РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Від задачки до задачі

РІВНЕ – 2011

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Від задачки до задачі

РІВНЕ – 2011

Упорядники: Бомба А.Я., Барановська І.А., Теребус А.В. Від задачки до задачі (матеріали для підготовки учнів до участі в математичних конкурсах та олімпіадах)– Рівне: РДГУ – РОІППО, 2011. – 72 с.

Наведені деякі задачі II-IV етапів Всеукраїнських олімпіад та Міжнародних олімпіад з розв'язками за останні роки. Проведено умовний їх поділ за рівнем складності для учнів 6 – 11 класів.

Призначений для підготовки школярів до участі в математичних конкурсах та олімпіадах, а також з метою можливого узагальнення та подальшого використання при розробці тематики учнівських досліджень (зокрема в рамках МАН).

Рецензенти: ***Б.П. Петрівський*** – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Рівненського державного гуманітарного університету;

Л.В. Пекарська – завідувач кабінету математики Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, протокол № від грудня 2010 р.

ЗМІСТ

1. ЗАДАЧІ ІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (М. РІВНЕ)

1.1. 6-7 класи (умови)

1. Василько сказав Іванку, що впродовж доби він витрачає $\frac{1}{3}$ частину свого часу на сон, $\frac{1}{4}$ - на навчання в школі, $\frac{1}{5}$ - на зустріч з друзями, $\frac{1}{6}$ - він слухає музику, $\frac{1}{7}$ - грає на комп'ютері. Чи це можливо, якщо кожною справою він займається окремо протягом доби?

2. Дріб $\dfrac{\text{Â À Ð Å Í Í ß}}{\text{Ê À Ð Ë Ñ Î Í}}$ дорівнює цілому числу. Різні букви відповідають різним цифрам, а між ними стоїть знак множення. Чому дорівнює цей дріб? Обґрунтуйте відповідь.

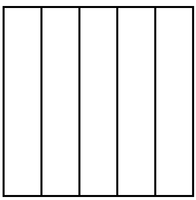
3. Є трицифрове число, всі цифри якого різні. Сума всіх трьох цифр десять. Добуток перших двох цифр шість. Цифра десятків найбільша серед цифр числа. Знайти це трицифрове число.

4. В одному місяці три середи випали на парні числа. Якого числа в цьому місяці була друга неділя?

5. Фабрика випустила товар у пачках масою 3 кг і 5 кг. Довести, що з цих пачок можна скласти пачку будь-якої маси, більшої за 7 кг.

6. В ящику 25 кг цвяхів. Як за допомогою шалькових терезів і однієї гирі в 1 кг за два зважування відміряти 19 кг цвяхів?

7. Дідусь Михайло розділив квадрат на п'ять однакових прямокутників так, як показано на малюнку. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр кожного з п'яти однакових прямокутників 150 м.



8. До числа 13 справа та зліва приписали по одній цифрі так, щоб отримане число було кратне 45. Знайти це число.

9. В одному селі живуть чотири чоловіки: Акація, Береза, Верба і Граб. Один із них – кравець, другий – шофер, третій – тесляр, четвертий – швець. Одного разу кравець прийшов до тесляра, щоб попросити його полагодити дах, але йому сказали, що він допомагає Вербі ремонтувати двері. Визнач професію кожного, якщо відомо, що

а) Граб не тесляр, а Береза живе по сусідству з теслярем;

б) Береза не вміє водити автомобіль, а Акація дружить з шофером;

в) Верба заніс ремонтувати свої чоботи і змушений йти, щоб принести їх до дому.

10. Обчислити: $\left(1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2009\cdot 2010}\right)\cdot 2010$.

11. Дано півсклянки води і півсклянки молока. Три ложки води долили до молока, а потім три ложки суміші знову перелили в склянку з водою. Чого виявилось більше внаслідок цих переливань: води в молоці чи молока воді?

12. Визначити, яке з чисел більше $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (75 раз) чи $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$ (74 рази).

13. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на чотири частини і т.д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилось, що їх всього 1962. Довести, що підрахунок був неправильний.

14. Розв'язати рівняння $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=24$.

15. Довести, що при кожному цілому n вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ також є цілим.

1.2. 6-7 класи (відповіді, вказівки, авторські учнівські розв'язки)

1. Ні, це не можливо, адже: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>1$.

2. Оскільки у дробі у чисельнику й знаменнику використані десять різних букв, то для перетворення даного виразу у числовий потрібно 10 цифр. У знаменнику нуля бути не може, тому один з множників у

чисельнику дорівнює нулю. Отже добуток у чисельнику дорівнює нулю, й значення дробу дорівнює нулю.

3. Відповідь: 163.

4. Відповідь: 13.

5. Оскільки кожну масу, яка ділиться на 10, можна дістати з пачок по 5 кг, а кожну масу, яка ділиться на 3, – з пачок по 3 кг, то залишається переконатися, що можна дістати з пачок по 3 і 5 кг таку масу 8 кг, 11 кг, 13кг, 14 кг, 17 кг, а це випливає з рівностей: 8=3+5; 11=3·2+5; 13=3+5·2; 14=3·3+5; 17=3·4+5.

6. При першому зважуванні на одну із шальок терезів кладемо гирю і всі цвяхи розкладаємо по шальках так, щоб наступила рівновага. Одержимо 13 кг і 12 кг цвяхів. Першу купку відкладаємо, а другу, за допомогою терезів без гирі, ділимо навпіл. Таким чином, одержали шукану вагу цвяхів: 13+6=19.

7. Нехай *x* – ширина прямокутника. Тоді 5*x* – довжина. Відомо, що півпериметр прямокутника 75. Отже, маємо рівняння: *x*+5*x*=75. Звідси *x*=12,5. Тому сторона квадрата 12,5·5=62,5, а периметр – 250.

8. Відповідь : 5130; 9135. За умовою задачі $\overline{a13b} = 45n$, де $1 \le a \le 9$, $1 \le b \le 9$, n – натуральне число. Оскільки число $\overline{a13b}$ ділиться на 5, то *b*=0 або *b*=5. Аналогічно, число $\overline{a13b}$ ділиться на 9. Тому $a+b+1+3=9$ або $a+b+1+3=18$. Якщо *b*=0, то $a+4=9 \Rightarrow a=5$, а якщо *b*=5, то $a+5+4=18 \Rightarrow a=9$.

9. Розв'язання:

	Акація	Береза	Верба	Граб
Кравець	–	–	+	–
Шофер	–	–	–	+
Тесляр	+	–	–	–
Швець	–	+	–	–

10. Відповідь: 4019.

11. Після переливань в обох склянках порівну рідини. Тому молока в воді стільки ж, скільки води у молоці. Відповідь: порівну

12. Введемо такі позначення: $a = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ }75 ðàç, $b = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$ }74 ðàçè . Тоді

$a = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}\}72$ ðàçè, $b = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^{27}}}}}\}72$ ðàçè. Оскільки $2^{16} < 3^{27}$, то $2^{2^{16}} < 3^{3^{27}}$, $2^{2^{2^{16}}} < 3^{3^{3^{27}}}$, ... Отже $a < b$.

13. Очевидно, після розрізування одного аркуша паперу на 4 частини загальна кількість аркушів збільшиться на 3. Отже, якщо таку операцію провести $ї$ разів, то після цього матимемо $4+3ї$ аркушів. Якщо вважати, що підрахунок було виконано правильно, то $4+3ї = 1962$. Звідки $3ї = 1958$. Але 1958 не ділиться на 3. Отже, підрахунок було виконано неправильно.

14. Перемноживши перший і четвертий, другий і третій співмножники, дістанемо $(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 24$. Позначивши $x^2 - 11x + 28 = z$ матимемо $z(z+2) = 24$, звідки $z_1 = 4;$ $z_2 = -6$. Розв'язавши рівняння $x^2 - 11x + 28 = 4$, дістанемо: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$. Друге рівняння дійсних розв'язків немає.

15. Маємо $\dfrac{n^5}{120} - \dfrac{n^3}{24} + \dfrac{n}{30} = \dfrac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120} = \dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{120}$.
З п'яти послідовних цілих чисел $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ одне число обов'язково ділиться на 5, друге – на 4, третє – на 3 і принаймні два числа діляться на 2. Отже, добуток $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ ділиться без остачі на $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

1.3. 8-9 класи (умови)

1. Шахіст зіграв 40 партій в шахи та одержав у сумі 25 очок (за кожну перемогу – 1 очко, за нічию – 0,5 очок, за поразку – 0 очок). Знайдіть різницю між кількістю його перемог і кількістю його поразок.

2. Мені зараз вдвічі більше років, ніж вам було тоді, коли мені було стільки ж років скільки Вам зараз. Нам обом разом 70 років. Скільки мені років ?

3. Знайти всі розв'язки рівняння $(\tilde{o}^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$.

4. Довести, що для довільного цілого числа n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

5. Нехай AD і BE – бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника ABC. З точок D і E проведені перпендикуляри DM і EN до AB. Знайти кут NCM.

6. Розв'язати рівняння $x^8 - 10x^6 + 28x^4 - 15x^2 - 4 = 0$

7. На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

8. Побудувати графік функції $y = \left|3 - 2 \cdot \left|\left|x\right| - 1\right| - 1\right| - 1$.

9. Учневі надіслали завдання, яке містить 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому нараховують 8 балів, а за кожну неправильно розв'язану задачу віднімають 5 балів. За задачу, яку він не брався розв'язувати йому нараховують – 0 балів. Учень отримав у сумі 13 балів. Скільки задач він брався розв'язувати ?

10. Обчислити: $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$.

11. Довести, що кола, побудовані на катетах прямокутного три кутника як на діаметрі, перетинаються в точці, яка лежить на гіпотенузі.

12. На дошці записані числа 1, 2, 3, 4,…, 999, 1000. Двоє по черзі витирають по одному числу. Гра закінчується , коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума ділиться на 3, то перемагає перший гравець, якщо ні то другий. Хто з них виграє, при правильній грі?

13. Довести, що при кожному цілому n вираз $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ також є цілим.

14. У чотирикутнику $ABCD$ кути A і C рівні між собою. Бісектриса кута B перетинає сторону AD в точці P. Пряма, яка проходить через вершину A і перпендикулярна до BD перетинає сторону BC в точці Q. Доведіть, що прямі CD і PQ паралельні.

15. Розв'язати рівняння $x^8 - 10x^6 + 28x^4 - 15x^2 - 4 = 0$

16. Довести, що коли вираз $2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$

звести до спільного знаменника, то його чисельник ділитиметься на 13.

17. З чисел, утворених перестановками перших 12 цифр 120-цифрового числа, взято будь-які 120 чисел. Довести, що їх сума ділиться на 120.

18. Довести, що для будь-якого трицифрового числа виконується щонайменше одне з трьох тверджень:

а) це число ділиться на 3;

б) яка-небудь цифра числа ділиться на 3;

в) яке-небудь двоцифрове число, складене з цифр даного числа, ділиться на 3.

1.4. 8-9 класи (відповіді, вказівки, авторські учнівські розв'язки)

1. Якщо x – кількість перемог, а y – кількість поразок, то $(40–x–y)$ – кількість нічиїх. Кількість набраних очок, дорівнює:

$$x+0,5(40-x-y)=0,5(x-y)+20=25.$$

Тоді: $x-y=10$.

2. Нехай Вам було x – років, а мені – y. Тепер Вам $(x+t)$ – років, а мені – $(y+t)$.З а умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} y+t=2x, \\ x+t=y, \\ x+t+y+t=70, \end{cases} \quad \begin{cases} x=20, \\ y=30, \\ t=10. \end{cases}$$

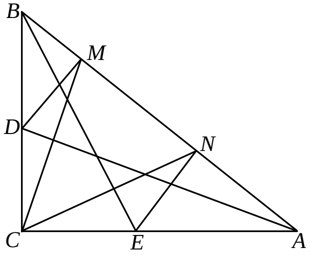
Мені тепер 40 років.

3. Відповідь: x=1.

4. $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Серед п'яти послідовних чисел знайдеться одне. Яке ділиться на 5. Тому добуток п'яти послідовних чисел ділиться на 5. Серед чотирьох послідовних чисел знайдеться хоча би одне число, яке ділиться на 4, та ще одне з цих чисел є парне. Тому добуток чотирьох послідовних чисел ділиться на 8. Серед трьох послідовних чисел знайдеться одне число, яке ділиться на 3. Отже, й добуток трьох послідовних чисел ділиться на 3. Маємо, що добуток п'яти послідовних чисел ділиться на добуток 5·8·3=120. Що й треба було довести.

5. Відмітимо, що прямокутні трикутники ΔACD та ΔAMD рівні за кутом і спільною гіпотенузою AD. Аналогічно прямокутні трикутники ΔBCE та ΔBNE рівні. Тому 2($\angle MCB$ + $\angle NCA$) = $\angle MDB$+$\angle NEA$=90° –

$\angle MBD$ + 90° — $\angle NAE$ = 90°. Тим самим доведено, що 2(90° – $\angle MCN$)= 90° $\Rightarrow$ $\angle MCN$ = 45°. Відповідь: $\angle$MCN = 45°.



