області  $G_z$  на відповідну область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega=\{\omega:\varphi_*<\varphi<\varphi^*, 0<\psi<Q\}$  з невідомим параметром

– повною витратою  $Q=\int_{MN} -v_y dx + v_x dy$  ( $M \in AD$ ,  $N \in BC$ ):  $\kappa(\text{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ ,

$$\kappa(\text{grad}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \varphi|_{AB}=\varphi_*, \varphi|_{CD}=\varphi^*, \psi|_{DA}=0, \psi|_{BC}=Q.$$

Відповідну обернену їй задачу на квазіконформне відображення  $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому значенні  $Q$ , аналогічно до [46,47], запишемо у вигляді:

$$\left\{ \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}; \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) &= 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) &= 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*; \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)_\varphi + \left( \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)_\psi = 0, \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)_\varphi + \left( \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)_\psi = 0. \right. \quad (3.3)$$

Задачу конвективної дифузії у припущенні, що задача фільтрації (3.1-3.3) є розв’язаною, в області комплексного потенціалу  $G_\omega$ , аналогічно до [42-45], запишемо у вигляді:

$$Lc=0, Lc \equiv \varepsilon \left( \alpha(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \gamma(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + \delta_1(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \delta_2(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) - \delta(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \sigma(t) \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad c(\varphi, 0, t) = c_*^0(\varphi, t), \quad c'_\varphi(\varphi_*, \psi, t) = 0, \quad c'_\psi(\varphi, Q, t) = 0; \quad (3.5)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi, t) \in G = G_\omega \times (0, \infty) \quad (3.6)$$

$$\text{де } \alpha = \delta = \frac{v^2}{\kappa^2}; \quad \gamma = v^2, \quad \delta_2 = \frac{1}{\kappa} \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \right) + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \psi},$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\kappa^2} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\kappa} \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right) + \frac{v^2}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \right),$$

а в кутових точках  $(\varphi_*, 0, 0)$ ,  $(\varphi^*, 0, 0)$ ,  $(\varphi_*, Q, 0)$ ,  $(\varphi^*, Q, 0)$ , а також вздовж ребер паралелепіпеда  $G$  функції  $c_*(\psi, t)$ ,  $c_*^0(\varphi, t)$ ,  $c_*^0(\varphi, t)$  разом з відповідними похідними є узгодженими.

**2. Метод чисельного розв'язання** задач фільтрації типу (3.1)-(3.3) на квазіконформне відображення рівномірної сіткової області квазікомплексного потенціалу  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = 0, m+1; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = 0, n+1; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, m, n \in \mathbf{N}\}$  на сіткову область фільтрації (відповідну динамічну сітку) описано в роботах [46,47,56].

Тестування розробленого алгоритму виконано для області  $G_z$ , обмеженої кривими  $f_1(x, y) = x$ ,  $f_2(x, y) = y - 25 + 7 \cos \frac{x}{5}$ ,  $f_3(x, y) = x - 10\pi$ ,  $f_4(x, y) = y - 3 - 3 \cos \frac{x}{5}$ , при  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 10$ ,  $m = n = 24$  та заданій точності наближення  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$  [56]. Такий вибір граничних кривих забезпечує наявність великих (більших за критичні) значень градієнтів потенціалу на ділянках входу та виходу фільтраційної течії в даній області. У припущенні, що середовище не деформується, а саме, коли  $\kappa = \kappa_0 = 1$ , за  $K = 1387$  кроків ітераційного процесу знайдено повну витрату  $Q = 5.53839$  та динамічну сітку з максимальною нев'язкою  $\varepsilon_* = 1.8E-03$  (найбільшого



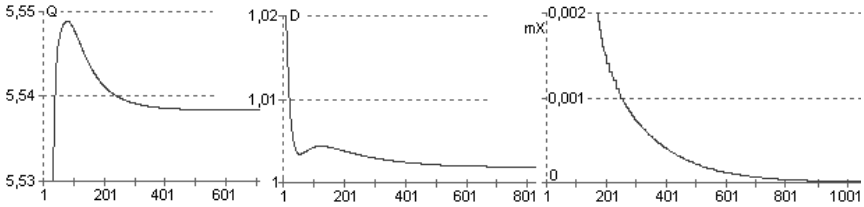


Рис. 3.1. Стабілізація параметрів збіжності при  $\kappa=1$ .

“відхилення” криволінійних елементарних чотирикутників в  $G_Z$  від відповідних прямокутників в  $G_\omega$ , що має місце в деяких околах граничних вузлів [56]. На основі ряду чисельних експериментів виявлені оптимальні співвідношення між параметрами  $m$  та  $n$  розбиття області  $G_\omega$ , коли при збільшенні останніх нев’язка максимально зменшується.

На рис. 3.1 проілюстровано процес стабілізації витрати ( $Q$ ), відношення діагоналей ( $D$ ) та максимальної похибки наближень граничних вузлів динамічної сітки ( $mX$ ) в залежності від кроку ітерації, що підтверджує збіжність наближеного розв’язку задачі.

Моделювання зон мінімального насичення, відриву (вимивання), затримки суфозійних частинок та незбуреної ділянки середовища  $G_Z$  (відповідно  $G_\omega$ ) в залежності від значень градієнта напору  $I(\varphi, \psi)$  проведемо, аналогічно до [49,50]:

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_3, \\ \kappa_0 + \mu(I - I_3)(I - I_\theta), & I_3 < I < I_H, \\ \kappa^*, & I \geq I_H, \end{cases} \quad \text{якщо } I'_\varphi < 0;$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_0, & I \leq I_1, \\ \kappa_0 + \mu_0(I - I_1), & I_1 < I < I_2, \\ \kappa^0, & I \geq I_2, \end{cases} \quad \text{якщо } I'_\varphi \geq 0,$$

де  $I_H$  – значення градієнту потенціалу, при якому має місце мінімальне насичення суфозійних частинок в ґрунті на вході фільтраційного потоку (в область  $G_Z$ ),  $I_\theta$ ,  $I_3$  – критичні його значення, при якому мають місце відповідно відрив та максимальне осідання (максимальна затримка) суфозійних частинок у порах ґрунту, а коефіцієнт  $\mu$ , що характеризує ступінь їх впливу на провідність середовища, знаходиться в результаті розв’язання рівняння  $\kappa(I_H, \mu) = \kappa^*$ ,  $\kappa^*$  – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок (з останніх співвідношень можемо також визначити і мінімальне значення коефіцієнта

фільтрації  $\kappa = \kappa_*$ , що досягається на деякій ділянці зони осідання частинок, де має місце максимально можливе заповнення пор суфозійними частинками);  $I_1, I_2$  – критичні значення градієнту потенціалу ( $I_1' > 0, I_2' > 0$ ), при яких має місце вимив суфозійних частинок з ґрунту, коефіцієнт  $\mu_0$  знаходиться в результаті розв'язання рівняння  $\kappa(I_2, \mu_0) = \kappa^0$ , де  $\kappa^0$  – максимальне значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає повному вимиванню суфозійних частинок на виході фільтраційного потоку.

На рис. 3.2 зображені розрахункові динамічна сітка та зони збурення згідно описаної вище моделі при  $\mu = \mu_0 = 1$ ,  $\kappa^* = 1.005$ ,  $\kappa^0 = 1.04$ ,  $I_3 = 0.3$ ,  $I_6 = 0.35$ ,  $I_H = 0.4$ ,  $I_1 = 0.37$ ,  $I_2 = 0.41$ . Врахування відповідних факторів збурення приводить до збільшення значення шуканої витрати  $Q$  від 5.53839 (без врахування суфозії) до 5.581554 (з врахуванням зміни провідності ділянок середовища за рахунок суфозійних деформацій).

На рис. 3.3 пунктирними, точковими та суцільними лініями зображені графіки залежностей  $I = I_k(x, y)$  та  $\kappa = \kappa_k(x, y)$  (на лінії течії  $\psi(x, y) = Q/2 = 2.791$ ) відповідно при початкових ( $k=0$  та  $k=1$ ) ітераціях та на стадії стабілізації ітераційного процесу ( $I_\infty \approx I_7$ ,  $\kappa_\infty = \kappa_7$ ), а на рис. 3.4 зображені відповідні скалярні поля швидкості фільтраційної течії.

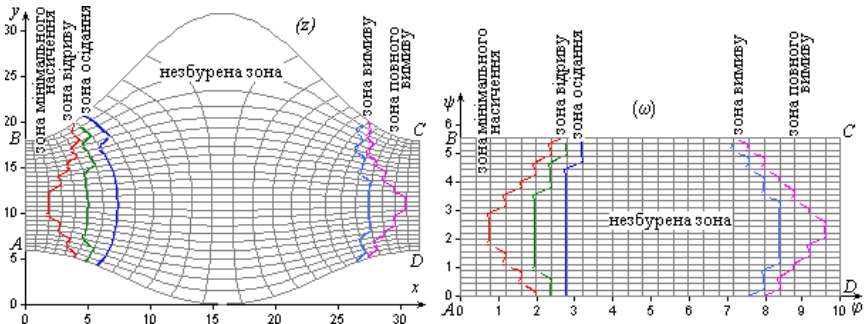


Рис. 3.2. Збурені та незбурена зони у фізичній області та області комплексного потенціалу.

