РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Задачі математичних олімпіад 2014 - 2015 н. р.

Рівне – 2016

22.1
Б-80
51

Рецензенти: ***Я. Б. Петрівський*** – професор, завідувач кафедри вищої математики РДГУ;

О. В. Крайчук – професор, завідувач кафедри математики та методики її викладання РДГУ;

Л. В. Пекарська – методист кабінету природничо-математичних предметів, технологій РОІППО.

Задачі математичних олімпіад 2014 – 2015 н. р. / упоряд. : А. Я. Бомба, К. М. Малаш. – Рівне : РДГУ, 2016. – 74 с.

Зібрано завдання, що пропонувались на учнівських олімпіадах різного рівня (обласних, Всеукраїнських та Міжнародних) за 2014 – 2015 н. р.

Посібник покликаний допомогти вчителю у проведенні позаурочної роботи з учнями, які бажають поглиблено вивчати математику, підготовці їх до участі в математичних олімпіадах. Буде корисний учням, що цікавляться математикою, студентам, вчителям загальноосвітніх шкіл, керівникам математичних гуртків.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського державного гуманітарного університету, протокол № 10 від 26 листопада 2016р.

Зміст

Від упорядників

Історія проведення предметних олімпіад сягає більше сотні років. Перші олімпіади були проведені в Австро-Угорщині у 1884 році. Прототипом оімпіад були конкурсні іспити. Згодом олімпіади стали проводитись в Угорщині та за її межами. Роширився спектр олімпіадних завдань, олімпіади стали проводитися регулярно. У наші дні математичні конкурси та олімпіади проводяться по всьому світу. З'явилися фахівці з їх проведення, виникла олімпіадна математика зі своєю методикою роботи і своєю літературою.

Розв’язання олімпіадних задач (різного рівня складності) – основа майже всіх математичних гуртків. Підготовка до олімпіад суттєво впливає на заняття школярів математикою. Саме розв’язування складних завдань формує у підлітка здатність нестандартно мислити, бути на рівні з дорослими. На важких завданнях виробляється інтелектуальна техніка і відповідні вольові якості. Але головне - сам факт досягнення серйозної, але посильної мети у підлітковому віці.

У даному посібнику зібрано завдання, які пропонувались на учнівських математичних олімпіадах різного рівня: від обласного до міжнародного, - у 2014-2015 н. р.. До більшості задач наводяться авторські розв’язки. Проте, як відомо, складні задачі мають не єдиний спосіб розв’язування. Тому до деяких задач наводиться ще й альтернативне розв’язування – те, яке було запропоноване учнями. У таких випадках зазначено автора розв’язування.

Посібник адресований учням, вчителям, керівникам гуртків і всім любителям математики.

Розділ I
ЗАВДАННЯ III ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Умови та розв'язання задач першого дня

7 клас

1. Порівняйте з нулем число A, де:

а) $A=1-2-3+4+5-6-7+8+9-10-11+\ldots+2012+2013-2014-2015+2016$;

б) $A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}$.

Тут у кожному з пунктів знаки перед послідовними числами йдуть таким чином – спочатку один «+», а далі по черзі по два знаки «-» та по два «+» і перед останнім числом знак «+».

Відповідь*: а)** $A=0$; ***б) $A>0$.

Розв'язання*. *а) Якщо розбити усі числа по 4 зліва направо на 504 групи, то у кожній такій групі будуть числа такого типу:

$$\big((4k+1)-(4k+2)-(4k+3)+(4k+4)\big)=0.$$

Як бачимо їх сума дорівнює 0 у кожні групі. А тому й $A=0$.

б) Аналогічно доведенню пункту а), розіб'ємо їх на групи по 4: $\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$. Тоді у кожній групі сума чисел додатна:

$$\frac{1}{4\kappa+1}-\frac{1}{4\kappa+2}-\frac{1}{4\kappa+3}+\frac{1}{4\kappa+4}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}>\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(4k+1)(4k+2)}>\frac{1}{(4k+3)(4k+4)}.$$

2. Розріжте квадрат на 3 частини прямолінійними розрізами так, щоб з одержаних частин можна було скласти тупокутний трикутник.

Після першого розрізу перекладати частини розрізаного квадрату не можна.

Відповідь: один з варіантів розрізання показаний на *рис. 1*.

***Розв'язання*.** На *рис. 1* точки D та E середини відповідних сторін квадратів. Тоді $\Delta ACD=\Delta FCE$ та $\Delta ADG=\Delta BEC$, звідки стає зрозумілим, що з одержаних частин утворюється тупокутний ΔABF.

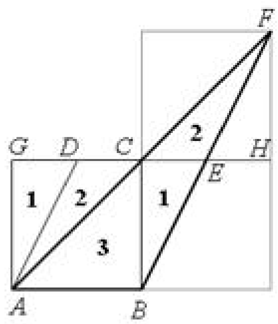


Рис. 1

3. Назвемо номер року *барвистим*, якщо в його десятковому записі жодна цифра не повторюється. Наприклад, роки з 2013 по 2019 – барвисті, а 2020 – ні.

а) Знайдіть, коли наступного разу утвориться ланцюжок з семи барвистих років поспіль.

б) Чи може в майбутньому з'явитися такий ланцюжок, що містить більше семи барвистих років?

(Рожкова Марія)

Відповідь: ***а)*** 2103, …, 2109; ***б)*** не може.

Розв'язання. ***а)*** Покажемо, що найближчий *барвистий* ланцюжок довжини 7 – це роки з 2103 по 2109. Спершу доведемо, що у цьому сторіччі довжина барвистого ланцюга не більше 6. Дійсно, цифри 0 та 2 заборонені для запису розрядів одиниць і десятків. Отже, у кожному десятку шуканий ланцюг переривається, якщо цифра одиниць 0 або 2. Лишається така можливість утворити ланцюг довжиною 7:

20*3, 20*4, …, 20*9.

Замість * можна обрати лише 1, але ця цифра вже «спрацювала» в умові задачі.

У наступному сторіччі, після 2100 року, легко знаходиться шукана послідовність: 2103, …, 2109.

б) Маємо справу з числами, записаними щонайменше чотирма цифрами. У барвистому ланцюгу не може бути числа **99, тому цифра сотень року незмінна. А тоді для запису одиниць може використовуватись щонайбільше 8 цифр.

Припустимо, що барвистий ланцюг містить 8 чисел. Розглянемо два випадки.

1. Усі числа ланцюга містять однакову кількість десятків. Тоді на одиниці лишається 7 вільних цифр. Суперечність.

2. У шуканому ланцюгу відбувається «перехід через десяток». Цифра десятків при цьому не може бути 9. Нехай ця цифра x та змінюється на $x+1$. У ланцюгу 8 чисел, тому обов'язково є наступні два числа:

$$\overline{a\,b\,x\,x+1},\ \overline{a\,b\,x+1\,x}.$$

Наприклад, це 2145 та 2154. Але тоді у ланцюгу щонайменше 10 чисел (наприклад, від 2145 по 2154). Знову суперечність.

4. Квадрат 9×9 розбито на 81 квадратик 1×1, 8 з яких пофарбовано у чорний колір, а решта – у білий. З квадрата 9×9 вирізають повністю білий прямокутник (або квадрат). Яку найбільшу площу може гарантовано мати цей прямокутник? Вирізати дозволяється лише вздовж ліній, які розділяють квадрат на одиничні квадратики.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 9.

Розв'язання. Розріжемо весь квадрат на 9 квадратів 3×3, оскільки чорних квадратиків рівно 8, то принаймні в одному з цих квадратів немає чорних квадратиків. Тому квадрат площею 9 завжди можна вирізати.

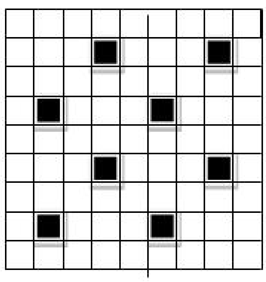


Рис. 2

Покажемо, що більшого розміру не завжди можна вирізати. Для цього достатньо пофарбувати в чорний колір квадратики, як це показане на *рис. 2*. Тут можна вирізати або квадратик 3×3, або прямокутник 1×9, більшої площі прямокутник вирізати не можна.

3.1. Доведіть, що 2015-цифрове число $\underbrace{11...1}_{1007}2\underbrace{11...1}_{1007}$ не є простим.

Розв'язання. Запишемо задане число таким чином:

$$\underbrace{11...1}_{1007}2\underbrace{11...1}_{1007}=\underbrace{11...1}_{1007}1\underbrace{00...0}_{1007}+1\underbrace{11...1}_{1007}==\underbrace{11...1}_{1008}\underbrace{00...0}_{1007}+\underbrace{11...1}_{1008}\ \vdots\ \underbrace{11...1}_{1008},$$

а тому не є простим.

4.1. По колу рівномірно розкладені 2015 цукерок, які за рухом годинникової стрілки перенумеровані числами від 1 до 2015. Андрій та Олеся грають у таку гру – вони по черзі беруть розкладені цукерки. За один хід можна взяти 2 чи 3 цукерки, номери яких є послідовними числами (вважаємо, що 1 та 2015 також є «послідовними»). Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто переможе у цій грі, якщо першим ходить Андрій та кожен намагається виграти?

Відповідь: Олеся переможе.
Розв'язання. Своїм ходом Андрій бере деякі 2 (або 3) цукерки, що лежать поруч. Олеся своїм ходом бере 3 (або 2 цукерки) протилежні по колу взятим Андрієм, таким чином, щоб між групами взятих цукерок стало порівну (а саме по 1005) цукерок. Далі вона просто копіює хід Андрія на іншій частині кола. Якщо Андрій може зробити хід, то й Олеся може його зробити. А тому вона не може програти. Оскільки гра закінчиться, то програє Андрій.

8 клас

1. Троє велосипедистів стартують одночасно та їдуть по сторонах трикутника ABC у порядку: $AB\to BC\to CA$. Відомі їх швидкості на кожному з відрізків AB, BC, CA: у першого велосипедиста вони дорівнюють відповідно 12, 10 та 20 км/год, у другого – 15, 15 та 10 км/год, у третього – 10, 20 та 12 км/год. Яким може бути значення кута ABC, якщо відомо, що вони прибули в точку A одночасно?

Відповідь: 60°.
Розв'язання. Позначимо довжини сторін як $AB=x$, $BC=y$, $CA=z$, тоді повинна справджуватися така рівність:

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{20}=\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10}=\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12} \text{ або } 5x+6y+3z=4x+4y+6z=6x+3y+5z.$$

Звідси $x+2y-3z=0$ та $2x-y-z=0$. Тоді одержимо, що $x=y$ та $z=y$. Тобто ΔABC - рівносторонній, а тому усі кути по 60°.

2. Чи можна з усіх 10 цифр 0, 1, ..., 9, використавши кожну цифру рівно один раз, утворити два числа, одне з яких є квадратом іншого?

Цифра 0 не може стояти на першому місці в жодному з чисел.

Відповідь: не можна.

Розв’язання. Якщо число має 3 цифри, то його квадрат - не більше 6 цифр, разом виходить не більше 9 цифр. Якщо число має не менше 4 цифр, то його квадрат - не менше 7 цифр, тобто разом - не менше 11 цифр. Таким чином шуканих чисел не існує.

3. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ провели бісектрису AD, а у трикутнику ABD – бісектрису DE. Знайдіть величини кутів трикутника ABC, якщо відомо, що бісектриси кутів ABD та AED перетинаються на прямій AD.

(Федак Іван)

Відповідь: $\angle BAC = \angle BCA = 80°$, $\angle ABC = 20°$.

Розв’язання. Нехай K – точка перетину бісектрис кутів ABD та AED (рис. 3). Тоді ця точка знаходиться на відрізку AD і є рівновіддаленою як від променів BA та BC, так і від променів EA та ED. А отже, вона буде рівновіддалена також від променів DE та DC. Тому DA – бісектриса $\angle CED$ (інакше кажучи, точка K – центр зовні вписаного кола трикутника EBD). Звідси та з умови задачі випливає, що $\angle ADC = 60°$. А оскільки $\angle DCA = 2\angle DAC$, то $\angle DCA = 80°$. Отже, остаточно отримуємо:
$\angle BAC = \angle BCA = 80°$, $\angle ABC = 20°$.

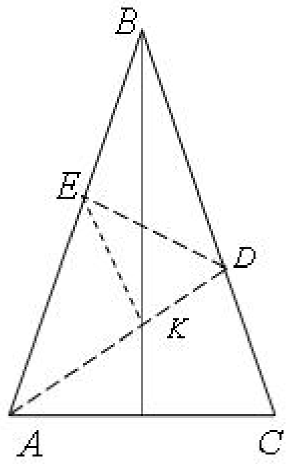


Рис. 3

4. Задача № 4 за 7 клас.

5. Чи можна утворити трикутник з відрізків x, y, z, якщо вони задовольняють рівність:

$$3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 = x^4 + y^4 + z^4?$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: не можна.

Розв’язання. Задану рівність перепишемо таким чином:

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = -(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Ліва частина розкладається на множники таким чином:

$$(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = -(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Звідси маємо, що ліва частина від’ємна, а тому принаймні один з множників від’ємний. Перший завжди додатний, тому від’ємним є, наприклад, другий, тобто $x + y - z < 0$, а це суперечить нерівності трикутника.

4.1. У комітеті утворили 4 підкомітети, кожним з яких керують по 3 людини з комітету. Для узгодження їхніх дій, кожні два підкомітети серед керівників мають рівно одного спільного члена. Яка найменша кількість людей може бути в комітеті?

Відповідь: 6.
Розв'язання. Якщо розглянути керівництво двох підкомітетів, то вони мають рівно одного 1 спільного члена, тоді разом вони містять рівно 5 членів. Таким чином усього в комітеті мінімум 5 людей, позначимо їх числами: $A=\{1,2,3,4,5\}$. Але з цих 5 членів вибрати керівництво ще одного підкомітету неможливо. Таким чином у комітеті мінімум 6 людей. З них можна утворити керівництво підкомітетів належним чином:

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}\to\{1,2,3\};\ \{3,4,5\};\ \{1,5,6\};\ \{2,4,6\}.$$

5.1. Для яких цілих чисел a, b існують такі цілі числа x, y, що виконується рівність:

$$8x^4+8y^4=a^4+6a^2b^2+b^4?$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: для будь-яких чисел a, b однакової парності.
Розв'язання. Якщо a, b однакової парності, то задамо цілі числа x, y такими рівностями:

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a-b}{2}.$$

Тоді очевидно, що вони цілі, і простою підстановкою у задане рівняння переконуємося, що вони його задовольняють.

Якщо ж a, b різної парності, то права частина заданого рівняння є непарним числом. Справді, якщо, наприклад, a - парне, а b - непарне, то $a^4+6a^2b^2$ - парне, а b^4 - непарне, а тому задана рівність неможлива.

9 клас

1. Задача № 1 за 8 клас.

2. У січні Петрик щоденно купляв собі від однієї до трьох машинок. Першого лютого він спробував усі куплені машинки розставити у прямокутник. Коли він розставив їх в ряди по 7 машинок у кожному ряді, то виявилась 1 зайва машинка. Коли розставив в ряди по 10 машинок, то зайвими лишилися 2 машинки. Чи зможе Петрик розставити їх в ряди по 4 машинки?

Відповідь: так.
Розв'язання. Для деяких натуральних n, k повинна виконуватись рівність:

$$7k+1=10n+2 \text{ або } 7k=10n+1.$$

Тобто, потрібно знайти число між 29 та 92, яке закінчується на цифру 1 та ділиться на 7. Найменшим таким число є 21, але воно менше за 30. Наступним числом є число 91. Зрозуміло, що інших чисел не існує у вказаному проміжку. Таким чином, усього машинок у Петрика:

$$7k+1=91+1=92.$$

Оскільки $92=4\cdot 23$, то розставити їх у ряд по 4 він зможе.

3. Відомо, що у дану прямокутну трапецію можна вписати квадрат таким чином, щоб кожна його вершина лежала на відповідній стороні трапеції (жодна з вершин квадрата не співпадає з вершиною трапеції). Побудуйте цей вписаний квадрат за допомогою циркуля і лінійки.

(Рожкова Марія)

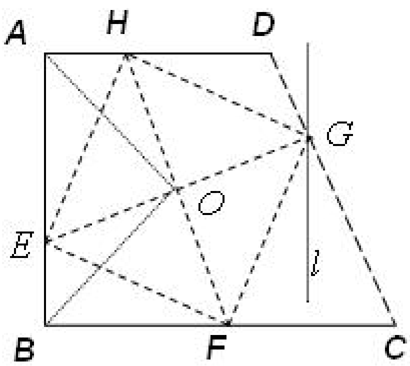


Рис. 4

Розв'язання. *Аналіз.* Нехай $ABCD$ - дана трапеція з прямими кутами при вершинах A та B, $EFGH$ - шуканий квадрат із центром у точці O, при цьому $E \in AB$, $F \in BC$. У чотирикутнику $EBFO$ два протилежні кути прямі, тому навколо нього можна описати коло. Звідси $\angle EFO = \angle EBO = 45°$ як вписані кути, що спираються на дугу EO (*рис. 4*). Аналогічно $\angle EAO = 45°$. Отже, у точці O перетинаються бісектриси внутрішніх кутів при вершинах A та B трапеції. Крім того, точки E, G симетричні відносно точки O.

Побудова. Будуємо точку O як перетин бісектрис кутів при вершинах A та B трапеції. Далі будуємо пряму l, що симетрична прямій AB відносно точки O. Пряма l перетинає відрізок CD у єдиній точці G, що є шуканою вершиною квадрата. Знаючи центр квадрата та одну з його вершин, робимо висновок, що такий квадрат єдиний і він відновлюється очевидним чином.

4. Для додатних чисел a, b, c, d доведіть нерівність:

$$\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2d}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{d+a}{2b}\right)^2 \geq 4.$$

Розв'язання. Декілька разів застосуємо нерівність між середніми:

$$\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2d}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{d+a}{2b}\right)^2 \geq \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{d^2} + \frac{cd}{a^2} + \frac{da}{b^2} \geq 2\frac{\sqrt{ab}}{c}\frac{\sqrt{bc}}{d} + 2\frac{\sqrt{cd}}{a}\frac{\sqrt{da}}{b} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{c}\frac{\sqrt{bc}}{d}\cdot\frac{\sqrt{cd}}{a}\frac{\sqrt{da}}{b}} = 4.$$

5. Квадрат 11×11 розбито на 121 квадратик 1×1, 4 з яких пофарбовано у чорний колір, а решту – у білий. З квадрата 11×11 вирізають повністю білий прямокутник (або квадрат). Яку найбільшу площу може гарантовано мати цей прямокутник? Вирізати дозволяється лише вздовж ліній, які розділяють квадрат на одиничні квадратики.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 25.

Розв'язання. Спочатку розставимо чорні клітинки, як це показане на *рис. 5*, тоді неважко збагнути, що вирізати можна квадрат 5×5 площею 25 і це найбільша можлива площа для прямокутника.

Тепер покажемо, що це максимальна можлива площа. Методом від супротивного припустимо, що існує таке розташування чорних квадратиків, при якому максимальна площа прямокутника, що можна вирізати, не перевищує 24. Це означає, що який би ми не вибрали прямокутник розміром 25 чи більше, то там повинна бути чорна клітинка. Для зручності занумеруємо поля на кшталт шахової дошки (*рис. 6*). Горизонталі позначимо числами знизу до гори від ***1*** до ***11***, а вертикалі зліва направо українськими літерами: ***а, б, ,.., і***. Будемо називати клітини сірими, якщо в них точно не повинна бути чорна клітинка.

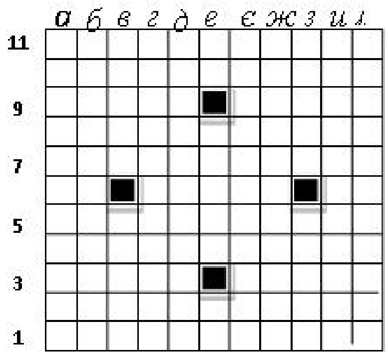


Рис. 5

Якщо розглянути квадрати 5×5 з такими кутами: (***а1-д5***), (***е1-и5***), (***а6-д10***), (***е6-и10***), то в кожному з них повинна бути чорна клітинка, причому в кожному рівно по одній. Тому сірими є горизонталь 11 та стовпчик ***і***, аналогічно сірими є горизонталь ***1*** та стовпчик ***а***.

Якщо вирізати квадрати 5×5 з такими кутами: (***а1-д5***), (***є1-і5***), (***а7-д11***), (***є7-і11***), то в кожному з них повинна бути чорна клітинка. Тому сірими є ***6***-та горизонталь та стовпчик ***е*** (середні стовпчики та рядок) (*рис. 6*).

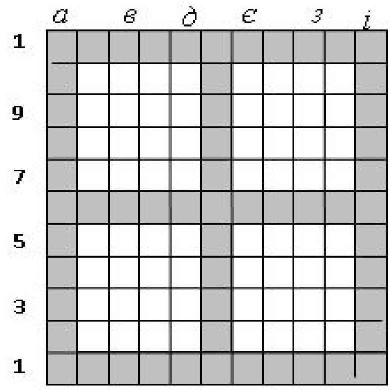


Рис. 6

Припустимо, що чорний квадратик є принаймні в одній з ліній ***б, и*** чи ***2, 10***. Наприклад, у вертикалі ***б***. Тоді є чорні квадратики у прямокутнику з кутами ***в1-і3*** та ***в9-і11***. Кожен з них має площу $27=3\times9$. Тоді на прямокутник ***в4-і8*** завбільшки 5×9 залишається не більше однієї чорної клітинки. Але у цьому квадраті можна виділити два прямокутники ***в4-і6*** та ***в6-і8***, і у кожному з них повинна бути чорна клітинка. Тому він повинен бути на їх спільній горизонталі ***6***. Але, згідно доведення, наведеного вище, ця горизонталь сіра. Одержана суперечність показує, що сірою є частина квадрата, як на *рис. 7*.

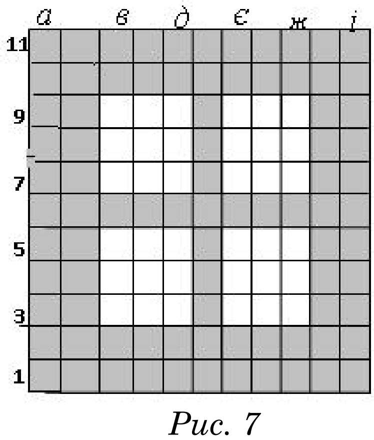


Рис. 7

Зрозуміло, що у кожному з чотирьох квадратів 3×3 повинен знаходитись рівно 1 чорний квадратик. Розглянемо випадок, коли чорною є принаймні одна з клітинок ***в3, в9, з3, з9***. Наприклад, ***в9***. Тоді поглянемо на два прямокутники ***г7-ж11*** та ***а6-і8***. Легко помітити, що чорна клітинка повинна бути у квадраті ***є7-ж8***. Аналогічно у ***г4-д5***. Тоді, розглянувши прямокутники ***з1-і11*** та ***а1-і3***, робимо висновок, що чорним зобов'язаний бути квадратик ***з3***. З прямокутників ***а1-г8*** та ***а1-ж4*** чорним повинен бути квадратик ***г4***, аналогічно ***ж8***. Але тоді вільним є прямокутник ***д1-є11***. Таким чином сірими є усі 4 квадратики ***в3, в9, з3, з9***. Проте, у цьому випадку в смугах ***в4-в8, г9-ж9, г3-ж3, з4-з8*** повинно бути рівно по 1 чорному квадратику повинно. Але тоді вільним залишиться центральний квадрат 5×5 ***г4-ж8***. Одержана суперечність завершує доведення.

4.1. Для додатних чисел a, b, c, d доведіть нерівність:

$$\frac{(a+b)^2}{cd}+\frac{(c+d)^2}{ab}\ge 8.$$

<u>Розв’язання</u>. Застосуємо двічі нерівність між середніми:

$$\frac{(a+b)^2}{cd}+\frac{(c+d)^2}{ab}\ge \frac{4ab}{cd}+\frac{4cd}{ab}\ge 2\cdot 4\cdot\sqrt{\frac{ab}{cd}\cdot\frac{cd}{ab}}=8.$$

5.1. Маємо 5 гир, на яких написано, що вони важать 1г, 2г, 3г, ..., 9г відповідно. Відомо, що рівно одна з гир важить менше, ніж на ній зазначено. Чи можна на терезах з двома шальками без додаткових гир визначити хибну гирю не більше ніж за 2 зважування?

<u>Відповідь:</u> так, можна.
<u>Розв’язання</u>. Покладемо на шальки при першому зважуванні гирі $1+4+9$ на ліву та $2+5+7$ на праву. Якщо маємо рівність $1+4+9=2+5+7$, то фальшива гиря серед інших трьох.

Тоді покладемо на шальки, наприклад, такі комбінації: $3+4$ та $1+6$.

- Якщо $3+4=1+6$, то ці гирі – справжні, тому фальшива 8.
- Якщо $3+4<1+6$, то фальшива 3, бо фальшива – більш легка і там її треба шукати. З урахуванням першого зважування нею є 3.
- Аналогічно, при $3+4>1+6$ фальшивою є 6.

Якщо ж при початковому зважуванні вийшла нерівність, то фальшива там, де менша вага. Решта шість гир справжні. Залишається покласти на різні шальки по одній потенційно фальшивій і врівноважити їх справжніми. Наприклад, $1+5$ та $4+2$. Далі все аналогічно, фальшива на більш легкій шальці терезів, при рівновазі – та, що не покладена.

<u>10 клас</u>

1. Для довільних попарно різних додатних чисел a, b, c розв’яжіть рівняння:

$$x^3a-xa^3+a^3b-ab^3+b^3x-bx^3=(x-a)(x-b)(x-c)(a-b).$$

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> $x=a,\ x=b$.

<u>Розв’язання</u>. Зрозуміло, що його можна спробувати розв’язати перетвореннями: спочатку звести до квадратного і далі за відомою схемою.