6. $x^8 - 10x^6 + 28x^4 - 15x^2 - 4 = (x^8 + 25x^4 + 1 - 10x^6 + 2x^4 - 10x^2) +$

$$+(x^4 - 5x^2 + 1) - 6 = 0,\ \ (x^4 - 5x^2 + 1)^2 + (x^4 - 5x^2 + 1) - 6 = 0 .$$

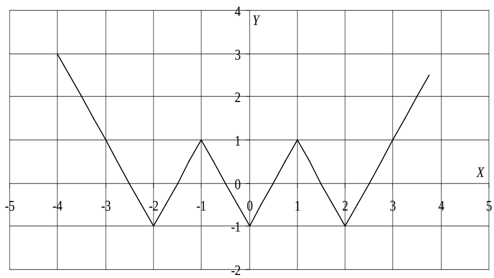
Позначивши $x^4 - 5x^2 + 1 = z$, матимемо $z^2 + z - 6 = 0$, звідки $z_1 = -3$, $z_2 = 2$. Розв'язавши біквадратні рівняння $x^4 - 5x^2 + 1 = -3$ та $x^4 - 5x^2 + 1 = 2$, дістанемо: $x_{1;2} = \pm 1;$ $x_{3;4} = \pm 2;$ $x_{5;6} = -\dfrac{\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}{2}$.

7. Позначимо дані точки через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Із точки A_1 виходить 5 відрізків двох кольорів. По принципу Діріхле серед цих відрізків є 3 відрізки одного кольору. Нехай для конкретності це відрізки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 червоного кольору. Розглянемо відрізки A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Можливі випадки:

а) серед цих відрізків є червоний, наприклад A_2A_3. Тоді в трикутнику $A_1A_2A_3$ всі сторони червоні;

б) серед цих відрізків немає червоних. Тоді в трикутнику $A_2A_3A_4$ всі сторони сині.

8. Графік функції

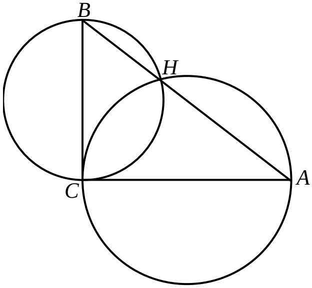


9. Учень брався розв'язувати 13 задач.

10. $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\left(\sqrt{19}-4\right)}}=$

$$=\sqrt{\sqrt{19}-\left(\sqrt{19}-4\right)}=2.$$

11. Нехай H – точка перетину кола, побудованого на катеті AC з гіпотенузою AB. Тоді $\angle AHC$=90°. Тому $\angle CHB$=90°. Це означає, що точка H лежить на колі, побудованому на катеті BC, як на діаметрі. Отже, точка H є точкою перетину заданих кіл. За побудовою вона знаходиться на гіпотенузі.



12. Виграє другий гравець.

13. Маємо $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}=\frac{n^5-5n^3+4n}{120}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{120}$. З п'яти послідовних цілих чисел $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ одне число обов'язково ділиться на 5, друге – на 4, третє – на 3 і принаймні два числа діляться на 2. Отже, добуток $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ ділиться без остачі на $2\cdot 4\cdot 3\cdot 5=120$

14. Оскільки $BP\perp AQ$ і BP – бісектриса кута ABC, то трикутник ABQ – рівнобедрений. Тому BQ=BA. Далі, трикутники BAP і BQP – рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси випливає, що $\angle BAP=\angle BQP$. Оскільки За умовою $\angle BAD=\angle BCD$, то $\angle BQP=\angle BCD$. З рівності цих кутів випливає, що $PQ\parallel CD$, що й треба було довести.

15. $x^8-10x^6+28x^4-15x^2-4=(x^8+25x^4+1-10x^6+2x^4-10x^2)+$

$$+(x^4-5x^2+1)-6=0,\ \ (x^4-5x^2+1)^2+(x^4-5x^2+1)-6=0.$$

Позначивши $x^4-5x^2+1=z$, матимемо $z^2+z-6=0$, звідки $z_1=-3$, $z_2=2$. Розв'язавши біквадратні рівняння $x^4-5x^2+1=-3$ та $x^4-5x^2+1=2$, отримаємо: $x_{1;2}=\pm1$; $x_{3;4}=\pm2$; $x_{5;6}=-(\pm\sqrt{5\pm\sqrt{21}})/2$

16. Перепишемо даний вираз у такому вигляді:

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)=\frac{13}{12}+\frac{13}{22}+\frac{13}{30}+\frac{13}{36}+\frac{13}{40}-\frac{13}{42}+\frac{13}{6}=\frac{13B}{5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11},$$

де B – деяке ціле число. Твердження задачі тепер стає очевидним, оскільки знаменник дробу на 13 не ділиться.

17. Будь-яке ціле число при діленні на 3 дає таку саму остачу, яку при діленні на 3 дає сума його цифр. Позначимо вибрані числа через M_1, M_2, M_3 ,..., M_{120}. Суму цих чисел можна записати так:

$$\begin{aligned}&M_1+M_2+M_3+...+M_{120}=(M_1-M_2)+2(M_2-M_3)+\\&+3(M_3-M_4)+...+119(M_{119}-M_{120})+120M_{120}.\end{aligned}\qquad(1)$$

Через те, що кожне з чисел $M_1, M_2, M_3, ..., M_{120}$ записується одними й тими самими цифрами, то суми цифр кожного з цих чисел однакові. Тоді кожне з цих чисел при діленні на 3 дає одну й ту саму остачу. Отже, різниця таких чисел ділиться на 3. Але в кожного числа M_i останні 108 цифр однакові. Тому різниця будь-яких двох таких чисел ділиться на 10^{108}, а отже, ділиться і на 40. Оскільки різниця будь-яких двох чисел M_i $(i=1,2,...,120)$ ділиться на 3 і на 40, то вона ділиться на 120. Таким чином, кожен доданок правої частини рівності (1) ділиться на 120, отже, сума $M_1+M_2+M_3+...+M_{120}$ також ділиться на 120.

18. Нехай a_1, a_2, – цифри даного числа. Розглянемо числа a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$. Якщо одне з цих чисел ділиться на 3, то твердження задачі справедливе. Припустимо, що жодне з цих чисел не ділиться на 3. Тоді знайдемо два числа, які при діленні на 3 дають однакову остачу. Різниця цих чисел ділиться на 3, що також доводить твердження задачі (наприклад, якщо число $(a_1+a_2+a_3)-a_1$ ділиться на 3, то число a_2+a_3 ділиться на 3).

1.5. 10-11 класи (умови)

1. Побудувати графік функції:

$$y = \sqrt{2 + \sin^4 x - \cos 2x} + \sqrt{2 + \cos^4 x + \cos 2x} .$$

2. Довести нерівність $3a^5 + 4b^2 \geq 5ab\sqrt[5]{3b^3}$, якщо а ≥ 0.

3. У трикутнику дві медіани взаємно перпендикулярні і дорівнюють 18см і 24см. Знайдіть площу цього трикутника.

4. Вказати скільки розв’язків в залежності від параметра a має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ |x-2| + |y-2| = 2. \end{cases}$$

5. Жук повзає по ребрах куба. Чи зможе він послідовно обійти всі ребра, проходячи по кожному ребру рівно один раз?

6. На паперовій смужці записано послідовність 123123...123123...123, у якій 360 цифр. На яке найбільше число частин можна розрізати цю смужку, щоб усі числа на одержаних при цьому шматочках смужки були різними.

7. Довести, що серед всіх трикутників з даним периметром найбільшу площу має правильний трикутник.

8. Побудувати графік функції $y = (\cos x)^0 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$

9. Розв’язати рівняння $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$.

10. Відомо, що медіана, проведена до гіпотенузи, є середнім геометричним катетів цього трикутника. Знайдіть кути трикутника.

11. Розв’язати рівняння $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2 x} a = 0$

12. Довести, що в опуклого многогранника всі грані не можуть бути шестикутниками.

13. Розв’язати рівняння $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$

14. Для якого *n*-цифрового числа відношення цього числа до суми його цифр буде найбільшим?

15. Довести, що для будь-якого простого числа p>2 чисельник m дробу $\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}$, $(m,n\in N)$ ділиться на p.

16. Знайти цілу частину числа $\sqrt{2-\sqrt{2-...-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ (знак кореня зустрічається 1987 разів).

17. У послідовності $\{a_n\}$ перший член a_1 дорівнює відмінному від 1 натуральному числу a, а кожний член a_n з номером n>1 задовольняє співвідношення $a_n=a^n-\sum_k a_k$, де підсумовування в правій частині проводиться по тих індексах $k<n$, які є дільниками числа n (наприклад, $a_{10}=a^{10}-a_1-a_2-a_5$). Довести, що для кожного натурального n число a_n ділиться на n.

18. Опуклий n-кутник розміщений у середині квадрата зі стороною 1. Доведіть, що знайдуться три вершини A, B, C цього n-кутника такі, що площа Δ ABC менше $\frac{8}{n^2}$.

1.6. 10-11 класи (відповіді, вказівки, авторські учнівські розв'язки)

1. Розв'язання: $\sqrt{2+\sin^4 x-\cos 2x}=\sqrt{1+\sin^4 x+(1-\cos 2x)}=$

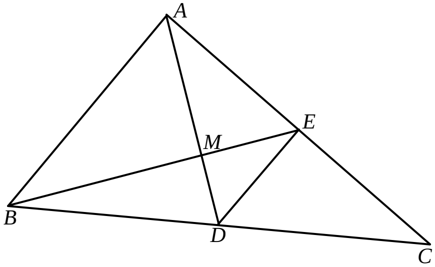
$$=\sqrt{1+\sin^4 x+2\sin^2 x}=\sqrt{(1+\sin^2 x)^2}=1+\sin^2 x.$$

Аналогічно $\sqrt{2+\cos^4 x+\cos 2x}=\sqrt{(1+\cos^2 x)^2}=1+\cos^2 x$. Отже, $y=1+\cos^2 x+1+\sin^2 x=3$, $y=3$.

3. Розв'язання: оскільки $3a^5+4b^2=3a^5+b^2+b^2+b^2+b^2$, тоді за нерівністю Коші: $\frac{3a^5+b^2+b^2+b^2+b^2}{5}\geq\sqrt[5]{3a^5(b^2)^4}=ab\sqrt[5]{b^3}$. Звідси випливає, що $3a^5+4b^2\geq 5ab\sqrt[5]{b^3}$. Рівність досягається при $3a^5=b^2$.

2. Нехай в трикутнику ABC медіани AD=18 см і BE=24 см. Оскільки медіани в точці M діляться у відношення 2:1, починаючи від вершини трикутника, то MD=6, MA=12, ME=8, MB=16. Площа

$S_{AEDB} = \frac{1}{2}(8+16)(6+12) = 12 \cdot 18$. Оскільки $4 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta EDC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC} - S_{AEDB}}$, то $S_{\Delta ABC} = 288$.



4. Відповідь: при $a \in (-\infty; 2) \cup (20; \infty)$, розв'язків немає;
при a=2, один розв'язок;
при $a \in (2;18)$, два розв'язки;
при a=18, три розв'язки;
при $a \in (18;20)$, чотири розв'язки;
при a=20, два розв'язки.

5. Припустимо, що це можливо. Розглянемо вершину, яка не є ні початком ні кінцем шляху. Тоді скільки разів жук заповзає в неї, стільки разів і виповзає з неї кожного разу по різних ребрах. Отже, з даної вершини має виходити парна кількість ребер. Але з кожної вершини куба виходить рівно 3 ребра. Тому не має вершини, яка не є початком і не є кінцем шляху. Протиріччя.

6. У результаті розрізання смужки можна дістати три одноцифрових числа (1, 2, 3), три двоцифрових (12, 23, 31), три трьохцифрових (123, 231, 312) і т.д. Нехай маємо на шматочках смужки числа n-го розряду включно, причому жодні два числа не повторюються. Тоді кількість чисел буде $3n$, загальна кількість використаних при цьому цифр дорівнюватиме

$$3(1+2+...+n) = \frac{3}{2}n(n+1) = 360,$$

звідки $n(n+1) = 240$, $n = 15$. Отже, найбільше число частин, на які можна розрізати смужку, дорівнює 45. Спосіб розрізання смужки можна подати так:

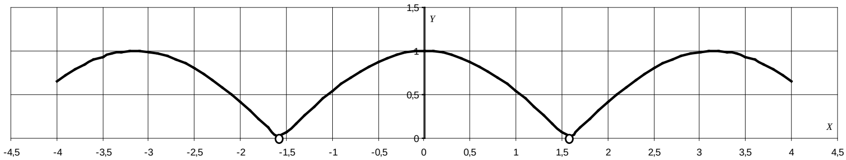
1	2	3	12	31	23	123	1231	231	2312	312	3123	...