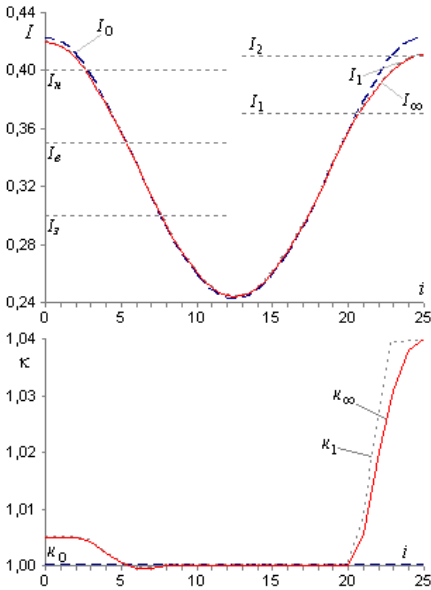


Рис. 3.3. Розподіл градієнта напору та коефіцієнта фільтрації вздовж лінії  $\psi(x,y)=Q/2$  у фізичній області  $G_z$ .

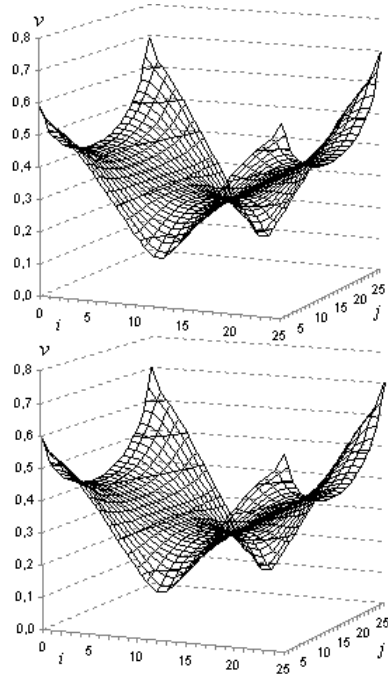


Рис. 3.4. Скалярні поля швидкості на стадіях: початку ( $k=0$ ) та стабілізації ( $k=7$ ) ітераційного процесу.

**3. Асимптотичний розв’язок сингулярно збуреної задачі (3.4)-(3.6) згідно з [42,43,55] шукаємо у вигляді**

$$c = \hat{c} + S + \Pi + \Pi^0 + \Pi^* + R. \tag{3.7}$$

Тут  $\hat{c}(\varphi, \psi, t, \Theta)$  – згладжений вздовж характеристики

$$t = f(\varphi, \psi) \equiv f_2^{-1}(f_1(\varphi, \psi)), \quad (f_1(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\delta(\tilde{\varphi}, \psi)}, \quad f_2(t) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{t}}{\sigma(\tilde{t})}, \quad f_2^{-1} - \text{функція}$$

обернена до  $f_2$ ) розв’язок виродженого рівняння (3.4) за початкової умови (3.6) та “вхідної” граничної умови (3.5), тобто  $\hat{c}(\varphi, \psi, t, \Theta)$  – розв’язок відповідної задачі конвективного масопереносу з врахуванням “розмазування” його фронту за рахунок дифузійних процесів. А саме,

$$\hat{c} = g_1(\Theta, \psi) c_0^0 (f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi) + g_2(\Theta, \psi) c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi))) \quad (3.8)$$

де  $g_1(\Theta) = 0.5(1 + \Phi(\Theta))$ ,  $g_2(\Theta) = 0.5(1 - \Phi(\Theta))$ ,  $\Theta = (f(\varphi, \psi) - t)\varepsilon^{3/2}$ ,  $\Phi(\Theta)$  – інтеграл помилок,  $f^{-1}$  – функція обернена до функції  $f$ .

“Дифузійну” поправку  $S = S(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$  в усій області  $G_0$  знаходимо аналогічно, як у роботі [42,55], вимагаючи, щоб дана функція задовольняла рівняння  $LS = (-L\hat{c})$  і граничні умови

$$S|_{t=0, \Theta > 0} = c_0^0 - \hat{c}|_{t=0, \Theta > 0}, \quad S|_{\varphi=0, \Theta < 0} = c_* - \hat{c}|_{\varphi=0, \Theta < 0}$$

з точністю  $O(\varepsilon)$ .

Функція типу пограншару  $\Pi(\xi, \psi, t)$  в околі  $\varphi = \varphi^*$  призначена для врахування дифузійних процесів вздовж границі виходу фільтраційного потоку  $CD$  і визначається за формулою

$$\Pi(\xi, \psi, t) = a(\psi, t) e^{-\delta(\varphi^*, \psi)\xi}, \quad (3.9)$$

де  $a(\psi, t) = \varepsilon \left( \frac{\partial \hat{c}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi = \varphi^*}$ ,  $\xi = \frac{\varphi - \varphi^*}{\varepsilon}$ .

Функції типу пограншару

$$\Pi^0 = \Pi_0^0(\varphi, \eta, t) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1^0(\varphi, \eta, t) \quad \text{і} \quad \Pi^* = \Pi_0^*(\varphi, \mu, t) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1^*(\varphi, \mu, t),$$

де  $\eta = \varepsilon^{-1/2}\psi$ ,  $\mu = \varepsilon^{-1/2}(Q - \psi)$ , призначені для врахування перерозподілу концентрації розчинної речовини в околі граничних ліній течії  $\psi = 0$ , і  $\psi = Q$  за рахунок впливу відповідних джерел забруднень, інших умов. Вони визначаються в результаті розв’язку рівнянь виду

$$\alpha(\varphi) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} - \delta(\varphi) \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \sigma(t) \frac{\partial \Pi}{\partial t} + g(\varphi, \eta, t), \quad (3.10)$$

які за допомогою заміни  $s = f_1(\varphi) - f_2(t)$  зводяться до рівняння з сталими коефіцієнтами вигляду  $a(s) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + g_0(s, t)$ , де  $s$  – параметр.

#### 4. Зауваження, висновки.

1. Використовуючи принцип максимуму для параболічних рівнянь, встановлюємо оцінку для залишкового члена ряду (3.7)  $|R| = O(\varepsilon)$  [42,55].

Алгоритм для наближеного обчислення значень функції  $f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t)$  у вузлах  $(\varphi_i, \psi_j, t_k)$  області  $G$ , де  $t_k = t_{k(i,j)} = f(\varphi_i, \psi_j)$  тут будується аналогічно до [43] (на основі розробленої нами процедури обернення інтегралів із змінною верхньою межею).

Враховуючи умову  $\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{CD} = 0$  формулу для обчислення маси “виносу” забруднень через ділянку “виходу” фільтраційного потоку із даної області  $G_z$  згідно із [43] обчислюємо за формулою

$$q(t) = \int_0^Q c(\varphi^*, \psi, t) d\psi.$$

2. На основі проведених досліджень бачимо, що введення нелінійності даної задачі шляхом врахування зворотного впливу градієнта квазіпотенціалу на коефіцієнт фільтрації приводить до суттєвого ускладнення алгоритму розрахунку фільтраційного фону, а процедура розрахунку концентрації забруднень у даній області при цьому стає лише більш громіздкою.

Проведені в рамках даної моделі чисельні розрахунки підтверджують факт збільшення величини фільтраційної витрати за рахунок зворотного впливу великих градієнтів квазіпотенціалу на провідність середовища (формування зон вимивання, осідання частинок та мінімального насичення ними пор ґрунту). При цьому, особливо відзначимо ефективність використання ідеї почергового “замороження” характеристик середовища та течії для опису розвитку даного процесу в часі [49,50] та його стабілізації.

### 3.2. Покрокова асимптотика розв’язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями

Визначення глибини місцевого розмиву, що необхідно при проектуванні різного роду гідротехнічних споруд, в багатьох випадках виявляється недостатнім без з’ясування форми воронки розмиву і зони активного відкладання наносів [57,61,62]. Розглядаючи відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту як їх дифузію в рідину з деяким «фіктивним» коефіцієнтом, аналогічно до [58,59], в області  $G = \{(x, z, t): -\infty < x < +\infty, 0 < z < l(x, t), t > 0\}$ , обмеженій горизонтальною лінією  $z=0$  (поверхнею рідини) та деякою кривою  $L: z=l(x, t)$  – межею розділу частинок ґрунту і рідини ( $l(x, t)$  – невідома функція,  $l > 0$ ), отримуємо таку модельну задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ D[V(l(c(x, z, t)))] \frac{\partial c}{\partial z} \right\} - u(l(c(x, z, t))) \frac{\partial c}{\partial x} - (w(l(c(x, z, t))) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (3.11)$$

$$c(x, z, 0) = \bar{c}(x, z); \quad c(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad c(x, z, t)|_{z=l(x, t)} = c_*; \quad (3.12)$$

$$\left\{ \varepsilon D[V(l(c(x, z, t)))] \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(l(c(x, z, t))) + w_0 n) c \right\} \Big|_{z=l(x, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad (3.13)$$

$$l(x,0)=\tilde{l}(x), \quad (3.14)$$

де  $c$  – концентрація частинок,  $u, w$  – компоненти вектора  $\vec{V}(x,z,t)$  осередненої швидкості потоку,  $w_0$  – швидкість осідання частинок в стоячій воді,  $n$  – одиничний вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину. Тут  $\varepsilon D$  – коефіцієнт, пов'язаний із інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину,  $\varepsilon$  – малий параметр (розглядаємо випадок переважання конвективної складової процесу над дифузійною). Рівняння (3.13) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі  $L$ .