Ми запропонуємо дещо інший підхід. Позначимо ліву частину $f(x)$, а праву – $g(x)$. Неважко переконатись, що $f(a)=g(a)=0$ та $f(b)=g(b)=0$. Але це означає, що різні числа a, b є коренями цього рівняння. Порівнюючи коефіцієнт зліва і справа при x^3, бачимо, що це рівняння є квадратним. А тому $x=a,\ x=b$ - усі корені рівняння.

2. Знайдіть найменше натуральне число m, для якого існують такі натуральні числа $n > k > 1$, що виконується рівність: $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot m$.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $m = 101$.

Розв'язання. Очевидно, що $m > 9$. Якщо $m = \overline{ab}$, де $a \ge 1$, то з рівності $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ спочатку маємо, що $b = 1$. Але тоді при будь-якому a друга цифра з кінця добутку $\underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ дорівнює $a+1$ при $a < 9$ та 0 при $a = 9$, тож 1 ніколи не вийде. Таким чином $m \ge 100$. Очевидно, що $m = 100$ умову не задовольняє, бо $\underbrace{11...1}_{k} \cdot 100 = \underbrace{11...1}_{k}00$. А от значення $m = 101$ – шукане, бо $101 \cdot 11 = 1111$.

3. Вінні-Пух і П'ятачок грають у гру за такими правилами. Є палиця довжиною 15 см. Першим ходом П'ятачок розламує її на дві частини, далі гравці по черзі розламують на дві частини один із наявних шматків. При цьому шматки повинні мати натуральну довжину (в сантиметрах) і не можуть дорівнювати 1 см. Програє той, хто не може зробити хід. У кого з гравців є виграшна стратегія?

(Чорний Максим)

Відповідь: У П'ятачка.

Розв'язання. Очевидно, що в кінці гри залишаться тільки шматки довжиною 2 і 3 см, при цьому П'ятачок виграє тоді і тільки тоді, коли їхня кількість парна (це означає, що була зроблена непарна кількість ходів, тому останнім ходив П'ятачок). Є три можливі варіанти кінцевого положення:

$$15 = 3+3+3+3+3 = 3+3+3+2+2+2 = 3+2+2+2+2+2+2.$$

Звідси видно, що П'ятачку для перемоги достатньо гарантувати собі наявність двох шматків по 3 см і одного шматка на 2 см (це унеможливить перший і третій варіанти). Тому на першому ході він розламує палицю на шматки 5 см і 10 см, перший з яких гарантовано рано чи пізно буде розламаний на 2 см і 3 см. Якщо Вінні-Пух наступним ходом розламує палицю 10 см, П'ятачок має право відламати 3 см від більшого шматка, якщо ні - просто розламати 10 см на 3 см і 7 см. У такому разі, незалежно від подальших дій гравців, наприкінці гри будуть принаймні 2 шматки довжиною 3 см і 1 шматок довжиною 2 см, а отже, загальна кількість шматків буде рівна шести, що означатиме перемогу П'ятачка.

4. Для невід'ємних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$a\sqrt{3a^2 + 6b^2} + b\sqrt{3b^2 + 6c^2} + c\sqrt{3c^2 + 6a^2} \ge (a+b+c)^2.$$

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Спочатку доведемо допоміжну нерівність:

$$3a^2+6b^2 \ge (a+2b)^2.$$

Дійсно, піднесемо до квадрату та зведемо подібні:

$$3a^2+6b^2 \ge (a+2b)^2 \;\Leftrightarrow\; 2a^2+2b^2 \ge 4ab \;\Leftrightarrow\; 2(a-b)^2 \ge 0.$$

Далі використаємо ці нерівності:

$$a\sqrt{3a^2+6b^2}+b\sqrt{3b^2+6c^2}+c\sqrt{3c^2+6a^2} \ge a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)=(a+b+c)^2.$$

5. Кола w_1 та w_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно перетинаються в точках A та B. Навколо трикутника O_1O_2B описали коло w з центром у точці O, яке перетинає кола w_1 та w_2 вдруге в точках K та L відповідно. Пряма OA перетинає кола w_1 та w_2 у точках M та N відповідно. Прямі MK та NL перетинаються в точці P. Доведіть, що точка P лежить на колі w та $PM=PN$.

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Спочатку сформулюємо одну з лем Архімеда (Г. Филипповский, «Автоская школьная геометрия», с. 37).

Лема Архімеда. Кола w_1 та w_2 перетинаються в точках A та B, при цьому центр кола w_2 лежить на колі w_1. Хорда AC кола w_2 перетинає вдруге коло w_1 у точці M. Тоді $CM=CB$.

Позначимо через $\alpha=\angle KBA=\angle KMA$, що спираються на одну дугу в колі w_1. Аналогічно, $\beta=\angle ABL=\angle ANL$, що спираються на одну дугу в колі w_2. Звідси $\angle MPN=180^\circ-\alpha-\beta$, звідки випливає, що $P\in w$ (*рис. 8*).

Згідно леми Архімеда, для кіл w_1 та w_2 можемо записати, що: $KJ=JA=LJ$, але тоді $\alpha=\beta$, а звідси вже з кола w маємо, що $PM=PN$.

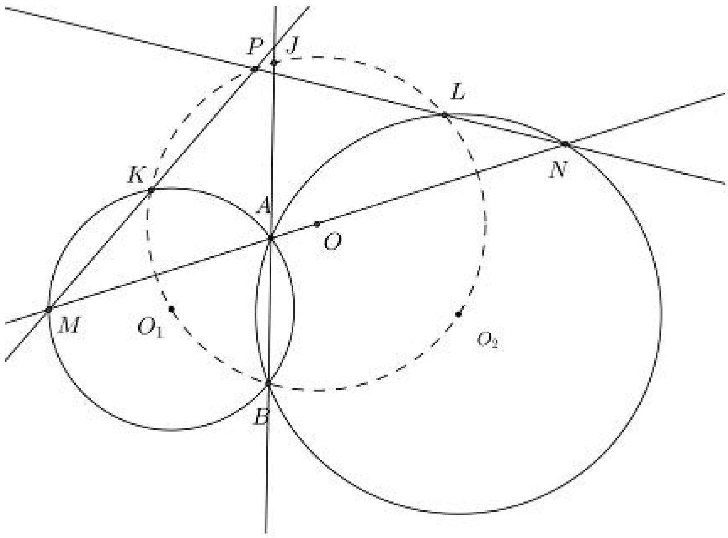


Рис. 8

4.1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+3xy=3y+x, \\ y^2-yx=3x+y. \end{cases}$$

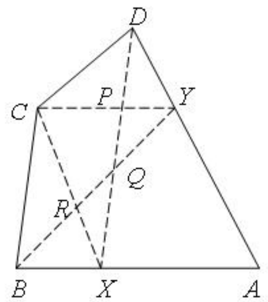
(Рубльов Богдан)

Відповідь: $(0;\,0)$, $(1;\,-1)$, $(1;\,3)$, $(6;\,-2)$.

Розв'язання. Додамо ці рівняння і отримаємо, що $x^2+2xy+y^2=4y+4x$ або $(x+y)^2=4(x+y)$. Тоді $x+y=0$ або $x+y=4$. Якщо $x=-y$, то з другого рівняння маємо, що $2y^2=-2y$, звідки $y=0$ або $y=-1$. Звідси маємо, що $(0;0)$, $(1;-1)$ – розв'язки системи. Якщо $x=4-y$, то знову з першого рівняння маємо, що $y^2-y(4-y)=3(4-y)+y$, звідки $y^2-y-6=0$. Знайдемо корені останнього рівняння: $y=3$ та $y=-2$. Одержуємо пари $(1;3)$ та $(6;-2)$. перевіркою переконуємось, що вони задовольняють систему рівнянь, а тому є розв'язками.

5.1. Точки X, Y вибрані на сторонах AB і AD відповідно опуклого чотирикутника $ABCD$. Знайдіть відношення $AX:BX$, якщо відомо, що $CX \parallel DA$, $DX \parallel CB$, $BY \parallel CD$ та $CY \parallel BA$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.



Розв'язання. Позначимо шукане відношення через $\lambda=\dfrac{AX}{BX}$.
З теореми Фалеса та з того, що $RYCD$ – паралелограм випливає рівність $\lambda=\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{YR}{RB}=\dfrac{CD}{RB}$. З аналогічних міркувань:

$$\lambda=\frac{AX}{BX}=\frac{CY}{BX}=\frac{CY}{CP}=\frac{BY}{BQ}=\frac{BY}{CD}=\frac{YR+BR}{CD}=\frac{CD+BR}{CD}=1+\frac{BR}{CD}=1+\frac{1}{\lambda}.$$

Рис. 9

Далі з отриманого рівняння для λ знаходимо наведену відповідь.

11 клас

1. Чи існують дійсні числа x, y, z, що задовольняють рівність:

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{(y-z)(y+z)}+\frac{1}{(z-x)(z+x)}=0?$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: не існують.
Розв'язання. Позначимо $a=x^2-y^2$, $b=y^2-z^2$, тоді $-a-b=z^2-x^2$ і задана рівність переписується таким чином:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2=ab \Leftrightarrow a^2-ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}=0.$$

З останнього маємо, що ця рівність можлива лише при $a=b=0$, що неможливо внаслідок умов задачі. Таким чином задана рівність неможлива.

2. Знайдіть усі такі натуральні числа n, які мають більше $\frac{n}{2}$ дільників.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $n \in \{1; 2; 3; 4; 6\}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що число не може мати дільників, більших від $\frac{n}{2}$, окрім самого числа n. Тому, щоб мати більше дільників, ніж $\frac{n}{2}$ воно повинно ділитись на усі числа від 1 до $\frac{n}{2}$ та на число n. Позначимо через m те з двох чисел $\frac{n}{2}$ чи $\frac{n-1}{2}$, яке є цілим. Тоді при $n \ge 10$ одне з чисел m або $m-1$ взаємно просте з 3. Тому $n \ge 3m$, оскільки воно повинно ділитись на 3 та на m одночасно. Але тоді $n \ge 3 \cdot (\frac{n-1}{2} - 1)$ тобто $2n \ge 3n - 9$, що суперечить умові $n \ge 10$. Для випадку $n < 9$ числа перевіряються безпосередньо.

3. Відомо, що многочлен $P(x) = x^{2016} + 2016x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + \ldots + a_1 x + 1$ можна також подати у вигляді

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2016}),$$

де серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ принаймні 2015 від'ємних та не обов'язково різних. Знайдіть усі коефіцієнти многочлена $P(x)$.

(Голоднов Кирило)

Відповідь: $a_k = C_{2016}^k$, $k = \overline{0, 2014}$.

Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $x_1, x_2, \ldots, x_{2015} < 0$. Звідси за теоремою Вієта для многочленів (або просто із заданого розкладу многочлену на множники) $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2015} x_{2016} = 1$. Тому значення x_{2016} також дійсне та від'ємне. Далі з теореми Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016} = -2016, \\ x_1 x_2 \ldots x_{2016} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{2016}| = 2016, \\ |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_{2016}| = 1. \end{cases}$$

З нерівності між середнім арифметичним та геометричним:

$$1 = \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{2016}|}{2016} \ge \sqrt[2016]{|x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_{2016}|} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2016}| = 1, \text{ тобто } x_1 = x_2 = \ldots = x_{2016} = -1,$$

тому $P(x) = (x+1)^{2016}$, звідки маємо, що $a_k = C_{2016}^k$, $k = \overline{0, 2016}$.

4. У гострокутному трикутнику ABC сторони AB і BC мають різну довжину, а продовження медіани BM перетинає описане коло в точці N. На цьому колі відмітимо таку точку D, що $\angle BDH = 90°$, де H – точка перетину висот трикутника ABC. Точка K обрана таким чином, що $ANCK$ - паралелограм. Доведіть, що прямі AC, KH і BD перетинаються в одній точці.

(Нагель Ігор)

Розв'язання. Нехай H – точка перетину висот AA_1 і CC_1 трикутника ABC. Точки B, D, A_1, H і C_1 лежать на одному колі з діаметром BH, бо $\angle BDH = \angle BA_1H = \angle BC_1H = 90°$ (*рис. 10*).

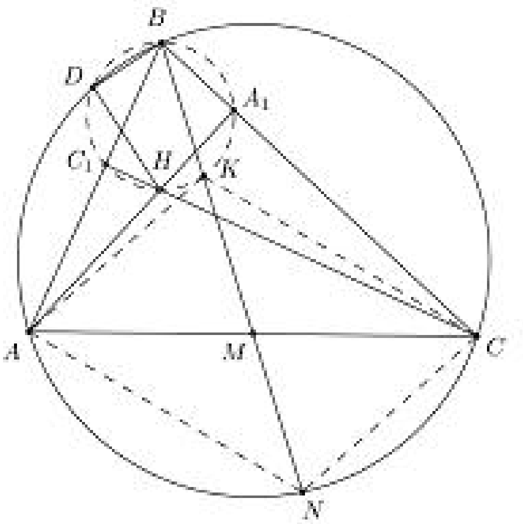


Рис. 10

Далі, оскільки чотирикутники BC_1HA_1 і $BANC$ – вписані, то $\angle A_1HC_1 = 180° - \angle B$ і $\angle ANC = 180° - \angle B$. Звідси випливає, що $\angle A_1HC_1 = \angle ANC$. Але $\angle ANC = \angle A_1HC_1$ (як вертикальні) і $\angle AKC = \angle ANC$ (як протилежні кути паралелограма). Тому одержуємо, що $\angle AHC = \angle AKC$, тобто чотирикутник $AKHC$ – вписаний. Звідси випливає, що $\angle KHC_1 = \angle KAC$. Далі, $\angle KAC = \angle ACN$, бо $AK \parallel NC$, а $\angle ACN = \angle ABN$, бо ці кути – вписані в описане коло трикутника ABC. Отже, $\angle KHC_1 = \angle KBC_1$, а це означає, що точка K також належить колу з діаметром BH.

Позначимо через ω_1 – описане коло трикутника ABC, через ω_2 – коло з діаметром BH, а через ω_3 – описане коло чотирикутника $AKHC$. Тоді AC, KH і BD – радикальні осі кіл ω_1 і ω_3, ω_2 і ω_3, та ω_1 і ω_2. Як відомо: *радикальні осі трьох кіл перетинаються в одній точці – радикальному центрі трьох кіл, або паралельні*. Оскільки $AB > BC$, то прямі AC, KH і BD перетинаються в одній точці.

5. У країні є 2015 міст, деякі з яких з'єднані двосторонніми авіалініями. Відомо, що для кожного $n > 3$ не існує n попарно різних міст $A_1, A_2, ..., A_n$, для яких існував би замкнений маршрут перельотів $A_1 \to A_2 \to ... \to A_n \to A_1$ (для трьох міст такі маршрути можуть існувати). Яка найбільша кількість пар міст цієї країни можуть бути з'єднані прямим авіасполученням?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 3021.

Розв'язання. Перепишемо умову задачі мовою графів.

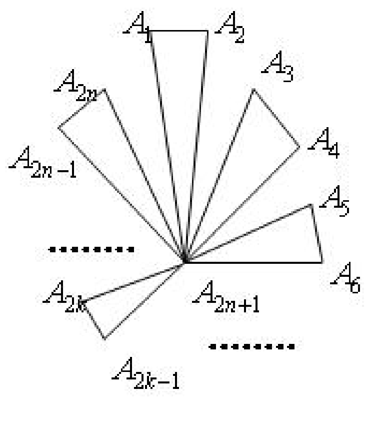


Рис. 11

Граф G складається з вершин $\{v_1, v_2, ..., v_{2n+1}\}$ та ребер v_iv_j, які з'єднують деякі з вершин. Циклом довжини m у цьому графі назвемо таку послідовність ребер $v_{i_1}v_{i_2}$, $v_{i_2}v_{i_3}$, ..., $v_{i_{m-1}}v_{i_m}$, $v_{i_m}v_{i_1}$, де $v_{i_k} \neq v_{i_l}$, $1 \le k < l \le m$.

Відомо, що у графі немає циклів довжини більше 3-х. Скільки максимум у цього графі може бути ребер?

Спочатку покажемо, що існує граф, який задовольняє умови та має $3n$ вершин. Він зображений на *рис. 11*.

Доведемо, що ця величина є максимальною. Очевидно, що граф зв'язний; якщо ні, то достатньо провести ребро між будь-якими двома компонентами зв'язності і умова про цикли не зміниться, а кількість ребер збільшиться.

Позначимо через $s(v_i, v_j)$ – кількість ребер найкоротшого шляху, що з'єднує відповідні вершини, а через $L(G)$ – найбільш можливе значення для усіх $1 \le i < j \le N$.

Розглянемо граф, у якому кількість ребер є максимальною. Серед усіх таких графів виберемо той, у якого мінімальне значення приймає величина $L(G)$.

Припустимо, що $L(G) \ge 3$. Нехай один з найдовших шляхів складається з послідовних вершин $A_1, A_2, ..., A_{l+1}$, $l \ge 3$.

Розглянемо вершину A_1. Якщо вона має степінь 1 (висяча вершина, *рис. 12*), тобто ребро A_1A_2 – єдине, що проходить через вершину A_1, то ми просто замість ребра A_1A_2 проведемо ребро A_1A_3. При цьому довжина найдовшого шляху не збільшиться. Вчинимо таким чином з усіма висячими вершинами усіх найдовших шляхів. Припустимо знову, що $L(G) \ge 3$ і шлях утворюють вершини $A_1, A_2, ..., A_{l+1}$, $l \ge 3$.

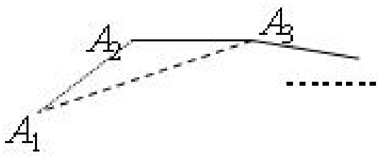


Рис. 12

Нехай окрім ребра A_1A_2 існує ребро A_1B. При цьому можливі такі випадки.

1. Існує також ребро A_2B (*рис.13*). Тоді міняємо граф таким чином – замість ребер A_1A_2 та A_2B проводимо ребра A_1A_3 та A_3B. При цьому і тут довжина найдовшого шляху не збільшиться.

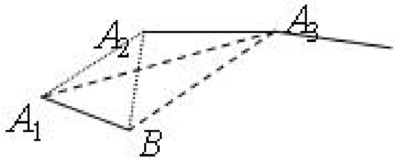


Рис. 13

2. Ребра A_2B не існує. Найкоротший шлях від B до A_{l+1} не може проходити через вершини $B, A_1, A_2, ..., A_{l+1}$, бо його довжина більша від $L(G)$. Тому існує інший шлях від B до A_{l+1}. Але у цьому випадку B зв'язана принаймні з однією з вершин $A_3, A_4, ..., A_{l+1}$, нехай перша з вершин, яка зустрічається на найкоротшому шляху між B та A_{l+1} – це A_k, $k \ge 3$. Тоді маємо цикл $B, A_1, A_2, ..., A_k, B$, який має більше 3 ланок. Одержана суперечність показує неможливість цього випадку.

Таким чином можемо вважати, що $L(G) = 2$. Припустимо, що немає вершини, що має степінь $2n$. Виберемо вершину A, що має максимальну степінь $m < 2n$, тоді існує вершина B, яка не зв'язана з A (*рис. 14*). Тоді найкоротший шлях від B до A дорівнює 2, оскільки $L(G) = 2$.

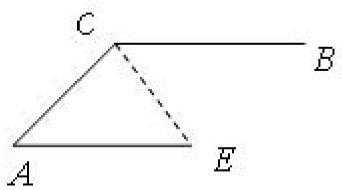


Рис. 14

Нехай цей шлях буде BCA. Якщо існує вершина D, для якої існують ребра DA та DB, то утворюється цикл довжини 4 $BCDAB$. Тоді виберемо довільну вершину E, що з'єднана з A та не з'єднана з B. У цьому випадку повинне бути ребро CE, бо інакше найкоротший шлях між B та E буде більше 2. Але це означає, що степінь вершини C більше ніж у A, оскільки вона ще з'єднана з B, на відміну від A. Або для наступної вершини G, для якої існує GA та GC маємо цикл $GCEAG$ – суперечність.

Таким чином існує вершина (позначимо її через A_{2n+1}), яка зв'язана з кожною іншою вершиною, якщо степінь деякої з інших вершин $B \neq A_{2n+1}$ більше 2, тобто існують ребра BC та BD, де $A_{2n+1} \notin \{C, D\}$. Але тоді маємо заборонений цикл $CBDA_{2n+1}C$, оскільки A_{2n+1} з'єднана з усіма іншими вершинами.

Тому усі інші вершини (окрім A_{2n+1}) можуть мати степінь не більше 2. Але це й призводить до прикладу на *рис. 11*, де й маємо максимальну кількість ребер.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. (*Лішунов Віталій*)

<u>Відповідь:</u> $\left[\dfrac{3(N-1)}{2}\right]$.

Розв'яжемо задачу для довільної кількості вершин N.

Нехай $V(G)$ і $E(G)$ − кількість вершин і ребер графа G відповідно. Позначимо через $S(N)$ максимум ребер, які може мати граф G, який задовольняє умову задачі і $V(G)=N$. Доведемо індукцією по N, що $S(N) \le \left[\dfrac{3(N-1)}{2}\right]$. База індукції безпосередньо перевіряється при $N \in \{1,2,3\}$. Припустимо, що ми довели твердження для всіх $k \in \overline{1, N-1}$, при $N \ge 4$, і доведемо його для N.

Якщо граф не має циклів, то кількість його ребер дорівнює $N-k$, де k – кількість компонент зв'язності графа G. У такому випадку, $S(N) = N-k \le N-1 \le \left[\dfrac{3(N-1)}{2}\right]$ і твердження доведене.

Нехай тепер граф G має цикл. За умовою, довжина цього циклу дорівнює 3, і тому можемо вважати, що його утворюють вершини a, b і c. Розглянемо граф G', який утворений з графа G вилученням ребер, що сполучають ці вершини. Помітимо, що a, b і c належать різним компонентам зв'язності графа G'. Справді, якщо це не так, то хоча б дві вершини, нехай a і b, належать одній компоненті зв'язності, а тому існує простий шлях v_0v_1, v_1v_2, …, $v_{k-1}v_k$ у якого $v_0 = a$, $v_k = b$.

Якщо $k \ge 3$, то маємо простий цикл av_1, v_1v_2, …, $v_{k-1}b$, ba, довжина якого не менша за 4, що суперечить умові.

Якщо $k = 2$, то граф G має цикл av_1, v_1b, bc, ca, довжина якого дорівнює 4, що також неможливо.

Якщо $k \neq 1$, то граф G' має ребро ab, яке ми вилучили.

Отже, ми довели, що вершини a, b і c належать різним компонентам зв'язності графа G'. Нехай $G' = A \cup B \cup C$, де A − компонента зв'язності, яка містить вершину a, B − компонента, що містить b, а C − решта вершин графа G'. Оскільки $1 \le |A|,|B|,|C| < N$ і підграфи A, B і C задовольняють умову задачі, то за припущенням індукції $S(V(X)) \le \left[\frac{3(V(X)-1)}{2}\right]$, при $X \in \{A,B,C\}$, звідки

$$E(G) = 3 + \sum_{X\in\{A,B,C\}} E(X) \le 3 + \sum_{X\in\{A,B,C\}} E(V(X)) \le 3 + \sum_{X\in\{A,B,C\}} \left[\frac{3(V(X)-1)}{2}\right] \le$$

$$\le 3 + \left[\frac{\sum_{X\in\{A,B,C\}}\left[\frac{3(V(X)-1)}{2}\right]}{2}\right] = \left[\frac{3(V(G)-1)}{2}\right].$$

Оскільки нерівність $E(G) \le \left[\frac{3(V(G)-1)}{2}\right]$ виконується для довільного графа, який задовольняє умову задачі, то $S(V(G)) \le \left[\frac{3(V(G)-1)}{2}\right]$, тобто $S(N) \le \left[\frac{3(N-1)}{2}\right]$.

Залишається побудувати приклад, для якого $S(N) = \left[\frac{3(N-1)}{2}\right]$.

При $N = 2n+1$ можемо розглянути граф

$$G = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}; v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{2n}v_{2n+1}, v_1v_3, v_3v_5, \ldots, v_{2n-1}v_{2n+1}\},$$

а при $N = 2n$ максимум досягається на графі

$$G = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}; v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{2n-1}v_{2n}, v_1v_3, v_3v_5, \ldots, v_{2n-3}v_{2n-1}\}.$$

Неважко обчислити, що при $N = 2015$ маємо $\left[\frac{3(N-1)}{2}\right] = 3021$.

4.1. На бісектрисі кута BAC трикутника ABC вибрали такі точки B_1, C_1, для яких $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Точка M – середина відрізку B_1C_1. Доведіть, що $MB = MC$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай перпендикуляр з точки C_1 на AB перетинається з ним у точці C_b, аналогічно $BB_c \perp AC$. Нехай M_b, M_c – проекції точки M на прямі AB та AC відповідно. Не обмежуючи загальності розгляду вважаємо, що розташування точок має вигляд як на *рис. 15*. Тоді:

$$\Delta AB_1B_c \sim \Delta AMM_c \sim \Delta AC_bC \text{ та}$$

$$\Delta AC_1C_b \sim \Delta AMM_b \sim \Delta AB_cB.$$

Тоді з властивостей середньої лінії маємо, що $B_cM_c = M_cC$, $C_bM_b = M_bB$. Тому $B_cM = MC$ та $C_bM = MB$. Оскільки

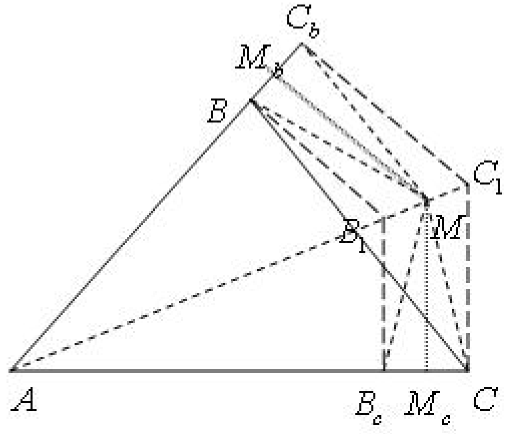


Рис. 15

$\angle MB_1B_c = \angle BB_1M$ та $BB_1 = B_1B_c$, то це означає, що $\Delta MBB_1 = \Delta MB_1B_c$, звідки $BM = MB_c$, отже $BM = MB_c = CM$.