7. Використавши формулу Герона площі довільного трикутника із сторонами *a, b, c* та нерівність Коші, отримуємо

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27},$$

де p – півпериметр трикутника. Звідси $S \le \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$. Знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $p-a = p-b = p-c$, тобто при $a=b=c$. У цьому разі $p = \frac{3a}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

8. Графік функції



9. Нехай $y = x+2$. Тоді $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 2 \Rightarrow$

$$(y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$y^4 + 6y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -2.$$

Відповідь: –2

10. Нехай *a, b* – катети прямокутного трикутника, а *c* – його гіпотенуза. За умовою $\frac{c}{2} = \sqrt{ab}$. Тому $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} = \frac{1}{4}$. Позначимо через α гострий кут прямокутного трикутника такий, що $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Це означає, що $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ і $2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$. Відповідь: 15°, 75°, 90°

11. З умови випливає, що $x \ne \frac{1}{a}$, $x \ne \frac{1}{a^2}$, $x > 0$, $a > 0$. Якщо $a \ne 1$, то дане рівняння набуває вигляду: $\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1+\log_a x} + \frac{3}{2+\log_a x} = 0.$ Позначивши $t = \log_a x$, дістанемо рівняння $6t^2 + 11t + 4 = 0$, звідки $t_1 = -\frac{4}{3}$; $t_2 = -\frac{1}{2}$ і відповідно $x_1 = \frac{1}{a^3\sqrt{a}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Якщо $a = 1$, то

розв’язком даного рівняння буде: $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

12. Припустимо, що такий многогранник існує. Нехай n – кількість його граней. Тоді сума плоских кутів многогранника - $4\pi n$. З іншого боку, число вершин многогранника не перевищує $\frac{6n}{3} = 2n$, а сума плоских кутів при одній вершині строго менша за 2π, а тому сума плоских кутів має бути строго менша за $4\pi n$. Суперечність.

13. Оскільки зменшуване $0 \le \sin^4 x \le 1$, то $\cos^7 x \le 0$. Отже, дане рівняння матиме вигляд $\sin^4 x + |\cos^7 x| = 1$. Але $\sin^4 x \le \sin^2 x$; $|\cos^7 x| \le \cos^2 x$, тому $\sin^4 x + |\cos^7 x| = 1$ лише тоді, коли $\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ |\cos^7 x| = \cos^2 x, \end{cases}$

тобто можливі два випадки: $\sin^2 x = 1$ і $\cos^7 x = 0$, або $\cos^7 x = -1$ і $\sin x = 0$. Звідси $x = \pi/2 + k\pi$, або $x = (2n \pm 1)\pi$, де $k \in Z, n \in Z$. Обидва знайдені розв’язки задовольняють умову.

14. Відношення n-цифрового числа до суми його цифр буде набувати найбільшого значення, яке дорівнює 10^{n-1}, тоді і тільки тоді, коли всі цифри цього числа, крім першої, є нулями.

15. Зауважимо, що число p–1 парне. Перетворимо дріб $\frac{m}{n}$ до вигляду

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1} = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{(p-1)/2}+\frac{1}{(p+1)/2}\right)=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\frac{p}{3(p-3)}+\ldots+$$

$$+\frac{p}{((p-1)/2)((p+1)/2)}=p\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}\right).$$

Зведемо отриманий вираз до спільного знаменника

$$1(p-1)\cdot 2(p-2)\cdot 3(p-3)\ldots\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2} = (p-1)!,$$

тоді отримаємо відношення $\frac{m}{n} = p\frac{q}{(p-1)!}$, де $q \in N$, з якого випливає рівність $m(p-1)!=pqn$. Оскільки жодне з чисел 1, 2, 3,..., p–1 не ділиться на просте число p, то остання рівність можлива лише в тому випадку, якщо m ділиться на p без остачі. Твердження задачі доведено.

16. Розглянемо послідовність $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}, a_3=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}},...$, члени якої задовольняють співвідношення $a_{n+1}=\sqrt{2-an}$. Очевидно в умові задачі йдеться про число a_{1987}. Неважко помітити, що члени цієї послідовності з непарними номерами завжди лежать у проміжку (1;2), а члени з парними номерами – у проміжку (0;1). Справді, для n=1 і n=2 ця властивість виконується. Припустимо тепер, що для всіх $n \le 2k$ цю властивість вже доведено. Тоді маємо

$$2>\sqrt{2}>\sqrt{2-a_{2k}}=a_{2k+1}>\sqrt{2-1}=1,$$

$$1=\sqrt{2-1}>\sqrt{2-a_{2k+1}}=a_{2k+2}>\sqrt{2-2}=0.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, ця властивість виконується для всіх членів послідовності. Зокрема, число a_{1987} лежить у проміжку (1;2), а тому ціла частина числа a_{1987} дорівнює 1.

17. Розглянемо послідовність $x_1,...,x_n$, елементи якої належать множині $\{1,2,...,a\}$ (з можливими повтореннями) і розмістимо її циклічно на деякому колі. Назвемо таку розстановку періодичною з періодом $d=1,...,n$, якщо циклічний зсув усіх її членів на d номерів вздовж кола не змінює послідовності в цілому (причому d – найменше з таких чисел). Позначимо через b_n кількість періодичних розстановок з періодом $d=n$ (тобто, по суті, таких, які не мають періоду). Тоді $b_1=a$, $b_2=a(a-1)=a^2-a=a-b_1,...$. Зауважимо, що кожна k-періодична послідовність однозначно визначається першими k елементами, а розглянуті окремо ці елементи повинні утворювати k-періодичну послідовність. Оскільки множина усіх n-елементних послідовностей чисел $\{1,2,...,a\}$ розпадається на об'єднання n-періодичних та усіх k-періодичних послідовностей (де період k – дільник n), то $a^n=b_n+\sum\limits_{k/n} b_k$. Отже, послідовність b_n визначається за тими самими рівняннями, що й дана послідовність a_n. Оскільки $b_1=a_1$, то за індукцією доводимо рівність $b_n=a_n$ при усіх n. Нарешті, зауважимо, що кожній n-періодичній послідовності $x_1,...,x_n$ відповідає рівно n–1 різних n-періодичних

послідовностей (що утворені з неї послідовними циклічними зсувами: $x_2,...,x_n,x_1,x_3,...,x_n,x_1,x_2$ і т.д.). Тому загальна кількість b_n таких послідовностей поділена на n. Оскільки $a_n = b_n$, як доведено вище, то і a_n ділиться на n, що і треба було довести.

18. Відомо, що якщо опуклий многокутник P_1 знаходиться в середині опуклого многокутника P_2, то периметр P_1 менше периметра P_2. Тому, якщо $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ - послідовні вершини даного у задачі опуклого многокутника, то його периметр $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ менше периметра квадрата, тобто 4. Звідси випливає нерівність $(A_1A_2 + A_2A_3) + (A_2A_3 + A_3A_4) + \cdots + (A_{n-1}A_n + A_nA_1) + (A_nA_1 + A_1A_2) < 8.$ У сумі n пар доданків. Тому знайдуться три послідовних вершини n-кутника $A_i,\ A_{i+1},\ A_{i+2}$ (позначимо для зручності відповідно A, B і C) такі, що $AB + BC < \frac{8}{n}$. З нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним $AB \cdot BC \le (\frac{AB+BC}{2})^2 < (\frac{4}{n})^2 = \frac{16}{n^2}$; і тому площа S трикутника ABC задовольняє співвідношенням

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC \le \frac{1}{2}AB \cdot BC < \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{n^2} = \frac{8}{n^2}.$$

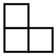
2. ЗАДАЧІ III ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (РІВНЕНСЬКА ОБЛАСТЬ, 2007-2009 РР.)

2.1. 8 клас (умови)

1. Випробування нової моделі автомобіля показали, що шини на колесах зношуються через 12 000, 15 000, 18 000 або 20 000 км залежно від їх розміщення (шини є однаковими, під час випробування їх місцями не міняли). Чи можна, маючи 4 нові шини проїхати 16000 км, якщо при цьому дозволяється переставляти місцями будь-які колеса?

2. Чи існують 1000 послідовних натуральних чисел серед яких немає жодного простого числа?

3. Нехай $ABCDEF$ - правильний шестикутник. На прямій AF відмітили точку X так, що $\angle DCX = 45^\circ$. Знайти величину кута $\angle FXE$.

4. У клітчастому квадраті розміром 7×7 довільним чином розфарбували 29 клітинок. Чи завжди при такому розфарбуванні знайдеться триклітинкова фігурка вигляду  (у будь-якому розташуванні)? Відповідь обґрунтуйте.

5. Розв'яжіть рівняння: $x + \sqrt{[x] + \sqrt{1 + \{x\}}} = 1$, де $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x, $\{x\} = x - [x]$.

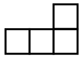
6. Довести, що $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} < \frac{1}{2}$.

7. В парламенті деякої країни дві палати, які мають рівне число депутатів. При голосуванні у важливому питанні взяли участь всі депутати, причому таких що утрималися не було. Коли голова повідомив, що рішення прийнято з перевагою в 23 голоси, лідер опозиції заявив, що результати голосування сфальсифіковані. Як він це зрозумів?

8. Дано два кола, що дотикаються внутрішнім чином в точці A. В більшому колі проведено хорду BC, що дотикається до меншого кола в точці D. Довести, що AD – бісектриса кута $\angle$BAC.

9. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють

рівняння $2(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z$.

10. Чи можна закласти фігурками виду  шахову дошку а) 4х6; б) 5х6; в) 6х6?

11. Жорстокий цар Шагріяр зажадав від чарівної Шахразади, щоб вона протягом наступних 1001-єї ночей називала йому по одному розв'язкові в натуральних числах рівняння $x^2 - y^2 = p^{2008}$, де p – деяке просте число. Скориставшись килимом-літаком, Шахразада прилетіла до Рівного і просить вашої допомоги. Не забувайте тільки, що самого числа p вона поки що не знає.

12. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел $a = 2^{2008} - 1$ та $b =$
$= 2^{2007} + 1$.

13. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. Знайти кут між висотами цього трикутника, проведеними до бічних сторін.

14. Знайти всі прості числа x і y, які задовольняють рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$.

15. У колі з радіусом 1 провели кілька хорд, сума довжин яких більша ніж 7π. Довести, що знайдеться діаметр, який перетинає не менше восьми хорд.

16. Довести, що якщо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, тоді $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1} =$
$=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$.

17. Петрусь та Миколка по черзі розставляють у виразі $n * n^2 * n^3 * n^4 * n^5 * n^6 * n^7 * n^8$ замість зірочок знаки „ + ", або „ - ". Доведіть, що Петрусь, який розпочинає розставляти знаки, може добитися, щоб одержаний вкінці вираз ділився на 6 при всіх натуральних n , незалежно від ходів Миколки.

18. Задачник має 200 задач з номерами від 1 до 200. Рівень складності кожної задачі визначається кількістю простих дільників її номера. Скільки всього рівнів складності в цьому задачнику і скільки задач в ньому задач найвищого рівня.

19. Для яких натуральних n число $n^4–22n^2–46$ ділиться без остачі на $n+5$?

2.2. 8 клас (розв'язки)

1. Для проїзду 180 тис. км необхідно на кожній із чотирьох позицій відповідно 15, 12, 10 та 9 коліс. Всього - 46. А тому, максимальна відстань, яку можна проїхати, маючи 4 нових колеса, не перевищує $\frac{4}{46}\cdot 180=\frac{360}{23}=15\frac{15}{23}$ (тис.км.).

2. Так існують. Наприклад, 1000!+2, 1000!+3, …, 1000!+1001 ($1001=143\cdot 7$).

3. З того, що шестикутник $ABCDEF$ - правильний, випливає, що $\angle ACD=90^\circ=\angle CAX$. За умовою $\angle DCX=45^\circ$, а тому $\angle ACX=45^\circ$ $\to$ $\angle AXC=45^\circ$. Отже, ΔCAX - рівнобедрений, тому $AX=AC=AE$. ΔAEX також рівнобедрений з кутом 30° при вершині, а тому $\angle FXE=\angle AXE=75^\circ$. Відповідь: 75°.

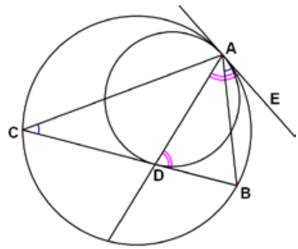
4. Розіб'ємо квадратну дошку 7×7 на дев'ять квадратів розміром 2×2 (1) та дві фігурки вигляду (2) та одну фігурку вигляду (3) так, як показано на малюнку. Якщо припустити, що не існує зафарбованого триклітинкового «куточка», то вийде, що на дошці зафарбовано клітинок щонайбільше $2\cdot 9+3\cdot 2+$ +4 = 28 (у кожному квадраті розміром 2×2 - не більше за дві клітинки, у кожній фігурі вигляду (2) не більше за три клітинки, у кожній фігурі вигляду (3) не більше за чотири клітинки), що суперечить умові задачі.

5. $x=0$. Оскільки $1-x\ge 0$, $[x]+\sqrt{1+\{x\}}\ge 0$, то нескладно бачити, що $-1\le x\le 1$. На проміжку $[-1;0)$ вихідне рівняння еквівалентне рівнянню $\sqrt{1+\{x\}}=x^2-2x+2$. Але для $x\in[-1;0)$ $\sqrt{1+\{x\}}<\sqrt{2}<2<$ $<x^2-2x+2$. На проміжку $(0;1)$ вихідне рівняння еквівалентне рівнянню $1+\{x\}=(1-x)^4$ і не має розв'язків оскільки $1+\{x\}>1>(1-x)^4$. Залишається зробити перевірку для $x=0$ і $x=1$.

6. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+$

$$+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}.$$

7. Загальна кількість депутатів в обох палатах парна. Так як в голосуванні взяли участь всі депутати і не було таких що утрималися, тому сума голосів "за" і "проти" рівна загальній кількості депутатів. Тому вона – парна. В такому разі, і різниця голосів "за" і "проти" також парна. Але число 23 непарне. Протиріччя.



8. Проведемо в точці A дотичну AE. Тоді ∠BDA=∠DAE. Оскільки ∠BAE=∠BCA, тоді ∠CAD=∠DAB. Що і потрібно було довести.

9. Введемо таке позначення $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y-1}=b$, $\sqrt{z-2}=c$. Тоді задане рівняння можна переписати у вигляді $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$, звідси $a=1$, $b=1$, $c=1$, отже, $x=1$, $y=2$, $z=3$.

10. а) можна; б) не можна, бо 5·6 не ділиться на 4; в) розфарбуємо дошку як би не клали на дошку 6х6 задану фігурку вона накриватиме непарну кількість чорних клітинок. Щоб закласти всю дошку потрібно 9 фігурок. Вони накриватимуть непарну кількість чорних кліток, а всіх кліток парна кількість. Протиріччя.

11. Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y)=p^{2008}$ і покладемо $x-y==p^k$, $x+y=p^{2008-k}$, де $k=1,\ldots,1001$. Тоді $x=\frac{p^{2008-k}+p^k}{2}, y=\frac{p^{2008-k}-p^k}{2}$ – шукані розв'язки у натуральних числах.

12. Спільний дільник даних чисел буде також дільником числа $b-2a=3$. Аналізуючи остачі від ділення степенів двійки на 3 (2 в парному степені дає остачу 1, а в непарному – остачу 2), переконуємося, що кожне із заданих чисел на 3 ділиться. Тому $НСД(a,b)=3$.

13. Нехай у ΔABC $AB=BC$, $\angle CBE=40^\circ$, $AD\perp BC$, $CE\perp AB$. Знайдемо $\angle AFC$. Прямокутні трикутники BEC і CDF мають спільний

гострий кут $\angle DCF$, тому $\angle AFC = \angle CBE = 40^\circ$. Відповідь. 40°.

14. Очевидно, що $x > 2$. $y^2 = \frac{x^2-1}{2}$, $y^2 = \frac{(x-1)(x+1)}{2}$. Оскільки x непарне число, то $x-1$ та $x+1$ – парні числа, тому y – парне просте число. Але 2 – єдине парне просте число. Отже, $y = 2$. Тоді $x = 3$. Відповідь. $x = 3,\ y = 2$.

15. Для кожної з хорд розглянемо меншу із дуг, яку вона стягує. Назвемо ці дуги дугами типу А. Очевидно, що якщо сума довжин хорд більша, ніж 7π, то сума довжин дуг типу А також більша 7π.

Кожну з дуг типу А відобразимо симетрично відносно центра кола. Отримані дуги назвемо дугами типу В. Очевидно, що сума довжин усіх дуг обох типів більша $14\pi = 7 \cdot 2\pi$. За принципом Діріхле існує така точка, яка покривається принаймні вісьмома дугами. Тоді із симетрії випливає, що діаметрально протилежна точка також покривається принаймні вісьмома дугами. Отже, існує дві діаметрально протилежні точки кола, які покриваються принаймні 16-ма дугами обох типів (дуг обох типів однакова кількість). Відкинувши дуги типу В, одержуємо, що діаметр проведений через вказані діаметрально протилежні точки кола перетинає принаймні 8 дуг типу А, а, отже, принаймні 8 із заданих хорд (якщо діаметр перетинає дугу, то, очевидно, що він перетинає і відповідну хорду).

16. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$, $\frac{(bc+ac+ab)(a+b+c)-abc}{abc(a+b+c)}=0$, $\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc(a+b+c)}=0$. Отже, якщо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то $a=-b$ або $a=-c$, або $b=-c$. Якщо $a=-b$, тоді $\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1} = \frac{1}{-b^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$; $\left(\frac{1}{c}\right)^{2n+1} = \frac{1}{c^{2n+1}}$. Аналогічно при $a=-c$ і при $b=-c$.

17. Спочатку Петрусь повинен поставити знак „ -” перед n^3, а потім у кожній парі *(n^2, n^4), (n^5, n^7), (n^6, n^8)* ставити знак, протилежний до того, який поставив Миколка. Справді, $n^{k+2}-n^k = n^{k-1}\cdot(n-1)n(n+1) \vdots 6$ при всіх натуральних *n*. Обґрунтування очевидні.

18. Спочатку доведемо, що у збірнику відсутні задачі, рівень

складності яких більший за 3. Припустимо, що це не так. Тоді серед цілих чисел від 1 до 200 існує таке число, яке ділиться щонайменше на чотири різних простих числа. Отже, воно не менше за добуток 2*3*5*7=210, що неможливо, оскільки це число має бути не більше за 200. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$, де $p_1 < p_2 < p_3$, прості числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – цілі додатні числа такі, що $1 \le n \le 200$. Нам потрібно підрахувати кількість таких трійок чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Якщо $p_1 \ge 5$, то $n \ge 5 \cdot 7 \cdot 11 > 200$. Отже, $p_1 = 2$ або $p_1 = 3$. Далі перебором встановлюємо, що кількість задач найвищого рівня дорівнює 31.

19. $n^4 - 22n^2 - 46 = \left(n^2 - 25\right)\left(n^2 + 3\right) + 29.$ Це число ділиться на $n+5$, якщо $n+5$ є дільником числа 29. Отже, $n = 24$.

2.3. 9 клас (умови)

1. Відомо, що для $x, y, z \in$ □ справедлива рівність $xyz = 1$. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

2. Дослідити просте чи складене число $2^{2007} + 1$.

3. Розв'яжіть рівняння: $x + \sqrt{[x] + \sqrt{1 + \{x\}}} = 1$, де $[x]$ - найбільше ціле число, яке не перевищує x, $\{x\} = x - [x]$.

4. Дев'ять дев'ятикласників відвідують предметні гуртки. Відомо, що будь-які два з них відвідують хоча б один спільний гурток, а кожен учень ходить на заняття не більше як трьох гуртків. Доведіть, що є гурток, який відвідують не менше п'яти учнів.

5. Нехай CH - висота трикутника ABC, O - центр кола описаного навколо нього. Точка T - проекція точки C на пряму AO. Доведіть, що TH ділить сторону BC навпіл.

6. Знайти всі чотирьохцифрові числа, які в 59 разів більші від числа утвореного з першої та останньої його цифр збільшеного на 8.

7. Аферист намалював багато купюр у 3 грн та 7 грн. Починаючи з

якого числа він зможе дати без здачі будь-яку суму?

8. Курс акцій компанії кожний день в 12.00 підвищується чи знижується на n процентів, де n - фіксоване ціле додатне число, менше 100 (курс не округляється). Чи існує n, для якого курс акцій може двічі прийняти одне й те ж значення?

9. В трикутнику ABC проведено бісектрису кута $\angle ABC$. З точки A на неї опущений перпендикуляр AD, M – середина AC. Знайти MD, якщо відомі сторони трикутника ABC.

10. Про дійсні числа x та y відомо, що $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=2008$. Знайдіть значення виразу $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$.

11. Знайдіть всі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=6x-8, \\ x^2+y^2=a^2+8y-16 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

12. Деякі сторони клітинок шахівниці (8×8) пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки і перефарбовувати всі її сторони одночасно у протилежний колір. Чи завжди можна зробити декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше ніж $\frac{1}{4}$ від усієї кількості сторін клітинок?

13. Спростити вираз: $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$.

14. Вісім однакових кубиків з ребром 1 пофарбували так, що 24 їх грані білі, а 24 – чорні. Довести, що з них можна скласти куб, у якого площа поверхні, пофарбованої білою фарбою, така ж, як і за фарбована чорною фарбою.

15. Побудувати трикутник, якщо відомі точки перетину з описаним навколо нього колом його бісектриси, медіани і висоти.

16. Розв'язати рівняння $(x-5)(x-2)^2(x+1)=112$.

17. Доведіть, що для довжин сторін довільного трикутника

виконується нерівність $a^3+b^3+3abc>c^3$.

18. Яке з двох чисел більше: $5^{5^{5^5}}$ чи $((5!)!)!$?

19. Доріжки у зоопарку утворюють правильний трикутник, в якому проведені середні лінії. Із клітки втекла мавпа. Її ловлять два сторожі. Чи зможуть вони спіймати мавпу, якщо всі троє будуть бігати лише по доріжках, бачитимуть одне одного і матимуть однакові максимальні швидкості руху?

2.4. 9 клас (розв'язки)

1. $$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{z}{z\left(1+x+xy\right)}+\frac{xz}{xz\left(1+y+yz\right)}+$$
$$+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{z}{z+zx+1}+\frac{xz}{xz+1+z}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$
Отже, найбільше і найменше значення виразу рівне 1.

2. $2^{2007}+1=\left(2^{669}\right)^3+1=(2^{669}+1)(2^{1338}-2^{669}+1)$, тобто його можна розкласти на два множники, кожен з яких є цілим числом не дорівнює 1. Отже, $2^{2007}+1$ - складене число.

3. $x=0$. Оскільки $1-x\geq 0$, $\left[x\right]+\sqrt{1+\left\{x\right\}}\geq 0$, то нескладно бачити, що $-1\leq x\leq 1$. На проміжку $\left[-1;0\right)$ вихідне рівняння еквівалентне рівнянню $\sqrt{1+\left\{x\right\}}=x^2-2x+2$. Але для $x\in\left[-1;0\right)$ $\sqrt{1+\left\{x\right\}}<\sqrt{2}<2<x^2-2x+2$. На проміжку (0;1) вихідне рівняння еквівалентне рівнянню $1+\{x\}=(1-x)^4$ і не має розв'язків оскільки $1+\{x\}>1>(1-x)^4$. Залишається зробити перевірку для $x=0$ і $x=1$.

4. Якщо є учень, який відвідує менше ніж три гуртки, тоді (принцип Діріхле) один із гуртків відвідує не менше чотирьох учнів із решти восьми. Тому надалі вважатимемо, що кожен з учнів відвідує гуртки не менше із трьох предметів, а враховуючи умову задачі рівно з трьох. Тому можливі випадки: 1) Деякі два учні відвідують три спільні гуртки, тоді щонайменше три учні із решти семи повинні відвідувати один з трьох гуртків. 2) Деякі два учні відвідують два спільні гуртки. Нехай, наприклад,

для учнів Y_1 та Y_2 гуртки G_1 та G_2 є спільними і нехай G_3 та G_4 є третіми гуртками для Y_1 та Y_2 відповідно. Припустимо, що є учень Y_3, який відвідує гуртки G_1, G_2 та G_5. Якщо серед решти 6 учнів є більше двох, що відвідують гуртки G_1 або G_2, то все доведено. Якщо ні, то серед них є чотири учні, які не відвідують G_1 або G_2. Але ці четверо повинні відвідувати гуртки G_3, G_4, G_5, бо кожні два учні мають відвідувати хоча б один спільний гурток. Якщо ж гуртки G_1 і G_2 є спільними лише для двох учнів, то розглянемо пару G_3 і G_4. Якщо деякі три учні відвідують обидва ці гуртки, то все доведено, як і вище. Якщо ні то знайдеться п'ять учнів, які не відвідують G_3 і G_4 одночасно. Але тоді ці п'ять учнів повинні відвідувати один з двох гуртків G_1 або G_2, щоб мати спільний гурток з учнями Y_1 та Y_2. Звідси випливає, що гурток G_1 або G_2 відвідує щонайменше п'ять учнів. 3) Будь-які два учні відвідують лише один спільний гурток. Нехай Y_1 відвідує гуртки G_1, G_2, G_3. Решта 8 повинні відвідувати або G_1, або G_2, або G_3, а тому один з цих гуртків відвідують не менше трьох учнів, наприклад, гурток G_1 відвідують учні Y_2, Y_3, Y_4. Покажемо, що всі 9 учнів відвідують гурток G_1. Припустимо супротивне. Нехай, наприклад, учень Y_5 відвідує спільний з учнем Y_1 гурток G_2. Тоді учень Y_5 повинен з кожним із учнів Y_2, Y_3, Y_4 мати спільний гурток відмінний від G_2 (бо будь-які два учні мають спільним лише один гурток), тобто відвідувати 4 гуртки неможливо.

5. Нехай трикутник ABC - гострокутній (інші випадки розглядаються аналогічно). Проведемо $OM \perp AC$, тоді $\angle AOM = \angle ABC$ (наслідок теореми про вписаний кут). Із прямокутних трикутників AMO і CHB випливає, що $\angle TAC = \angle BCH$.

Оскільки $\angle AHC = \angle ATC = 90^\circ$, то точки A, H, T, C лежать на одному колі. Звідси маємо, що $\angle CHT = \angle BCH$ (вписані і спираються на одну дугу), тобто $\triangle HKC$ - рівнобедрений ($K = TH \cap BC$), причому: $\angle KHC = 90^\circ - \beta$ ($\beta = \angle ABC$). Тоді, $\angle BHK = \angle BKH = \beta$, тобто $KB = KH = KC$, а це означає, що K - середина.