Розподіл швидкостей в потоці з врахуванням впливу зміни вільної ділянки границі  $z=l(x,t)$  в часі подамо у вигляді:

$$u(x,z,t)=\frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left( \frac{l(x,t)-z}{l(x,t)} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(x,t)}, \quad w(x,z,t)=u(x,z,t) \frac{l'(x,t)z}{l(x,t)}, \quad (3.15)$$

де  $u_0$  – швидкість рідини на її поверхні,  $l_0$  – деяке осереднене значення глибини потоку,  $\alpha$  – досить мале число.

Введемо нові змінні  $s, r$ , які пов'язанні із змінними  $x, z$  співвідношеннями:  $s=x, r=l_0 z/l(x,t)$ . При цьому рівняння (3.11), (3.12) та рівності (3.15) перепишемо так:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2(s,t)} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ D[V(l(c(s,r,t)))] \frac{\partial c}{\partial r} \right\} - u(l(c(s,r,t))) \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l(s,t)} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (3.16)$$

$$c(s,r,0)=\bar{c}(s,r); \quad c(s,r,t)|_{r=0}=0, \quad c(s,r,t)|_{r=l_0}=c_*; \quad (3.17)$$

$$u(s,r,t)=\frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left( \frac{l_0-r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(s,t)}, \quad w(s,r,t)=u(s,r,t) \frac{l'_s(s,t)r}{l_0}. \quad (3.18)$$

Провівши дискретизацію часу  $t$  з настільки малим кроком  $\Delta t$ , щоб на кожному із проміжків  $[t_k, t_{k+1}]$  можна було б знехтувати зміною вільної ділянки границі, у випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов [42,60], розв'язок задачі (3.16)-(3.17) шукатимемо наближено при  $t_k < t < t_{k+1}$  в області з фіксованою границею  $L_k$  ( $r=l_0$ ) у вигляді асимптотичного ряду:

$$c=c_0+\varepsilon c_1+P_0+\varepsilon P_1+R, \quad (3.19)$$

де  $R=O(\varepsilon^2)$  – залишковий член;  $P_i(s,\eta,t)$  – примежові функції;  $\eta=(l_0-r)/\varepsilon$  – розтягнута змінна в околі  $r=l_0, z=l(x,t_k)$ ;  $c_i(s,r,t)$  – члени регулярної частини асимптотики (тут обмежуємось нульовим і першим членами асимптотики лише з метою зменшення обсягу викладок, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, можна знайти аналогічно) [42,45,60].

На кожному часовому етапі розв'язок поставленої задачі шукаємо в області  $G_k=\{(s,r,t): -\infty < s < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$ . При цьому члени регуляр-

ної частини асимптотики (3.19) запишемо у вигляді [42,45,58,59]:

$$c_0 = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(s,r), g(s,r) - t - t_k), g_{-1}(f(s,r), g(s,r) - t - t_k)), & t < t_k + g(s,r), \\ 0, & t > t_k + g(s,r), \end{cases} \quad (3.20)$$

$$f(s,r) = s \frac{w_0}{u_0} + \frac{(l_0(1+\alpha) - r)^{m+1}}{(m+1)l_0^m(1+\alpha)^m}, \quad g(s,r) = \frac{l(s, t_k)r}{l_0 w_0}; \quad (3.21)$$

$$c_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(s,r), g(s,r) - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1}(f(s,r), g(s,r) - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (3.22)$$

$$F(s,r,t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_k \frac{\partial c_0}{\partial r} \right); \quad D_k = D[V(l(c(s,r, t_k)))] , \quad c_k = c(s,r, t_k). \quad (3.23)$$

Тут  $f_{-1}$ ,  $g_{-1}$  – функції, які отримуємо як розв’язки системи нелінійних рівнянь  $\theta_1 = f(s,r)$ ,  $\theta_2 = g(s,r)$  щодо змінних  $s, r$ .

Розкладаючи функції  $D$  і  $u$  в околі  $r=l_0$  в скінченні стрічки Тейлора та вводячи розтягнуту змінну  $\eta$ , в результаті розв’язання відповідних задач, отриманих стандартною процедурою “прирівнювання” [42,60], знаходимо вирази для приміжових функцій  $P_i(s, \eta, t)$  на кожному часовому етапі:

$$P_0(s, \eta, t) = [c_* - c_0(s, l_0, t)] \cdot \exp \left[ -\frac{w_0}{D_k(s, l_0)} \cdot \frac{l(s, t_k)}{l_0} \eta \right], \quad (3.24)$$

$$P_1(s, \eta, t) = \left\{ -c_1(s, l_0, t) + \frac{[c_* - c_0(s, l_0, t)]l(s, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, l_0)} [l'(s, t_k) D_k(s, l_0) u_k(s, l_0) - \right. \\ \left. - l(s, t_k) (D_k)'_s(s, l_0) u_k(s, l_0) - w_0 l_0 (D_k)'_s(s, l_0)] \eta^2 + \frac{1}{l_0 w_0} [u_k(s, l_0) [c_* - c_0(s, l_0, t)] \times \right. \\ \left. \times \frac{l'(s, t_k) D_k(s, l_0) - l(s, t_k) (D_k)'_s(s, l_0)}{D_k(s, l_0)} + l(s, t_k) \left( u_k(s, l_0) \frac{\partial c_0(s, l_0, t)}{\partial s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial c_0(s, l_0, t)}{\partial t} \right) \right] \eta \right\} \exp \left[ -\frac{w_0}{D_k(s, l_0)} \frac{l(s, t_k)}{l_0} \eta \right], \quad \text{де } u_k = u(l(c(s, r, t_k))). \quad (3.25)$$

Використовуючи отриманий розв’язок  $c(s, r, t)$  та рівність (3.13), визначаємо нове положення границі  $L_k$  за формулою:

$$l(s, t_{k+1}) = l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}} \left[ \varepsilon D_k(s, r) \left( -\frac{l_0 [1 + (l'(s, t_k))^2]}{l(s, t_k)} \cdot \frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + l'(s, t_k) \frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial s} \right) - [w(l(c(s, r, t_{k+1}))) + w_0 - u_k(s, r) l'(s, t_k)] c(s, r, t_{k+1}) \right]_{r=l_0}. \quad (3.26)$$

Враховуючи (3.24)-(3.25) отримаємо:

$$\begin{aligned}
l(s, t_{k+1}) = & l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}} \left\{ - \frac{\varepsilon D_k(s, l_0) l_0 (1 + l'^2(s, t_k))}{l(s, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} [c_0(s, l_0, t_{k+1}) + \right. \\
& + \varepsilon c_1(s, l_0, t_{k+1})] + w_0 [1 + (l'(s, t_k))^2] [c_0(s, l_0, t_{k+1}) + \varepsilon c_1(s, l_0, t_{k+1}) - c_*] - w_0 c_* + \\
& + \frac{\varepsilon [1 + l'^2(s, t_k)]}{w_0} \left[ D_k(s, l_0) \left( \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} + u_k(s, l_0) \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial s} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{u_k(s, l_0) l'(s, t_k) D_k(s, l_0) - u_k(s, l_0) l(s, t_k) (D_k)'_s(s, l_0)}{l_0 (w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0))} [c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})] \right\}. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

У випадку досить дрібних частинок ґрунту, коли їх швидкість осідання має такий самий порядок малості, що й коефіцієнт дифузії, вихідну модельну задачу розглянемо у вигляді

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ D[V(l(c(x, z, t)))] \frac{\partial c}{\partial z} - w_* c \right\} - u(l(c(x, z, t))) \frac{\partial c}{\partial x} - w(l(c(x, z, t))) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (3.28)$$

$$c(x, z, 0) = \bar{c}(x, z); \quad c(x, z, t) \Big|_{z \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad c(x, z, t) \Big|_{z=l(x, t)} = c_*; \quad l(x, 0) = \tilde{l}(x); \quad (3.29)$$

$$\left\{ \varepsilon D[V(l(c(x, z, t)))] \frac{\partial c}{\partial n} - [V_n(l(c(x, z, t))) + \varepsilon w_* n] c \right\} \Big|_{z=l(x, t)} = c_* \frac{dl}{dt}. \quad (3.30)$$