5.1. Задача № 5.1 за 9 клас.

1.2. Умови та розв’язання задач другого дня

7 клас

1. Мішень для стрільби з лука має зображений на *рис. 16* вигляд. Скільки мінімум пострілів повинен зробити спортсмен, щоб вибити рівно 55 очок?

Відповідь: 6 пострілів.

Розв’язання. Зрозуміло, що для мінімальної кількості пострілів треба, щоб усі влучання окрім 16 були не більше одного разу. Бо інакше, замість таких двох влучань, наприклад, у 4, достатньо одного влучання в 8. Таким чином вибираємо максимально можливу кількість влучань у 16, а далі у кожну меншу не більше одного влучання: $55 = 16+16+16+4+2+1$, таким чином усього найменше 6 пострілів.

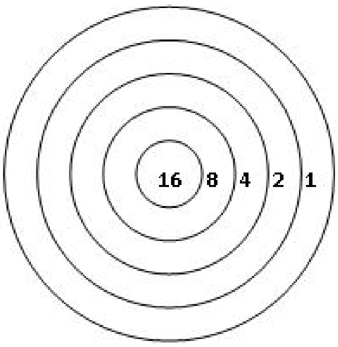


Рис. 16

2. З множини чисел $\{1; 2; ...; 2015\}$ виберіть максимально можливу кількість чисел таким чином, щоб сума будь-яких п’яти чисел з обраних була кратна 15.

Відповідь: $\{3; 18; 33; ...; 2013\}$, яка складається з 135 чисел.

Розв’язання. Нехай у цьому наборі принаймні 6 чисел: a, b, c, d, e, f. Тоді $a+b+c+d+e \,\vdots\, 15$ та $a+b+c+d+f \,\vdots\, 15$. Звідси $e-f \,\vdots\, 15$ або $e \equiv f \pmod{15}$. Оскільки числа e, f – довільні з цієї множини, то усі вони повинні бути рівними за модулем 15. Нехай кожне число з обраного набору дорівнює k за модулем 15, тоді $a+b+c+d+e \equiv 5k \equiv 0 \pmod{15}$.

Звідси випливає, що усі числа мають бути або кратними 15, або мати остачу 3. У першому випадку таких чисел кожне п’ятнадцяте, починаючи з 15, усього їх у заданій множині існує $[\frac{2015}{15}] = 134$ числа, останнє число 2010. З остачею 3 таких чисел є також кожне п’ятнадцяте, але починаючи з 3, останнє число 2013, тому і їх кількість $[\frac{2015}{15}]+1 = 135$ чисел, а саме $\{3; 18; 33; ...; 2013\}$.

3. Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій вибирає шахову фігуру та ставить її на шахівницю. Далі вони по черзі роблять хід за правилами обраної шахової фігури. При цьому на поле, з якого Андрій розпочинав, та на поле, на якому фігура вже побувала, знову ставити не можна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за таких умов, якщо кожен намагається виграти та обрана фігура:

а) кінь;

б) слон?

Нагадаємо, що шаховий кінь ходить на будь-яке поле, що відстоїть на 2 клітини по вертикалі та на 1 по горизонталі або навпаки від поля перебування коня, шаховий слон ходить на будь-яку клітину тієї діагоналі, на якій стоїть.

Відповідь: перемагає Олеся в обох випадках.

***Розв'язання*. Задача № 3 за 8 клас.**

4. У гострокутному трикутнику ABC сторона $BC > AB$, а бісектриса $BL = AB$. На відрізку BL існує точка M, для якої $\angle AML = \angle BCA$. Доведіть, що $AM = LC$.

***Розв'язання*.** Побудуємо на відрізку BC точку D, для якої $BD = BL$ (*рис. 17*). Тоді $\Delta ABL = \Delta BLD$, позначимо $\angle LAB = \angle BLA = \angle BLD = \angle BDL$.

Виберемо на відрізку BD точку K, для якої $\angle ALM = \angle DLK$. Тоді $\Delta ALM = \Delta DLK$ за рівними сторонами $LD = AL$, але тоді $\angle AML = \angle LKD = \angle BCA$, тому $KL = AM = LC$, що й треба було довести.

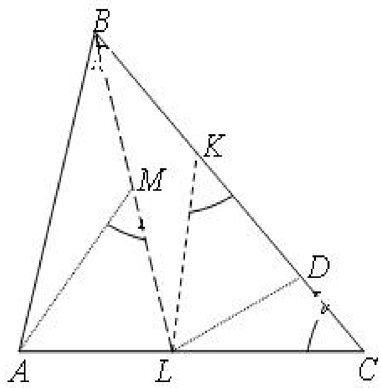


Рис. 17

3.1. Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій вибирає шахового короля та ставить його на шахівницю. Далі вони по черзі роблять хід за правилами шахового короля. При цьому на поле, з якого Андрій розпочинав, та на поле, на якому король вже побував, знову ставити не можна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за таких умов, якщо кожен намагається виграти?

Відповідь: перемагає Олеся.

***Розв'язання*. Задача № 3 за 8 клас.**

4.1. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться нею у відношенні $AO:OB = CO:OD = 1:2$. Прямі AD і BC перетинаються в точці M Доведіть, що $DM = MB$.

Розв’язання. Позначимо довжини відрізків $AB = CD = 3a$, тоді $AO = CO = a$ та $OB = OD = 2a$.

Оскільки $\angle AOD = \angle COB$ як вертикальні (рис. 18), то $\Delta AOD = \Delta COB$. Звідси $\angle ADO = \angle CBO$.

Оскільки ΔBOD рівнобедрений, то $\angle BDO = \angle DBO$, звідси $\angle MDB = \angle MBD$ як суми рівних кутів.

Тобто ΔMDB - рівнобедрений, звідки й випливає шукана рівність.

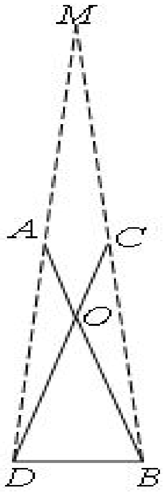


Рис. 18

8 клас

1. Мішень для стрільби з лука має зображений на *рис. 19* вигляд. Скільки мінімум пострілів повинен зробити спортсмен, щоб вибити рівно 105 очок?

Відповідь: 6.

Розв’язання. Припустимо, що при найменшій кількості пострілів було хоч раз влучання у 15. Тоді має місце рівність:

$$105 = 7n + 15m + 28k,$$

оскільки усі доданки, окрім $15m$, кратні 7, сума кратна 7, то й $15m$ повинно ділитись націло на 7, тому $m \geq 7$. Але, якщо обійтися без влучань у цю мішень, то вистачить рівно 6 влучань:

$$105 = 28 \cdot 3 + 7 \cdot 3,$$

що, очевидно, і є найменшою кількістю.

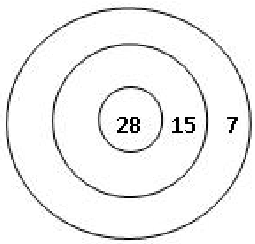


Рис. 19

2. Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій вибирає довільну шахову фігуру (короля, ферзя, туру, слона чи коня) та ставить її на шахівницю. Далі вони по черзі роблять хід за правилами обраної шахової фігури. При цьому на поле, з якого Андрій розпочинав, та на поле, на якому фігура вже побувала, знову ставити не можна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за таких умов, якщо кожен намагається виграти?

Нагадаємо, що шаховий кінь ходить на будь-яке поле, що відстоїть на 2 клітини по вертикалі та на 1 по горизонталі або навпаки - від поля перебування коня; шаховий слон ходить на будь-яке поле тієї діагоналі, на якій стоїть; тура ходить на будь-яке поле горизонталі чи вертикалі, на якій перебуває; хід ферзя – це об’єднання ходів слона та тури; король ходить у сусіднє по стороні чи вершині поле шахівниці.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: Олеся завжди виграє.

Розв’язання. Для кожної з фігур треба усю шахівницю розбити на пари клітинок, які пов’язані ходом цієї фігури. Тоді стратегія виграшу Олесі така: Андрій своїм ходом попадає на поле деякої такої пари (це стосується і першого виставлення Андрієм фігури на шахівницю), а Олеся своїм ходом стає на другу клітинку цієї пари. Вона завжди може зробити хід, оскільки після її ходу для усіх обраних пар клітинок або на обох фігура вже побувала, або ще не побувала на жодному.

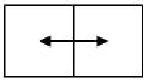


Рис. 20

Для короля, ферзя та тури достатньо зробити пари із сусідніх клітинок по горизонталі 1-го та 2-го, 3-го та 4-го, 5-го та 6-го і 7-го та 8-го стовпчиків (*рис. 20*).

Для коня достатньо зробити пари із сусідніх клітинок 1-го та 3-го, 2-го та 4-го, 5-го та 7-го і 6-го та 8-го стовпчиків як це показано на *рис. 21*.

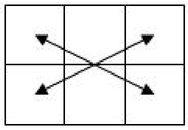


Рис. 21

Для слона треба зробити пари таким чином. Треба розглянути усі однокольорові діагоналі (білі чи чорні) у тому напрямі, де вони містять парну кількість точок. Цей напрямок паралельній відповідній великій діагоналі, що містить 8 клітинок. Далі просто спарувати сусідні.

3. Числа $x_1; x_2; ...; x_{2015}$ одночасно задовольняють умови:

$$x_1^{2014}+x_2^{2014}+...+x_{2015}^{2014}=1 \text{ та } x_1^{2015}+x_2^{2015}+...+x_{2015}^{2015}=-1.$$

Чому може дорівнювати значення виразу $x_1+x_2^2+x_3^3+...+x_{2015}^{2015}$?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> ±1.

<u>Розв'язання.</u> З першого рівняння $-1\le x_i\le 1$, $i=\overline{1,2015}$, тому для усіх i справджується нерівність: $0\le 1+x_i\le 2$. Додамо обидва рівняння і будемо мати

$$x_1^{2014}(1+x_1)+x_2^{2014}(1+x_2)+...+x_{2015}^{2014}(1+x_{2015})=0.$$

Оскільки кожен доданок $x_i^{2014}(1+x_i)\ge 0$, їх сума може дорівнювати нулеві тоді і тільки тоді, коли кожен доданок є нульовим. Звідси усі $x_i\in\{-1;0\}$. З першої рівності випливає, що рівно одна з цих змінних ненульова, з другої рівності – ця змінна дорівнює -1. Таким чином, рівнянням задовольняє тільки такий набір чисел: $x_i=-1$, $i=\overline{1,2015}$, $x_j=0$, $j\ne i$.

Звідси $x_1+x_2^2+x_3^3+...+x_{2015}^{2015}=1$, якщо i - парне, та $x_1+x_2^2+x_3^3+...+x_{2015}^{2015}=-1$, якщо i - непарне.

4. Задача № 4 за 7 клас.

3.1. Числа a, b одночасно задовольняють умови:

$$a^2+b^2=1 \text{ та } a^3+b^3=-1.$$

Чому може дорівнювати значення виразу a^3+b^2?

<u>Відповідь:</u> ±1.

Розв’язання. З першого рівняння $-1 \le a \le 1$ та $-1 \le b \le 1$, тому справджуються умови: $0 \le 1+a \le 2$ та $0 \le 1+b \le 2$. Додамо обидва рівняння і будемо мати

$$a^2(1+a)+b^2(1+b)=0\,.$$

Оскільки кожен доданок невід’ємний, їх сума може дорівнювати нулеві тоді і тільки тоді, коли кожен доданок є нульовим. Звідси $a,\,b \in \{-1;\,0\}$. З першої рівності випливає, що рівно одна з цих змінних ненульова, з другої рівності – ця змінна дорівнює -1. Таким чином, рівнянням задовольняють такі пари чисел $(a;\,b)$: $(-1;\,0)$ та $(0;\,-1)$, звідси $a^3+b^2=-1$ або $a^3+b^2=1$.

4.1. На сторонах $AB,\,BC,\,CA$ трикутника ABC відповідно, вибрані точки $C_1,\,A_1,\,B_1$ відповідно, що відмінні від вершин. При цьому виявилось, що $\Delta A_1B_1C_1$ рівносторонній, та рівними є кути $\angle BC_1A_1 = \angle C_1B_1A$ та $\angle BA_1C_1 = \angle A_1B_1C$. Чи обов’язково ΔABC рівносторонній?

Відповідь: так.

Розв’язання. Позначимо кути $\angle BC_1A_1 = \angle C_1B_1A = x$ та $\angle BA_1C_1 = \angle A_1B_1C = y$ (*рис. 22*). З розгорнутого кута при точці B_1 маємо, що $x+y=120^\circ$. Але тоді $\angle ABC = 60^\circ$, звідси $\angle B_1A_1C = x$, тому й $\angle ACB = 60^\circ$, тобто ΔABC - рівносторонній.

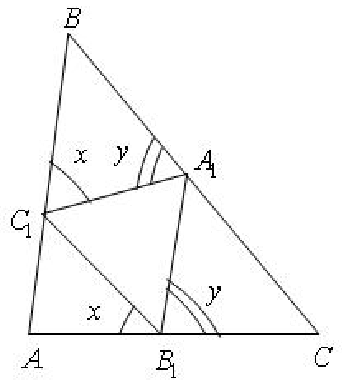


Рис. 22

9 клас

1. Для яких натуральних чисел n для запису числа $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ використовуються рівно дві різні цифри?

Відповідь: $n=4$.

Розв’язання. При $n \ge 5$ число $n!$ закінчується на цифру 0, тому може бути задіяна ще одна цифра. Позначимо її через a, тоді

$$n! = \overline{a\ldots a0\ldots 0a\ldots a0\ldots 0\ldots a\ldots a0\ldots 0} = a\cdot\overline{1\ldots 10\ldots 01\ldots 10\ldots 0\ldots 1\ldots 10\ldots 0}\,.$$

Якщо у останнього множника викреслити цифри 0, то вийде непарне число. Тому кількість множників 2 у розкладі $n!$ на прості множники не може перевищувати кількість множників 5 більше, ніж на 3. Кожна пара $2\cdot 5$ дає новий 0 наприкінці, а зайві множники 2 можуть утворити лише цифру a, а серед цифр на найбільшу степінь 2 ділиться цифра 8.

Вже для $n=8$ маємо, що $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$ ця умова порушується. Оскільки далі множник 2 зустрічається у кожного другого числа, а 5 - у кожного п’ятого, то відповідне співвідношення може виконуватись лише при $n \le 7$. Простою перевіркою переконуємось, що умов задовольняє лише $4! = 24$.

2. У таблиці $n \times n$ стовпчики перенумеровані зліва направо числами $1, 2, \ldots, n$. У кожну комірку таблиці розставляються числа $1, 2, \ldots, n$ таким чином, щоб у кожному рядку та у кожному стовпчику зустрічалося кожне з чисел $1, 2, \ldots, n$. У кожному стовпчику зафарбовуються сірим ті комірки, в яких записане число, яке більше від номера цього стовпчика. На *рис. 23* показаний приклад такого фарбування для деякої розстановки чисел при $n = 3$. Чи може статися так, щоб кількість сірих комірок у кожному рядку була однакова, якщо

а) $n = 5$;

б) $n = 10$.

<u>Відповідь</u>: ***а)*** так; ***б)*** ні.

<u>Розв'язання</u>. ***а)*** Для $n = 5$ неважко навести відповідний приклад (*рис. 24*).

5	4	3	2	1
1	5	4	3	2
2	1	5	4	3
3	2	1	5	4
4	3	2	1	5

Рис. 24

б) Для $n = 10$ у першому стовпчику сірими є рівно 9 комірок, у другому – рівно 8, ..., у 9-му сірою є рівно 1 комірка, у 10-му таких немає. Тому разом сірими є $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ комірок, а отже їх не може бути однакова кількість у кожному рядку, оскільки рядків рівно 10.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

Рис. 23

3. Шлях між пунктами ***А*** і ***Б*** дорівнює 15 км, спочатку дорога йде вгору, далі по рівному, наприкінці – донизу. Відомо, що ділянка кожного напряму не менше 1 км. Час на весь шлях у пішохода зайняв рівно 3 години. Скільки максимум та мінімум часу може зайняти шлях у зворотному напрямі, якщо відомо, що швидкість пішохода на ділянках вгору 4 км/год, по рівному – 5 км/год та 6 км/год на ділянках донизу?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь</u>: $t_{\max} = \dfrac{97}{30}$, $t_{\min} = \dfrac{73}{24}$.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо довжини ділянок вгору, по рівному та донизу на шляху від А до Б через x, y, z відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$x + y + z = 15, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 3, \quad 1 \le x,\ y,\ z \le 13.$$

З першого рівняння: $y = 15 - x - z$, підставимо це в друге рівняння:

$$\frac{x}{4} + \frac{15 - z - x}{5} + \frac{z}{6} = 3 \iff \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{z}{5} - \frac{z}{6} \iff \frac{x}{20} = \frac{z}{30} \iff z = \frac{3}{2}x.$$

Тоді $y = 15 - x - z = 15 - x - \dfrac{3}{2}x = 15 - \dfrac{5}{2}x$, а шуканий час дорівнює:

$$t = \frac{x}{6} + \frac{y}{5} + \frac{z}{4} = \frac{x}{6} + 3 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x = 3 + \frac{x}{24}.$$

Максимальне (мінімальне) значення t буде при максимальному (мінімальному) x:

Запишемо обмеження на x, які випливають з умов задачі:

$$1 \le x \le 13, \ 1 \le z = \frac{3}{2}x \le 13, \ y = 15 - x - z = 15 - x - \frac{3}{2}x = 15 - \frac{5}{2}x \iff \frac{4}{5} \le x \le \frac{28}{5}.$$

Оскільки усі умови повинні виконуватись одночасно, то остаточно маємо такі обмеження на x:

$$1 \le x \le \frac{28}{5}.$$

При цьому якщо $x=1$, то $z=\frac{3}{2}$, $y=\frac{25}{2}$. При $x=\frac{28}{5}$, маємо $z=\frac{42}{5}$, $y=1$.

$$t_{\max}=3+\frac{1}{24}\cdot\frac{28}{5}=3+\frac{7}{30}=\frac{97}{30},\ t_{\min}=3+\frac{1}{24}\cdot 1=\frac{73}{24}.$$

4. Кола w_1 та w_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно перетинаються в точках A та B. Пряма O_1O_2 перетинає w_1 в точці Q, що не лежить всередині кола w_2, та w_2 в точці X, що лежить всередині кола w_1. Навколо трикутника O_1AX описали коло w_3, що перетинає коло w_1 вдруге у точці T. Пряма QT перетинає коло w_3 у точці K, а пряма QB перетинає w_2 вдруге в точці H. Доведіть, що

а) точки T, X, B лежать на одній прямій;

б) точки K, X, H лежать на одній прямій.

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання.

а) Позначимо $\angle AO_1X=\alpha$, тоді $\angle ATX=\alpha$, бо вони спираються на одну дугу у колі w_3 (*рис. 25*), крім того $\angle AO_1X=\angle ATB$, звідси випливає, що $\angle ATX=\angle ATB$, тому точки T, X, B колінеарні.

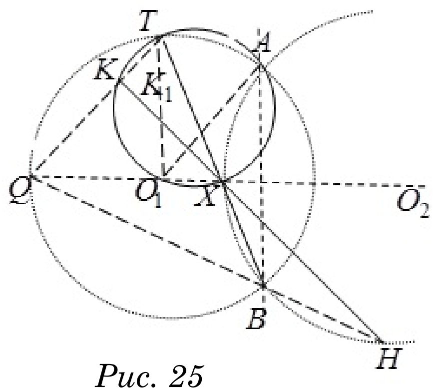


Рис. 25

б) Нехай $K_1=XH\bigcap TQ$, позначимо $\angle O_2XH=\alpha$, $\angle HXB=\beta$, $\angle XHB=\phi$, тоді маємо такі рівності: $\angle XQB=\alpha-\phi$, $\angle QTB=90°-\alpha+\phi$, $\angle TQX=180°-(\beta+\alpha)-(90°-\alpha+\phi)=90°-\beta-\phi=\alpha$, тобто $\angle TQX=\angle QTO_1$. Оскільки $O_1T=QO_1$, то $\angle K_1XQ=\alpha$, звідси $\angle K_1XQ=\angle QTO_1$, тобто $K_1\in w_3$, що означає $K_1=K$ і точки K, X, H колінеарні.

3.1. Відомо, що x_1, x_2 - корені многочлена $p(x)=x^2+ax+b=0$, а $x_1^2-\frac{1}{2}$ та $x_2^2-\frac{1}{2}$ – корені многочлена $p(x)=x^2+(a^2-\frac{1}{2})x+(b^2-\frac{1}{2})=0$. Знайдіть можливі значення a і b.

Відповідь: $a=0$, $b=-\frac{3}{4}$.

Розв'язання. Запишемо теореми Вієта для обох рівнянь.

$$x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=b,\ (x_1^2-\frac{1}{2})+(x_2^2-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-a^2 \text{ та } (x_1^2-\frac{1}{2})\cdot(x_2^2-\frac{1}{2})=b^2-\frac{1}{2}.$$

Зробимо перетворення останнього рівняння з урахуванням перших трьох.

$$x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{4}=b^2-\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; b^2-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-a^2)=b^2-\frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; a=0.$$

Тепер скористаємось третім рівнянням (з урахуванням того, що $a=0$):

$$x_1^2+x_2^2=\frac{3}{2}-a^2 \;\Leftrightarrow\; (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{3}{2}-a^2 \;\Leftrightarrow\; -2b=\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; b=-\frac{3}{4}.$$

4.1. Задача № 4 за 7 клас.

10 клас

1. Знайдіть усі такі функції $f: R\setminus\{-1\}\to R$, що для усіх $x, y\in R\setminus\{-1\}$ задовольняють рівність:

$$f(x)+f(y)=(x+y+2)f(x)f(y).$$

Відповідь: $f(x)=0$ та $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

Розв'язання. Покладемо $x=y=0$ і отримаємо $f(0)=(f(0))^2$. Звідки маємо дві можливості:

- Якщо $f(0)=0$, то покладемо $y=0$ і будемо мати, що $\forall x \;\; f(x)=0$ – перший розв'язок.
- Якщо $f(0)=1$, то покладемо знову $y=0$ і будемо мати, що $f(x)=\frac{1}{x+1}$ – другий розв'язок.

2. Задача № 4 за 9 клас.

3. У тенісному турнірі взяли участь $n\geq 3$ гравців, яким надали номери 1, 2, ..., n. Турнір проходить за такою схемою. Спочатку усі вишикукані у чергу у порядку номерів від 1–го до n–го. Першу гру грають тенісисти з номерами 1 та 2. Той, хто програв, переходить у кінець черги і зіграє наступну гру останнім з усіх, а переможець грає наступний матч з першим у черзі. І так далі. По проведенні N матчів турнір завершився. Виявилося, що перший гравець виграв a_1 матчів, другий – a_2, …, n–й виграв a_n матчів. Зрозуміло, що $a_1+a_2+...+a_n=N$. Скільки матчів програв кожний з гравців?

Відповідь: $b_j=\left\lceil\frac{N-a_j}{n-1}\right\rceil$, $j=1, 2$ та $b_j=\left\lceil\frac{N-a_j-j+2}{n-1}\right\rceil$, $j=\overline{3, n}$, де через $\lceil L\rceil$ позначене найменше ціле, що не менше за число L.

Розв'язання. Запишемо весь турнір у вигляді таблиці з n рядків, кожен з яких відповідає результатам гравця з відповідним початковим номером. Стовпчики відповідають черговій зустрічі. Якщо гравець виграв, то ставимо 1, якщо програв, записуємо 0, якщо не брав участі у цій грі, ставимо «мінус».

Таким чином у кожному стовпчику записується рівно по одному 0 та 1, а також $n-2$ мінуси.

Якщо у рядку з'являється 1, то далі може бути ще будь-яка кількість 1 (або жодної більше), а якщо з'явився у рядку 0, то гравець потрапляє у кінець черги, і наступний раз зіграє рівно після $n-2$ пропусків, тобто кожний 0 супроводжується $n-2$ мінусами, тобто будемо їх називати групою $0-$. Зрозуміло, що якщо цей 0 стоїть в одному з останніх $n-1$ матчів, то після 0 йдуть самі мінуси до кінця таблиці і їх може бути менше, ніж $n-2$. Тепер можемо підрахувати кількість поразок.

Позначимо кількість поразок j–го гравця через b_j, $j=\overline{1,n}$. Беремо перший рядок, що відповідає результатам першого гравця. Тоді усього матчів $N=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Якщо відняти звідси a_1, то решта матчів перший гравець, або програв, або не грав.

Викреслимо стовпчики з усіма 1 у першому рядку. Оскільки цей гравець бере участь у першій грі, то залишається $N-a_1$ стовпчиків, що складаються з k повних груп $0-$ та можливо неповної. Оскільки кожна така група розпочинається з поразки, то усього поразок – $k+1$. Залишається обчислити це значення. Позначимо через $\lfloor L \rfloor$ – найменше ціле, що не менше за число L. Наприклад, $\lfloor 3 \rfloor=3$, $\lfloor \pi \rfloor=4$, $\lfloor -\pi \rfloor=-3$. Тоді $b_1=\left\lfloor \dfrac{N-a_1}{n-1} \right\rfloor$. Не важко зрозуміти, що аналогічно $0-$обчислюється й значення $b_2=\left\lfloor \dfrac{N-a_2}{n-1} \right\rfloor$. Для обчислення інших b_j потрібно зрозуміти, що міркування аналогічні, але спочатку слід відняти від величини N число $j-2$, саме стільки перших матчів пропускає відповідний гравець. А далі знову йдуть групи . Тому $b_j=\left\lfloor \dfrac{N-a_j-j+2}{n-1} \right\rfloor$, $j=\overline{3,n}$.