6. За умовою $\overline{abcd} = 59 \cdot \left(\overline{ad} + 8\right) \Leftrightarrow 1000a + 10 \cdot \overline{bc} + d = 590a + 59d + 472$ $\Leftrightarrow 10 \cdot \overline{bc} + 410a = 472 + 58d \Rightarrow d=1$ або $d=6$. Якщо $d=1$, то $\overline{bc} = -41a + 53 \Rightarrow$

а=1, $\overline{bc}=12 \Rightarrow \overline{abcd}=1121$. Якщо d=2, то $\overline{bc}=-41a+82 \Rightarrow$ 1) а=1, $\overline{bc}=41 \Rightarrow \overline{abcd}=1416$. 2) а=2, $\overline{bc}=0 \Rightarrow \overline{abcd}=2006$. Відповідь: 2006, 1416, 1121.

7. 12=3+3+3+3; 13=7+3+3; 14=7+7. Всі решта отримуються додаванням купюр номіналом 3 грн. 11 отримати неможливо. Відповідь: Починаючи з 12.

8. Зрозуміло, що курс акцій при підвищенні множиться на $1+\dfrac{n}{100}$, а при пониженні на - $1-\dfrac{n}{100}$. Отже, після k підвищень і l понижень курс акцій помножиться на $\left(1+\dfrac{n}{100}\right)^k\left(1-\dfrac{n}{100}\right)^l$. Доведемо, що це число не може бути рівним 1. Для цього число $\dfrac{n}{100}$<1 запишемо у вигляді нескоротного дробу $\dfrac{p}{q}$, де q>1. Тоді $1+\dfrac{n}{100}=\dfrac{q+p}{q}$ та $1-\dfrac{n}{100}=\dfrac{q-p}{q}$. Оскільки числа q+p та q–p взаємно прості з q, то дріб $\dfrac{(q+p)^k(q-p)^l}{q^{k+l}}$ також нескоротний, а тому не рівний 1. Відповідь: не існує.

9. Продовжимо AD до перетину з BC в точці E. Тоді трикутник ABE рівнобедрений. Отже AD=DE, тоді DM – середня лінія трикутника EAC. Оскільки EC=$|\mathrm{BC}-\mathrm{AB}|$, тоді $\mathrm{DM}=\dfrac{\mathrm{EC}}{2}=\dfrac{|\mathrm{BC}-\mathrm{AB}|}{2}$.

10. Нехай $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=k$, тоді $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{k}{2}$. Далі за цією самою властивістю маємо $\dfrac{k}{2}+\dfrac{2}{k}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}$. Звідси випливає, що $\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\dfrac{k^2+4}{4k}$. Після цього відповідь знаходиться просто. Відповідь: $\dfrac{(k^2+4)^2+16k^2}{4k(k^2+4)}$, де $k=2008$.

11. Перепишемо задану систему рівнянь у вигляді: $\begin{cases} (x-3)^2+y^2=1, \\ x^2+(y-4)^2=a^2. \end{cases}$

Отримали систему із рівнянь двох кіл, відстань між центрами яких дорівнює 5. Ця система матиме єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли такі кола дотикатимуться одне до одного, тобто коли сума або різниця їх радіусів дорівнюватиме 5. Звідси знаходимо $a=\pm4$ або $a=\pm6$.

12. Не завжди. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п'ятого та сьомого стовпців шахівниці у синій колір. При цьому отримаємо 72 вершини клітинок, з яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбовуваннях вона залишатиметься непарною, а отже, кількість вершин, з яких виходять сині відрізки, зменшитися не може. Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за 72:2=36=144:4.

13. $$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=\frac{\left(a+b\right)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc}{\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ac\right)}=$$

$$=\frac{\left(\left(a+b\right)+c\right)^3-3\left(a+b\right)^2c-3\left(a+b\right)c^2-3a^2b-3ab^2-3abc}{\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ac\right)}=$$

$$=\frac{\left(a+b+c\right)^3-3\left(a+b+c\right)\cdot\left(ab+bc+ac\right)}{\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ac\right)}=a+b+c\,.$$

Відповідь: $a+b+c$.

14. Складемо куб довільним чином. Нехай на його поверхні m білих і n чорних квадратиків; $m+n=24$. Розглянемо величину $d=m-n$. Якщо $d=0$, то задачу розв'язано.

Нехай $d\neq0$. Тоді повернемо один з маленьких кубиків на 90° відносно однієї з трьох осей симетрії, які проходять через центри протилежних граней. Після цього величина d або залишиться незмінною, або зміниться на 2. Величина d − парне ціле число, бо m і n мають однакову парність.

Наприклад, за три таких операції можна зробити так, щоб три грані одного кубика, які були на поверхні сховалися всередину великого куба, і навпаки – ті, що були всередині, опинилися на поверхні. Тоді за 24 таких операції на поверхні буде $(24-m)$ білих і $(24-n)$ чорних квадратиків. Отже, у такому випадку маємо: $d=(24-m)-(24-n)=n-m$

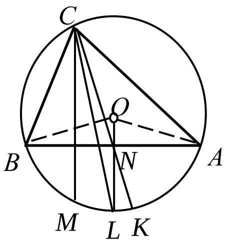
$= -(m - n)$.

Оскільки $m - n$ та $n - m$ взаємно протилежні парні числа, то величина d в деякий момент обов'язково набуде значення, що дорівнює нулю. В цей момент потрібно припинити поворот кубиків, і отримаємо шукане розміщення.

15. Нехай ABC – шуканий трикутник. K, L, M − точки перетину з описаним колом медіани, бісектриси і висоти, проведених з вершини C.

Нехай $\angle BCL = \angle LCA = \alpha$, тоді $\angle AOL = \angle BOL = 2\alpha$, тобто OL – бісектриса кута AOB.

Оскільки ΔAOB рівнобедрений, то його бісектриса ON є висотою і медіаною, тобто LO − перпендикуляр до середини AB.



Хід побудови:

Побудуємо коло через задані точки K, L, M. Воно буде колом, описаним навколо ΔABC.

Проведемо пряму LO.

Через точку M проведемо пряму, паралельну до LO. Точка C перетину цієї прямої з колом є вершиною трикутника.

Точка N перетину прямих CK і LO є серединою AB.

Через точку N проведемо пряму $AB \perp CM$.

ΔABC − шуканий трикутник.

16. $(x-5)\cdot(x-2)^2\cdot(x+1) = 112$, $(x^2-4x-5)\cdot(x^2-4x+4) = 112$. Нехай $x^2-4x-5 = y$, звідки $y_1 = -16$, $y_2 = 7$ $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.

17. $$a^3+b^3+3abc = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+3abc > c\left(a^2-ab+b^2\right)+$$
$$+3abc = c\left(a+b\right)^2 > c^3.$$

18. Скористаємось такою нерівністю $n! < n^n$ для натуральних $n \ge 2$. Виконавши наступні оцінки, одержимо з одного боку, $((5!)!)! = (120!)! < (120^{120}) < (10^{360})! < 10^{360\cdot 10^{360}}$, а з іншого боку $5^{5^{5^5}} = (5^2)^{\frac{1}{2}5^{5^5}} > 10^{\frac{1}{2}5^{5^5}} > 10^{5^{5^5}-1} = 10^{5^{3124}} = 10^{(5^2)^{1562}} = 10^{10^{1562}}$. Отже перше число, яке записане в умові задачі, більше за друге.

19. Зможуть. Нехай доріжки утворюють трикутник ABC із середніми лініями MP, MK, PK, причому точка M лежить на AB, P – на BC, K – на AC. Розмістимо спочатку сторожів у точках M та P. Якщо мавпа на

трикутнику *MBP*, то ловля очевидна. В іншому разі сторож із *P* рухається по *PC*, поки не опиниться із мавпою на одній прямій, паралельній до *AC*, а дальше зберігає умову такої паралельності. Зрозуміло, що при цьому він не дасть мавпі втекти через точку *P*. Тепер сторож із *M* рухається по *MK*, поки не опиниться з мавпою на одній прямій, паралельній до *AC*, чи, якщо мавпа знаходиться на відрізку *AK*, - паралельній до *AB*. Зрозуміло, що він заблокує мавпі втечу через точки *M* та *K*. Якщо тепер мавпа знаходиться на трикутнику *AMK* то сторожі мають змогу зібратись у точках *M* та *K*, а якщо мавпа на трикутнику *PKC*, то вони зосередяться у точках *K* та *P*. У кожному зі цих випадків мавпу легко впіймати.

2.5. 10 клас (умови)

1. Нехай a і b - додатні дійсні числа. Знайдіть всі значення x, для яких виконується рівність:

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}-ax+a^2}+\sqrt{\frac{x^2}{3}-bx+b^2}=\sqrt{a^2-ab+b^2}\,.$$

2. В правильному $2n$-кутнику вершини розбиті на дві n-елементні підмножини. Для кожної підмножини розраховують суму відстаней між всіма парами точок в цій підмножині. Довести, що суми відстаней будуть рівними.

3. Доведіть нерівність: $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{1996}{1998}<\frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}$.

4. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що: $f(x)+2\cdot f(\frac{1}{x})=3x$.

5. На колі дано точки A і B. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте на цьому колі точки C, D, E, що лежать по один бік від прямої AB і для яких п’ятикутник $ABCDE$ має найбільшу можливу площу.

6. Розв’яжіть нерівність $\frac{\sin 3x+2\sin 2x}{\sin x}+2\geq 0$.

7. Розв’язати рівняння $\left(x^2-5\right)^2=x+5$.

8. У трикутнику *ABC*, точка *D* знаходиться на стороні *AC*. В

трикутники *ABD* і *CBD* вписали кола радіусів r_1 і r_2 відповідно, які дотикаються до сторони *AC* в точках *E* та *F* відповідно. Довести, що $r_1 \cdot r_2 = DE \cdot DF$, а у випадку, коли *D* є точкою дотику вписаного кола у трикутник *ABC* має місце рівність $DE=DF$.

9. Довести, що існує нескінчена кількість функцій $f: R \to R$ для яких $f(x+1)-f(x)=2x$?

10. Послідовність натуральних чисел $\{a_n\}$ задана рекурентною формулою $a_{n+1} = (a_n + n)^2 + a_n - 2$. Довести, що число a_{a_1} ділиться на число $a_1 + 1$, якщо $a_1 > 1$.

11. Знайдіть всі трійки дійсних чисел $x, y, z,$ які задовольняють рівності:

$$x = \sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|}, \quad y = \sqrt{\frac{z+1}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

12. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2007 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2007 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2008, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

13. Знайти суму $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}$.

14. У колі радіуса R проведено діаметр CD. Хорда AB перетинає його у точці M під кутом 45°. Знайти $AM^2 + MB^2$.

15. Знайти всі натуральні значення x, y, z, t, що задовольняють систему рівнянь: $\begin{cases} x + y = zt; \\ z + t = xy. \end{cases}$

16. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень на цій самій множині. Для довільного n з цієї множини $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Знайти $f(2009)$.

17. На дошці записано n одиниць. За один крок дозволяється будь-

які два з написаних чисел (нехай це a і b) та замість них записати число $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Цю операцію повторюють, доки на дошці не залишиться одне число. Доведіть, що дане число буде не меншим за $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

18. Нехай P – многочлен з цілими коефіцієнтами. Послідовність чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє такі умови $a_1 = a_{2010} = 2009$, $a_{n+1} = P(a_n)$ для всіх натуральних n. Знайдіть значення виразу: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{2009}}{a_{2010}}$

2.6. 10 клас (розв'язки)

1. Очевидно, що при $x \le 0$ вихідна рівність не справджується (ліва частина буде більшою за $(a+b)$, а права - меншою). Нехай $x > 0$. Проведемо з точки O промені OA, OB, OC таким чином, що $\angle AOC = \angle BOC = 30^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$. При цьому точки A, B, C виберемо так, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = \frac{x}{\sqrt{3}}$. За теоремою косинусів: $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $AC = \sqrt{\frac{x^2}{3} - ax + a^2}$, $BC = \sqrt{\frac{x^2}{3} - bx + b^2}$. Звідси зрозуміло, що рівність виконується тоді і тільки тоді, коли точка C лежить на відрізку AB. А це, в свою чергу, еквівалентно умові $S(\Delta AOC) + S(\Delta BOC) = S(\Delta AOB)$. Таким чином:

$$\frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 60^\circ,$$

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{3ab}{a+b}$.