Її розв'язок, аналогічно до попереднього, шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду (3.19), провівши дискретизацію часу та вводячи змінні  $s, r$  лише для того, щоб знайти приміжові функції  $P_i$ . При цьому отримаємо:

$$c_0 = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(x, z), g(x, z) - t - t_k), g_{-1}(f(x, z), g(x, z) - t - t_k)), & t < t_k + g(x, z), \\ 0, & t > t_k + g(x, z), \end{cases} \quad (3.31)$$

$$f(x, z) = \ln \frac{l(x, t_k)}{z}, \quad g(x, z) = \frac{1}{u_0 l_0 (1 + l(x, t_k) - z)^m} \int_0^x l(\tilde{x}, t_k) d\tilde{x}, \quad (3.32)$$

$$c_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(x, z), g(x, z) - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1}(f(x, z), g(x, z) - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (3.33)$$

$$F(x, z, t) = - \frac{\partial}{\partial z} (D_k(x, z) \frac{\partial c_0}{\partial z} - w_* c_0), \quad (3.34)$$

$$P_0(s, \eta, t) = [c_* - c_0(s, l_0, t)] \cdot \exp \left[ - \frac{(w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0)) \cdot l(s, t_k)}{D_k(s, l_0) l_0} \eta \right], \quad (3.35)$$

$$P_1(s, \eta, t) = \sqrt{\frac{[c_* - c_0(s, l_0, t)] l(s, t_k)}{2l_0}} \left[ - \frac{(D_k)'_r(s, l_0) [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k) u_k(s, l_0)]}{D^2(s, l_0)} + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{(w_k)_r'(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_r'(s, l_0)}{D_k(s, l_0)} + \frac{l'(s, t_k)D_k(s, l_0) - l(s, t_k)(D_k)_s'(s, l_0)}{l_0 D_k^2(s, l_0)} - \frac{l'(s, t_k)u_k(s, l_0)}{l_0 D_k(s, l_0)} + \\
& + \left[ \frac{(w_k)_s'(s, l_0) - l''(s, t_k)u_k(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_s'(s, l_0)}{l_0 D_k(s, l_0)[w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} l(s, t_k) \right] \eta^2 + \left\{ \left( \frac{\partial c_0(s, l_0, t)}{\partial t} + \right. \right. \\
& + u_k(s, l_0) \frac{\partial c_0(s, l_0, t)}{\partial s} \left. \right) \frac{l(s, t_k)}{l_0 [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} + [c_* - c_0(s, l_0, t)] \times \\
& \times \left[ \frac{(w_k)_r'(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_r'(s, l_0)}{w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)} + \frac{(w_k)_s'(s, l_0) - l''(s, t_k)u_k(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_s'(s, l_0)}{l_0 D_k(s, l_0)[w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} \right] \times \\
& \times l(s, t_k) + \frac{l'(s, t_k)D_k(s, l_0) - l(s, t_k)(D_k)_s'(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)D_k(s, l_0)}{l_0 [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} - \\
& \left. - \frac{l(s, t_k)w_*}{l_0 D_k(s, l_0)} \right\} \eta - c_1(s, l_0, t) \exp \left[ - \frac{(w_k(s, l_0) - l'u_k(s, l_0))l(s, t_k)}{D_k(s, l_0) l_0} \eta \right],
\end{aligned} \tag{3.36}$$

де  $f_{-1}$ ,  $g_{-1}$  – функції, які отримуємо як розв’язки системи нелінійних рівнянь  $\theta_1 = f(x, z)$ ,  $\theta_2 = g(x, z)$  щодо змінних  $x, z$ .

Аналогічно до (3.26), (3.27) відповідно матимемо:

$$\begin{aligned}
l(s, t_{k+1}) &= l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}} \left[ \varepsilon D_k(s, r) \left( l'(s, t_k) \frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial s} - \frac{l_0}{l(s, t_k)} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. [1 + (l'(s, t_k))^2] \frac{\partial c(s, r, t_{k+1})}{\partial r} \right) - [w_k(s, r) + \varepsilon w_* - u_k(s, r)l'(s, t_k)] c(s, r, t_{k+1}) \right]_{r=l_0}, \\
l(s, t_{k+1}) &= l(s, t_k) + \frac{\Delta t}{c_*} \left( -\sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2} \left[ D_k(s, l_0) \left( \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial c_1(s, l_0, t_{k+1})}{\partial r} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\varepsilon l_0}{l(s, t_k)} - [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)] [c_0(s, l_0, t_{k+1}) - \varepsilon c_1(s, l_0, t_{k+1})] \right] - \frac{(l'(s, t_k))^2}{\sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}} \times \right. \\
& \times w_k(s, l_0)c_* + \frac{(l'(s, t_k))^3 u_k(s, l_0)c_*}{\sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}} + \left\{ \frac{D_k(s, l_0)l_0 \sqrt{1 + (l'(s, t_k))^2}}{l(s, t_k)} \left[ \left( \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} + \right. \right. \right. \\
& + u_k(s, l_0) \frac{\partial c_0(s, l_0, t_{k+1})}{\partial s} \left. \right) \frac{l(s, t_k)}{l_0 [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} + [c_* - c_0(s, l_0, t_{k+1})] \times \\
& \times \left( \frac{(w_k)_r'(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_r'(s, l_0)}{w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)} + \frac{l'(s, t_k)D_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)D_k(s, l_0)}{l_0 [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} - \right. \\
& - \frac{l(s, t_k)(D_k)_s'(s, l_0)}{l_0 [w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} + \frac{[(w_k)_s'(s, l_0) - l''(s, t_k)u_k(s, l_0) - l'(s, t_k)(u_k)_s'(s, l_0)]l(s, t_k)}{l_0 D_k(s, l_0)[w_k(s, l_0) - l'(s, t_k)u_k(s, l_0)]} \\
& \left. \left. - \frac{l(s, t_k)w_*}{l_0 D_k(s, l_0)} \right] \right\} \varepsilon \left. \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Зауважимо, що для визначення коефіцієнта  $D$  та функції  $\bar{c}(x, z)$  пропонують різні залежності відповідно до типу задач, що розглядаються

та прийнятих припущень щодо впливу водного потоку на частинки ґрунту. Проте в багатьох випадках доцільно вибирати коефіцієнт дифузії, згідно з гіпотезою Маккавеева (про коефіцієнт турбулентного обміну), пропорційним осередненій швидкості потоку ( $D=\chi V^b$ ), а концентрацію наносів у початковий момент часу – відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних частинок у вигляді:  $\bar{c}(x,z)=c_* \exp[-\gamma(\tilde{l}(x)-z)]$  [58,62-64].

На рис.3.5-3.7 зображено положення поверхні дна у різні моменти часу для випадків: обтікання затопленого пагорбка ( $\tilde{l}(x)=l_0-\lambda/(\tau+\mu x)$ ), втікання до малої ( $\tilde{l}(x)=l_0+\tilde{\lambda}/(\tilde{\tau}+\tilde{\mu}x)$ ), та великої ( $\tilde{l}(x)=l_0(\rho+(\psi/\pi)\arctg(\varphi x))$ ) впадин. Для моделювання розмивів при виході потоку рідини із ділянок, де дно не розмивається, пропонуємо таку граничну умову на кривій  $L$ :

$$c(x,z,t)|_{z=l(x,t)} = \begin{cases} 0, & x < 0-\xi, \\ c_*(1+x/\xi), & -\xi \leq x \leq 0, \\ c_*, & x > 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Процес формування воронки розмиву для такого випадку зображено на рис.3.8.

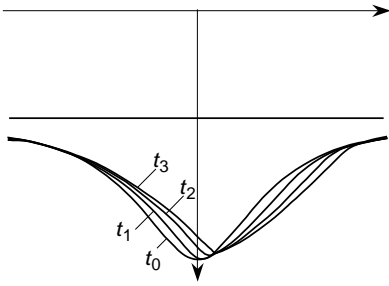


Рис. 3.5

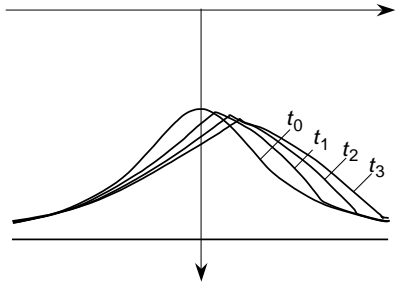


Рис. 3.6

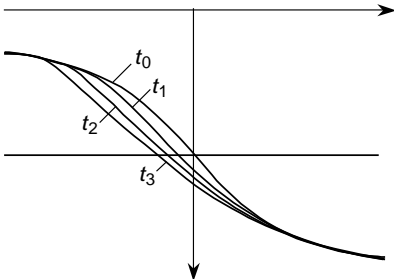


Рис. 3.7

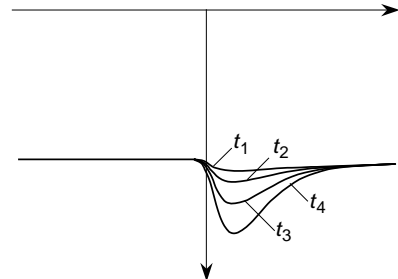


Рис. 3.8

### 3.3. Розв'язання одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання розмивів поблизу півзагат

Підвищення якості проектування та будівництва різного роду гідро-технічних споруд, вибір їх оптимальних конструкцій вимагає не тільки експериментального вивчення та дослідження процесів деформації дна, що виникають поблизу цих споруд при обтіканні їх водним потоком, а й, створення нових ефективних математичних моделей, які б дозволили розраховувати глибину воронки розмиву, її форму та зону активного відкладення частинок з врахуванням транспорту наносів. Розглянемо методику математичного прогнозування та дослідження процесу деформації дна на основі моделі змулення (дифузії) дрібних частинок ґрунту водним потоком, в області із змінною в часі ділянкою її границі (поверхнею дна).