4. Доведіть, що число m^4+1 не має дільників на проміжку $\left[m^2-2m, m^2+2m\right]$ для кожного натурального $m>2$.

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Припустимо протилежне. Нехай $m^2+a\in\left[m^2-2m, m^2+2m\right]$ і $m^4+1 \vdots m^2+a$. Оскільки $\left(m^4+1, m^2+a\right)=\left(-am^2+1, m^2+a\right)=\left(a^2+1, m^2+a\right)$, то $a^2+1 \vdots m^2+a$, $a^2+1=\left(m^2+a\right)r$.

Припустимо, що $a\in\left[-2m+3, 0\right]$, тоді $\dfrac{m^4+1}{m^2+a}\le\dfrac{m^4+1}{m^2-2m+3}<m^2+2m+1$, а отже m^4+1 має дільник, який не менший за m^2 і задовольняє припущення, тому замість m^2+a можемо розглядати дільник $m^2+b=\dfrac{m^4+1}{m^2+b}$, де $b\ge 0$.

Якщо $a=-2m+2$, то $4m^2-8m+5 \vdots m^2-2m+2$, звідки $3 \vdots m^2-2m+2$, що при $m>1$ неможливо.

Якщо $a=-2m+1$, то $4m^2-4m+2 \vdots (m-1)^2 \vdots m-1$, а отже $2 \vdots m-1$, $m \in \{2,3\}$. При $m=2$ і $m=3$ маємо: $m^4+1=17$ і $m^4+1=2\cdot 41$ – жодне з чисел не задовольняє умову.

Якщо $a=-2m$, то $1 \vdots m$ – суперечність.

Таким чином, якщо число m^4+1 має дільник m^2+a, де $a \in [-2m, 2m]$, то число m^4+1 має дільник m^2+b, де $b \in [0, 2m]$. Також очевидно, що $b \neq 0$. У такому випадку $4m^2+1 \geq b^2+1=(m^2+b)r \geq m^2 r$, звідки $r \leq 3$.

Випадок $r=3$: $b^2+1=3(m^2+b)$ – неможливо, оскільки b^2+1 не ділиться на 3.

Випадок $r=2$: $b^2+1=2(m^2+b)$, $(b-1)^2=2m^2$ – неможливо.

Випадок $r=1$: $b^2-b+1=m^2$, але $b^2>b^2-b+1=m^2>(b-1)^2$, тому цей випадок також неможливий. Таким чином, ми отримали суперечність з припущенням, а тому твердження доведено.

3.1. Визначити найбільшу можливу кількість трьохелементних множин таких, що кожні дві такі множини мають рівно один спільний елемент, але не існує елемента, що належіть усім множинам одночасно.

<u>Відповідь:</u> 7 множин.

<u>Розв'язання</u>. Припустимо, що таких множин існує принаймні 8, нехай $M=\{x, y, z\}$ – одна з таких множин. Якщо множин, що залишились, не менше ніж 7, то кожна з них має з M рівно один спільний елемент. А тому існує принаймні три множини M_1, M_2 та M_3, у яких однаковий спільний елемент з M, наприклад, це елемент x. Оскільки немає елемента, що належить усім множинам, то існує множина M_0, яка не містить елемент x. Вона перетинається з M, отже, містить інший елемент цієї множини, наприклад, y. Ця множина не може мати однаковий спільний елемент з двома з множин M_1, M_2 та M_3, бо інакше цей елемент став би другим спільним у тієї пари множин. Тому з кожною з цих множин вона повинна мати спільний елемент, який відмінний від y. Таким чином повинна містити принаймні 4 елементи, одержана суперечність завершує доведення.

Залишається навести приклад 7 таких множин:

{1; 2; 3}, {1; 4; 5}, {1; 6; 7}, {3; 5; 7}, {3; 4; 6}, {2; 4; 7}, {2; 5; 6}.

4.1. Прості числа p, q, r, де $p+q<111$, задовольняють умову $\frac{p+q}{r}=p-q+r$. Знайдіть найбільше можливе значення добутку pqr.

<u>Відповідь:</u> 2014.

Розв’язання. Перепишемо умову задачі таким чином: $q(r+1)-p(r-1)=r^2$.

Якщо $r>2$, то r – непарне, але тоді ліва частина – парна. Таким чином $r=2$. Звідси початкова умова набуває вигляду: $p=3q-4$, тому максимум pqr досягається при максимальному q. З умови $p+q<111$ випливає, що $q<29$. Залишається зробити невеликий перебір по q.

- При $q=23$ маємо $p=65$ – не просте число.
- При $q=21$ маємо $p=53$ – просте число, а тому і є шуканим.

  Звідси $pqr=53\cdot 19\cdot 2=2014$.

11 клас

1. Задача № 2 за 9 клас.

2. Пряма, що проходить через центр правильного трикутника ABC, перетинає прямі AB, BC і CA в точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Нехай A_2 – точка, що симетрична A_1 відносно середини BC; точки B_2 і C_2 визначаються аналогічно. Доведіть, що точки A_2, B_2 і C_2 лежать на одній прямій, яка дотикається до вписаного кола трикутника ABC.

(Сердюк Назар)

Розв’язання. Припустимо, що точки B_1 і C_1 лежать на сторонах, а A_1 на продовженні сторони BC за точку B. За теоремою Менелая $\frac{CB_2}{B_2A}\frac{AC_2}{C_2B}\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{AB_1}{B_1C}\frac{BC_1}{C_1A}\frac{CA_1}{A_1B}=1$, тому точки A_2, B_2 і C_2 лежать на одній прямій (*рис.26*).

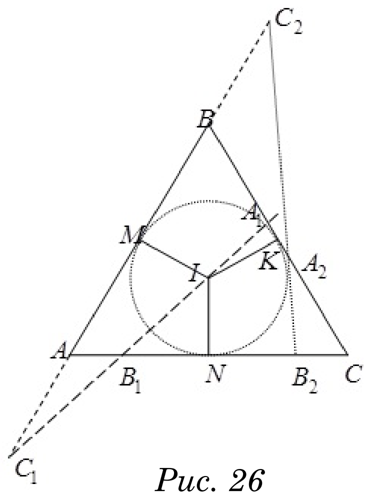


Рис. 26

Нехай M – середина AB, N – середина AC, K – основа перпендикуляра, опущеного з точки I, центра вписаного кола, на пряму B_2C_2. Трикутники C_2IM і C_1IM рівні, тому $C_2I=IC_1$, $\angle C_2IC_1=180^o-2\angle B_1C_1A$. Аналогічно, $B_2I=B_1I$ і $\angle B_2IB_1=180^o-2\angle C_1B_1A$.

Далі, $\angle B_2IC_2=2\angle B_1C_1A+2\angle C_1B_1A-180^o=2\left(180^o-\angle A\right)-180^o=60^o$.

Оскільки $\angle B_2IC_2=\angle B_1AC_1$ і $\frac{B_2I}{C_2I}=\frac{B_1I}{C_1I}=\frac{B_1A}{C_1A}$ (I – основа бісектриси AI в трикутнику B_1AC_1), то трикутники B_2IC_2 і B_1AC_1 подібні, звідки $\angle C_2B_2I=\angle AB_1C_1$ і $\angle B_2C_2I=\angle AC_1B_1$. Тоді відрізок IB_2 спільний для прямокутних трикутників B_2MI та B_2KI, а також $\angle NB_2I=\angle NB_1I=\angle KB_2I$, тому $NB_2=KB_2$. Аналогічно, $KC_2=C_2M$. Оскільки

$$B_2C+C_2B=B_2N+NC+BM+MC_2=B_2K+KC_2+BC=B_2C_2+BC,$$

чотирикутник CB_2C_2B – описаний, а тому пряма B_2C_2 дотикається до вписаного кола трикутника ABC.

3. Задача № 4 за 10 клас.

4. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що для усіх дійсних *x, y* виконується рівність:

$$f\left(f(x)-y^2\right)=f\left(x^2\right)+y^2 f(y)-2f(xy).$$

<u>Відповідь</u>: $f(x)\equiv x$ і $f(x)\equiv 0$.

<u>Розв'язання</u>. Виконаємо підстановки $y=1$ і $y=-1$, отримаємо:

$$f\left(f(x)-1\right)=f(x^2)+f(1)-2f(x) \text{ та } f\left(f(x)-1\right)=f(x^2)+f(-1)-2f(-x).$$

Поєднуючи ці дві рівності, матимемо $f(1)-2f(x)=f(-1)-2f(-x)$. Звідси, при $x=1$, $f(1)=f(-1)$, а отже $f(x)=f(-x)$, тому функція f - парна.

Далі, при $x=y=1$, з умови отримуємо, що $f\left(f(1)-1\right)=0$, тобто існує число b таке, що $f(b)=0$. При $x=b$ з рівностей, наведених вище маємо

$$f\left(f(b)-1\right)=f\left(b^2\right)+f(1),\ f(-1)=f\left(b^2\right)+f(1), \text{ тому } f\left(b^2\right)=0.$$

Тепер підставимо в початкове рівняння $x=b$ і $y=0$: $f\left(f(b)\right)=f\left(b^2\right)-2f(0)$, звідки $3f(0)=f\left(b^2\right)=0$. Далі, з умови при $x=0$ маємо, що $f\left(y^2\right)=y^2 f(y)$.

Розглянемо два випадки.

1. Існує $b\in R$, $b\neq 0$ таке, що $f(b)=0$. З наведених вище міркувань, $f\left(b^2\right)=0$. Підставляючи $x=b$ у початкове рівняння, отримаємо:

$$f\left(f(b)-y^2\right)=f\left(b^2\right)+y^2 f(y)-2f(by),\ f\left(y^2\right)=y^2 f(y)-2f(by),$$

що означає $f(x)=0$ для довільного дійсного x.

2. $f(b)=0$ тоді і лише тоді, коли $b=0$. При $x=y$ з умови маємо

$$f\left(f(x)-x^2\right)=f\left(x^2\right)+x^2 f(x)-2f\left(x^2\right)=x^2 f(x)-f\left(x^2\right)=0,$$

тому $f(x)-x^2=0$, а отже маємо ще одну відповідь: $f(x)=x^2$, $\forall x\in R$.

Перевіркою переконуємось, що обидва варіанти задовольняють умову задачі.

3.1. Задача № 4.1 за 10 клас.

4.1. Задача № 1 за 10 клас.

Розділ II
ЗАВДАННЯ LV ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

2.1. Умови та розв’язання задач першого дня

8 клас

1. Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність: $(n-2013)(n-2014)(n-2016)(n-2017)=4$.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $n=2015$.
Розв’язання. Якщо ціле число n задовольняє умову, то число 4 подається як добуток чотирьох попарно різних цілих чисел. Оскільки цілими дільниками цього числа є лише числа ±1, ±2 та ±4, то шуканими множниками можуть бути лише числа ±1 та ±2. Справді, якщо один з дільників за модулем дорівнює 4, то інші три повинні за модулем не перевищувати 1 і не бути нулем, що неможливо, оскільки таких чисел усього два.

Оскільки $n-2013$ - найбільший з множників, то він повинен дорівнювати 2, при цьому $n=2015$ - задовольняє умову задачі. З наведених міркувань зрозуміло, що це єдине число, що задовольняє умови задачі.

2. У Насті є 5 жовтих монет, про які їй відомо, що вони справжні. В неї є також 5 синіх монет, про які їй відомо, що серед них 3 справжні та дві фальшиві. Усі 8 справжніх монет важать однаково, одна з фальшивих монет важча за справжню на 1 грам, а інша – легша за справжню також на 1 грам. Чи зможе Настя за допомогою шалькових терезів без гир за 3 зважування визначити обидві фальшиві монети та вказати, яка з них більш важка, а яка більш легка?

(Рубльов Богдан)

Відповідь. Зможе.
Розв’язання. Позначимо для зручності блакитні монети Б1, …, Б5. Спочатку порівняємо 3 жовтих та 3 блакитних монети Б1, Б2, Б3:

1) $Ж1+Ж2+Ж3\ ?\ Б1+Б2+Б3$.

Розглянемо можливі випадки.

1а) $Ж1+Ж2+Ж3=Б1+Б2+Б3$.

Тоді можливі варіанти. Фальшиві серед Б1, Б2, Б3, або серед Б4 та Б5. У тій групі, де фальшиві монети, усі монети різної ваги.

Другим зважуванням порівняємо такі монети:

2) $Б1\ ?\ Б2$.

Можливі такі варіанти.

2а) $Б1\ =\ Б2$.

Це означає, що ці монети справжні, а тому фальшиві Б4 та Б5. Треба просто порівняти їх і з’ясувати яка більш важка, яка більш легка.

2б) $Б1 > Б2$.

Тоді можливі три варіанти розподілу справжніх та фальшивих монет. Б1 – важка, Б2 легка, або Б1 – важка, Б2 справжня, або Б1 – справжня, Б2 легка. Порівняємо сумарну вагу монет Б1, Б2 та Ж1, Ж2 (двох справжніх). У першому випадку вони рівні, у другому Б1, Б2 важчі, а у третьому – легші за Ж1, Ж2, а тому маємо відповідь на усі питання після результатів третього зважування:

3) $Ж1+Ж2 \ ? \ Б1+Б2$.

Очевидно, що аналогічно завершується розв'язання задачі у випадку

2в) $Б1 < Б2$.

Другий випадок.

1б) $Ж1+Ж2+Ж3>Б1+Б2+Б3$.

Тоді серед Б1, Б2, Б3 є більш легка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш важка. Далі все просто з'ясовується за допомогою другого та третього зважувань:

2) $Б1 \ ? \ Б2$ та ***3)*** $Б4 \ ? \ Б5$.

Наприклад, якщо ***2а)*** $Б1 = Б2$ та ***3а)*** $Б4 > Б5$, то Б3 фальшива більш легка, а Б4 – фальшива більш важка. Аналогічно розглядаються усі інші результати зважувань.

Третій випадок.

1в) $Ж1+Ж2+Ж3<Б1+Б2+Б3$.

Цей випадок аналогічний до випадку ***1б)***, але тепер серед Б1, Б2, Б3 є більш важка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш легка.

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt{2014}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2015}-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2016}-\sqrt{x+2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2015-x}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2016-x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2017-x}-\sqrt{3}}.$$

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> $x=1$.

<u>Розв'язання</u>. Помножимо чисельник та знаменник кожного з шести доданків на вираз, спряжений до відповідного знаменника:

$$\frac{\sqrt{2014}+\sqrt{x}}{2014-x}+\frac{\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}}{2015-(x+1)}+\frac{\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}}{2016-(x+2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}}{(2015-x)-1}+\frac{\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}}{(2016-x)-2}+\frac{\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}}{(2017-x)-3}.$$

Неважко побачити, що усі дроби мають спільний знаменник, тому помножимо на нього і одержимо таке рівняння:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}=$$

$$=\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3},$$

при цьому $x \neq 2014$. Побачимо, що мають місце такі твердження:

1) $x=1$ – є коренем рівняння, бо при такому значенні x ліва і права частини нерівності складаються з однакових доданків:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}.$$

2) Позначимо $S=\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}$.

Тоді при $x>1$ маємо

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}>$$
$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S,$$

тобто, ліва частина більша за S; аналогічно для правої частини маємо

$$\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}<$$
$$<\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S.$$

Таким чином на цьому проміжку розв'язків немає. Аналогічно при $x<1$ ліва частина менша, а права частина більша ніж S.

4. Дана трапеція $ABCD$ з основами BC та AD. На діагоналях AC та BD відмічені точки P та Q відповідно так, що AC - бісектриса $\angle BPD$, а BD - бісектриса $\angle AQC$. Доведіть, що $\angle BPD=\angle AQC$.

(Сердюк Назар)

***Розв'язання*.** Відмітимо середини діагоналей M_1 та M_2, як це показано на *рис. 27*.

Як відомо, $M_1M_2 \parallel BC$. Побудуємо описані кола ΔAQC та ΔBPD. Нехай вони вдруге перетинають прямі BD та AC у точках X та Y відповідно. Оскільки BD містить бісектрису $\angle AQC$, то точка X є

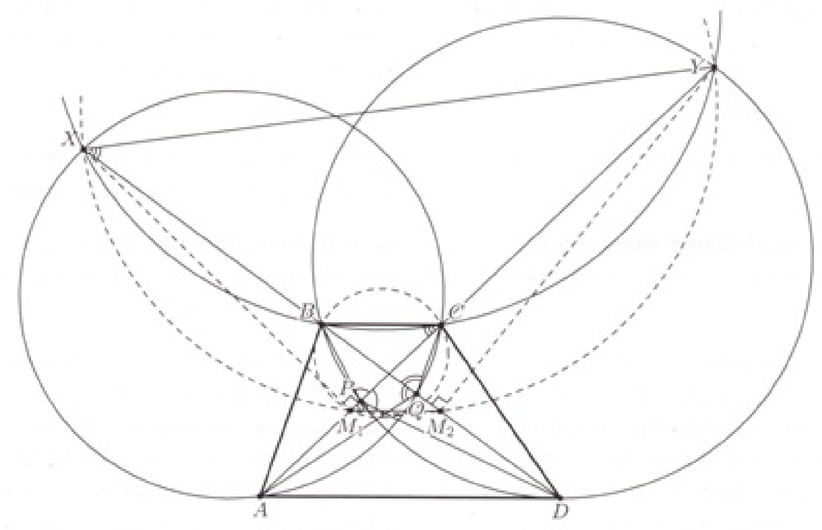


Рис. 27

серединою більшої дуги AC описаного кола трикутника ΔAQC. Тоді X належить серединному перпендикуляру відрізка AC. Аналогічно, Y належить серединному перпендикуляру відрізка BD. Отже, чотирикутник XM_1M_2Y є вписаним, бо $\angle XM_1Y=\angle XM_2Y=90°$. Тоді $\angle M_1XM_2=\angle M_1YM_2$. Також $\angle BXY=\angle CM_1M_2=\angle M_1CB$, звідки чотирикутник $XBCY$ є вписаним. Звідси $\angle BXC=\angle BYC$. Тоді $\angle AQC=180°-2\angle M_1XC=180°-2(\angle M_1XM_2+\angle M_2XC)=$ $=180°-2(\angle M_1YM_2+\angle M_1YB)=180°-2\angle M_2YB=\angle BPD$.

***Альтернативне розв'язання*.** Відмітимо на діагоналі BD точку Q' (*рис. 28*), таку, що $\angle BQ'C=\angle BPC$. З рівності цих кутів випливає, що чотирикутник $BCQ'P$ є вписаним.

Тоді $\angle Q'PC=\angle Q'BC=\angle Q'DA$, звідки випливає, що вписаним є також чотирикутник $APQ'D$.

Тоді $\angle CPD = \angle CPQ' + \angle Q'PD = \angle Q'DA + \angle Q'AD = \angle BQ'A$.

Тобто, ми отримали, що $\angle BPD = \angle CQ'A$. Крім того, BD є бісектрисою $\angle CQ'A$. Покажемо, що $Q' = Q$. Припустимо, що ці точки різні. Оскільки $\angle CQB = \angle AQB$ та $\angle CQ'B = \angle AQ'B$, то трикутники $CQ'Q$ та $AQ'Q$ є рівними. Це означає, що пряма BD є серединним перпендикуляром до відрізка AC. З цього випливає, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, але тоді він не є трапецією, що суперечить умові. Таким чином, $Q' = Q$, звідки і випливає твердження задачі.

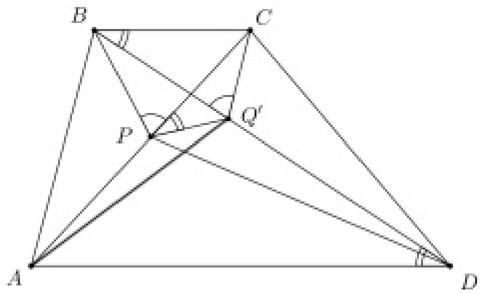


Рис. 28

9 клас

1. Вартість одного кілограма шоколадних цукерок – x гривень, а кілограма картоплі – y гривень, причому числа x та y – натуральні та не більш ніж двоцифрові. Мати сказала Андрійкові купити 200 грамів цукерок та 1 кілограм картоплі, що мало коштувати рівно N гривень. Андрійко все переплутав і купив 200 грамів картоплі та 1 кілограм цукерок. Йому довелося сплатити рівно $M > N$ гривень. Виявилось, що двоцифрові числа N та M записуються одними й тими ж цифрами, але у різному порядку. Скільки коштує кілограм картоплі та кілограм цукерок?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: цукерки коштують 50 гривень, а картопля – 5 гривень.

Розв'язання. Нехай цукерки та картопля коштують відповідно x та y гривень, при цьому $N = \overline{ab} = 10a + b$, $M = \overline{ba} = 10b + a$. З умови задачі $M > N$ тому $b > a > 0$. Тоді маємо такі рівняння:

$$\frac{1}{5}x + y = 10a + b \text{ та } \frac{1}{5}y + x = 10b + a, \text{ або } x + 5y = 50a + 5b \text{ та } y + 5x = 50b + 5a.$$

Тут $b > a > 0$ – цифри, а $x > y$ не більше ніж двоцифрові числа. Тоді

$$4(x - y) = 45(b - a).$$

$$6(x + y) = 55(b + a).$$

Таким чином $b - a \,\vdots\, 4$ та $b + a \,\vdots\, 6$.

Розглянемо ті пари цифр, що задовольняють умови, отримані вище. Таких пар усього дві: $b = 5$, $a = 1$ та $b = 8$, $a = 4$. Розглянемо ці випадки.

1. $b = 5$, $a = 1$, тоді

$$\begin{cases} x - y = 45, \\ x + y = 55. \end{cases}$$

Звідси $x = 50$, $y = 5$.

2. $b = 8$, $a = 4$, тоді

$$\begin{cases} x - y = 45, \\ x + y = 110. \end{cases}$$

Звідси x, y – не цілі.

2. У тенісному турнірі в одне коло взяли участь 8 дівчат (тобто кожна тенісистка зіграла з кожною іншою рівно 1 раз, нічиїх у тенісі не буває). Оксана посіла друге місце за набраними очками, і таку кількість очок не набрала більше жодна інша учасниця. Яку максимальну кількість ігор могла програти Олеся, яка перемогла в цьому турнірі?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 1.

Розв'язання. Припустимо, що Олеся програла 2 гри. Тоді вона набрала 5 очок. Оксана не могла набрати 4 очки, оскільки тоді усього разом усіма командами було здобуто максимум $5+4+3\cdot 6=27$ перемог. А усього зустрічей було зіграно рівно $\frac{1}{2}(8\cdot 7)=28$ - суперечність. Так само Оксана не могла набрати 3 чи менше очок, або Олеся програти 3 чи більше ігор. Таким чином усього Олеся могла програти щонайбільше 1 гру. Цей варіант можливий, про що свідчить наведений у таблиці (*рис. 29*) приклад.

М	1	2	3	4	5	6	7	8	оч
1	X	0	1	1	1	1	1	1	6
2	1	X	1	0	1	0	1	0	4
3	0	0	X	1	0	1	0	1	3
4	0	1	0	X	1	0	1	0	3
5	0	0	1	0	X	1	0	1	3
6	0	1	0	1	0	X	1	0	3
7	0	0	1	0	1	0	X	1	3
8	0	1	0	1	0	1	0	X	3

Рис. 29

3. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c+2=abc$, доведіть нерівність: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2$.

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Застосуємо нерівність Коші-Шварца для трійок чисел $\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \sqrt{\frac{b}{c+1}}, \sqrt{\frac{c}{a+1}}$ та $\sqrt{a(b+1)}, \sqrt{b(c+1)}, \sqrt{c(a+1)}$ і одержимо, що

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}}\cdot\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{\frac{b}{c+1}}\cdot\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{\frac{c}{a+1}}\cdot\sqrt{c(a+1)}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\right)\left(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\right)\left(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)}.$$

Тепер нам достатньо довести, що

$$\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)} \ge 2 .$$

Остання нерівність рівносильна такій:

$$a^2+b^2+c^2 \ge 2a+2b+2c .$$

Знову застосуємо нерівність Коші-Шварца тепер для трійок чисел a, b, c та $2, 2, 2$:

$$(a^2+b^2+c^2)(4+4+4) \ge (2a+2b+2c)^2 \text{ або } 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 .$$

Покажемо, що $a+b+c \ge 6$. З умови задачі знаємо, що $a+b+c+2=abc$, тому

$$abc=(a+b)+(c+2) \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{2c} \ge 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{2c}} \iff (abc)^2 \ge 16\sqrt{2abc} \iff$$

$$(abc)^4 \ge 512abc \iff (abc)^3 \ge 512 \iff abc \ge 8 .$$

Звідси маємо, що $a+b+c \ge abc-2 \ge 6$, тоді з нерівності

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c) \ge \frac{1}{3}\cdot 6\cdot(a+b+c) = 2(a+b+c) ,$$

звідки випливає потрібна нерівність.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Помітимо, що набори додатних чисел (a, b, c) та $(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1})$ протилежно впорядковані. Тому, за транс-нерівністю

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \ge \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} = \frac{a(b+1)(c+1)+b(c+1)(a+1)+c(b+1)(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{abc+ab+ac+a+abc+bc+ba+b+abc+cb+ca+c}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1} = \frac{3abc+2(ab+bc+ca)+abc-2}{abc+ab+bc+ca+abc-1} = 2,$$

що й потрібно було довести.

4. На стороні BC гострокутного трикутника ABC вибрано довільну точку D. Нехай O – центр описаного кола ΔABC, а Z – точка цього кола, що діаметрально протилежна точці A. Нехай X, Y - такі точки на відрізках BO, CO відповідно, для яких виконується умова:

$$\angle BXD + \angle ABC = 180° = \angle CYD + \angle ACB .$$

Доведіть, що градусна міра $\angle XZY$ не залежить від вибору точки D.