2. Достатньо довести, що кількість відрізків певної довжини, що сполучають вершини однієї множини рівна кількості відрізків тієї ж довжини, що сполучають вершини іншої множини. Це можна довести, наприклад, наступним чином. Позначимо вершини $2n$-кутника мітками

«1» та «-1» у відповідності до приналежності першій та другій підмножині. Відрізкам, що є сторонами або діагоналями, присвоїмо мітки, що рівні сумі міток їх кінців, тобто мітки «2», «0», «-2» (відповідно, якщо вершини деякої сторони (чи діагоналі) належать першій підмножині, різним підмножинам, другій підмножині). Для того, щоб відрізків (сторін або діагоналей) рівної довжини в одній з підмножин було більше, ніж в іншій, необхідно, щоб: сума їх міток була нерівною нулю. А це неможливо, так як сума усіх міток відрізків (сторін або діагоналей $2n$-кутника) рівної довжини дорівнює подвоєній сумі міток всіх вершин $2n$-кутника, або сумі міток вершин $2n$-кутника (у випадку, коли ми розглядаємо головні (найбільшої довжини) діагоналі $2n$-кутника). Але сума міток усіх вершин є рівною нулю. Тобто кількості відрізків однакової довжини в обох підмножинах рівні, а отже, і суми їх довжин теж рівні.

3. Нехай $A=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot...\cdot\frac{1996}{1998}$, $B=\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{10}\cdot...\cdot\frac{1997}{1999}$, $C=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{9}{11}\cdot...\cdot\frac{1998}{2000}$.

Очевидно, що $A<B<C \quad \to \quad A^3<ABC=\frac{1}{1999\cdot 1000}$, отже $A<\frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}$.

4. Покладемо $x=\frac{1}{y}$. Отримаємо: $f(\frac{1}{y})+2\cdot f(y)=\frac{3}{y}$.

Перепозначимо $y=x$ і запишемо систему: $\begin{cases} f(x)+2\cdot f(\frac{1}{x})=3x, \\ f(\frac{1}{x})+2\cdot f(x)=\frac{3}{x}. \end{cases}$

Розв’язавши вищенаведену систему, отримаємо: $f(x)=\frac{2-x^2}{x}$.

Перевірка показує, що вона задовольняє умову.

5. Цю задачу розв’яжемо за допомогою алгебраїчних міркувань, наприклад, наступним чином. Нехай точки C, D, E послідовно лежать на колі від A до B (тобто маємо п’ятикутник $ABCDE$), точка O - центр даного кола, r - його радіус, $\alpha_1=\angle AOB$, $\alpha_2=\angle BOC$, …, $\alpha_5=\angle EOA$. Площа $ABCDE$ дорівнює $\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_5)$, де α_1 - задано, та $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5\le 2\pi-\alpha_1$ (рівність досягається, коли O лежить всередині $ABCDE$). З очевидної нерівності $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\le 2\sin\alpha$, $0\le\alpha\le\pi$, і, беручи

„наступні” доданки парами отримаємо:

$$\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4+\sin\alpha_5\le 2\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+2\sin\frac{\alpha_4+\alpha_5}{2}\le 4\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}{4},$$

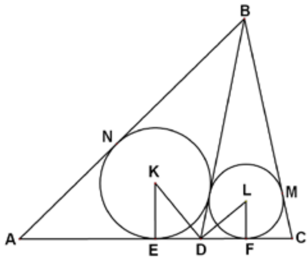
причому рівність досягається лише коли $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5$ (обґрунтування стають ще більш простішими для тих, хто знає нерівність Єнсена). Тому площа буде найбільшою, якщо $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\frac{2\pi-\alpha_1}{4}$. Побудова таких кутів з вершиною O для даного α_1 є очевидною.

6. Відмітимо, що $x\neq\pi n$, $n\in Z$. Використовуючи формули подвійного та потрійного кутів отримаємо $(2\cos x+1)^2\ge 0$, що виконується при всіх допустимих значеннях x. Відповідь: $x\neq\pi n$, $n\in Z$.

7. $$\left(x^2-5\right)^2=x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5=y \\ y^2-5=x \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=y-x \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} y-x=0 \\ y+x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-5=0 \\ x^2+x-4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

8. Нехай K і L центри кіл вписаних у трикутники ABD і CBD відповідно. Трикутники EDK та FLD подібні. Звідки слідує $r_1\cdot r_2=DE\cdot DF$. У випадку, коли D є точкою дотику вписаного кола у трикутник ABC.



$$\text{ED-DF}=\frac{\text{AD}+\text{BD}-\text{AB}}{2}-\frac{\text{CD}+\text{BD}-\text{BC}}{2}=$$

$$=\frac{(\text{AD}-\text{CD})+(\text{BC}-\text{AB})}{2}=\frac{\left(\frac{\text{AB}+\text{AC}-\text{BC}}{2}-\frac{\text{AC}+\text{BC}-\text{AB}}{2}\right)+\left(\text{BC}-\text{AB}\right)}{2}=0.$$

9. Відповідь: $f(x)=x^2-x+a$, де a довільне дійсне число.

10. Вказівка: Нехай $b_n=a_n+n$ тоді $b_{n+1}=(b_n)^2+b_n-1\Rightarrow$ $b_{n+1}+1=b_n(b_n+1)=b_n\ b_{n-1}(b_{n-1}+1)=\ldots=b_n\ b_{n-1}\ldots b_1(b_1+1)$ $\Rightarrow$ для довільного $n>1$

виконується, що b_n+1 ділиться на b_1, але b_1= a_1+1 тоді $a_{a_1} = b_{a_1} + 1 - (a_1 + 1)$ що ділиться на a_1+1.

11. Із заданих рівнянь послідовно знаходимо: $x \ge 0$, $0 < z \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x^2 = \left|\frac{1-y}{1+y}\right| = \frac{1-y}{1+y}$, $y^2 = \frac{z+1}{2}$, $z^2 = \frac{1}{1+\frac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y}{2}$. Отже, $y^2 - z^2 = \frac{z-y}{2}$, тобто $(y-z)(y+z+1) = 0.$ Звідси маємо $y = z.$ Тоді $y^2 = \frac{y+1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ (не задовольняє), $y_2 = 1.$ Остаточно отримуємо $y = z = 1,\ x = 0.$

12. Доведемо, що всі непарні числа одного кольору, а всі парні – іншого. Припустимо, що є, наприклад, два числа *n* та *n + 2* різних кольорів. Не зменшуючи загальності можна вважати, що *n* – синього, а *n + 2* – жовтого кольору. Позначимо $n = s_1, n+2 = g_1.$ Оскільки чисел кожного з кольорів є безліч, то знайдеться пара сусідніх чисел $g_2 > g_1$ та $s_2 = g_2 + 1$ відповідно жовтого та синього кольорів, і аналогічна пара $g_3 > g_2$ та $s_3 = g_3 + 1.$ Зауважимо, що $s_1 + s_2 + s_3 = g_1 + g_2 + g_3.$ Наступні 2000 пар, кожна з яких знаходиться строго правіше від попередньої, утворимо за таким принципом: $g_4 = s_4 + 1,\ s_5 = g_5 + 1,\ g_6 = s_6 + 1,$ $s_7 = g_7 + 1, \ldots,\ g_{2002} = s_{2002} + 1, \ldots,\ s_{2007} = g_{2007} + 1,$ де s_i - синього, а g_i - жовтого кольору. Позначимо тепер їх спільну суму

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{2007} = g_1 + g_2 + \ldots + g_{2007} = M.$$

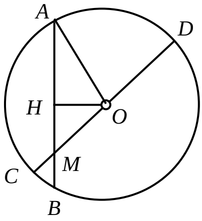
Тоді, згідно з умовою задачі, число M повинно бути зафарбоване як у синій, так і у жовтий кольори, що, зрозуміло, одночасно не можливо. Отримане протиріччя доводить, що кольори всіх чисел однієї парності співпадають. Оскільки число 1 – синього кольору, то 2008 – жовтого кольору.

13. $$\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \cdots + \frac{\sqrt{2009}-\sqrt{2008}}{(\sqrt{2009}+\sqrt{2008})(\sqrt{2009}-\sqrt{2008})} =$$
$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2009} - \sqrt{2008} = \sqrt{2009} - 1.$$

Відповідь. $\sqrt{2009} - 1.$

14. За умовою $OC = OD = OA = R$, $\angle AMD = 45°$. Побудуємо

$OH \perp AB$. Тоді $AH = BH$.



$AM^2 + MB^2 = \left(AH + HM\right)^2 + \left(HB - HM\right)^2 =$

$= \left(AH + HM\right)^2 + \left(AH - HM\right)^2 =$

$= 2\cdot\left(AH^2 + HM^2\right) = 2\cdot\left(AH^2 + HO^2\right) = 2R^2$.

Відповідь. $2R^2$.

15. Додавши почленно рівняння системи, одержимо:

$$x + y + z + t = zt + xy,$$

$$zt + xy - x - y - z - t = 0,$$

$$(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2.$$

Оскільки $x, y. z, t \in N$, то можливі два випадки:

1) обидва доданки лівої частини останнього рівняння дорівнюють 1;

2) один доданок дорівнює 2, а другий – 0.

Неважко побачити, що в першому випадку існує єдиний розв’язок $x = y = z = t = 2$. У другому випадку дістанемо вісім розв’язків.

Відповідь. $(2;2;2;2)$, $(3;2;1;5)$, $(3;2;5;1)$, $(2;3;1;5)$, $(2;3;5;1)$, $(1;5;3;2)$, $(1;5;2;3)$, $(5;1;3;2)$, $(5;1;2;3)$.

16. Доведемо, насамперед, що $f(0) = 1$.

1) $f(0) \neq 0,\ f(0) \leq 3$.

2) Нехай $f(0) = 2$, тоді $f(2) + f(0) = 3;\ f(2) = 1$. Якщо $n = 2$, то $f(f(2)) + f(2) = 7$, $f(1) + 1 = 7,\ f(1) = 6$; якщо $n = 1$, то $f(f(1)) + f(1) = 5$, $f(6) + 6 = 5,\ f(6) = -1 \notin E(f)$. Тому $f(0) \neq 2$.

3) Нехай $f(0) = 3$, тоді $f(f(0)) + f(0) = 3$; $f(3) + f(0) = 3;\ f(3) = 0$; якщо $n = 3$, то $f(f(3)) + f(3) = 9$, $f(0) + f(3) = 9,\ f(0) = 9$, але ми припустили, що $f(0) = 3$. Отримане протиріччя доводить, що $f(0) \neq 3$.

Отже, $f(0) = 1$.

Тепер методом математичної індукції доведемо, що $f(n) = n + 1$. Маємо $f(0) = 1$. Нехай для деякого k: $f(k) = k + 1$. Тоді $f(f(k)) + f(k) = 2k + 3$, $f(k+1) + (k+1) = 2k + 3$, $f(k+1) = k + 2$.

Отже, $f(2009) = 2010$.

Відповідь. $f(2009) = 2010$.

17. Оскільки $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\left(\frac{a+b}{ab\sqrt{2}}\right)^2$, то сума квадратів обернених до записаних на дошці чисел, не збільшуватиметься при проведенні вказаної операції. Таким чином, коли на дошці залишиться єдине число X, то для нього виконуватиметься нерівність $\frac{1}{X^2}\leq n$.

18. Якщо P – многочлен з цілими коефіцієнтами, то для будь-яких цілих чисел c і d $P(c)-P(d)$ ділиться на $c-d$. Нехай $a_0=a_{2009}$ і $x_i=a_i-a_{i-1}$ для всіх $i\in\square$. Для кожного $i\in\square$ маємо $x_{i+1}=a_{i+1}-a_i=P(a_i)-P(a_{i-1})=(a_i-a_{i-1})r_i=x_ir_i$, де $r_i\in\square$. Припустимо, що $x_i\neq 0$ при всіх $i\in\square$. Тоді $r_i\neq 0$ та $\left|x_{i+1}\right|\geq\left|x_i\right|$, при всіх $i\in\square$. При цьому, оскільки $\left|x_1\right|=\left|x_{2010}\right|$, то $\left|x_1\right|=\left|x_2\right|=...=\left|x_{2010}\right|$. Нехай a_m – найменше серед чисел $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{2009},\ a_{2010}$ (якщо таких чисел кілька, візьмемо будь-яке з них). Тоді $x_m=a_m-a_{m-1}\leq 0$, $x_{m+1}=a_{m+1}-a_m\geq 0$, $\left|x_m\right|=\left|x_{m+1}\right|$, $a_{m-1}=a_{m+1}$ ($1\leq m\leq 2009$). Враховуючи, що $a_{i+1}=P(a_i)$, одержуємо $a_{m-1}=a_{m+1}=a_{m+3}=...$, $a_m=a_{m+2}=a_{m+4}=...$. Звідси випливатиме, що $a_{2009}=a_{2011}=P(a_{2010})=P(a_1)=a_2=a_4=...=a_{2008}$. Але тоді $x_{1999}=0$, що суперечить припущенню. Таким чином, ми довели, що існує таке $i\in\square$, що $x_i=0$, тобто $a_i=a_{i-1}$. У такому випадку $a_1=a_2=...=a_{2010}=2009$, і шукане значення дорівнює 2009.

2.7. 11 клас (умови)

1. Розв'яжіть на множині N рівняння:
$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-2y+6}+\sqrt{z^2-6z+16}=t\ .$$

2. Відомо, що A,B,C - кути деякого трикутника. Визначте найбільше значення виразу: $\cos A+\cos B+\cos C$ і при яких значеннях A,B,C воно досягається.