Розглянемо процес деформації дна, що виникає при обтіканні поперечно до берегової лінії незатопленої шпори (півзагати) водним потоком, розподіл компонентів швидкості якого на поверхні рідини близький до ідеального. Використовуючи залежність показникового виду для вертикального розподілу [65], представимо ці компоненти, з врахуванням впливу зміни положення поверхні дна ( $z=l(x,y,t)$ ), у вигляді:

$$u(x,y,z,t) = \frac{u_0(x,y)l_0}{(1+\alpha)^m l} \left( \frac{l-z}{l} + \alpha \right)^m ; \quad v(x,y,z,t) = \frac{v_0(x,y)l_0}{(1+\alpha)^m l} \left( \frac{l-z}{l} + \alpha \right)^m ; \quad (3.39)$$

$$w(x,y,z,t) = \frac{l_0(l'_x u_0(x,y) + l'_y v_0(x,y))}{(1+\alpha)^m l^2} \left( \frac{l-z}{l} + \alpha \right)^m , \quad (3.40)$$

де  $u_0, v_0$  – компоненти вектора швидкості рідини на її поверхні;  $w_0$  – швидкість осідання частинок в стоячій воді;  $\alpha$  – деяке досить мале число. Компоненти  $u_0, v_0$  можуть бути знайдені шляхом конформного відображення смуги з поперечним розрізом (півзагатою)  $G_\zeta = \{\zeta = x + iy: -\infty < x < +\infty, 0 < y < H\} \setminus \{(0,y): 0 < y \leq B\}$  (тут  $B$  – довжина півзагати,  $H$  – ширина потоку) на смугу (область комплексного потенціалу)  $G_\xi = \{\xi = \varphi + i\psi: -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < H\}$

при відповідності  $\infty \rightarrow \infty, iB \rightarrow 0, 0 \rightarrow \frac{H}{\pi} \ln \left( \frac{1 \mp \sin \frac{\pi B}{2H}}{1 \pm \sin \frac{\pi B}{2H}} \right)$ , яке запишеться у ви-

гляді:

$$\xi = \frac{2H}{\pi} \operatorname{arth} \left\{ \cos \frac{\pi B}{2H} \sqrt{th^2 \frac{\pi \zeta}{2H} + tg^2 \frac{\pi B}{2H}} \right\}. \quad (3.41)$$

Відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту під впливом водного потоку розглядатимемо як їх дифузію у рідину з деяким фіктивним «коефіцієнтом» в області із змінною в часі ділянкою границі (поверхнею дна), де коефіцієнт дифузії залежить не тільки від шуканої функції, але й від змінної у часі вільної ділянки границі області. Вважатимемо, що пере-

несення частинок в потоці здійснюється переважно за рахунок конвекції. Тоді, переходячи від змінних  $x, y$  до  $\varphi, \psi$  – відповідно потенціалу та функції течії даного фіктивного ідеального горизонтального потоку, в області  $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < \psi < H, 0 < z < l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\}$ , обмеженій зверху горизонтальною площиною  $z=0$  – поверхнею рідини, береговими стінками із півзагатою –  $\{(\varphi, 0, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < z < l(\varphi, 0, t)\}$ ,  $\{(\varphi, H, z, t): -\infty < \varphi < +\infty, 0 < z < l(\varphi, H, t)\}$  та вільною поверхнею  $L = \{(\varphi, \psi, t): z = l(\varphi, \psi, t)\}$ , аналогічно до [64,58], приходимо до наступної модельної задачі:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( D[V(\varphi, \psi, z, l)] \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{(u_0^2 + v_0^2) l_0}{(1 + \alpha)^m l} \left( \frac{l - z}{l} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial \varphi} - [w(\varphi, \psi, z, l) + w_0] \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (3.42)$$

$$\left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0, H} = 0, \quad c(\varphi, \psi, z, t) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_*, \quad c(\varphi, \psi, z, t) \Big|_{z=0} = 0; \quad (3.43)$$

$$\left( \varepsilon D[V(\varphi, \psi, z, l)] \frac{\partial c}{\partial n} - [V_n(\varphi, \psi, z, l) + w_{0n}] c \right) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad (3.44)$$

$$c(\varphi, \psi, z, 0) = \bar{c}(\varphi, \psi, z), \quad l(\varphi, \psi, 0) = l_0, \quad (3.45)$$

де  $c(\varphi, \psi, z, t)$  – концентрація частинок в точці  $(\varphi, \psi, z)$  в момент часу  $t$ ;  $\vec{V}(u(\varphi, \psi, z, t), v(\varphi, \psi, z, t), w(\varphi, \psi, z, t))$  – вектор швидкості потоку ( $V$  – модуль вектора швидкості);  $\varepsilon D$  – “фіктивний” коефіцієнт дифузії, пов’язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину;  $\varepsilon$  – малий параметр;  $n$  – вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину. Рівняння (3.44) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі  $L$ . Функцію  $D$  для такого випадку представимо у вигляді:  $D = \chi V^\beta$ , де  $\chi, \beta$  – деякі числа (параметри).

Введемо нові змінні  $s, h, r$ , які пов’язанні із  $\varphi, \psi, z$  співвідношеннями:  $s = \varphi, h = \psi, r = l_0 z / l(\varphi, \psi, t)$ , та перепишемо рівняння (3.42), (3.43), (3.45.1) у вигляді:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( D[V(s, h, r, l)] \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0}{(1 + \alpha)^m l} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (3.46)$$

$$c(s, h, r, t) \Big|_{r=0} = c_* e^{-\gamma l_0 / \varepsilon} \approx 0, \quad c(s, h, r, t) \Big|_{r=l_0} = c_*, \quad \left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=0, H} = 0; \quad (3.47)$$

$$c(s, h, r, 0) = \bar{c}(s, h, r); \quad (3.48)$$

Провівши дискретизацію часу  $t$  з настільки малим кроком  $\Delta t$ , щоб на кожному із проміжків  $[t_k, t_{k+1}]$  можна було б знехтувати зміною вільної ділянки границі, у випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов [60,42,45], розв’язок задачі (3.46)–(3.48) шукаємо наближено при  $t_k < t < t_{k+1}$  в області  $G_{*k} = \{(s, h, r, t): -\infty < s < +\infty, -\infty < h < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$  з

фіксованою границею  $L_k (r=l_0)$  у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_{k+1} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i c_{i,k+1} + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i P_{i,k+1} + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_{i,k+1} + R, \quad (3.49)$$

де  $c_{k+1} = c(s, h, r, t)$  для  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $R = O(\varepsilon^N)$  – залишковий член,  $P_{i,k+1}(s, h, \eta, t)$  – примежові функції в околі  $r=l_0$ ,  $z=l(x, y, t_k)$  ( $\eta$  – розтягнута змінна,  $\eta = \frac{l_0 - r}{\varepsilon}$ ),

$\Pi_{k+1}$  – примежові функції в околі  $r=0$ ,  $c_{i,k+1}(s, h, r, t)$  – члени регулярної частини асимптотики. З метою зменшення обсягу викладок розглянемо лише нульовий та перший члени асимптотики, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, знаходяться аналогічно [60,42,45]. Крім того, враховуючи, що функції  $\Pi_{k+1}$  в даному випадку близькі до нуля, будемо відносити їх до залишкового члена  $R$ . Використовуючи стандартну процедуру “прирівнювання”, аналогічно до [42,60], отримаємо такі вирази для членів регулярної частини та примежових функцій асимптотики (3.49) на кожному часовому етапі:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k), g_{-1,k}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k)), & t < t_k + g_k(s, h, r), \\ 0, & t > t_k + g_k(s, h, r), \end{cases} \quad (3.50)$$

$$f(s, h, r) = \frac{l_0(1+\alpha)^{-m}}{(m+1)w_0} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^{m+1} + \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{u_0^2(\tilde{s}, h) + v_0^2(\tilde{s}, h)}, \quad g_k(s, h, r) = \frac{l(s, h, t_k)r}{l_0 w_0}; \quad (3.51)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1,k}(f(s, h, r), g_k(s, h, r) - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (3.52)$$

$$F(s, h, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, h, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); \quad D_k = D[V(s, h, r, l(s, h, t_k))], \quad (3.53)$$

$$P_{0,k+1}(s, h, \eta, t) = [c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)] \cdot \exp \left[ -\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \cdot \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta \right], \quad (3.54)$$

$$P_{1,k+1}(s, h, \eta, t) = \left\{ \frac{[c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)] l(s, h, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, h, l_0)} \left[ \frac{[u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} \times \right. \right. \\ \times \left. \left. [l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) (D_k)'_s(s, h, l_0)] - w_0 l_0 (D_k)'_r(s, h, l_0) \right] \eta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{l_0 w_0} \left[ \frac{[u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} \frac{l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) (D_k)'_s(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} \right] \times \right. \\ \left. \times [c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)] + \frac{[u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m} \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial s} + \right. \quad (3.55)$$

$$+l(s,h,t_k) \frac{\partial c_{0,k+1}(s,h,l_0,t)}{\partial t} \Big] \eta^{-c_{1,k+1}(s,h,l_0,t)} \Big\} \exp \left[ -\frac{w_0}{D_k(s,h,l_0)} \frac{l(s,h,t_k)}{l_0} \eta \right].$$

Тут  $f_{-1}$ ,  $g_{-1,k}$  – функції, які отримуються як розв’язок системи нелінійних рівнянь  $\theta_1 = f(s,h,r)$ ,  $\theta_2 = g(s,h,r)$  щодо змінних  $s, r$ .