(Хілько Данило)

<u>Розв'язання</u>. Наведемо розв'язок для розташування точок, зображеного на *рис. 30*.

Для інших випадків розташування розв'язок буде подібним. Доведемо, що для будь-якого вибору точки D чотирикутник $XOYZ$ є вписаним. Тоді $\angle XZY = 180° - 2\angle A$, тобто не залежить від вибору точки D на стороні BC.

З умов задачі очевидно випливає, що описані кола ΔBXD та ΔDYC дотикаються до прямих AB та AC відповідно. Позначимо ці кола як w_1 та w_2, а їх центри через O_1 та O_2 відповідно.

Нехай K -- друга точка перетину цих кіл, що відмінна від точки D (*рис. 30*). Тоді $\angle BKC = \angle BKD + \angle DKC = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, тобто, точка K

належить описаному колу ΔABC. Також маємо $\angle XKY = \angle XKD + \angle DKY = \angle XBD + \angle DCY = 180° - \angle XOY$, тобто, чотирикутник $XOYK$ – вписаний.

Зазначимо, що оскільки AZ – діаметр великого кола, то $AB \perp BZ$, а тому O_1 належить прямій BZ. Аналогічно O_2 належить прямій CZ.

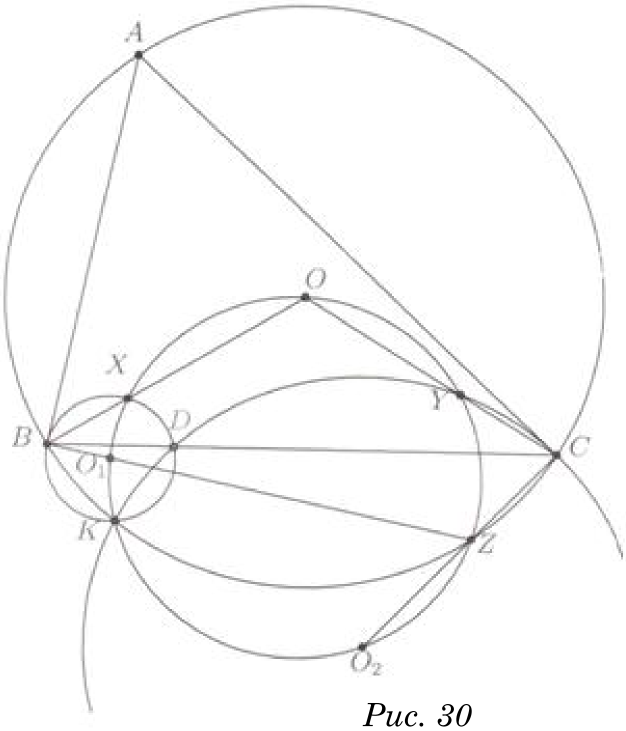


Рис. 30

Доведемо, що O_1, O_2 належать описаному колу чотирикутника $OXKY$. Справді, $\angle XO_1K = 2\angle XBK =$

$$= 2((90° - \frac{1}{2}\angle BOK) = 180° - \angle XOK,$$

аналогічно і для точки O_2.

Тепер доведемо, що і точка Z належить описаному колу чотирикутника $OXKY$, що й завершить розв'язання задачі. Для цього достатньо довести, що $\angle O_1ZO_2 + \angle O_1KO_2 = 180°$.

Справді, $90° - \angle DBK + 90° - \angle DCK = 180° - \angle A = \angle BZC = 180° - \angle O_1ZO_2$.

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$ctg[x] \cdot ctg\{x\} = 1.$$

Тут через $[a]$ позначена ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a, а через $\{a\}$ - дробова частина числа a, тобто $\{a\} = a - [a]$.

(Апостолова Галина)

Відповідь: $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k,\ k \in Z$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\cos[x] \cdot \cos\{x\} = \sin[x] \cdot \sin\{x\},$$

при умові, що $\sin[x] \cdot \sin\{x\} \neq 0$. Перенесемо усе в один бік і одержимо,

$$\cos[x] \cdot \cos\{x\} - \sin[x] \cdot \sin\{x\} = \cos([x] + \{x\}) = \cos x = 0.$$

Звідси знаходимо, що , $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k,\ k \in Z$.

Залишається переконатись, що усі ці значення належать ОДЗ. Справді, жодне з них не є цілим, оскільки вони усі ірраціональні, тому $\{x\} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\{x\} \in (0;1)$ $\Rightarrow$ $\sin\{x\} \neq 0$. Крім того, оскільки рівність $\sin y = 0$ виконується при $y = \pi n$, $n \in Z$, то рівність нулю при цілих y можлива лише при $y = 0$.

Помітимо, що при $k \geq 0$ $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k > 1$ і $[x] > 0$, а при $k < 0$ $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k < -1$ і $[x] < 0$. Таким чином усі знайдені x задовольняють рівняння.

2. Всередині правильного трикутника ABC вибрано точку M. Нехай точки M_1, M_2, M_3 симетричні їй відносно сторін BC, AC, AB трикутника відповідно. Доведіть, що сума векторів $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}$ дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

(Терьошин Дмитро)

Розв'язання. Проведемо через точку M прямі, паралельні до сторін трикутника ABC. Нехай вони перетинають сторони AB, BC, AC в точках C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 відповідно (*рис. 31*). Отже, $C_1A_2 \parallel AC$, $A_1B_2 \parallel BA$, $B_1C_2 \parallel BC$, а також прямі C_1A_2, A_1B_2 та B_1C_2 перетинаються в точці M.

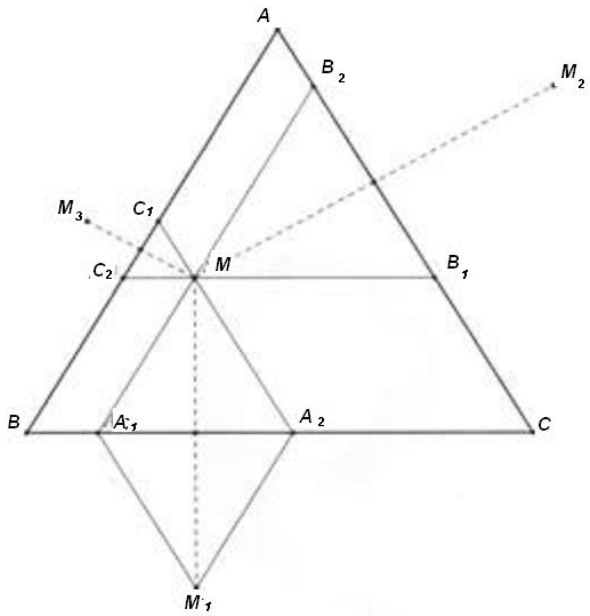


Рис. 31

Розглянемо ΔA_1MA_2. Очевидно, що він правильний. Пряма M_1M містить його висоту, бо є перпендикулярною до BC. Тоді M_1M - це подвоєння його медіани, тому $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MM_1}$, аналогічно $\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MM_2}$ та $\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MM_3}$.

З іншого боку MC_1AB_2 - паралелограм, тому $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2}$. Аналогічно $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}$ та $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1}$. Звідси й маємо шукане:

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

3. Натуральні числа a, p задовольняють умову: $p = 2^a - 1$. Знайдіть усі значення a, для яких число $\frac{1}{2}(p^2 + 1)$ є квадратом цілого числа.

(Клурман Олексій)

Відповідь: $a = 1$ та $a = 3$.

Розв'язання. При $a = 1$ маємо, що $p = 1$ і $\frac{1}{2}(p^2 + 1) = 1$ – задовольняє умову.

При $a = 2$ $p = 3$ і $\frac{1}{2}(p^2 + 1) = 5$ – умову не задовольняє.

Нехай тепер $a \ge 3$. Припустимо, що $\frac{1}{2}(p^2+1) = p_1^2$, тоді $p^2 - 2p_1^2 = -1$. Підставимо значення p з умови: $2^{2a} - 2^{a+1} + 1 - 2p_1^2 = -1$ або $2^{2a-1} - 2^a = p_1^2 - 1$.

Звідси $2^a(2^{2a-1}-1) = (p_1-1)(p_1+1)$. Оскільки ліва частина рівності парна, то й права частина – парна. Тоді кожен з виразів у дужках є парним і $НСД(p_1-1;\ p_1+1) = 2$.

Таким чином, можливі такі випадки.

1) $p_1+1 = 2l$, при цьому $kl = 2^{a-1}-1$.

При $k \ge 2$ $p_1 \ge 2^a+1$ і $l \ge 2^{a-1}+1$, що суперечить рівності $kl = 2^{a-1}-1$.

При $k=1$ $p_1 = 2^{a-1}+1$ і $l = 2^{a-2}+1$ і $kl = 2^{a-2}+1 = 2^{a-1}-1$. Звідси $a=3$.

2) $p_1-1 = 2k$, $p_1+1 = 2^{a-1}l$, при цьому $kl = 2^{a-1}-1$.

При $l \ge 2$ $p_1 \ge 2^a-1$ і $k \ge 2^{a-1}-1$, звідки $2^{a-1}-1 = kl \ge 2^a-2$, звідки $a=1$.

При $l=1$ $p_1 = 2^{a-1}-1$ і $k = 2^{a-2}-1$ і $kl = 2^{a-2}-1 = 2^{a-1}-1$ – суперечність.

4. Заданий скінченний набір натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. За один хід дозволяється вибрати довільну пару чисел з тих, що залишились, менше з двох – вилучити, а більше – збільшити на 1. Яке найменше число можна одержати в кінці?

(Руденко Олександр)

Відповідь: найменше натуральне число t, для якого виконується нерівність $f(A) = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_n} \le 2^t$.

Розв'язання. Нехай задані числа задовольняють умови: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Визначимо для набору чисел $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ функцію $f(A) = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_n}$. Тоді при переході від набору $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ до набору A', якщо були обрані числа $a_i \le a_j$, маємо, що:

$$f(A') - f(A) = 2^{a_j+1} - 2^{a_i} - 2^{a_j} = 2^{a_j} - 2^{a_i} \ge 0,$$

тобто функція f не спадає.

Позначимо через t найменше натуральне число, для якого з самого початку виконувалась нерівність $f(A) \le 2^t$. Доведемо, що якщо a - останнє число, що залишилось, то $a \ge t$.

Справді, якщо припустити супротивне, тобто що $a < t$, $a \le t-1$, то оскільки f не спадає, маємо, що $f(A) \le f(\{a\}) = 2^a \le 2^{t-1}$, що суперечить вибору числа t.

Покажемо, що якщо на кожному кроці вибирати пару найменших чисел, то наприкінці одержимо, що $a = t$. Дійсно, якщо ми прибираємо число a_1, а число a_2 замінюємо на a_2+1, то маємо, що

$$f(A') - f(A) = 2^{a_2+1} - 2^{a_1} - 2^{a_2} = 2^{a_2} - 2^{a_1} \text{ або } f(A') = f(A) + 2^{a_2} - 2^{a_1}.$$

За побудовою числа t та вибором двох найменших чисел маємо, що

$$f(A) \le 2^t \iff f(A) - 2^{a_1} \le 2^t - 2^{a_2} \iff f(A) + 2^{a_2} - 2^{a_1} \le 2^t \iff f(A') \le 2^t.$$

Таким чином $a \le t$, звідки остаточно маємо, що $a = t$.

11 клас

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;\ y)$, які задовольняють рівність:

$$\{x\}+\{y\}=[x+y].$$

Тут через $[a]$ позначена ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a, а через $\{a\}$ - дробова частина числа a, тобто $\{a\}=a-[a]$.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $(n;\ -n)$, де $n\in Z$ та $(x;1-x)$, де $x\notin Z$.

Розв'язання. Зрозуміло, що з умов задачі випливає, що число $\{x\}+\{y\}$ - ціле, а оскільки $0\le\{x\}<1$, то можливі два варіанти: $\{x\}+\{y\}=0$ або $\{x\}+\{y\}=1$. Розглянемо їх.

1. $\{x\}+\{y\}=0$. Це означає, що $\{x\}=\{y\}=0$, а тому $x,\ y\in Z$. Але тоді $[x+y]=x+y=0$, звідси розв'язками є такі пари чисел: $(n;\ -n)$, де $n\in Z$.

2. $\{x\}+\{y\}=1$. Звідси очевидно, що $x,\ y\notin Z$, бо якщо одне з них, наприклад, x ціле, то $\{x\}=0$, звідси $\{y\}=1$, що неможливо. Нехай тепер $x\notin Z$, тоді $x+y=[x]+\{x\}+[y]+\{y\}=[x]+[y]+1$, тобто $x+y$ - ціле число. Тоді $x+y=[x+y]=1$. Тобто у цьому випадку шуканими розв'язками є пари чисел $(x;1-x)$, де $x\notin Z$.

2. Задача № 3 за 10 клас.

3. Є білий квадрат 8×8. За один хід Дмитро може вибрати повністю білий квадратик 2×2 та зафарбувати у чорний колір будь-які дві клітинки цього квадратика, що розташовані по діагоналі. Яку максимальну кількість клітинок за такими правилами Дмитро зможе зафарбувати?

(Петровський Дмитро)

Відповідь: 42.

Розв'язання. Спочатку покажемо, як досягти потрібної кількості зафарбувань. У кожному квадратику 4×4 проведемо фарбування у такій послідовності. Спочатку вибираємо усі чотири квадрати 2×2, на які розбивається квадрат 4×4, і фарбуємо там діагоналі, як це показано на *рис. 32* (чорні квадратики). Після цього всередині утворюється повністю білий квадрат 2×2, у якому ми фарбуємо будь-яку з діагоналей (сірі квадратики). По завершенню фарбування усіх чотирьох квадратів 4×4 у самому центрі великого квадрату 8×8 утворився повністю білий квадратик 2×2, у якому ми фарбуємо ще дві клітинки (світло сірі). Разом маємо, що зафарбованими стали: $10\cdot4+2=42$ квадратиків 1×1.

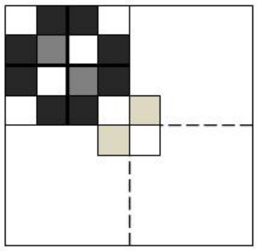


Рис. 32

Тепер покажемо, що більшу кількість зафарбувати не можна. Поряд із заданим квадратом 8×8 (назвемо його «заданим») розглянемо квадрат 7×7, утворений їх центрами (назвемо його «центральним»). Фарбування діагоналі квадрату 2×2 у заданому квадраті відповідає проведенню відповідної діагоналі у квадраті 1×1 центрального квадрату (*рис. 33*).

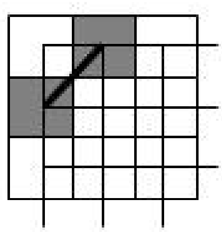


Рис. 33

Тепер неважко побачити, що у двох сусідніх по стороні квадратах 1×1 центрального квадрату діагональ провести не можна. Розглянемо прямокутник 3×4 центрального квадрату, і покажемо, що в ньому не можна провести діагоналі рівно в половині квадратів. Якщо це так, то діагоналі будуть проведені у шести квадратиках 1×1. Виберемо чотири квадрати A, B, C, D, у яких проведені діагоналі і серед них немає кутових (*рис. 34*). Покажемо, що в усіх них одночасно діагональ провести неможливо. Нехай, наприклад, першою було проведена діагональ (тобто пофарбовані дві діагональні клітинки у заданому квадраті) у квадраті A, наприклад, у тому напрямі, як це показане на *рис. 34*. Тоді у квадраті C провести діагональ неможливо. Таким чином, у прямокутнику 3×4 можна провести максимум 5 діагоналей. Тепер розіб’ємо весь центральний квадрат 7×7 на чотири прямокутники 3×4 та квадратик 1×1, як це показане на *рис. 35*. Тоді максимум можна провести $5\cdot4+1=21$ діагональ, що відповідає зафарбуванню як раз 42 клітинок.

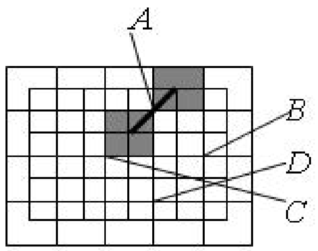


Рис. 35

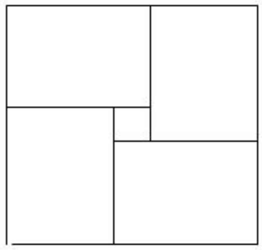


Рис. 34

4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ з кутами ABC та BCD рівними $120°$, O - точка перетину діагоналей, M - середина сторони BC, K - точка перетину відрізків MO та AD. Відомо, що $\angle BKC=60°$. Доведіть, що $\angle BKA=\angle CKD=60°$.

(Сердюк Назар)

<u>Розв’язання.</u> Нехай прямі AB та CD перетинаються в точці E. За умовою $\angle BKC=60°$. Доведемо, що $BK>\frac{1}{2}BC$. Справді, один з кутів $\angle KBC$ чи $\angle KCB$ не менше $60°$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що це $\angle KBC$ (рис. 36). Тоді у ΔBMK $\angle KBM\ge60°=\angle BKC>\angle BKM$. Звідси $MK>BM$, отже на відрізку BK знайдеться така точка O', що $MK\cdot MO'=BM^2=MC^2$. Тоді описані кола $\Delta BO'K$ та $\Delta CO'K$ дотикаються до BC. Отже, $\angle BKM=\angle O'BC$, $\angle CKM=\angle O'CB$. Тоді

$$\angle BO'C=180°-\angle O'BC-\angle O'CB=$$

$$=180°-\angle BKM-\angle MKC=180°-60°=120°$$

Тоді точка O' належить описаному колу ΔEBC. Нехай пряма BO' перетинає CE у D', а CO' перетинає BE у точці A'. З вписаності чотирикутника $BECO'$ маємо, що

$$\angle BO'E = \angle BCE = 60^\circ = \angle EBC = \angle EO'C.$$

Розглянемо трикутники $\Delta O'EB$ та $\Delta EBD'$. У них дві пари кутів рівні. Отже в третій парі кути рівні, тобто $\angle BEO' = \angle ED'B$. Тоді $\angle BEO' = \angle BCO' = \angle CKO' = \angle ED'B$. Звідси точка D' належить описаному колу трикутника $\Delta KO'C$. Аналогічно, точка A' належить описаному колу трикутника $\Delta BKO'$. Тоді $\angle A'KB = \angle A'O'B = 60^\circ = \angle CO'D' = \angle CKD'$. Це означає, що точки A', K та D' лежать на одній прямій.

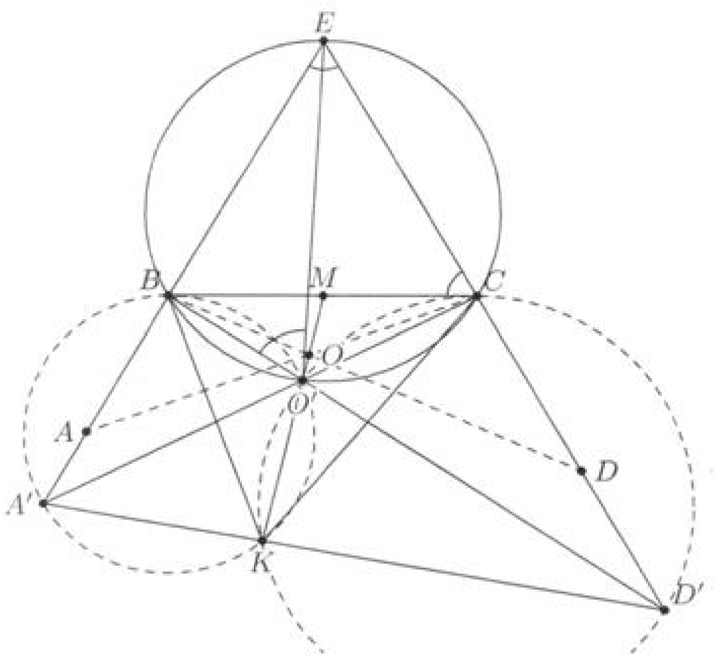


Рис. 36

Точка O лежить десь на відрізку MK. Якщо ця точка всередині відрізка MO', то точка A лежить всередині відрізка $A'B$, а D - всередині CD'. Тоді точка K лежить строго за межами трикутника ΔEAD, але за умовою точка K належить відрізку AD - маємо суперечність. Аналогічно, якщо точка O розташована поза MO', то точки A, D лежать поза відрізками EA' та ED', тобто точка K лежить строго всередині трикутника ΔEAD, знову маємо суперечність. Це означає, що $O = O'$. Тоді $A = A'$ та $D = D'$. А вже було доведено вище, що $\angle A'KB = \angle CKD' = 60^\circ$, що і треба було довести, оскільки $A = A'$ та $D = D'$.

2.2. Умови та розв'язання задач другого дня

<u>8 клас</u>

5. Відомо, що для чисел a, b, c справджується умова: середнє арифметичне чисел a, b дорівнює числу c, тобто $c = \frac{1}{2}(a+b)$, а середнє гармонічне чисел a, c дорівнює числу b, тобто $b = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$. Чи обов'язково числа a, b, c рівні між собою?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь</u>: не обов'язково.

Розв'язання. Перепишемо умову про середнє гармонічне: $b=\frac{2ac}{a+c}$, а тепер сюди підставимо замість $c=\frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$2a\cdot\frac{a+b}{2}=b\left(a+\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow a^2+ab=ba+\frac{ab+b^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2=ba+b^2 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)(2a+b)=0.$$

Виберемо, наприклад, $a=2$, тоді $b=-4$, звідси $c=-1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

6. У трапеції $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями точки P, N, Q, M – середини сторін AB, BC, CD, DA відповідно. На основі CD існує точка L, яка відмінна від точки Q, для якої кут MLN – прямий. Знайдіть величину кута LPA.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $90°$.

Розв'язання. За теоремою Варіньона чотирикутник $MPNQ$ є паралелограмом, причому його сторони паралельні діагоналям трапеції $ABCD$, а тому він є прямокутником (*рис. 37*). Нехай O – точка перетину AC і BD. Тоді з властивості прямокутного ΔMNL маємо $OL=OM=ON \Rightarrow OL=OP=OQ$, тому ΔPQL – прямокутний. Тобто $PL\perp LQ$, а оскільки $AB\parallel CD$, то $PL\perp AB$.

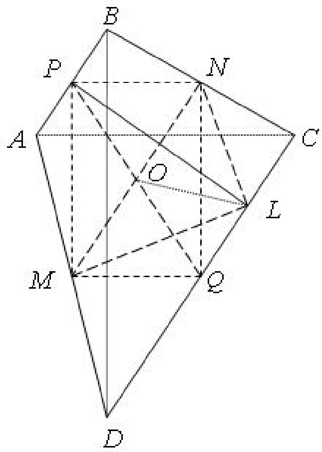


Рис. 37

7. Знайдіть усі такі трійки простих чисел (p, q, r), що задовольняють рівність

$$\frac{q}{p-1}+\frac{r}{p+1}=\frac{q+r+1}{p}.$$

(Ясінський В'ячеслав)

Відповідь: $p=q=2, r=3$ та $p=q=3, r=2$.

Розв'язання. Перепишемо нашу рівність у такий спосіб:

$$\frac{q}{p-1}-\frac{q}{p}=\frac{r}{p}-\frac{r}{p+1}+\frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{q}{p(p-1)}=\frac{r}{p(p+1)}+\frac{1}{p} \Leftrightarrow$$
$$\frac{q}{p-1}=\frac{r}{p+1}+1 \Leftrightarrow q=\frac{(p-1)r}{p+1}+p-1 \Leftrightarrow q=p+r-1-\frac{2r}{p+1}.$$

Оскільки p, q, r – прості, то число $\frac{2r}{p+1}$ – натуральне. Число $2r$ має всього чотири дільники: 1, 2, r та $2r$. Оскільки $p+1 \geq 3$, можливі лише два випадки: $p+1=r$ або $p+1=2r$.

1. Нехай $p+1=r$, тобто $p=r-1$. Оскільки єдина пара послідовних простих чисел – це 2 та 3, то $p=2$ та $r=3$. Тоді знаходимо, що $q=2$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p=q=2, r=3$ є шуканою.

2. Нехай $p+1=2r$, тобто $p=2r-1$. Тоді знаходимо, що $q=3r-3 \vdots 3$, оскільки q – просте, то $q=3$. Далі послідовно знаходимо, що $r=2, p=3$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p=q=3, r=2$ є шуканою.

8. На колі розташовані N точок. Андрій та Олеся грають у таку гру. Першим ходить Андрій. Вони по черзі з'єднують дві із заданих точок хордою, якщо вона не перетинає жодну з раніше проведених хорд у внутрішній точці. Перемагає той, після ходу якого утвориться трикутник з проведених хорд. Хто перемагає при правильній грі обох суперників, якщо

а) $N=14$;

б) $N=15$?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь</u>**: **а) перемагає Андрій, ***б)*** перемагає Олеся.

<u>Розв'язання</u>. Зрозуміло, що програє той, хто вимушений провести хорду з точки, з якої вже проведена інша хорда (*рис. 38*). Наприклад, один гравець проводить AC, а хорда AB вже була проведена раніше (будемо вважати, що з точки A більше не виходить жодна хорда). Тоді інший гравець просто проведе хорду BC і переможе. Зрозуміло, що цю хорду провести можна, бо якщо б BC перетинала деяку іншу хорду, наприклад, MN, то одна з точок, нехай M, належить дузі $\cup BC$, а інша – ні. Тобто, точка N попадає або на дугу $\cup AB$, і тоді MN перетинає AB, або на дугу $\cup AC$, і тоді MN перетинає AC.