3. Знайдіть усі такі числові функції f визначені на множині дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність: $f(xf(x)+f(y))=x^2+y.$

4. У клітинках квадратної таблиці розмірами 10×10 довільним чином розставлено числа 1, 2, …, 99, 100 (кожне число використане лише один раз). Доведіть, що в таблиці існують три клітинки, сума чисел в яких не перевищує 182. Центри цих клітинок утворюють рівнобедрений трикутник, катети якого паралельні краям таблиці.

5. Довести, що корені рівняння $x+\dfrac{1}{x}=2\cos 40^{\circ}$ є також коренями рівняння $x^4+\dfrac{1}{x^4}=2\cos 160^{\circ}$.

6. Числа a і b такі, що перше рівняння системи $\begin{cases}\cos x = ax+b,\\ \sin x + a = 0\end{cases}$ має рівно два розв'язки. Доведіть, що система має хоча б один розв'язок.

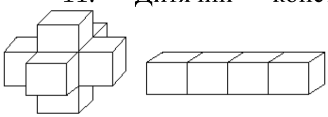
7. В гострокутному ΔABC медіану AM продовжили так, що MD=AM. Навколо ΔBCD описали коло, яке перетинає висоту BK трикутника ABC в точці T. Знайти кут між прямими AB і CT.

8. Знайдіть всі дійсні x для, яких виконується рівність: $(2+\sqrt{3})^x+1=(2\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$.

9. Перший, десятий та тридцятий члени геометричної прогресії є натуральними числами. Чи вірно, що і двадцятий її член є натуральним числом?

10. Знайдіть всі функції $f: R\to R$ такі, що для будь-яких $x, y\in \mathbb{R}$: $f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$.

11. Дитячий конструктор складається з фігурок виду



(ліва фігурка утворена з семи кубиків розмірами $1\times1\times1$, а права – з чотирьох таких кубиків). Чи можна за допомогою цих фігурок скласти куб розмірами $11\times11\times11$, що не матиме порожнин?

12. Обчислити $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}$, де α, β, γ – кути трикутника.

13. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$2x^3 - 2{,}5ax^2 + a^2x - a = 0$ має три різні корені.

14. Медіаною тетраедра називається відрізок, що з'єднує його вершину з точкою перетину медіан протилежної грані. Виразити довжину медіани, через довжини його ребер.

15. Опуклий n-кутник розбитий на трикутники своїми неперетинними діагоналями, причому у кожній його вершині сходиться непарне число трикутників. Довести, що n ділиться на 3.

16. Знайдіть усі такі визначені на множині $(0,+\infty)$ функції *f*, що для будь-яких *x*>0 виконується нерівність *f(x)*>0 і при всіх *x*>0, *y*>0 справджується рівність $f(xf(y)) + f(x) + f(y) = f(x+y)$, якщо вони існують.

17. В деякій казковій країні є 9 міст. З кожного міста виходить по 3 дороги з одностороннім рухом в деякі 3 інші. Доведіть, що існує замкнений круговий маршрут, який включає не більше 3 міст.

18. Задано натуральне число $n \ge 2$. Спочатку на горизонтальній прямій сидять n бліх, не всі в одній точці. Для додатного дійсного числа λ означимо стрибок наступним чином: вибираються дві блохи, що сидять в довільних точках A і B, причому A розташована ліворуч від B, і блоха, що сидить в А стрибає праворуч від B в розташовану на даній прямій точку C таку, що $\frac{BC}{AB} = \lambda$. Визначте всі значення λ такі, що для будь-якої точки M на цій прямій та для будь-якого початкового розташування n бліх існує скінченна послідовність стрибків, після яких блохи опиняться праворуч від точки M.

2.8. 11 клас (розв'язки)

1. Так, як $\sqrt{x^2 - x + 1}, \sqrt{y^2 - 2y + 6}, \sqrt{z^2 - 6z + 16}$ - натуральні числа, а це неважко довести. Тоді вихідне рівняння еквівалентне системі ірраціональних рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 1} = k, \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} = m, \\ \sqrt{z^2 - 6z + 16} = p, \\ k + m + p = t, \qquad k, m, p \in N \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (2k+2x-1)(2k-2x+1)=3, \\ (m+y-1)(m-y+1)=5, \\ (p+z-3)(p-z+3)=7, \\ k+m+p=t. \end{cases}$$

Так як $(2k+2x-1)+(2k-2x+1)=4k>0$, $(2k+2x-1)\times$ $\times(2k-2x+1)=3>0$, то $2k+2x-1>0$ та $2k-2x+1>0$ і тоді перше рівняння буде рівносильне сукупності систем: $\begin{cases} 2k+2x-1=1, \\ 2k-2x+1=3; \end{cases}$ та $\begin{cases} 2k+2x-1=3, \\ 2k-2x+1=1, \end{cases}$ яка має розв'язок $x=1,\quad k=1$. Аналогічно з другого та третього рівнянь $y=3$, $m=3$; $z=6,\quad p=4$. І для четвертого рівняння, знаходимо: $t=k+m+p=8.$ Отже, розв'язок $x=1,\quad y=3$, $m=3$, $t=8$.

2. Як відомо $A+B+C=\pi$, звідки матимемо:

$$\cos A+\cos B+\cos C = 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2})+1 \le 2\sin\frac{C}{2}(1-\sin\frac{C}{2})+1=$$

$=2\left(-(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)+1\le\frac{3}{2}$. Отже, $\max(\cos A+\cos B+\cos C)=\frac{3}{2}$, при $A=B=C=\frac{\pi}{3}.$

3. Якщо покласти $x=0$, то дістанемо, що $f(f(y))\equiv y$. Далі із вихідної тотожності одержуємо, що $f(f(f(x))f(x)+f(y))\equiv\left(f(x)\right)^2+y$, а тому $f(xf(x)+f(y))\equiv\left(f(x)\right)^2+y$. Отже, $\left(f(x)\right)^2=x^2$, тобто при всіх $x\in\mathbb{R}$ $\left|f(x)\right|=\left|x\right|$. Припустимо, що існують такі $t\neq 0$, $s\neq 0$, що $f(s)=s$, $f(t)=-t$. Тоді $f(-t^2+s)=t^2+s$, а тому й $\left|t^2-s\right|=\left|t^2+s\right|$, що при $t\neq 0$, $s\neq 0$ є неможливим. Таким чином, $f(x)=x$ при всіх $x\in\mathbb{R}$, або ж $f(x)=-x$ при всіх $x\in\mathbb{R}$. Залишається перевірити, що обидві функції задовольняють умову задачі.

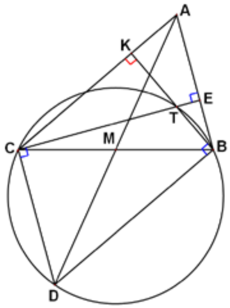
4. Цю таблицю можна розбити на 16 прямокутників розміром 2×3 і один прямокутник розміром 1×4. Для цього, наприклад, спочатку ділимо частину таблиці 10×6 на прямокутники 2×3, а із залишених клітинок 9×4 виділяємо такі самі прямокутники. Кожен прямокутник 2×3 ми

можемо розбити на два триклітинкових прямокутних трикутника вказаного в умові вигляду. Так ми отримаємо 32 трикутника, сума чисел в яких не перевищує 5+6+…+99+100. Зробивши не складні підрахунки ($5+6+...+99+100=\dfrac{5+100}{2}96=5040$, $\dfrac{5040}{32}=157,5$), бачимо, що знайдеться трикутник з сумою чисел, не більшою за 157, що є навіть кращою оцінкою, ніж вимагається в умові.

5. Піднесемо рівняння $x+\dfrac{1}{x}=2\cos 40^\circ$ до квадрату, тоді $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2\cos 80^\circ$. Ще раз підносячи це рівняння до квадрату отримаємо $x^4+\dfrac{1}{x^4}=2\cos 160^\circ$, що і потрібно було довести.

6. За умовою задачі функція $y=\cos x-ax-b$ перетворюється в нуль тільки в двох точках x_1, x_2(можна вважати $x_1<x_2$).

Ці точки розбивають числову вісь на три проміжки, причому функція на крайніх проміжках набуває різних знаків. Отже, на середньому проміжку функція набуває такого ж знаку як на одному з крайніх. Саме та точка x_1 чи x_2, в якій функція не змінює знак і буде точкою екстремуму. Тоді похідна функції $y=\cos x-ax-b$ в цій точці дорівнює нулю. Це означає, що знайдена точка є коренем другого рівняння. Що і треба було довести.



7. Відмітимо, що ABDC – паралелограм, а отже кут $\angle$KBD=90°, тобто DT – діаметр цього кола. Тоді кут $\angle$TCD=90°. Оскільки CD || AB то шуканий кут рівний 90°.

8. Запишемо вихідне рівняння у рівносильному вигляді: $\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$. Число $x=2$ є коренем такого рівняння, оскільки кожен доданок у лівій частині рівняння є строго спадною показниковою функцією.

9. Відповідь. Вірно. Нехай a_1, a_2, ..., a_n, ... – задана геометрична прогресія, q – її знаменник. За умовою a_1, $a_{10}=a_1q^9$ та $a_{30}=a_1q^{29}$ –

натуральні числа. Тому q^9 и q^{29} – додатні раціональні числа. Звідси випливає, що $q^2=\frac{q^{29}}{\left(q^9\right)^3}$ та $q=\frac{q^9}{\left(q^2\right)^4}$ – додатні раціональні числа. Нехай

$q=\frac{m}{n}$, де m та n – натуральні взаємно прості числа. Оскільки число $a_{30}=\frac{a_1m^{29}}{n^{29}}$ натуральне, m^{29} і n^{29} взаємно прості, то a_1 ділиться на n^{29}. Звідси отримуємо, що $a_{20}=\frac{a_1m^{19}}{n^{19}}$ – натуральне число

10. $f(x)=a\sin x$, $a\in R$. $f(x)=f\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+$ $+f(\frac{\pi}{2})\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=f(\frac{\pi}{2})\sin x$. Тому $f(x)=a\sin x$, $a\in R$. З іншого боку, така функція для всіх $a\in R$ задовольняє наше рівняння.

11. Не можна. Пофарбуємо одиничні кубики куба розмірами $11\times11\times11$ у чорний та білий кольори у шаховому порядку (одиничні кубики із спільною гранню повинні мати різний колір). Тоді різниця чорних та білих кубиків, зайнятих будь-якою з двох даних фігур буде ділитись на 5. У той же час в усьому кубі розмірами $11\times11\times11$ ця різниця дорівнює 1 або -1.

12. Якщо α, β, γ – кути трикутника, то $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, тоді

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=\frac{\mathrm{tg}\left(180^\circ-(\beta+\gamma)\right)+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=\frac{-\mathrm{tg}(\beta+\gamma)+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma-\frac{\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=\frac{(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)\cdot\left(1-\frac{1}{1-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}\right)}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=$$

$$\frac{\frac{(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)\cdot(-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma)}{1-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=\frac{-\mathrm{tg}(\beta+\gamma)\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}=\frac{-\mathrm{tg}\left(180^\circ-\alpha\right)}{\mathrm{tg}\alpha}=1.$$

Відповідь. 1.

13. Розглянемо функцію $f(x)=2x^3-2,5x^2+a^2x-a$.

$$f'(x) = 6x^2 - 5ax + a^2.$$

Рівняння $f'(x) = 0$ має два різні дійсні корені

$$x_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{a^2}}{12} = \frac{5a \pm |a|}{12}; \quad x_1 = \frac{a}{3}, \ x_2 = \frac{a}{2}.$$

I) $a > 0$, $\frac{a}{3} < \frac{a}{2}$, тому $x_{\max} = \frac{a}{3}, \ x_{\min} = \frac{a}{2}$;

$$f_{\max} = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{7a^3 - 54a}{54}, \quad f_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3 - 8a}{8}.$$

Щоб рівняння мало три різні корені потрібно, щоб графік функції $f(x) = 2x^3 - 2,5x^2 + a^2x - a$ три рази перетинав вісь Ox, тобто

$$\begin{cases} a > 0, \\ f\left(\frac{a}{3}\right) > 0, \\ f\left(\frac{a}{2}\right) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0, \\ 7a^3 - 54a > 0, \\ a^3 - 8a < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (0; \infty), \\ a \in \left(-\sqrt{\frac{54}{7}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{54}{7}}; \infty\right), \\ a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (0; 2\sqrt{2}); \end{cases}$$

звідки $a \in \left(\sqrt{\frac{54}{7}}; 2\sqrt{2}\right)$.

II) $a < 0$, $\frac{a}{3} > \frac{a}{2}$, тому $x_{\max} = \frac{a}{2}, \ x_{\min} = \frac{a}{3}$;

$$f(x_{\max}) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3 - 8a}{8}, \quad f(x_{\min}) = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{7a^3 - 54a}{54}.$$

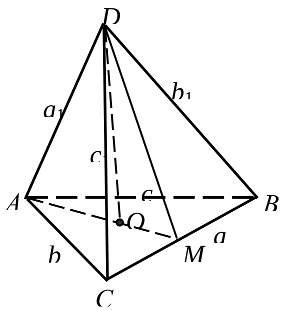
$$\begin{cases} a < 0, \\ \frac{7a^3 - 54a}{54} < 0, \\ \frac{a^3 - 8a}{8} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; 0), \\ a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{54}{7}}\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{54}{7}}\right), \\ a \in (-2\sqrt{2}; 0) \cup (2\sqrt{2}; \infty), \end{cases}$$

звідки $a \in \left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{54}{7}}\right)$.