Використовуючи одержаний розв’язок  $c_{k+1}(s,h,r,t)$  та рівність (3.44), визначимо положення границі  $L_{k+1}$  за формулою:

$$\begin{aligned} l(s,h,t_{k+1}) = & l(s,h,t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + [u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] [(l'_s(s,h,t_k))^2 + (l'_h(s,h,t_k))^2]}} \times \\ & \times \left\{ \frac{\varepsilon D_k(s,h,l_0)}{l(s,h,t_k)} \{ [u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] [(l'_s(s,h,t_k))^2 + (l'_h(s,h,t_k))^2] + 1 \} \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial r} [c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1}) + \varepsilon c_{1,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})] - w_0 \{ [u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] \times \\ & \times [(l'_s(s,h,t_k))^2 + (l'_h(s,h,t_k))^2] + 1 \} [c_* - c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1}) - \varepsilon c_{1,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})] - \\ & - w_0 c_* + \frac{\varepsilon D_k(s,h,l_0) [u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] [(l'_s(s,h,t_k))^2 + (l'_h(s,h,t_k))^2] \times \\ & \times \left\{ \frac{[u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m} \cdot \frac{l'_s(s,h,t_k) D_k(s,h,l_0) - l(s,h,t_k) (D_k)'_s(s,h,l_0)}{D_k(s,h,l_0)} \right. \\ & \times [c_* - c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})] + \frac{[u_0^2(s,h) + v_0^2(s,h)] l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m} \cdot \frac{\partial c_{0,k+1}(s,h,l_0,t_{k+1})}{\partial s} + \\ & \left. \left. + l(s,h,t_k) \frac{\partial c_{0,k+1}(s,l_0,t_{k+1})}{\partial t} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Зауважимо, що вихідна задача допускає і чисельне наближення розв’язку. На рис.3.9 схематично зображено конфігурація поверхні дна поблизу поперечної півзагати в деякий момент часу  $t=t_0$  ( $u_\infty=1\text{ м/с}$ ,  $H=5\text{ м}$ ,  $B=1\text{ м}$ , ґрунт – однорідний, з діаметром частинок  $2\text{ мм}$ ). На рис. 3.10, 3.11, 3.12 відповідно представлені залежності максимальної глибини воронки розмиву  $l_{\max}$  від швидкості набігаючого потоку  $u_\infty$ , діаметра частинок ґрунту  $d$  та відносної ширини перекриття русла ( $B/H$ ).

У випадку, коли розглядається обтікання водним потоком півзагати розміщеної під кутом до берегової лінії, компоненти швидкості можуть бути знайдені, аналогічно до попереднього, шляхом конформного відображення півплощини з косим розрізом (півзагатою)  $G_\zeta$  (рис.3.13) на півплощину  $G_\xi$  (рис.3.14) (область комплексного потенціалу) при відповідності  $\infty \rightarrow \infty$ ,  $Be^{i\pi\Theta} \rightarrow b$ ,  $0 \rightarrow \pm 1$ , яке має вигляд:

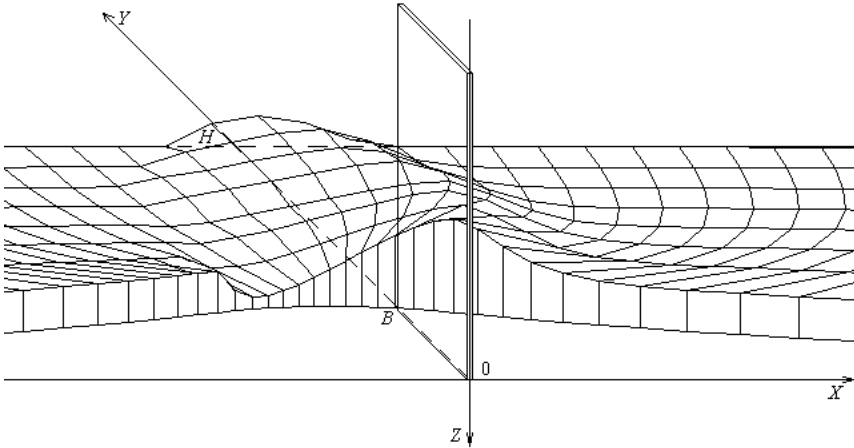


Рис.3.9. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу нормально розташованої незатопленої півзагати

$$\zeta = M(\xi+1)^{1-\Theta}(\xi-1)^{\Theta}, \quad M = B(b+1)^{\Theta-1}(1-b)^{-\Theta}, \quad b = \frac{1-2\Theta}{2\Theta}. \quad (3.57)$$

Компоненти швидкості, при цьому, визначатимуться за формулою:

$$u_0 - v_0 i = \frac{u_{\infty}}{(1-\Theta)(\xi+1)^{-\Theta}(\xi-1)^{\Theta} + \Theta(\xi+1)^{1-\Theta}(\xi-1)^{\Theta-1}}. \quad (3.58)$$

На рис.3.15 схематично зображено конфігурація поверхні дна поблизу півзагати для такого випадку в деякий момент часу  $t=t_0$  при  $u_0(\infty, y, z, t) = 1 \text{ м/с}$ ,  $B = 1 \text{ м}$ ,  $\Theta = 0.3$ ,  $d = 2 \text{ мм}$ .

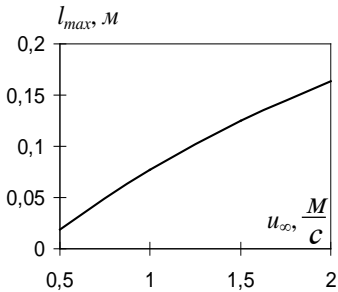


Рис.3.10. Залежність  $l_{max}$  від  $u_{\infty}$  при  $d=2 \text{ мм}$ ,  $B/H=0,2$ .

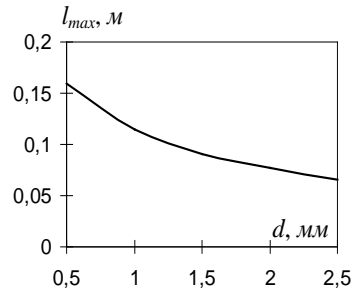


Рис.3.11. Залежність  $l_{max}$  від  $d$  при  $u_{\infty}=1 \text{ м/с}$ ,  $B/H=0,2$ .

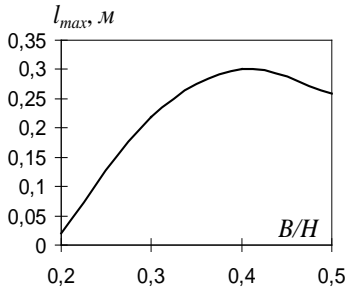


Рис.3.12. Залежність  $l_{max}$  від  $V/H$  при  $u_{\infty}=1\text{ м/с}$ ,  $d=2\text{ мм}$ .

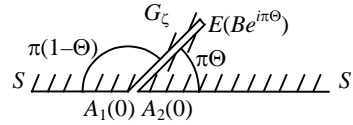


Рис.3.13. Вихідна область  $G_z$ .

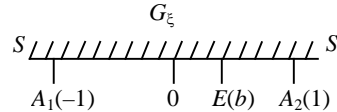


Рис.3.14. Область комплексного потенціалу  $G_z$ .

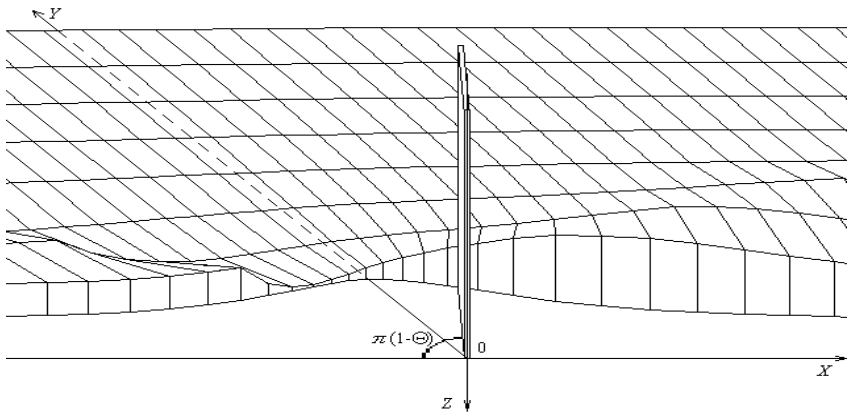


Рис. 3.15. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу косорозміщеної півзагати