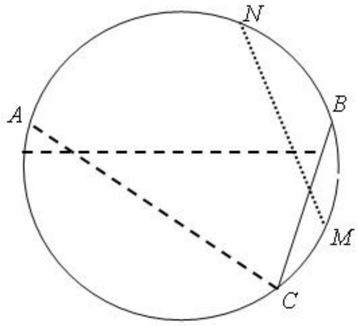


Рис. 38

Таким чином гра триватиме доти, доки один з гравців не буде вимушений провести другу хорду з однієї точки і програє. Тобто спочатку обидва гравці будуть проводити лише хорди, які з'єднують «вільні» точки, тобто точки, з яких не проведена жодна хорда. У кожний момент усі вільні точки розбиваються на «групи», всередині кожної з яких можна з'єднати будь-які дві точки. При цьому подальше проведення хорд всередині групи не залежить від інших груп і не впливає на інші групи. Тобто позицію після кожного ходу можна записати списком груп, за кількістю вільних точок в ній. Якщо наступна хорда проводиться в групі, що містила m точок, то на місті старої групи з'являються дві групи, що містять m_1 та m_2 вершин, де $m_1+m_2=m-2$ (при цьому одна чи обидві групи можуть бути порожніми).

Таким чином початкову позицію для $N = 15$ можна записати як (15), а після проведення першої хорди може утворитись, наприклад, така позиція $(10; 3)$, $(8; 5)$, або $(13; 0)$ тощо. Після наступного ходу будуть вже 3 групи, при цьому групи з (0) та (1) можна не враховувати, бо в них не можна провести хорду, яка не веде до поразки.

Покажемо тепер прості властивості груп точок, які пришвидшать процес аналізу поточної ситуації.

Властивість 1. У групі з 3 точок завжди можна провести 1 хорду, у групі з 5 точок завжди можна провести 2 хорди.

Властивість 2. У групі з 4 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати будь-який з двох варіантів розбиття: $(1; 1)$ чи $(2; 0)$, тобто там можна провести або 1, або 2 хорди, в залежності від ходу цього гравця.

Властивість 3. У групі з 6 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати один з таких варіантів розбиття: $(2; 2)$ чи $(3; 1)$, тобто там можна провести або 3, або 2 хорди.

Властивість 4. Якщо виникає симетрична ситуація (тобто групи точок можна розбити на пари з рівними кількостями точок в них), то перемагає той, хто зробив хід в таку симетричну ситуацію.

Доведення цих властивостей майже очевидне і проводиться простим перебором. Дамо пояснення до властивості 4. Якщо після ходу одного з гравців маємо ситуацію $(k; k)$, то він перемагає, використовуючи симетричні ходи по відношенню до ходів супротивника. Можливі інші симетричні ситуації, але вони є аналогічними за суттю.

Домовимось у подальшому не вказувати групи (1) та (0), бо вони не впливають на подальший хід гри.

а) Андрій перемагає завдяки ходу $(6; 6)$, звідки з властивості 4 випливає його перемога завдяки подальшій симетричній стратегії.

б) Олеся перемагає. Подивимось на можливі перші ходи Андрія.

Варіант 1. (13): Олеся перемагає завдяки ходу $(8; 3)$. Подивимось на можливі відповіді Андрія.

Варіант 1.1. (8): (фактично це був хід $(8; 1; 0)$ але дві останні групи ми не вказуємо). Тоді Олеся ходить $(3; 3)$ і перемагає завдяки симетричній стратегії.

Варіант 1.2. $(3; 6)$: Оскільки є група (3), де можливий 1 хід, та група (6), де Олеся може вибрати скільки ходів триватиме гра, то вона розбиває належним чином групу (6). А саме, вона повинна зробити хід в позицію $(3; 6) \to (3; 3)$.

Варіант 1.3. $(3; 5)$: гра триває точно 3 ходи, останньою ходить Олеся і перемагає.

Варіант 1.4. $(3; 4; 2)$: завдяки групі (4) Олеся перемагає. Вона повинна залишити групи $(2,3)$.

Варіант 1.5. $(3; 3; 3)$: очевидно, що Олеся перемагає.

Варіант 2. $(12)\to(5;\ 5)$ і перемагає Олеся.

Варіант 3. $(11;\ 2)\to(8;\ 2)$. У Андрія є такі варанти ходу:

Варіант 3.1. $(6;\ 2)$, Олеся ходить в $(3;\ 2)$ і виграє.

Варіант 3.2. $(5;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

Варіант 3.3. $(4;\ 2;\ 2)$, Олеся ходить в групі, де 4 точки в $(2;\ 2)$ і виграє.

Варіант 3.4. $(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

Варіант 4. $(10;\ 3)\to(5;\ 3;\ 3)$ і гра триватиме ще 4 ходи, тобто перемагає Олеся.

Варіант 5. $(9;\ 4)\to(9)$. Далі можливі декілька підваріантів, які легко приводять до перемоги Олесі. $(9)\to(7)\to(5)$, або $(9)\to(6)\to(2;\ 2)$, або $(9)\to(4;\ 3)\to(2;\ 3)$.

Варіант 6. $(8;\ 5)\to(5;\ 5)$.

Варіант 7. $(7;\ 6)\to(7;\ 3)$ У Андрія є такі варанти ходу:

Варіант 7.1. (7), Олеся ходить в (5) і виграє.

Варіант 7.2. $(5;\ 3)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

Варіант 7.3. $(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

9 клас

5. Відомо, що для чисел $a,\ b,\ c$ справджується умова: середнє арифметичне чисел a, b дорівнює числу c, тобто $c=\frac{1}{2}(a+b)$, а середнє геометричне чисел a, c дорівнює числу b, тобто $b=\sqrt{ac}$. Чи обов'язково числа $a,\ b,\ c$ рівні між собою?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: не обов'язково.

Розв'язання. Підставимо у рівність $b^2=ac$ замість $c=\frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$b^2=a\cdot\frac{a+b}{2}\ \Leftrightarrow\ 2b^2=ba+a^2\ \Leftrightarrow\ (b-a)(2b+a)=0.$$

Виберемо, наприклад, $b=2$, тоді $a=-4$, звідси $c=-1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

6. У трикутнику ABC на сторонах BC та AB вибрано точки A_1 та C_1 відповідно такі, що $AA_1 = CC_1$. Відрізки AA_1 та CC_1 перетинаються в точці F. Виявилось, що $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$. Доведіть, що $AA_1 = AC$.

(Гоголєв Андрій)

Розв'язання. Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{A_1A}$ (*рис. 39*). Тоді AA_1CC_3 – паралелограмам, $CC_1C_2C_3$ – ромб. Тоді $\angle C_1CC_3 = \angle C_1FA = \angle CFA_1 = 2\alpha$, звідси

$$\angle C_1AC_3 = 180° - \angle ABC = 180° - \tfrac{1}{2}\angle CFA_1 = 180° - \alpha .$$

Тепер якщо побудувати коло з центром у точці C, то центральний кут $\angle C_1CC_3 = 2\alpha$, тому вписаний кут, що спирається на дугу C_1C_3, дорівнює α, і точка A лежить на цьому ж колі. Звідси $AC = CC_3 = AA_1$, що й треба було довести.

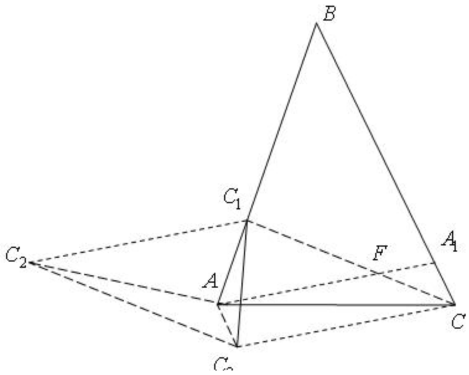


Рис. 39

Альтернативне розв'язання. Проведемо пряму l, що є бісектрисою вертикальних кутів A_1FC та C_1FA. Нехай ця пряма перетинає відрізки AC_1 та CA_1 у точках P та Q відповідно (*рис. 40*).

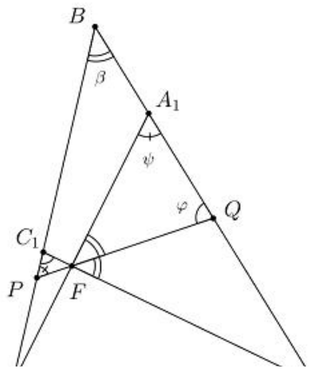


Рис. 40

Оскільки, за умовою, $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$, то $\angle QFA_1 = \angle PBA_1$. Це означає, що чотирикутник PBA_1F є вписаним. Аналогічно є вписаним також чотирикутник QBC_1F. Для того, щоб виконувалась рівність $AA_1 = AC$, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність кутів $\angle AA_1C = \angle ACA_1$.

Оскільки чотирикутник PBA_1F є вписаним, то $\angle AA_1C = \angle QPB$. Тобто нам достатньо довести, що $\angle ACB = \angle BPQ$. Ця рівність кутів рівносильна тому, що трикутники ABC і QBP є подібними, тобто що $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{QB}{BP}$. Знову скористаємось тим, що чотирикутник PBA_1F є вписаним. За теоремою про добуток відрізків січних $AP \cdot AB = AF \cdot AA_1$. Аналогічно $CQ \cdot CB = CF \cdot CC_1$. Розділимо першу рівність на другу і отримаємо, що має місце рівність $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{AP}{CQ} \cdot \dfrac{AB}{BC}$ (ми скористались тим, що $AA_1 = CC_1$).

Тепер нам достатньо довести, що $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{AP}{CQ} \cdot \dfrac{QB}{BP} \Leftrightarrow \dfrac{QB}{BP} = \dfrac{AF}{PA} \cdot \dfrac{CQ}{CF}$. Позначимо $\angle ABC = \angle QFC = \angle PFA = \beta$, $\angle FQB = \angle FC_1A = \varphi$,

$\angle FPB = \angle FA_1C = \psi$. За теоремою синусів для трикутника QBP маємо $\frac{QB}{BP} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника FQC маємо $\frac{CQ}{CF} = \frac{\sin\beta}{\sin(180°-\varphi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника FPA маємо $\frac{AF}{PA} = \frac{\sin(180°-\psi)}{\sin\beta} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$. Звідси маємо, що $\frac{QB}{BP} = \frac{AF}{PA}\cdot\frac{CQ}{CF} \Leftrightarrow$ $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$, а остання рівність, очевидно є вірною.

7. Знайдіть усі прості числа $p<q<r$ такі, що числа $A=(r-p)(r-q)(q-p)+1$ і $B=3p+5q$ дорівнюють одному й тому самому простому числу.

(Ясінський В'ячеслав)

<u>Відповідь:</u> $p=2,\ q=5,\ r=7$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай p, q, r – прості числа, для яких виконується умова задачі. Якщо $p>2$, то усі числа p, q, r – непарні, а тому число $A=3p+5q$ – парне, а число $B=(r-p)(r-q)(q-p)+1$ – непарне, що суперечить умові задачі. Отже, $p=2$, тоді за умовою виконується рівність:

$$(r-2)(r-q)(q-2)+1=6+5q.$$

Оскільки $p<q<r$, то $r-2>q-2$ і $r-q\geq 2$. Тому, $6+5q>2(q-2)^2+1$. Якщо розв'язати останню нерівність, то будемо мати, що $q<7$. Прості числа, що задовольняють цій нерівності, - це $q=3$ та $q=5$.

Якщо $q=3$, то $B=3p+5q=21$ – не є простим числом.

Якщо $q=5$, то $B=3p+5q=31$ - просте число, тоді повинно $A=(r-2)(r-5)\cdot 3+1=31$, тобто $r^2-7r=0$, звідки $r=7$.

8. Є $2k+1$ людина, усі попарно різного зросту. Позначимо їх зріст у порядку зростання – від найнижчого до найвищого, таким чином: $a_1<a_2<\ldots<a_{2k+1}$. Після цього вишукуємо їх довільним чином у вигляді таблиці $M\times N$ (M рядків та N стовпчиків). Тепер у кожному з M рядків вибираємо середнього за зростом. А далі з цих середніх за зростом M людей вибираємо середнього за зростом, якого назвемо ***середняк***.

а) Який найменший зріст може мати середняк, якщо $2k+1=2015$?

б) Який найменший зріст може мати середняк для довільного k?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: ***а)*** 528; ***б)*** найменший номер $(m+1)(n+1)$, де $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, при цьому множники є найближчими один до іншого серед усіх можливих.

Розв'язання. Зрозуміло, що якщо переставити два стовпчики місцями, то номер середнього не зміниться. Так само буде і з рядками.

Оскільки усього $2k+1=M\cdot N$ – непарне число, то M та N – непарні, покладемо $M=2m+1$, $N=2n+1$. Тоді позначимо середніх у кожному з M рядків $b_1, b_2, ..., b_M$. Шляхом перестановок рядків можемо добитися того, що $b_1<b_2<...<b_M$. Тоді середняком є b_{m+1}. Підрахуємо, вище скількох людей він точно буде. У кожному з $m+1$ перших рядків відповідний b_i є середнім, $i=\overline{1,\ m+1}$, а тому вищим за n людей. Оскільки b_{m+1} вищий за b_i, $i=\overline{1,\ m}$, то разом маємо, що він вищий за $(m+1)n$ та ще m, тобто разом: $mn+m+n$. Тому номер середнього не менший за $mn+m+n+1=(m+1)(n+1)$.

Тепер треба розв'язати таку задачу: знайти найменше можливе значення добутку $(m+1)(n+1)$, за умови, що $2k+1=(2m+1)(2n+1)$. Позначимо $\sqrt{2k+1}=k_1$, розглянемо такі дві пари чисел $(m,\ n)$ та $(m_1,\ n_1)$, що задовольняють умови: $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, $2k+1=(2m_1+1)(2n_1+1)$ та $1\le 2m+1<2m_1+1\le 2n_1+1<2n+1\le 2k+1$. Покладемо $2m+1=\frac{k_1}{a}$, $2n+1=k_1a$, $2m_1+1=\frac{k_1}{b}$, $2n_1+1=k_1b$, $a>b\ge 1$. Тоді $2m+2=\frac{k_1}{a}+1$, $2n+2=k_1a+1$, $2m_1+2=\frac{k_1}{b}+1$, $2n_1+2=k_1b+1$, порівняємо такі вирази:

$$(m+1)(n+1)-(m_1+1)(n_1+1)=$$
$$=\tfrac{1}{4}\big((2m+2)(2n+2)-(2m_1+2)(2n_1+2)\big)=$$
$$=\tfrac{1}{4}\Big(\big(\tfrac{k_1}{a}+1\big)(k_1a+1)-\big(\tfrac{k_1}{b}+1\big)(k_1b+1)\Big)=$$
$$=\tfrac{1}{4}\Big(k_1^2+k_1\big(\tfrac{1}{a}+a\big)+1-k_1^2-k_1\big(\tfrac{1}{b}+b\big)-1\Big)=$$
$$=\tfrac{k_1}{4}\Big((a-b)-\big(\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}\big)\Big)=\tfrac{k_1}{4}\Big((a-b)-\tfrac{a-b}{ab}\Big)=\tfrac{k_1}{4}(a-b)\tfrac{ab-1}{ba}>0.$$

Таким чином, найменше значення набувається для випадку, коли ці множники найближчі один до іншого.

б) Якщо $2k+1=(2i+1)^2$, то найближчі дільники – рівні, це $(2i+1)$ та $(2i+1)$, і найменший номер для середняка i^2. Якщо $(2k+1)$ не є повним квадратом, то дільників парна кількість, і можемо виписати усі дільники числа $2k+1$ у порядку зростання: $1=d_1<d_2<...<d_{2l}=2k+1$. Тоді симетрично розташовані дільники якраз дають у добутку число $2k+1$. Таким чином, шуканими є $d_l=2j+1$ та $d_{l+1}=2t+1$, і шуканим номером є $(j+1)(t+1)$.

а) Якщо $2k+1=2015=5\cdot 13\cdot 31$, то дільники можна виписати таким чином:

$$1<5<13<31<65<155<403<2015.$$

Середні – це $31 = 15 \cdot 2 + 1$ та $65 = 32 \cdot 2 + 1$, тому шуканий номер середнього – це $(15+1)\cdot(32+1) = 528$.

10 клас

5. Знайдіть найбільше натуральне число, що ділиться націло на 7 та має у своєму записі лише непарні цифри, сума яких 2015.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $11113\underbrace{11...1}_{2008}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що число є тим більшим, чим більше має цифр. Оскільки кожна цифра дорівнює мінімум 1, то максимальна кількість цифр може бути 2015. Таке число єдине: $\underbrace{11...1}_{2015}$, оскільки $111111 = 15873 \cdot 7$, $11111 \not\vdots\, 7$ та $2015 = 335 \cdot 6 + 5$, то це число на 7 не ділиться.

Шукане число не може мати 2014 цифр, оскільки сума 2014 непарних чисел не може дорівнювати непарному числу.

Таким чином шукане найбільше число може мати максимум 2013 цифр. Очевидно, що воно повинно мати 2012 цифр 1 та одну цифру 3, ніякі інші варіанти неможливі. Знайдемо найбільше число такої структури, яке кратне 7. Це означає, що треба знайти таке число з цифрою 3 у найбільшому можливому розряді. Тобто шукане число має такий вигляд: $A = \underbrace{11...1}_{2013} + 2 \cdot 10^k$, де $k \le 2012$, при цьому A повинно ділитись на 7 та k – максимальне можливе.

Оскільки $A = \underbrace{11...1}_{2010}000 \,\vdots\, 7$, бо $2010 = 335 \cdot 6$ та $111111 \,\vdots\, 7$, то повинно ділитись на 7 ось таке число: $B = 111 + 2 \cdot 10^k$. Оскільки $111 \equiv 6 \pmod 7$, то повинно бути виконано $2 \cdot 10^k \equiv 1 \pmod 7$. Розглянемо періодичність остач таких чисел за модулем 7 (не забудемо, що $10 \equiv 3 \pmod 7$):

$$2 \cdot 10^0 \equiv 2 \pmod 7,\ 2 \cdot 10^1 \equiv 6 \pmod 7,\ 2 \cdot 10^2 \equiv 4 \pmod 7,\ 2 \cdot 10^3 \equiv 5 \pmod 7$$
$$,\ 2 \cdot 10^4 \equiv 1 \pmod 7,\ 2 \cdot 10^5 \equiv 3 \pmod 7,\ 2 \cdot 10^6 \equiv 2 \pmod 7, \ldots$$

і далі за циклом таким чином шукані значення для k треба шукати у вигляді $k = 6l + 4$. Оскільки $2010 = 335 \cdot 6$, то найбільше можливе значення для $k = 334 \cdot 6 + 4 = 2008$, відповідно до цього шукане найбільше число – це $11113\underbrace{11...1}_{2008}$.

6. *а)* Андрій та Олеся отримали по набору з карток, на яких написані усі цілі числа від 1 до 2015. Після цього Олеся залишає собі деяку кількість карток (але не усі) зі свого набору, а решту відкладає. Андрій робить так само. На координатній площині розглядаються ті 2015^2 точок, які мають обидві цілі координати в межах від 1 до 2015 кожна. Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, а Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Олесиних карток (при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані у два кольори). Доведіть, що при будь-якому виборі карток, вони не зможуть досягти того, щоб кожна з 2015^2 точок була пофарбована принаймні в один з двох кольорів?

б) До Андрія та Олесі приєдналася Оксана, яка взяла собі усі картки, які відклали Олеся та Андрій. Після цього вони вже утрьох фарбують точки на новій чистій площині таким чином: Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Оксаниних карток, а Оксана фарбує у зелений колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Олесиних карток (знову при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані в декілька кольорів). При якому виборі карток Олесею та Андрієм вони утрьох зафарбують кожну з 2015^2 точок принаймні в один колір?

(Рубльов Богдан)

Відповідь**:* ***б) на усіх картках, що не вибрали Олеся та Андрій усі числа різні.

Розв'язання*. *а) Без обмеження загальності будемо вважати, що Олеся не вибрала картку з числом a. Тоді точка $(a; a)$ не зможе бути пофарбованою. Справді, Олеся її не фарбує, бо у цієї точки перша координата a, а Андрій не фарбує, бо у цієї точки друга координата a.

б) Якщо є однакове число, наприклад 1, яке було не вибране обома, то точка (1, 1) не може бути зафарбованою ні Олесею, ні Андрієм (бо перша координата 1), ні Оксаною, бо друга координата 1.

Нехай тепер усі картки в наборах, що не обрані Олесею та Андрієм – попарно різні. Звідси зрозуміло, що кожне з чисел від 1 до 2015 було обрано принаймні одним з двох. Покажемо, що за таких умов усі точки будуть зафарбовані.

Розглянемо точку $(a; b)$ і можливі випадки:

a – серед обраних Олесею, b – Андрієм. Тоді цю точку фарбує Олеся.

Якщо b – Андрієм не обране, то його обрала Олеся та воно дісталося Оксані.

Якщо a – серед обраних і Андрієм, то $(a; b)$ фарбує Андрій. Якщо ні, то a дісталися Оксані і Олесі, бо його не обрав Андрій, тому $(a; b)$ фарбує Оксана.

a – немає серед обраних Олесею, тому воно є у Андрія та Оксани. Якщо b є у Олесі, то $(a; b)$ фарбує Оксана, якщо його у Олесі немає, то воно є у Оксани і точку $(a; b)$ фарбує Андрій.

Твердження доведене.

7. У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1 та BB_1 перетинаються в точці H. Побудуємо два кола w_1 та w_2 з центрами в точках H та B і радіусами

HB_1 та BB_1 відповідно. З точки C до кіл w_1 та w_2 проведемо дотичні, які дотикаються до цих кіл у точках N та K, відмінних від B_1, відповідно. Доведіть, що точки A_1, N та K лежать на одній прямій.

(Нагель Ігор)

Розв'язання. Проведемо третю висоту CC_1 (*рис. 41*). Навколо чотирикутника AB_1HC_1 можна описати коло, тому $\angle A = 180° - \angle C_1HB_1 = \angle B_1HC$. Оскільки $\Delta B_1HC = \Delta NHC$, то $\angle A = \angle CHN$.

Навколо чотирикутників HA_1NC та AC_1A_1C можна описати кола, оскільки $\angle HA_1C = 90°$, $\angle HNC = 90°$, $\angle AC_1C = 90°$.

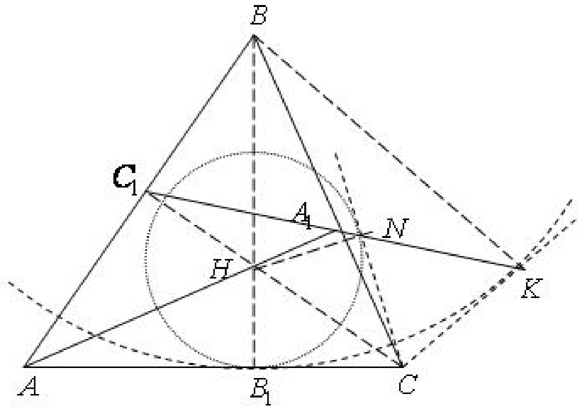


Рис. 41

Звідси, $180^0 - \angle C_1A_1C = \angle BAC = \angle CHN = \angle CA_1N$. Точки C_1, A_1 та N лежать на одній прямій. Оскільки BA_1HC_1 – вписаний, то $\angle HC_1A_1 = \angle HBA_1$, але ж $\angle A_1BK = \angle HBA_1$. Оскільки точки C, C_1, B, K лежать на одному колі, то $\angle CBK = \angle KC_1C$, звідки випливає, що точки C_1, A_1 та K лежать на одній прямій. Оскільки точки C_1 та A_1 – різні, то усі чотири точки C_1, A_1, N та K лежать на одній прямій, що й треба було довести.

8. Знайдіть усі такі функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, що для усіх дійсних x, y, справджується рівність:

$$4f\left(x + f(y)\right) = f(x) + f(y) + f(xy) + 1.$$

(Анікушин Андрій)

Відповідь: $f(x) \equiv 1$.

Розв'язання. Припустимо, що існує $a \neq 0$, для якого $f(a) = f(0) = b$. Тоді у початкове рівняння зробимо такі підстановки.

Спочатку $y = 0$:

$$4f(x+b) = f(x) + b + b + 1.$$

Тепер підставимо $y = a$:

$$4f(x+b) = f(x) + b + f(xa) + 1.$$

Якщо їх порівняти, матимемо, що $f(ax) = b$, звідки шукана функція - константа. Якщо $f(x) = b$ підставити у початкове рівняння, матимемо, що $4b = 3b + 1$, звідки із сталих функцій умову задовольняє функція $f(x) \equiv 1$. Інакше, з умови $f(a) = f(0)$ випливає, що $a = 0$.

З симетричності правої частини маємо, що ліва повинна також бути симетричною стосовно змінних x, y, тому справджується рівність:

$$f\left(x+f(y)\right)=f\left(y+f(x)\right).$$

Підставимо в це рівняння $x=-f(y)$, тоді матимемо, що

$$f(0)=f\left(-f(y)+f(y)\right)=f\left(y+f(-f(y))\right)\Rightarrow y+f(-f(y))=0$$

$$f(-f(y))=-y.$$

Тепер підставимо у початкове рівняння $x=1$ та $y=-f(t)$:

$$4f\left(1+f(-f(t))\right)=f(1)+f(-f(t))+f(-f(t))+1$$

Якщо скористатися умовою, матимемо, що

$$4f(1-t)=f(1)-t-t+1.$$

Покладемо в отриманій умові $t=1-z$, звідси

$$4f(z)=f(1)-2(1-z)+1=2z+c_1 \text{ або } f(z)=\tfrac{1}{2}z+c.$$

Підставимо це співвідношення у задане рівняння:

$$4f(x+\tfrac{1}{2}y+c)=4(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}c+c)=2x+y+6c=$$
$$=\tfrac{1}{2}x+c+\tfrac{1}{2}y+c+\tfrac{1}{2}xy+c+1,$$

яке очевидно не задовольняє умову при усіх можливих $x,\ y$.

11 клас

5. *а)* Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2\ldots a_{2015}-1$ є добутком двох послідовних непарних чисел?

б) Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2\ldots a_{2015}-1$ є добутком двох послідовних парних чисел?

(Ясінський В'ячеслав)

Відповідь*. *а), б) існують.

Розв'язання*. *а) Нехай $a_1=p_1^2,\ a_2=p_2^2,\ \ldots,\ a_{2015}=p_{2015}^2$, де $p_1=2,\ p_2,\ \ldots,\ p_{2015}$ – перші 2015 простих чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і $a_1a_2\ldots a_{2015}-1=\left(p_1p_2\ldots p_{2015}-1\right)\left(p_1p_2\ldots p_{2015}+1\right)$ – добуток двох непарних послідовних чисел.

б) Нехай тепер $a_1=p_1^2,\ a_2=p_2^2,\ \ldots,\ a_{2015}=p_{2015}^2$, де $p_1=3,\ p_2=5,\ \ldots,\ p_{2015}$ – перші 2015 простих непарних чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і
$a_1a_2\ldots a_{2015}-1=\left(p_1p_2\ldots p_{2015}-1\right)\left(p_1p_2\ldots p_{2015}+1\right)$ – добуток двох парних послідовних чисел.

6. Задача № 7 за 10 клас.

7. Послідовність натуральних чисел (a_n) задається правилом: $a_1 = a$, $a_2 = b$, де a та b - натуральні, а для всіх $n \geq 2$ a_{n+1} дорівнює кількості індексів $i, 1 \leq i \leq n$, таких, що $a_i = a_n$. Наприклад, для $a = 2, b = 1$ початок послідовності виглядатиме так (2; 1; 1; 2; 2; 3…). Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких, починаючи з деякого місця, послідовність $(a_n + a_{n+1})$ буде неспадною.

(Чорний Максим)

Відповідь: $a = b = 1$.

Розв'язання. При $a = b = 1$ послідовність має вигляд (1; 1; 2; 1; 3; 1; 4; 1; 5; 1; …), послідовність $(a_n + a_{n+1})$ матиме вигляд (2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; …), тому потрібне твердження виконується.

Нехай числа $a_1 = a$ та $a_2 = b$ не рівні одиниці одночасно. Від перестановки місцями a_1 та a_2 подальші члени послідовності не зміняться, тому вважаємо $a_1 \neq 1$. Зрозуміло, що послідовність (a_n) необмежена. Справді, якщо припустити, що її максимальний член дорівнює s, то серед чисел $\{a_1, a_2, ..., a_{s^2+1}\}$ за принципом Діріхле буде $s+1$ однакове, а тому за означенням послідовності число, що йде після останнього з них, буде не меншим за $s+1$, що призводить до суперечності.

Тепер припустимо, що для $n \geq N$ послідовність $(a_n + a_{n+1})$ є неспадною. Розглянемо $k \geq N+1$ таке, що $a_k = t \geq \max\{a, b\} + 1$, і це перша поява числа t у нашій послідовності. Очевидно, що всі числа до цієї позиції строго менші за t. Тоді $a_{k+1} = 1$ за означенням і $a_{k-1} = 1$ за припущенням неспадності. Це означає, що існує рівно t індексів $\{1 < i_1 < i_2 < ... < i_t = k-1\}$, для яких $a_{i_1} = a_{i_2} = ... = a_{i_t} = 1$. Тоді серед чисел $\{a_{i_1 - 1}; a_{i_2 - 1}; ...; a_{i_t - 1}\}$ за принципом Діріхле буде принаймні одна пара рівних, оскільки всі вони не перевищують $t-1$. Але тоді в послідовності є дві пари чисел вигляду $\{..., k, 1, ...\}$, що йдуть поспіль. Це, очевидно, суперечить умові, бо після другої появи числа k може йти мінімум двійка. Суперечність.

8. Для довільних різних чисел a, b розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a+b), \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a+b)y + ab, \\ x^3 + 3x^2 z = y^2(a+b) + 2yab. \end{cases}$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $x = y = a$, $z = b$ та $x = y = b$, $z = a$.

Розв'язання. Нехай (x, y, z) – деякий розв'язок цієї системи. Побудуємо два многочлени

$$P(t) = (t-x)^3(t-z) = t^4 + p_1 t^3 + q_1 t^2 + r_1 t + s_1 \text{ та}$$

$$Q(t) = (t-y)^2(t-a)(t-b) = t^4 + p_2 t^3 + q_2 t^2 + r_2 t + s_2,$$

і розглянемо такий многочлен $f(t)$:

$$f(t)=P(t)-Q(t)=(p_1-p_2)t^3+(q_1-q_2)t^2+(r_1-r_2)t+(s_1-s_2).$$

Коренями полінома $P(t)$ є числа x, x, x, z, а $Q(t)$ – числа y, y, a, b. За теоремою Вієта для полінома четвертого степеня ми маємо такі рівності:

$$p_1=-(3x+z)=-(2y+(a+b))=p_2,$$

$$q_1=3x^2+3xz=y^2+2(a+b)y+ab=q_2,$$

$$r_1=-(x^3+3x^2z)=-(y^2(a+b)+2yab)=r_2,$$

Таким чином $f(t)=(s_1-s_2)=C=\text{const}$. Висновок: графіки цих двох функцій одержані зсувом вздовж вертикальної осі на деяку сталу C. Зрозуміло, що

$$P'(t)=(t-x)^2(4t-3z-x)$$

$$\equiv Q'(t)=(t-y)\left(4t^2-(3a+3b+2y)t+2ab+y(a+b)\right).$$

Підставимо у квадратний тричлен $R(t)=4t^2-(3a+3b+2y)t+2ab+y(a+b)$ значення $t_0=\frac{1}{2}(a+b)$ і одержимо, що

$$R(t_0)=(a+b)^2-3(a+b)\tfrac{a+b}{2}-2y\tfrac{a+b}{2}+2ab+y(a+b)=$$

$$-\tfrac{(a+b)^2}{2}+2ab=-\tfrac{(a-b)^2}{2}<0.$$

Тобто цей квадратний тричлен має два різних корені, тому його дискримінант додатний. Але в нас має місце тотожності $P'(t)\equiv Q'(t)$ (бо ці многочлени відрізняються на деяку сталу) та $P'(t)$ має $t=x$ коренем кратності 2. Тоді у многочлена $Q'(t)$ також $t=x$ – корінь кратності 2. Оскільки $R(t)$ має два різних корені, то рівно один з них співпадає з x, й $y=x$. Крім того $R(y)=0$, тобто

$$R(y)=4y^2-(3a+3b+2y)y+2ab+y(a+b)=$$
$$=2\left(y^2-(a+b)y+ab\right)=0,$$

що можливо лише при умові $y=a$ або $y=b$. Таким чином остаточно маємо, що

$$f(t)=P(t)-Q(t)=(t-x)^3(t-c)=C,$$

де $c=a$ або $c=b$. Але це можливе лише при умові $z=c$. Звідси випливає, що ці многочлени співпадають і ми маємо два розв’язки:

$$x=y=a,\ z=b, \text{ або } x=y=b,\ z=a.$$

Другу частину можна також довести за допомогою теореми Ролля. Розглянемо многочлен $Q(t)=(t-y)^2(t-a)(t-b)$. Припустимо, що усі значення y, a, b попарно різні, тоді похідна $Q'(t)$ має три різні корені, оскільки $t=y$ є кратним коренем многочлена, а також по одному кореню знаходиться на проміжках між числами y, a, b в залежності від їх величини. Але $P'(t)$ тотожньо співпадає з $Q'(t)$, тому він також повинен мати три різні корені, а він має корінь $t=x$ кратності 2. Одержана суперечність показує, що не усі числа y, a, b є різними. Оскільки за умовою числа a, b – різні то можлива ситуація: або $y=a$, або $y=b$. Оскільки вони аналогічні, то розглянемо спочатку, що $y=a$. Тоді $Q(t)=(t-y)^3(t-b)$, і кубічний многочлен $Q'(t)$ має $t=y$ – корінь кратності 2, а тотожньо рівний йому кубічний многочлен $P'(t)$ має корінь $t=x$ кратності 2, звідси $x=y$, і ми маємо таку рівність:

$$C=(t-x)^3(t-z)-(t-x)^3(t-b)=(t-x)^3(z-b),$$

яка можлива лише за умови $z=b$. Таким чином у цьому випадку ми маємо, що система має такий розв’язок: $x=y=a,\ z=b$. У іншому випадку повністю аналогічно ми маємо другий розв’язоксистеми: $x=y=b,\ z=a$.

Розділ III
56-ТА МІЖНАРОДНА ОЛІМПІАДА ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

3.1. Умови та розв'язання задач першого дня

1. Скінченну множину S точок на площині будемо називати *збалансованою,* якщо для довільних різних точок A і B з множини S знайдеться така точка C з множини S, що $AC = BC$. Множину S будемо називати *ексцентричною*, якщо для довільних трьох різних точок A, B і C з множини S не існує такої точки P з множини S, що $PA = PB = PC$.

а) Доведіть, що для довільного цілого $n \geq 3$ існує збалансована множина, що складається з n точок.

б) Знайдіть всі цілі $n \geq 3$, для яких існує збалансована ексцентрична множина, що складається з n точок.

(Нідерланди)

Відповідь: б) Усі непарні цілі $n \geq 3$.

Розв'язання. а) Розглянемо непарне $n \geq 3$. Розглянемо правильний n-кутник $A_1 A_2 ... A_n$. Покажемо, що множина $V = \{A_1, A_2, ... A_n\}$ є збалансованою. Для кожних двох різних вершин A_i, A_j виберемо вершину A_k, де $2k \equiv i + j \pmod n$ (тобто вона розташована на серединному перпендикулярі до відрізку $A_i A_j$). Неважко зрозуміти, що $A_i A_k = A_k A_j$.

Для парного $n \geq 3$ можна побудувати різні конструкції збалансованих множин. Наведемо один з можливих. Розглянемо правильний $(3n-6)$-кутник $A_1 A_2 ... A_{3n-6}$ з центром у точці O. Тоді покажемо, що шуканою збалансованою множиною буде $V = \{O, A_1, A_2, ... A_{n-1}\}$. Для точок A_i, A_j маємо, що $A_i O = OA_j$. А для пари точок A_i, O побачимо, що $OA_{i-\frac{n}{2}+1} = A_i A_{i-\frac{n}{2}+1}$ при $i \leq \frac{n}{2}$. Якщо ж $i > \frac{n}{2}$, то маємо таку рівність $OA_{\frac{n}{2}-i+1} = A_i A_{\frac{n}{2}-i+1}$.

На *рис.42* показаний приклад для $n = 10$.

б) Для випадку непарного $n \geq 3$ приклад збалансованої ексцентричної множини утворюють так само вершини правильного n-кутника. З міркувань симетрії зрозуміло, що з умови $PA = PB = PC$, де A, B та C вершини цього багатокутника, випливає, що P - центр цього багатокутника, і не належить множині.

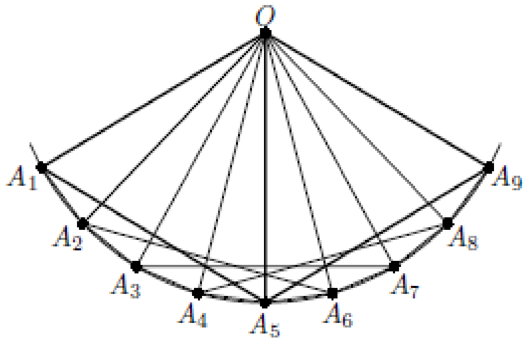


Рис. 42

Припустимо, що шукана множина V існує для парного $n = 2l \geq 3$, тоді для кожної пари точок $A, B \in V$ поставимо їй у відповідність таку точку $C \in V$, для якої $AC = BC$ (із збалансованості множини вона існує). Таких пар усього $\frac{n(n-1)}{2} = l(2l-1)$. Тому існує точка

$P \in V$, яка відповідає щонайменше $\frac{n(n-1)}{2n} = \frac{2l-1}{2} = l - \frac{1}{2}$ парам. Тобто є точка, що відповідає принаймні $l = \frac{n}{2}$ парам. Жодна з цих пар не містить саму точку P, а тому разом вони утворюють щонайбільше $n-1$ точку. Це означає, що існують дві пари, що мають спільну точку. Якщо це пари A, B та A, C, то $PA = PB = PC$ - суперечність, що завершує доведення.

2. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a,b,c), для яких кожне з чисел $ab-c$, $bc-a$, $ca-b$ є степенем двійки.
(Степенем двійки називається число вигляду 2^n, де n - ціле невід'ємне число.)

Відповідь: $(2;\,2;\,2)$, три перестановки трійки $(2;\,2;\,3)$ та по шість перестановок трійок $(2;\,6;\,11)$ та $(3;\,5;\,7)$.

Розв'язання. Очевидно, що задача симетрична для змінних a, b, c. Якщо, наприклад, $a=1$, то числа $b-c$ та $c-b$ одночасно повинні бути степенем двійки, що неможливо бо вони протилежних знаків. Таким чином $a, b, c \ge 2$.

<u>*Випадок 1*</u>. $a=b$. Тоді a^2-c та $a(c-1)$ - степені двійки. Тоді a та $c-1$ також степені двійки. Покладемо $a=2^p$, $c=2^q+1$, $p \ge 1$, $q \ge 0$. Тоді $a^2-c = 2^{2p} - 2^q - 1$ - непарне число при $q \ge 1$. Тому воно може бути степенем двійки при $q \le 1$. При інших q, якщо $2p \le q$ це буде від'ємне число, інакше – воно буде більше 3. Таким чином при $q=0$ маємо число $2^{2p}-2 = 2(2^{2p-1}-1)$ - воно може бути степенем двійки лише при $p=1$, звідси маємо першу відповідь. При $q=1$ маємо число $2^{2p}-3$ - воно непарне, а тому може стати степенем двійки лише за умови, що воно дорівнює 1, що можливе при $p=1$, звідси маємо другу групу відповідей.

<u>*Випадок 2*</u>. Усі змінні попарно різні. Покладемо тоді $2 \le a < b < c$. Нехай існують такі цілі невід'ємні p, q, r, що справджуються рівності: $bc-a=2^p$, $ca-b=2^q$, $ab-c=2^r$. Очевидно, що $p>q>r$.

<u>*Випадок 2.1*</u>. Нехай $a=2$. Припустимо, що $r>0$, тоді з рівності $2b-c=2^r$ випливає, що c - парне, так само і b парне з іншої рівності. Але тоді у рівності $bc-2=2^p$ маємо, що ліва частина рівна $2 \pmod 4$, тобто $p=1$, що суперечить вибору для r. Таким чином єдина можливість $r=0$, звідси $c=2b-1$, тоді з рівності $ca-b=2^q$ маємо, що $3b-2=2^q$. Таким чином b - парне, значення $b=2;\,4$ умову не задовольняє, $b=6$ дає $q=4$, звідси $c=11$ і маємо третю групу розв'язків. Якщо ж $q \ge 5$, то першу із рівностей $bc-a=2^p$ можна переписати таким чином:

$$9 \cdot 2^p = 9b(2b-1) - 18 = (3b-2)(6b+1) - 16 = 2^b(2^{b+1}+5) - 16.$$

За таких умов ліва частина кратна 32, а права – ні, оскільки $p>q \ge 5$.

<u>*Випадок 2.2*</u>. Нехай $a \ge 3$. Зафіксуємо таке число $\delta \in \{-1;\,1\}$, для якого $c-\delta$ не ділиться на 4. Тоді зробимо такі перетворення:

$$2^p + \delta \cdot 2^q = (bc - a\delta^2) + \delta(ca - b) = (b + a\delta)(c - \delta),$$

тут ліва частина кратна 2^q, а тому вираз $(b + a\delta)$ повинен ділитися принаймні на 2^{q-1}. Оскільки

$$2^q = ac - b > (a-1)c \geq 2c,$$

а тому $a < b < c \leq 2^{q-1}$, а тому останнє можливе лише за умови, що $b + a\delta = 2^{q-1}$, при цьому повинно виконуватись умови: $\delta = 1$ та $b + a = 2^{q-1}$. Тоді з умови $ca - b = 2^q$ маємо, що $ca - b = 2(a+b)$. Звідси $4b > a + 3b = a(c-1) \geq ab$. Таким чином єдине можливе значення $a = 3$. Тепер з одержаних рівностей $c = b + 2$, крім того $bc - a = b(b+2) - 3 = (b-1)(b+3)$ - є степенем двійки. Тому кожен з множників $b - 1$ та $b + 3$ є степенями двійки, оскільки їх різниця дорівнює 4, то це можливо лише за умови $8 - 4 = 4$ і $b = 5$, звідки $c = 7$, що дає останній можливий розв'язок.

3. Нехай ABC - гострокутний трикутник, у якого $AB > AC$, Γ - коло, описане навколо нього, H - його ортоцентр, а F - основа висоти, що проведена з вершини A. Нехай M - середина сторони BC. Нехай Q - така точка на колі Γ, що $\angle HQA = 90^o$, а K - така точка на колі Γ, що $\angle HKQ = 90^o$. Нехай точки A, B, C, K і Q різні і лежать на колі Γ в наведеному порядку.

Доведіть, що описані кола трикутників KQH і FKM дотикаються одне до одного.

Розв'язання. Нехай точка A' - діаметрально симетрична точці A на колі Γ. Оскільки $\angle AQA' = 90°$ та $\angle AQH = 90°$, то точки H, Q, A' - колінеарні. Аналогічно, якщо через Q' позначити точку на Γ, яка діаметральна точці Q, то колінеарними є точки H, K, Q'.

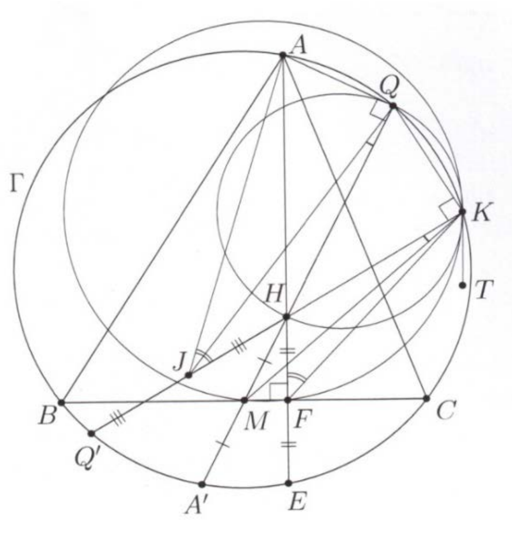


Рис. 43

Нехай пряма AHF перетинає коло Γ вдруге в точці E. Відомо, що M - середина відрізку HA' та F - середина відрізку HE. Позначимо через J середину відрізку HQ'. Розглянемо точку T, для якої пряма TK дотикається до описаного кола ΔKQH у точці K, при цьому точки Q та T лежать по різні боки від прямої KH (*рис. 43*). Тоді $\angle HKT = \angle HQK$, покажемо що $\angle MKT = \angle CFK$. Для цього достатньо побачити, що $\angle HQK = \angle CFK + \angle HKM$. Оскільки $\angle HQK = 90° - \angle Q'HA'$ та $\angle CFK = 90° - \angle KFA$, тобто треба показати, що $\angle Q'HA' = \angle KFA - \angle HKM$. Оскільки $\Delta KHE \sim \Delta AHQ'$, де точки F та J є серединами відповідних сторін, то $\angle KFA = \angle HJA$, аналогічно $\angle HKM = \angle JQH$. Таким чином наша задача зводиться до доведення рівності

$$\angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH.$$

Для уникнення неточностей, зробимо новий рисунок, зобразимо там лише потрібні елементи (*рис. 44*). Тоді обов'язково маємо, що $\angle Q'HA' = \angle HJQ + \angle JQH$ та $\angle HJA = \angle QJA + \angle HJQ$, тому ми просто повинні показати, що $2\angle JQH = \angle QJA$. Для завершення побачимо, що $AQA'Q'$ - прямокутник, точка J, як середина сторони HQ', лежить рівно посередині між паралельними прямими QA' та AQ'.

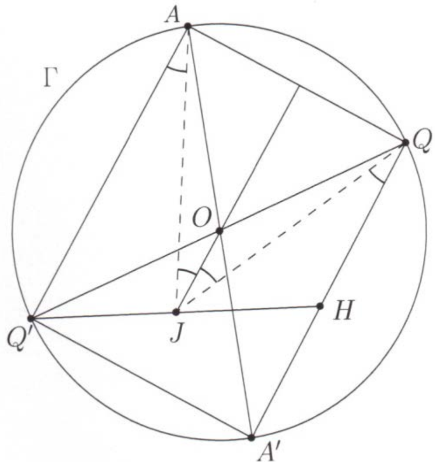


Рис. 44

3.2. Умови та розв'язання задач другого дня

4. Нехай Ω - описане коло трикутника ABC, а точка O - його центр. Коло Γ з центром A перетинає відрізок BC у точках D і E так, що точки B, D, E і C усі різні та лежать на прямій BC у наведеному порядку. Нехай F і G - точки перетину кіл Γ і Ω, при цьому точки A, F, B, C і G лежать на Ω у наведеному порядку. Нехай K - друга точка перетину описаного кола трикутника BDF і відрізка AB. Нехай L - друга точка перетину описаного кола трикутника CGE і відрізка CA.

Нехай прямі FK і GL різні і перетинаються в точці X. Доведіть, що точка X лежить на прямій AO.

Розв'язання. Достатньо довести, що прямі FK та JL симетричні відносно прямої AO. Оскільки відрізки AF та AG є хордами кола Ω однакової довжини, то вони очевидно симетричні відносно прямої AO, тому достатньо показати, що справджується рівність: $\angle KFA = \angle AGL$. Позначимо описані кола трикутників BDF та CEG відповідно через w_B та w_C відповідно. Для доведення шуканої рівності кутів, спочатку побачимо, що (*рис. 45*):

$\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK$.

Використовуючи кола w_B, Γ та Ω, матимемо, що останню рівність можна переписати таким чином:.

$\angle KFA = \angle CEG + \angle GBA - \angle DBK =$

$= \angle CEG - \angle CBG$

Якщо використати кола w_C та Ω, матимемо, що

$\angle KFA = \angle CLG - \angle CAG = \angle AGL$,

а це й завершує розв'язання задачі.

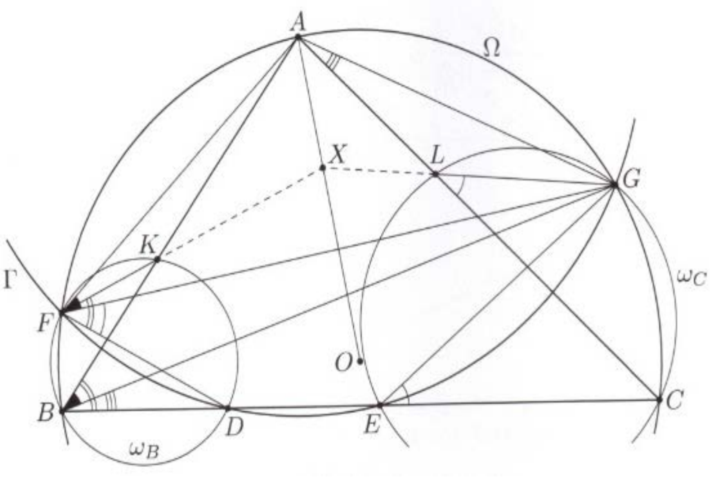


Рис. 45

5. Нехай R - множина всіх дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f: R\to R$, що задовольняють рівність
$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)=yf(x)$ для довільних дійсних чисел x і y.

Відповідь: $f(x)=x$ та $f(x)=2-x$.

Розв'язання. Очевидно, що наведені у відповіді функції задовольняють умову задачі. Позначимо задане в умові співвідношення через **(1)**. Тоді покладемо там $y=1$:

$$f(x+f(x+1))+f(x)=x+f(x+1)+f(x) \text{ або}$$

$$f(x+f(x+1))=x+f(x+1). \qquad \textbf{(2)}$$

Таким чином значення $x+f(x+1)$ є нерухомою точкою функції f для кожного дійсного x. Розглянемо такі два випадки.

<u>*Випадок 1*</u>. $f(0)\neq 0$. Покладемо в **(1)** $x=0$:

$$f(f(y))+f(0)=f(y)+yf(0).$$

Якщо y_0 - точка нерухомості функції f, то покладемо в останню рівність $y=y_0$:

$$f(f(y_0))+f(0)=f(y_0)+y_0f(0) \text{ або } f(y_0)+f(0)=f(y_0)+y_0f(0),$$

звідки $y_0=1$ - єдина можлива нерухома точка, а звідси вже випливає, що $x+f(x+1)=1 \ \ \forall x\in \mathrm{R}$. Таким чином знаходимо перше розв'язання $f(x)=2-x$.

<u>*Випадок 2*</u>. $f(0)=0$. Покладемо в **(1)** $y=0$:

$$f(x+f(x))=x+f(x),$$

а тепер сюди підставимо замість x значення $x+1$:

$$f(x+f(x+1)+1)=x+f(x+1)+1. \qquad \textbf{(3)}$$

Покладемо в **(1)** $x=1$:

$$f(1+f(1+y))+f(y)=1+f(1+y)+yf(1). \qquad \textbf{(4)}$$

Покладемо у рівності **(2)** $x=-1$ і одержимо, що $f(-1)=-1$. Покладемо у рівності **(4)** $y=-1$ $f(1)+f(-1)=1-f(1)$ і матимемо, що $f(1)=1$. Перепишемо рівність (4) таким чином:

$$f(1+f(1+y))+f(y)=1+f(1+y)+y. \qquad \textbf{(5)}$$

Якщо y_0 та y_0+1 - фіксовані точки f, тому такою точкою буде також і y_0+2, оскільки з (2) та (3) випливає, що $x+f(x+1)+2$ - фіксована точка f $\forall x\in \mathrm{R}$, тобто

$$f(x+f(x+1)+2)=x+f(x+1)+2.$$

Покладемо сюди замість x значення $x-2$ матимемо:

$$f(x+f(x-1))=x+f(x-1).$$

Покладемо в **(1)** $y=-1$:

$$f(x+f(x-1))+f(-x)=x+f(x-1)-f(x) \text{ або}$$

$$f(x+f(x-1))=x+f(x-1)-f(x)-f(-x), \text{ звідки}$$

$$f(-x)=-f(x),$$

тобто функція непарна.