## Використана література

1. Польский В.С. Об одном методе эллиптических разностных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1981. – 21,51. С.29-34.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва-Ленинград: Физматгиз. 1962. – 708 с.
3. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трех мерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1962. – 161с.
4. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – Киев: Наук. думка, 1973. – 264 с.
5. Ляшко И.И., Грищенко А.Е. Решение краевых задач в слоистых грун-



- тах. // Алгоритмы и программы решения краевых задач математической физики. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 173 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.
  7. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наукова думка, 1991. – 432с.
  8. Кузьменко А.П., Бомба А.Я. Про розв'язок крайових задач у шаруватих середовищах. // Волинський математичний вісник. – 1994. – Вип.1. – С.36-43.
  9. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349с.
  10. Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. До розв'язування еліптичних крайових задач у нескінченних складній конфігурації областях // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип.6. – С.89-92.
  11. Кузьменко А.П., Гладка О.М. Один метод розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних із розривними коефіцієнтами // Тези доповідей Третьої наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – Київ – 1994. – С.66.
  12. Якимов Н.Д. Вариационные теоремы для задач с кривыми депрессии // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Из-во Казанского ун-та. – 1976. – Вып.13. – С.258-275.
  13. Chishaki T., Matsuguma N. Analysis of seepage problems by reduction method // Tehnology reports of the Kyushu university. – 1976. – 49, №2. – С.75-82.
  14. Кузьменко А.П., Гладка О.М. Про розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатозаровій смузі // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Зб.наук.пр. – Київ: Ін-т математики НАНУ. – 1995. – С.168-173.
  15. Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. Про розв'язок просторових крайових задач для рівнянь дивергентного типу із розривними коефіцієнтами // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Зб. наук. ст. – Рівне: УДАВГ. – 1998. – С.96-101.
  16. Кузьменко А.П., Гладка О.М. До розв'язування нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – Рівне: РДТУ. – 1998. – Вип.23. – С.76-83.
  17. Кузьменко А.П., Гладка О.М. Розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу із розривними коефіцієнтами у кільці // Волин.матем. вісник. – Вип. 2. – 1995. – С. 113-115.
  18. Положий Г.Н., Скоробагатько А.А. Об одном классе формул суммарных представлений // Прикл. матем. и мех.– Вып.1.– 1965.– С.20-40.
  19. Матеева Э.Й., Пальцев Б.В. О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы // Журн.

- вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1441-1458.
20. *Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення з особливостями // Волинський математичний вісник. – 1997. – №4. – С.18-21.
  21. *Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник. – 1996. – №3. – С.23-25.
  22. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Михальчук В.В.* Про наближений метод конформних відображень розв'язання одного класу крайових задач // Волинський математичний вісник. – 1995. – №2. – С.18-21.
  23. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334с.
  24. *Ляшко И.И., Великоованенко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. – Киев: Наукова думка, 1974. – 200с.
  25. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736с.
  26. *Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Про чисельно-асимптотичний підхід до розв'язку крайових задач фільтрації та масопереносу в пористому середовищі. – Рівне: Деп. в УкрИНТЭИ 24.09.92, №1471.- Ук92. – 12с.
  27. *Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1977. – 288с.
  28. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про чисельно-аналітичні методи розв'язання одного класу нелінійних крайових задач на конформні відображення і моделювання впливу на процеси //Сьома Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р., Київ). Матеріали конференції. – Київ – 1998. – С.59-60.
  29. *Каштан С.С.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення і моделювання ліній розділу фільтраційних потоків в пористих середовищах // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. – 1998. – №4. – С.119-122.
  30. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П.* Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-25.
  31. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип.6.- С.25-36.
  32. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісник Львівського національного університету. Серія: Прикладна математика.- 2000.-

- Вип. 2.- С.3-14.
33. *Бомба А.Я.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних крайових задач на конформні відображення в шаруватих середовищах // *Волинський математичний вісник.*- 2000.- Вип. 7.- С.17-21.
  34. *Власюк А.П., Михальчук В.Г.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами.- Киев, 1989.- 55с.- (Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.79).
  35. *Власюк А.П., Михальчук В.Г.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей.- Киев, 1991.- 56с.- (Препринт АН Украины. Ин-т математики; 91.57).
  36. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики.- М.: Наука, 1976.- 400с.
  37. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // *Журнал вычислительной математики и математической физики.*- 1967.- 7, №5. -С.1031-1059.
  38. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // *Журнал вычислительной математики и математической физики.*- 1972.- 12, №2.- С.429-440.
  39. Numerical Conformal Mapping // *J. Comput. and Applied. Math.*- 1986.- 14.- P.1-369.
  40. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical Grid Generation: Foundation and Applications.- New York: Elsevier, 1985.- 931p.
  41. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. *Полубариновой-Кочиной П.Я.*- Москва: Наука, 1969.- 546с.
  42. *Бомба А.Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде. – *Укр. матем. журн.*, 1982, т. 34, №4. – С. 493-496.
  43. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной пористой среде. Препринт 85.72. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.
  44. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса. – В кн.: *Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения.* М.: Наука. – 1988. – С. 115–120.
  45. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущенной задачи массопереноса // *Киевский ун-т.* – Киев, 1986. – Деп. в УкрНИИТИ, №286–Ук86.
  46. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах // *Вісник Київ-*

- ського університету. Сер.: фізико-математичні науки.- 2001, №4.- С.160-174.
47. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С.9-22.
  48. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Математичне моделювання одного класу еко-енергосистем // Міжнародна конференція "Моделювання та оптимізація складних систем" присвячена 65-річчю Бублика Б.М. (25-28 січня 2001р., Київ). Праці конференції.- Київ -2001.- Т.3.- С.116-117.
  49. *Хлапук М.М., Бомба А.Я., Сидорчук Б.П.* Про моделювання взаємовпливу фільтрації та механічної суфозії // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ.- Рівне, 1998.- С.157-166.
  50. *Бомба А.Я., Хлапук М.М., Сидорчук Б.П.* Моделювання взаємовпливу градієнтів і фільтраційного середовища та проблеми стійкості дисперсійних систем // Фізика конденсованих високомолекулярних систем.- 1997.- Вип.3.- С.202-207.
  51. *Darcy H.* Les fontains publiques de la ville de Dijon.- Paris, 1856.
  52. *Слезкин Н.А.* О дифференциальных уравнениях фильтрации // Докл. АН СССР.- 1951.- Т.79.- №5.- С.755-758.
  53. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- Москва: Мир, 1975.- 558с.
  54. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н.* Некоторые приложения метода конечных элементов.- Львов: Редакционно-издательская группа Львов. ун-та, 1981.- 38с.
  55. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об одной сингулярно возмущенной задаче параболического типа. – В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Ин-т математики АН УССР, – 1981. – С. 73–74.
  56. *Каштан С.С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.32-40.
  57. *Баренблатт Г.И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // Прикладная математика и механика.- 1953, вып. 17, №3, с.261-274.
  58. *Бомба А.Я., Барановський С.В.* Про моделювання і дослідження одного класу сингулярно збурених процесів теплопереносу в областях із вільними ділянками їх границь.// Інститут математики АН України, Крайові задачі термомеханіки, Київ, 1996, частина 1, с. 68-73.
  59. *Бомба А.Я., Щодро О.С., Барановський С.В.* Про моделювання і дослідження сингулярно збурених дифузійних процесів в контрастних середовищах.// Волинський математичний вісник, вип.2, 1996, с.25-27.
  60. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингу-

лярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1990.

61. *Караушев А.В.* Теория и методы расчета речных наносов. – Л.: Гидрометеоздат, 1973.
62. *Маккаев В.М.* К теории турбулентного режима и взвешивания наносов. //Известия ГГИ, 1931, №32, с.5-26.
63. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика.-М.: Наука, 1965.
64. *Барановський С.В., Бомба А.Я.* Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях із вільними межами та проблеми моделювання розмивів //Волинський математичний вісник, вип.5. – 1998. – С.15-20.
65. *Талмаза В.Ф., Крошкин А.Н.* Гидроморфометрические характеристики горных рек. - Фрунзе: Кыргызстан, 1968. – 204с.

#### 4. Тематика курсових, кваліфікаційних та дипломних робіт

1. Крайові задачі на конформні і квазіконформні відображення областей обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями з керуванням
2. Крайові задачі типу “фільтрація–конвекція” з керуванням.
3. Крайові задачі на конформні і квазіконформні відображення з післядією.
4. Нелінійні сингулярно збурені модельні задачі типу “фільтрація–конвекція– дифузія”.
5. Системний підхід при моделюванні процесів фільтрації у многозв’язних областях (середовищах).
6. Нелінійні крайові задачі з вільними поверхнями.
7. Крайові задачі з вільними поверхнями та керуванням.
8. Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення.
9. Сингулярно збурені задачі типу “фільтрація–конвекція–дифузія” із запізненням.
10. Сингулярно збурені задачі типу “фільтрація–конвекція–гетеродифузія”.
11. Сингулярно збурені задачі типу “фільтрація–конвекція–дифузія” із “пастками”.
12. Математичні моделі типу “комп’ютерні рецепти та діагнози”.
13. Математичні моделі впливу на “хворі” об’єкти.
14. Просторові сингулярно збурені нелінійні задачі типу “фільтрація–конвекція–дифузія”.
15. Просторові сингулярно збурені задачі типу “фільтрація–конвекція–дифузія” з вільними поверхнями.
16. Математичне моделювання і дослідження процесів деформації русла біля циліндричних мостових опор з врахуванням зони відриву потоку.
17. Математичне моделювання і дослідження процесів деформації русла біля незатоплених півзагат з врахуванням зони відриву потоку.
18. Математичне моделювання процесів деформації багатofракційного дна русла.
19. Математичне моделювання і дослідження процесів деформації дрібно-піщаного дна на ділянках повороту русла.
20. Математичне моделювання і дослідження процесів деформації дрібно-піщаного дна на ділянках розширення русла.
21. Чисельно-асимптотичні методи розв’язання модельних задач динаміки рідини.