Тепер покладемо в **(1)** $x=-1$ та $y=-y$:

$$f(-1+f(-1-y))+f(y)=-1+f(-1-y)+y.$$

З непарності функції це співвідношення можна переписати таким чином:

$$-f(1+f(1+y))+f(y)=-1-f(1+y)+y.$$

Якщо до цієї рівності додати (5) одержимо остаточно другу відповідь: $f(x)=x$.

6. Послідовність $a_1, a_2, \ldots$ цілих чисел задовольняє такі умови:

I) $1 \le a_j \le 2015$ для всіх $j \ge 1$;

II) $k+a_k \ne l+a_l$ для всіх $1 \le k < l$.

Доведіть, що існують два натуральних числа b і N такі, що

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \le 1007^2$$

для всіх цілих чисел m і n, що задовольняють мову $n > m \ge N$.

Розв'язання. Для візуалізації натуральних чисел, розглянемо множину цілочислових точок на координатній прямій. Для кожного натурального n намалюємо стрілочки, що виходить з точки n і йде у точку $n+a_n$. Помітимо, що довжина такої стрілочки буде рівна a_n. Оскільки $m+a_m \ne n+a_n$ при $m \ne n$, то в кожне натуральне число входить не більше однієї такої стрілочки. Також, в деякі натуральні числа не входить жодної стрілочки, наприклад, в число 1. Назвемо такі числа *початковими точками*. Якщо вибрати довільну початкову точку і піти по стрілочках, то ми отримаємо нескінченний шлях, який відвідує строго зростаючу послідовність натуральних чисел. Будемо називати цей шлях *променем*. Також, будемо говорити, що промінь *перетинається* з інтервалом, якщо цьому інтервалу належить хоча б один з початків стрілочок, що складають цей промінь. Оскільки довжина кожної стрілки не більша за 2015, то кожен промінь, скажімо, з початком у точці s, перетинає кожний інтервал $[n; n+2014]$ при $n \ge s$.

Припустимо, що існує хоча б 2016 початкових точок. Виберемо довільне натуральне число n, яке більше за кожну з цих 2016 початкових точок. В такому випадку, інтервал $[n; n+2014]$ перетинають хоча б 2016 променів у 2016 різних точках, чого бути не може. Отже, число b, що позначає кількість початкових точок, задовольняє умову $1 \le b \le 2015$. Виберемо число N таким чином, щоб воно було більшим за всі початкові точки. Доведемо, що обрані таким чином b і N задовольняють умову задачі.

Для цього, розглянемо довільні натуральні числа m і n такі, що $n > m \ge N$. Сума $\sum_{i=m+1}^{n} a_i$ дорівнює сумі довжин стрілочок, що виходять з чисел $m+1$, ..., n. Неважко помітити, що ці стрілочки утворюють b частин обраних променів; при цьому, деякі частини можуть бути порожніми. Далі, на кожному промені виберемо перше число, що більше за m. Позначимо ці числа $x_1, x_2, \ldots, x_b$. Аналогічно, $y_1, y_2, \ldots, y_b$ — мінімальні числа на цих променях (промені розглядаємо у тому ж порядку), що не менші за n. В такому випадку, різниці

$x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_b-y_b$ дорівнюють довжинам частин променів, причому нулі відповідають порожнім частинам. Отже,

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{b}\left(y_j - x_j\right), \text{ звідки}$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}\left(a_i - b\right) = \sum_{j=1}^{b}\left(y_i - n\right) - \sum_{j=1}^{b}\left(x_i - m\right).$$

Оскільки кожен з b променів перетинає в деякій точці інтервал $\left[m+1, m+2015\right]$, то $x_1-m, x_2-m, \ldots, x_b-m$ — різні числа з множини $\{1,2,\ldots,2015\}$. Більше того, число $m+1$ не є початковою точкою, тому воно належить одному з променів, а отже 1 зустрічається серед цих різниць. Таким чином, можемо записати нерівності:

$$1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(j+1\right) \le \sum_{j=1}^{b}\left(x_j - m\right) \le 1+\sum_{j=1}^{m}\left(2016-b+j\right).$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо, що

$$1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(j+1\right) \le \sum_{j=1}^{b}\left(y_j - n\right) \le 1+\sum_{j=1}^{b}\left(2016-b+j\right).$$

Поєднуючи до купи матимемо, що

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n}\left(a_i - b\right)\right| \le \sum_{j=1}^{b-1}\left(\left(2016-b+j\right)-\left(j+1\right)\right) = \left(b-1\right)\left(2015-b\right) \le$$

$$\le \left(\frac{\left(b-1\right)+\left(2015-b\right)}{2}\right)^2 = 1007^2,$$

а отже твердження задачі доведено.

Альтернативне розв'язання (Смірнов Денис). Покладемо $b_i = a_i + i$. Будемо робити наступну процедуру. На данному кроці, нехай $b_1 < b_2 < \ldots < b_k > b_{k+1}$ (помітимо, що всі b_i різні за умовою). Тоді поміняємо місцями b_k та b_{k+1}, тобто розглянему нову послідовність (b_n^*), для якої $b_k^* = b_{k+1}$, $b_{k+1}^* = b_k$. Тоді маємо: $b_k^* - k = b_{k+1} - k \ge 2 > 1$, $b_k^* - k = b_{k+1} - k < b_k - k \le 2015$.

Помітимо, що на кожному кроці b_k не збільшуються, а тому для кожного фіксованого k через певну кількість кроків b_k не буде змінюватись. А отже переходячи до границі будемо мати зростаючу послідовність (b_n^*). Крім того, з якогось моменту це буде арифметична прогресія з різницею 1. Дійсно, $2015+i-b_i$ тільки зменшується, а також ціле невід'ємне. Отже, існує N, що при $n \ge N$ $b_n = n + c$. Покладемо $b = c$. Помітимо, що $a_i^* = \tilde{n}, i \ge N$. Розглянемо $n > m > N$. Доведемо, що

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \le 1007^2,$$

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(b_j - (b+j))\right| \le 1007^2,$$

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} b_j - \sum_{j=m+1}^{n} b_j^*\right| \le 1007^2.$$

Суму $\sum b_i$ ми змінюємо тільки обмінюючи b_m та b_{m+1}. Числа з індексами не більшими m назвемо лівими, а більші - правими. Нехай всього чисел, що пересунулись зліва направо (порівнюючи початкову та кінцеву конфігурацію) - k. Аналогічно справа наліво також k. При цьому числа, що пересуваються зліва направо рахуються з плюсом до нашої сумми, інші - з мінусом (чи навпаки).

$$\sum_{j=m+1}^{n} b_j^* - \sum_{j=m+1}^{n} b_j \le S_1 - S_2 \text{, де}$$

$S_1 = (m+1-k+2015)+(m+2-k+2015)+\ldots+(m+2015)$,

$$S_2 = (m+1+1)+(m+2+1)+\ldots+(m+k+1).$$

Де S_1 - найбільша можлива сума доданків, що враховуються зі знаком плюс, а S_2 - найменша можлива сума доданків, що враховуються зі знаком мінус (для S_1 мы взяли найбільші k різних лівих чисел та додали максимальне дельт від 1 до 2015, а з S_2 - навпаки).

$S_1 - S_2 = k(2014-k) \le 1007^2$, тобто ми можемо збільшити нашу суму не більше, ніж на 1007^2 (як вже було зазначено, при переходах через m наша сума може тільки збільшуватись). Аналогічно при переходах через n наша сума може тільки зменшуватись, причому не більше, ніж на 1007^2. Отже, модуль різниці початкової та кінцевої суми не більше 1007^2, що і потрібно було довести.

Список використаних джерел

1. Математичний олімпіадний рух України. [Електронний ресурс] Режим доступу: www.matholymp.org.ua
2. Юному математику. Механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school
3. Математичні олімпіади в Києві. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://matholymp.com.ua/
4. Сайт міжнародних олімпіад з математики. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://imo-official.org/
5. Art of Problem Solving [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.artofproblemsolving.com/
6. Турнир Городов [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.turgor.ru/

Радимо почитати

1. **IX Всеукраїнська заочна математична олімпіада** // Математика в школі. – 2004. – №9-10. – С.41.
2. **Математика після уроків** : Задачі для підготовки та проведення шкільних олімпіад. Сценарії позакласних заходів / Упоряд. І.С.Маркова. – Х : Основа, 2004. – 141 с. – (Б-ка журналу "Математика в школах України"; Вип.12(24)). – Бібліогр. с. 140.
3. **П' ята соросівська олімпіада з математики, фізики, хімії, біології** : [Комплект: У 4 кн.] :Для учнів 9-11 кл. загальноосвіт. шк. / Міжнарод. фонд "Відродження". МНОП. – Л., 1999.
4. **Про призначення стипендій Президента України призерам міжнародних учнівських олімпіад з математики, фізики, хімії, біології, екології, інформатики 2008 року** // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2008. – №31-32-33. – С.3-6.
5. **Третя Соросівська Олімпіада** : Для учнів 9-11 кл. загальноосвіт. шк. з математики, фізики, біології, хімії: / Міжнарод. фонд "Відродження". Міжнарод. Соросівська Програма підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP). – К., 1997.
6. **Четверта Соросівська Олімпіада** : Біологія. Хімія. Математика. Фізика: Для учнів 9-11 кл. загальноосвіт. шк. / Міжнарод. фонд "Відродження". Міжнарод. Соросівська Програма підтримки освіти вгалузі точних наук (ISSEP). – К. : Оранта-прес, 1998.
7. **Щодо методичних рекомендацій до проведення ІІІ етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад** // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2010. – №1-2. – С. 18-22.
8. **Адаменко Н. Є.** Предметні турніри та олімпіади у початковій школі (математика) / Н. Є. Адаменко // Освіта та розвиток обдарованої особистості. – 2015. – № 4. – С. 58-60.
9. **Белешко Д. Т.** Готуємося до олімпіади з матемтики : метод. посіб. / Д. Т. Белешко, О. І. Левчук, Л. В. Пекарська. – Рівне : РДГУ, 2013. – 96 с.
10. **Белешко Д. Т.** Розв'язування олімпіадних задач з математики у 9 класах : метод. посіб. / Д. Т. Белешко, О. В. Максимчук. – Рівне : РДГУ, 2013. – 78 с.
11. **Белешко Д. Т.** Розв'язування олімпіадних задач з математики у 8 класах : метод. посіб. / Д. Т. Белешко, Д. П. Якута, Г. Я. Клекоць. – Рівне : РДГУ, 2013. – 55 с.
12. **Богданов И. И.** III геометрическая олимпиада им. И.Ф. Шарыгина / И. И. Богданов, А. А. Заславский // Математика в школе. – 2007. – №8. – С.69-74.
13. **Богомолова І.** Досвід організації навчання статистики в польських школах / І. Богомолова // Математика в школі. – 2010. – №6. – С. 45-48.
14. **Бомба А. Я.** Від задачки до задачі (матеріали для підготовки учнів до участі в математичних конкурсах та олімпіадах) : метод. посіб. / А. Я. Бомба, І. А. Барановська, А. В. Теребус. – Рівне : РОІППО, 2011. – 72 с.

15. **Бомба А. Я.** Математичні змагання: 2012-2013 та 2013-2014 н. р. [Текст] / А. Я. Бомба, Л. Л. Крока ; Рівнен. держ. гуманіт. ун-т. – Рівне : [РДГУ], 2014. – 159 с. – Бібліогр.: с. 156-159.
16. **Бомба А. Я.** Крок до олімпіади (арифметика для школярів) / А. Я. Бомба, І. А. Барановська, Я. Г. Сень ; РДГУ. РОІППО. – Рівне, 2005. – 58 с. – Бібліогр.: с. 57-58.
17. **Борисова В.** XLIV Всеукраїнська олімпіада юних математиків 2004 р.(Розв"язання задач) / В. Борисова, В. Лейфура, В. Ясінський // Математика в школі. – 2004. – №8. – С. 5-10.
18. **Борисова В.** XLV Міжнародна математична олімпіада 2004 р. / В. Борисова, В. Лейфура // Математика в школі. – 2005. – №1. – С. 2-9.
19. **Борисова В.** XIII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. Борисова, О. Курченко, В. Лейфура // Математика в школі. – 2010. – №5. – С. 39-40.
20. **Борисова В.** XLIV Міжнародна математична олімпіада : [Задачі] / В. Борисова, В. Лейфура // Математика в школі. – 2003. – №10. – С.7-12.
21. **Борисова В.** XLV Міжнародна математична олімпіада / В. Борисова, В. Лейфура // Математика в школі. – 2004. – №9-10. – С.4-6.
22. **Борисова В.** Всеукраїнська математична олімпіада 2003 року : [Задачі для 8-11 класу] / В. Борисова, В. Лейфура, І. Мітельман // Математика в школі. – 2003. – №10. – С.2-7.
23. **VII Всеукраїнський турнір юних математиків** / В. Борисова, В. Лейфура, І. Мітельман та ін. // Математика в школі. – 2005. – №4. – С.15-20.
24. **IX Всеукраїнський турнір юних математиків** / В. Борисова, В. Лейфура, І. Мітельман та ін. // Математика в школі. – 2007. – №4. – С. 37-43.
25. **Борисова В.** IV етап XLIV Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2004 року: [8-11 кл.] / В. Борисова, В. Лейфура, В. Ясінський // Математика в школі. – 2004. – №7. – С.6-11.
26. **Борисова В.** XII тур юних математиків / В. Борисова, І. Мітельман, К. Рабець // Математика в школі. – 2009. – №5. – С.29-29.
27. **Борисова В.** Математичні олімпіади / В. Борисова, К. Рабець // Математика в школі. – 2008. – №9. – С.46-48.
28. **Змагання юних математиків України. 2003 рік** / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2004. – 192 с. – (Б-ка журналу "Математика в школах України").
29. **Змагання юних математиків України. 2004 рік** / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2005. – 128 с. – (Б-ка журналу "Математика в школах ; Вип. 4(28)).
30. **Грабар Б.** Застосування класичних нерівностей при розв'язуванні шкільних олімпіадних задач з математики / Б. Грабар, Т. М. Сапіліді // Інформаційні технології в професійній діяльності [Текст] : матеріали VII Всеукр. наук.-практ. конф., м. Рівне, 11 квіт. 2013 р. / М-во освіти і науки України, Рівнен. держ. гуманіт. ун-т ; [програмний ком.: Р. М. Постоловський, Т. І. Поніманська, А. О. Сяський та ін.]. – Рівне : [РДГУ], 2013. – С. 15-16.

31. **Гунько Л.** XVI Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / Л. Гунько // Математика в рідній школі. – 2014. – № 1. – С. 40-43.
32. **Егоров А. А.** Олимпиады "Интеллектуальный марафон". Математика [Текст] / А. А. Егоров, Ж. М. Раббот. – М. : Бюро Квантум, 2006. – 127 с. – (Б-чка "Квант" ; Вып.97. Приложение к журналу "Квант"; №5).
33. **Клекоць Г. Я.** Методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач в 6 класах: навч.-метод. посіб. / Г. Я. Клекоць, Д. Т. Белешко, О. О. Козачок. – Рівне : РДГУ, 2012. – 78 с.
34. **Клекоць Г. Я.** Методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач в 9 класах: навч.-метод. посіб. / Г. Я. Клекоць, Д. Т. Белешко, О. В. Максимчук. – Рівне : РДГУ, 2012.
35. **Клекоць Г. Я.** Методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач в 8 класах: навч.-метод. посіб. / Г. Я. Клекоць, Д. Т. Белешко, Д. П. Яцута. – Рівне : РДГУ, 2012. – 60 с.
36. **Кравченко З.** Застосування властивостей функцій під час розв'язування олімпіадних задач / З. Кравченко // Математика в рідній школі. – 2015. – № 7-8. – С. 60-63.
37. **Кривоносова Н. И.** Олимпиада по математике для 4-го класса / Н. И. Кривоносова // Одарённый ребёнок. – 2012. – № 3. – С. 129-133.
38. **Кузнецов Д. Ю.** Нижегородская городская математическая олимпиада школьников / Д. Ю. Кузнецов // Математика в школе. – 2004. – №8. – С. 45-51.
39. **XV Всеукраїнський турнір юних математиків : (завдання та їх розв'язання)** / о. Кукуш, І. Мітельман, К. Рабець та ін. // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 6. – С/ 35-45/.
40. **Левчун О. І.** Методична система підготовки учнів 5 класу до олімпіад з математики / О. І. Левчун, Д. Т. Белешко // Наука, освіта, суспільство очима молодих [Текст] : матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. студ. та молодих науковців, м. Рівне, 18-19 квіт. 2012 р. / М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Рівнен. держ. гуманіт. ун-т. – Рівне : [РВВ РДГУ], 2012. – Ч. 1 : Психолого-педагогічний напрям. – С. 72-73.
41. **Левчун О. І.** Готуемось до олімпіади з математики (5 клас): навч.-метод. посіб. для вчителів / О. І. Левчун, Д. Т. Белешко, Л. В. Пекарська. – Рівне : РВВ РДГУ, 2012. – 96 с.
42. **Лейфура В.** XLVI міжнародна математична олімпіада / В. Лейфура, О. Литвиненко // Математика в школі. – 2006. – №1. – С.6-14.
43. **VIII Всеукраїнський турнір юних математиків** / В. Лейфура, О. Литвиненко, І. Мітельман та ін. // Математика в школі. – 2006. – №8. – С. 20-24.
44. **Відбірково-тренувальні збори з формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2006 року** / В. Лейфура, О. Литвиненко, І. Мітельман та ін. // Математика в школі. – 2006. – №9. – С. 2-7.

45. **Лейфура В.** XLVII Міжнародна математична олімпіада / В. Лейфура, О.. Мітельман І. Литвиненко // Математика в школі. – 2007. – №5. – С. 10-18.
46. **Математичні олімпіади школярів України, 1991-2000** : Навч. - метод. посіб. для учнів загальноосвіт. навч. закладів / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К. : Техніка, 2003. – 541 с. – Бібліогр.: с. 540.
47. **Литвиненко О.** IV етап XLV Всеукраїнської олімпіади юних математиків / О. Литвиненко // Математика в школі. – 2005. – 8. – С.5-11.
48. **XLVI Всеукраїнська олімпіада юних математиків** / О. Литвиненко, І. Мітельман, М. Перестюк, В. Радченко // Математика в школі. – 2006. – №5. – С.12-21.
49. **Мехед Д.** Розвиток розумових дій у семикласників - учасників математичних олімпіад / Д. Мехед, В. Скребець // Математика в школі. – 2007. – №4. – С. 43-46.
50. **Миронюк М.** Методика розв'язування олімпіадних задач, пов'язаних з показниковими та степенево-показниковими діофантовими рівняннями / М. Миронюк, В. Ясінський // Математика в школі. – 2005. – №3. – С.47-50.
51. **Мітельман І.** Завдання XLIX Міжнародної математичної олімпіади / І. Мітельман // Математика в школі. – 2008. – №10. – С.45-52.
52. **Мітельман І.** Завдання XLIX Міжнародної математичної олімпіади: (огляд задачного координатора) / І. Мітельман // Математика в школі. – 2008. – №11-12. – С.41-46.
53. **Мітельман І.** XV Всеукраїнський ТЮМ імені професора М.Й.Ядренка. Ювілей - час підсумків та побожань / І. Мітельман, К. Рабець // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 5. – С. 44-48.
54. **Завдання IV етапу LIII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики** / І. Мітельман, В. Радченко, Д. Скороходов та ін. // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 10. – С. 33-38.
55. **Завдання IV етапу LIII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики** / І. Мітельман, В. Радченко, Д. Скороходов та ін. // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 11. – С. 40-47.
56. **Мітельман І.** Параметризація пар чисел з рівними добутками в кільці цілих чисел і деяких його квадратичних розширеннях та розв'язування олімпіадних задач з теорії чисел / І. Мітельман, М. Телеуке // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 1. – С. 40-44.
57. **Петенчук В.** Використання векторів-точок у розв'язуваннях планіметричних олімпіадних задач / В. Петенчук, В. Ясінський // Математика в рідній школі. – 2014. – № 11. – С. 39-46.
58. **Підручна М. В.** Позакласна робота з математики у неповній середній школі [Текст]. Ч. I / М. В. Підручна, Г. М. Янченко. – Т. : Підручники і посібники, 1997. – 63 с. – Бібліогр.: с. 62.
59. **Підручна М. В.** Позакласна робота з математики: 8-9 кл. [Текст] / М. В. Підручна, Г. М. Янченко. – Т. : Підручники і посібники, 2001. – 95 с.
60. **Рубанов И. С.** Второй этап XXXI Российской математической олимпиады школьников в Кировской области / И. С. Рубанов // Математика в школе. – 2005. – №9. – С.59-64.

61. **Рубльов Б.** LXIV Київська олімпіада юних математиків / Б. Рубльов, О. Єргіна // Математика в школі. – 2009. – №11. – С. 45-46.
62. **Салата М. В.** Олимпиады в IV классе. Русский язык и математика / М. В. Салата // Начальная школа. – 2004. – №5. – С.62-64.
63. **Сарана О. А.** Математичні олімпіади: просте і складне поруч [Текст] : навч. посіб. / О. А. Сарана. – К. : А.С.К., 2004. – 340 с.
64. **Сергеев И.** Олимпиада на механико-математическом факультете МГУ / И. Сергеев // Математика в школе. – 2006. – №10. – С. 56-59.
65. **Сердюк И. И.** Олимпиада как форма работы с математически одаренными детьми / И. И. Сердюк // Одарённый ребёнок. – 2004. – №5. – С.95-96.
66. **Сяська Н. А.** Лекції з елементарної математики. Стереометрія. Олімпіадні задачі [Електронний ресурс] / Н. А. Сяська. – Рівне : РДГУ, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
67. **Тищенко А.** Завдання до математичних олімпіад для учнів 4 класу / А. Тищенко // Початкова школа. – 2006. – №2. – С.17-19.
68. **Фарков А. В.** Олимпиадные задачи по математике и методы их решения / А. В. Фарков. – М. : Народ. образование, 2003. – 107 с. – (Учеб.-метод. материалы). – Библиогр.: с.105-106.
69. **Федак І. В.** Обернені та взаємно обернені числа в рівняннях та системах рівнянь / І. В. Федак // Математика в школах України. – 2016. – № 7-8. – С. 48-52.
70. **Хавелов С. В.** Нестандартні задачі олімпіадного типу, що містять вкладення / С. В. Хавелов // Математика в школах України. – 2016. – № 7-8. – С. 15-21.
71. **Чайка М. П.** Цілі числа. Прості числа. Подільність чисел : [нестандартні задачі] / М. П. Чайка // Математика в школах України. – 2015. – № 27. – С. 23-27.
72. **Чашечникова О.** Олімпіади з математики для всіх школярів. Організація підготовки та самопідготовки учнів / О. Чашечникова, Л. Чашечникова // Нова педагогічна думка. – 2010. – №2. – С. 17-19.
73. **Чкрсина Н. Н.** Подготовка к олимпиаде по математке учащихся 4-го класса / Н. Н. Чкрсина // Одарённый ребёнок. – 2011. – № 1. – С. 141-150.
74. **Чулков П.** Математическая олимипада в школе / П. Чулков // Народное образование. – 2006. – №1. – С.158-163.
75. **Швець В.** Нерівності в завданнях математичних олімпіад / В. Швець, І. Дремова, І. Соколовська // Математика в рідній школі. – 2015. – № 9. – С. 36-44.
76. **Ясінський В.** Геометричні нерівності на математичних олімпіадах. / В. Ясінський // Математика в школі. – 2007. – №1. – С. 44-53.
77. **Ясінський В.** Метод біноміальних перетворень при розв'язуванні показникових рівнянь у цілих числах / В. Ясінський // Математика в школі. – 2005. – №9. – С.46-53.
78. **Ясінський В.** Метод нескінченного спуску в олімпіадних задачах з теорії чисел / В. Ясінський // Математика в школі. – 2005. – №5. – С.49-52.

79. **Ясінський В.** Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач / В. Ясінський // Математика в школі. – 2009. – №1-2. – С.35-40.
80. **Ясінський В.** Тригонометричні підстановки на математичних олімпіадах / В. Ясінський // Математика в школі. – 2008. – №10. – С.52-54.
81. **Ясінський В.** Тригонометричні підстановки на математичних олімпіадах / В. Ясінський // Математика в школі. – 2008. – №11-12. – С.47-52.
82. **Ясінський В.** Геометрія шестикутника на математичних олімпіадах / В. Ясінський, О. Коношевський // Математика в школі. – 2005. – №7. – С.35-43.
83. **Ясінський В.** Опорні задачі - факти олімпіадної геометрї / В. Ясінський, О. Коношевський // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 9. – С. 28-33.
84. **Ясінський В.. Ушаков Р.** Теорема Чезаро-Штольца та її використання на математичних олімпіадах / В.. Ушаков Р. Ясінський // Математика в школі. – 2009. – №3. – С.39-45.
85. **Ясінський В. А.** Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2005. – 95 с. – (Математика в школах України; Вип.1(25)). – Бібліогр.: с. 95.
86. **Ясінський В.** Використання гармонічних четвірок точок і прямих при розвязуванні планіметричних задач на математичних олімпіад / В. Ясінський // Математика в школі. – 2010. – №1-2. – С. 33-38.
87. **Ясінський В.** Система опорних задач про метричні співвідношення для дотичних кіл та їх використання при розв'язуванні олімпіадних задач / В. Ясінський // Математика в школі. – 2011. – № 3. – С. 45-48.
88. **Ясінський В.** Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстемальних задач / В. Ясінський, Л. Наконечна // Математика в школі. – 2009. – №9. – С.33-40.
89. **Ясінський В.** Теорема Тьопліца та її використання на математичних олімпіадах та турнірах / В. Ясінський, Р. Ушаков // Математика в школі. – 2010. – №6. – С. 40-45.

Навчальне видання

Задачі математичних олімпіад
2014-2015 н.р.

Андрій Ярославович Бомба,
Катерина Миколаївна Малаш

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
33000, м. Рівне, вул. С. Бандери, 12