## Зміст

<b>ВСТУП .....</b>	<b>3</b>
<b>ЧАСТИНА 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ КУРСУ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ</b>	
<b>1. Постановка задач для рівнянь з частинними похідними .....</b>	<b>4</b>
<i>1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними 1-го порядку .....</i>	<i>4</i>
1.1.1. Основні поняття та визначення рівнянь з частинними похідними	4
1.1.2. Лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку	7
1.1.3. Квазілінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку	9
1.1.4. Приклади модельних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку	10
<i>1.2. Постановка типових задач математичної фізики.....</i>	<i>13</i>
1.2.1. Лінійна задача про поширення тепла	13
1.2.2. Рівняння дифузії	15
1.2.3. Задачі поширення тепла в просторі	16
1.2.4. Рівняння малих поперечних коливань струни	17
1.2.5. Поперечні коливання мембрани	19
1.2.6. Задачі гідродинаміки та поширення звукових хвиль	19
1.2.7. Стаціонарні задачі для теплових полів	20
<i>1.3. Класифікація рівнянь з частинними похідними 2-го порядку.....</i>	<i>20</i>
1.3.1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку від двох незалежних змінних	20
1.3.2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідних 2-го порядку у випадку двох незалежних змінних	22
1.3.3. Рівняння Лапласа в циліндричних та сферичних координатах	23

<b>2. Рівняння гіперболічного типу.....</b>	<b>25</b>
2.1. <i>Метод характеристик (метод поширення хвиль).....</i>	<i>25</i>
2.1.1. Формула Д'Аламбера	25
2.1.2. Фізична інтерпретація розв'язку задачі Коші	26
2.1.3. Вимушені коливання нескінченної струни	27
2.1.4. Задача Коші для хвильового рівняння в просторі	28
2.1.5. Задача Коші для вільних коливань мембрани. Формула Пуассона	29
2.1.6. Фізична інтерпретація формул Кірхгофа і Пуассона	31
2.2. <i>Загальна постановка задачі Коші.....</i>	<i>32</i>
2.2.1. Задача на характеристиках	32
2.2.2. Задача Гурса	34
2.2.3. Метод Рімана	35
2.3. <i>Метод відокремлення змінних.....</i>	<i>37</i>
2.3.1. Рівняння вільних коливань струни	37
2.3.2. Неоднорідне рівняння	40
2.3.3. Повздовжні коливання струни	42
2.3.4. Перша крайова задача з неоднорідними крайовими умовами	42
2.3.5. Загальна схема методу відокремлення змінних	43
2.3.6. Вільні коливання прямокутної мембрани.	45
<b>3. Рівняння параболічного типу.....</b>	<b>48</b>
3.1. <i>Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності.....</i>	<i>48</i>
3.2. <i>Метод відокремлення змінних.....</i>	<i>50</i>
3.2.1. Однорідне рівняння теплопровідності	50
3.2.2. Неоднорідне рівняння теплопровідності	52
3.2.3. Перша крайова задача з неоднорідними умовами	53
3.3. <i>Процеси поширення тепла в необмежених областях. Постановка задачі Коші та існування її розв'язку.....</i>	<i>54</i>
<b>4. Рівняння еліптичного типу.....</b>	<b>59</b>
4.1. <i>Гармонічні функції та їх властивості.....</i>	<i>59</i>



4.1.1. Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа	59
4.1.2. Гармонічні функції та аналітичні функції комплексної змінної	60
4.2. Загальні властивості гармонічних функцій	61
4.2.1. Формули Гріна	61
4.2.2. Основні властивості гармонічних функцій	64
4.2.3. Єдиність і стійкість першої крайової задачі	66
4.2.4. Розв'язання першої крайової задачі для круга методом відокремлення змінних	67
4.3. Теорія потенціалів	69
4.3.1. Об'ємний потенціал	69
4.3.2. Логарифмічний потенціал	71
4.3.3. Невласні інтеграли	72
4.3.4. Перші та другі похідні об'ємного потенціалу	75
4.3.5. Поверхневі потенціали	77
Рекомендована література	80

## **ЧАСТИНА 2. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

<b>1. Постановка крайових задач математичної фізики</b>	<b>81</b>
1.1. Рівняння теплопровідності	81
1.2. Хвильове рівняння	84
1.3. Рівняння стаціонарної теплопровідності та електростатики	89
1.4. Завдання для самостійної роботи	92
<b>2. Класифікація рівнянь з частинними похідними другого порядку</b>	<b>94</b>
2.1. Тип і канонічний вигляд рівняння	94
2.2. Завдання для самостійної роботи	101
<b>3. Рівняння гіперболічного типу</b>	<b>102</b>
3.1. Задача Коші для рівняння коливань струни та крайові задачі для напівобмеженої струни. Метод характеристик	102
3.2. Завдання для самостійної роботи	108
3.3. Метод Фур'є (метод відокремлення змінних)	110
3.3.1. Крайові задачі для однорідного рівняння коливання струни	111

3.3.2. Крайові задачі для неоднорідного рівняння коливань струни	118
3.3.3. Крайові задачі для рівняння коливань мембрани	122
3.4. Завдання для самостійної роботи.....	128
<b>4. Рівняння параболічного типу .....</b>	<b>131</b>
4.1. Крайові задачі для рівняння теплопровідності стержня.....	131
4.2. Крайові задачі для рівняння теплопровідності у просторових областях.....	136
4.3. Завдання для самостійної роботи.....	137
<b>5. Рівняння еліптичного типу.....</b>	<b>140</b>
5.1. Найпростіші задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона.....	140
5.2. Метод Фур'є розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу.....	141
5.3. Крайові задачі в циліндричних і сферичних областях.....	144
5.4. Метод функції Гріна розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу.....	146
5.5. Метод інтегральних рівнянь розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу.....	148
5.6. Завдання для самостійної роботи.....	149
<b>6. Завдання та методичні вказівки до виконання лабораторних робіт.....</b>	<b>152</b>
6.1. Метод відокремлення змінних для задач вільних коливань закріпленої струни.....	152
6.2. Метод відокремлення змінних для задач теплопровідності.....	154
6.3. Крайові задачі для рівняння Лапласа .....	155
6.4. Задача Коші для рівняння теплопровідності в необмеженій області.....	156
<b>7. Завдання для самостійних та контрольних робіт.....</b>	<b>158</b>
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>166</b>

### **ЧАСТИНА 3. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ ТА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ СУЦЬЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА**

<b>1. Розпаралелювання розв'язку крайових задач для дивергентних рівнянь у шаруватих середовищах .....</b>	<b>167</b>
1.1. Розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатошаровій смузі.....	167
1.2. Метод декомпозиції та розпаралелювання розв'язку одного класу задач теорії фільтрації.....	172

1.3. Розв'язування однієї крайової задачі для диференціального рівняння в частинних похідних дивергентного типу з розривними коефіцієнтами та періодичністю в крайових умовах .....	179
<b>2. Чисельні методи теорії функцій комплексної змінної розв'язання крайових задач типу “фільтрація” .....</b>	<b>183</b>
2.1. Застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення .....	183
2.2. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення.....	191
<b>3. Чисельно-асимптотичні методи розв'язання задач типу “фільтрація–конвекція–дифузія” .....</b>	<b>205</b>
3.1. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених нелінійних задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів квазіпотенціалу та коефіцієнта провідності середовища .....	205
3.2. Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями.....	213
3.3. Розв'язання одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання розмивів поблизу півзагат .....	219
<b>Використана література .....</b>	<b>224</b>
<b>4. Тематика курсових, кваліфікаційних та дипломних робіт .....</b>	<b>230</b>

## **Навчальний посібник**

**Барановський С.В., Бомба А.Я., Кузьменко А.П.**

Навчально-методичний посібник  
для самостійного вивчення дисципліни

### **“Рівняння математичної фізики”**

**Верстка:**  
**Гуслістий І.М.**

**Відповідальний за випуск:**  
**Гончаренко Я.І.**

Здано до набору 20.01.2006. Підп. до друку 02.06.2006. Формат 60×84/16.

Папір офсетн. №1. Обл.-вид. арк. 7,31. Тираж 300 прим.

Редакційно-видавничий центр «Тетіс»  
ПВНЗ “МЕГУ” імені академіка Степана Дем’янчука.  
33000 Рівне, вул. академіка Степана Дем’янчука, 4.  
тел.. (0362) 23-01-68  
e-mail: mail@regi.rovno.ua