III) $a = 0, \ 2x^3 = 0, \ x = 0$ – один розв'язок.

Відповідь. $a \in \left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{54}{7}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{54}{7}}; 2\sqrt{2}\right)$.

14. Нехай $AB = c,\ AC = b$, $BC = a$, $AD = a_1$, $BD = b_1$, $CD = c_1$. Точка M – середина BC. Позначимо $DM = e,\ AM = d$, $DO = x$. Тоді $AO = \frac{2}{3}d$, $OM = \frac{1}{3}d$.



За теоремою косинусів із ΔDMO:

$DO^2 + OM^2 - 2 \cdot DO \cdot OM \cdot \cos\angle DOM = DM^2$,

а із ΔAOD:

$DO^2 + AO^2 - 2 \cdot DO \cdot AO \cdot \cos\angle AOD = AD^2$.

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{d^2}{9} - 2 \cdot x \cdot \dfrac{d}{3} \cdot \cos\alpha = e^2, \\ x^2 + \dfrac{4d^2}{9} + 2 \cdot x \cdot \dfrac{2d}{3} \cdot \cos\alpha = a_1^2, \end{cases}$$

звідки $9x^2 = 3a_1^2 + 6e^2 - 2d^2$.

Відомо, що медіана трикутника $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, де a, b, c – довжини сторін трикутника.

Отже, $DM = e = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b_1^2 + c_1^2) - a^2}$; $e^2 = \dfrac{1}{4}(2b_1^2 + 2c_1^2 - a^2)$;

$AM = d = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$; $d^2 = \dfrac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Тоді:

$$DO^2 = x^2 = \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{2}{3}e^2 - \frac{2}{9}d^2 = \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{6}(2b_1^2 + 2c_1^2 - a^2) - \frac{1}{18}(2b^2 + 2c^2 - a^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Отже, $DO = \dfrac{1}{3}\sqrt{3(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

15. У кожній вершині сходиться непарне число трикутників, тому при заданій розмальовці всі сторони многокутника будуть належати трикутникам одного кольору, наприклад, чорного. Позначимо число сторін білих трикутників через m. Очевидно, що m ділиться на 3. Оскільки кожна сторона білого трикутника є також стороною чорного трикутника і всі сторони многокутника є сторонами чорних трикутників, то число сторін чорних трикутників дорівнює $m + n$. Тому $m + n$ ділиться на 3. m як число сторін білих трикутників ділиться на 3. Отже, n також ділиться на 3.

16. Таких функцій не існує. Справді, з умови задачі випливає, що для всіх додатних x, y виконується нерівність $f(x+y) > f(x)$, а тому функція f строго монотонно зростає на проміжку $(0,+\infty)$. Із вихідної тотожності, якщо в ній аргументи поміняти місцями, також випливає, що $f(xf(y)) = f(yf(x))$. І, оскільки шукана функція є строго монотонною, то $xf(y) = yf(x)$, тобто $f(x) = \frac{f(y)}{y}x$. А отже, $f(x) = kx$, де $k > 0$. Але безпосередня підстановка у вихідне рівняння показує, що жодна з таких функцій його не задовольняє.

17. Згідно з умовою існує принаймні одне місто в яке входить не менше трьох доріг. Нехай це місто g і в нього входять дороги з міст g_1, g_2, g_3 і виходять дороги до g_4, g_5, g_6. З кожного з міст g_4, g_5, g_6 виходить по три дороги. Вони не можуть вести до міста g, а якщо вони ведуть в одне з міст g_1, g_2, g_3, то тоді існує круговий маршрут і твердження задачі – доведене. Не порушуючи загальності, покладемо, що дорога з g_4 йде в p, q (два міста, що лишились) і в g_5. Тоді дорога з g_5 може вести в p, q і g_6. А з g_6 може вести тільки в p, q і g_4. Але в такому випадку круговий маршрут проходить через міста g_4, g_5, g_6. Отже, круговий маршрут довжини не більше 3 завжди існує.

18. Відповідь. $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$. Доведемо спочатку, що всі вказані значення λ задовольняють умову. Точки, в яких сидять блохи, позначимо зліва направо через A_1, A_2, …, A_n. Нехай $d = \min\{A_k A_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1\}$. Кожного разу будемо вибирати найлівішу блоху, і вона буде стрибати через найправішу. При першому стрибку блоха в A_1 стрибатиме через блоху в A_n, точку її приземлення позначимо через A_{n+1}. Тоді $A_n A_{n+1} = \lambda A_1 A_n = \lambda(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n) \geq \lambda(n-1)d \geq d$.

Усі інші відстані між блохами залишаться незмінними і також не меншими d. Тому при таких діях і вказаних значеннях λ найменша відстань між блохами не буде зменшуватись. Оскільки тепер най лівіша блоха розташована в A_2 і $A_1A_2 \geq d$, на цьому і на кожному наступному кроці положення най лівішою блохи буде не менш ніж на d зміщуватись у правий бік. Для будь-якої точки M на прямій після деякої кількості стрибків всі блохи будуть праворуч від M .

Тепер покажемо, що при $\lambda < \frac{1}{n-1}$ умова не буде виконуватись. Доведемо це навіть для довільного розташування n блох. Дану пряму вважатимемо числовою, кожній точці поставимо у відповідність дійсне число. Нехай s_k – сума чисел, що відповідають положенням блох після k стрибків, w_k – найбільше з цих чисел (тобто значення, що відповідає розташуванню най правішої блохи). Відмітимо, що $s_k \le nw_k$. Досить довести, що послідовність w_k, $k \ge 0$, обмежена.

Нехай при $(k+1)$-му стрибку блохи з точки A стрибає в C через B, і цим точкам відповідають числа a, b, c. Тоді $s_{k+1} = s_k + c - a$. За умовою $(c-b) = \lambda(b-a)$, звідси $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Тому $s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$. Якщо $c > w_k$, то $c = w_{k+1}$. Оскільки $b \le w_k$, матимемо $s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$. Відмітимо, що записана оцінка правильна й у випадку $c \le w_k$, адже тоді $w_{k+1} - w_k = 0$, інші різниці тут додатні.

Звідси маємо, що $\frac{1+\lambda}{\lambda} w_{k+1} - s_{k+1} \le \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$. Тому послідовність $z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$, $k \ge 0$, не зростаюча, всі $z_k \le z_0$. Тобто $(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_k + (nw_k - s_k) \le z_0$. Оскільки $s_k \le nw_k$, отримуємо $(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_k \le z_0$. При $\lambda < \frac{1}{n-1}$ маємо нерівність $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$, тому послідовність w_k обмежена.

3. ЗАДАЧІ IV ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ (2007 Р.)

3.1. 8 клас (умови)

1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1. \end{cases}$

2. На шахівниці 8×8 в лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі. Перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє у цій грі?

3 У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB=BC)$ $\angle ABC=40^\circ$. На сторонах AB і BC вибрані точки M і N відповідно. Виявилось, що відрізок MN перпендикулярний до сторони BC і дорівнює половині сторони AC. Доведіть, що $CM = AC$.

4. Позначимо через $\tau(n)$ кількість натуральних дільників числа n. Знайдіть усі пари натуральних чисел (n,m), які задовольняють рівняння:

$$\tau^2(m)+\tau^2(n+15)+1=3\tau^2\left(n^2+3n\right).$$

5. Знайти усі пари цілих чисел (n,m), які задовольняють рівняння:

$$n^3+7m^2=2007\ .$$

6. Чи можуть при деякому дійсному значенні x одночасно бути раціональними числа $\left(x-\sqrt{3}\right)$ та $\left(x^3+\sqrt{3}\right)$?

7. Упорядковану пару чисел (a,b) дозволяється замінити на одну з таких чотирьох пар: $\left(a\pm\frac{2}{b},b\right)$ при $b\neq 0$, $\left(a,b\pm\frac{2}{a}\right)$ при $a\neq 0$.

а) Отримайте за допомогою цих операцій з пари $(2007\ ,\ 2)$ пару $(2\ ,\ -2007)$.

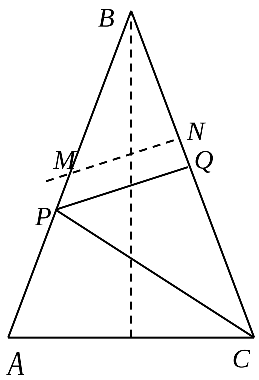
б) Доведіть, що при будь-якому способі отримання з пари $(2007\ ,\ 2)$ пари $(2\ ,\ -2007)$ в деякий момент було отримано пару з однією нульовою компонентою.

8. На кожній стороні трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники: ABC_1, AB_1C і A_1BC. Через середини відрізків A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1 провели прямі, перпендикулярні сторонам AB, BC і AC відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

3.2. 8 клас (розв'язки)

1. З другого рівняння $x^2 + y - 1 \geq 0$, тому $\sqrt{x^2 + y} \geq 1$, тобто умова $|y+3| > 0$ приводить до суперечності. Таким чином $|y+3| = 0 \Leftrightarrow y = -3$. Тоді з першого рівняння $x^2 + y = x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4$, тобто $x = \pm 2$. Перевіркою переконуємось, що пара $(-2,-3)$ задовольняє систему, а пара $(2,-3)$ – ні. Відповідь: $(-2,-3)$.

2. Доведемо, що перший завжди виграє завдяки такій стратегії: кожним своїм ходом він ходить до кінця тієї вертикалі, де стоїть фішка, без порушень правил, тобто не перетинаючи ті поля, на яких фішка вже побувала. Це він робить кожного ходу. Тоді другий гравець вже не зможе перетнути ту вертикаль, де фішка вже побувала, оскільки перший гравець так би мовити своїм ходом виключає цю вертикаль з гри. Другий гравець може зробити щонайбільше 7 ходів (усього 8 вертикалей, але ліва з них виключається з гри відразу після ходу першого). Але своїми ходами другий гравець може зменшити кількість вільних клітин на вертикалі максимум на 1, тому на своєму другому ході перший має вертикаль, на якій 7 вільних клітин. І цю перевагу принаймні в одну клітину (один хід) він зможе зберегти до кінця гри. Відповідь: перемагає перший гравець.



3. Кути при основі AC заданого рівнобедреного трикутника ABC дорівнюють по $70°$. Виберемо на стороні AB таку точку P, щоб $\angle ACP = 40°$, тоді

$\angle CAP = \angle APC = 70°$, тобто ΔAPC – рівнобедрений, тому $AC = PC$. Опустимо перпендикуляр PQ на сторону BC. Тоді трикутник PCQ – прямокутний з кутом $\angle PCQ = 30°$, а тому $PQ = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}AC = MN$. Це означає, що точки M, N відповідно співпадають з точками P, Q, а тому $MC = PC = AC$, що й треба було довести.

4. Розглянемо це рівняння за модулем 4: квадрат цілого числа за цим модулем дорівнює 0 або 1. Права частина може приймати лише значення 0 або 3, тому рівність можлива лише при умові, що $\tau^2(m) \equiv \tau^2(n+15) \equiv \tau^2\left(n^2+3n\right) \equiv 1 \pmod 4$. Але це означає, що кожне з чисел $\tau(m), \tau(n+15), \tau\left(n^2+3n\right)$ – непарне. Відомо, що непарну кількість дільників має лише квадрат дійсного числа. Усі дільники числа, яке не є квадратом, розбиваються на різні пари дільників, добуток яких в кожній парі дорівнює цьому числу. Таким чином їх загальна кількість парна. Таким чином ми маємо, що числа $m,\ n+15,\ n^2+3n$ є квадратами цілих чисел. Оскільки

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \le n^2+3n < n^2+4n+4 = (n+2)^2,$$

то число n^2+3n може бути квадратом лише, якщо $n^2+2n+1 = n^2+3n$, тобто при $n=1$. Тоді $n^2+3n=4$ і $\tau\left(n^2+3n\right)=3$, $n+15=16$ і $\tau(n+15)=5$. Тому з початкової рівності знайдемо: $\tau^2(m)=1$. Але один дільник має єдине натуральне число 1, тому $m=1$. Відповідь: $(1,1)$.

5. Розглянемо це рівняння за модулем 7. n^3 за цим модулем дорівнює або 0, або 1, або 6, тому і усі ліва частина дорівнює одному з цих трьох чисел. Оскільки $2007 \equiv 5 \pmod 7$, то задане рівняння в цілих числах розв'язків не має. Відповідь: рівняння розв'язків немає.

6. Доведемо методом від супротивного, що не можуть. Припустимо, що при деякому x число $a = x - \sqrt{3}$ – раціональне і $x = a + \sqrt{3}$. Тоді раціональним є також число:

$$x^3 + \sqrt{3} = \left(a+\sqrt{3}\right)^3 + \sqrt{3} = a^3 + 3a^2\sqrt{3} + 9a + 4\sqrt{3} = \left(a^3+9a\right) + \sqrt{3}\left(3a^2+4\right).$$

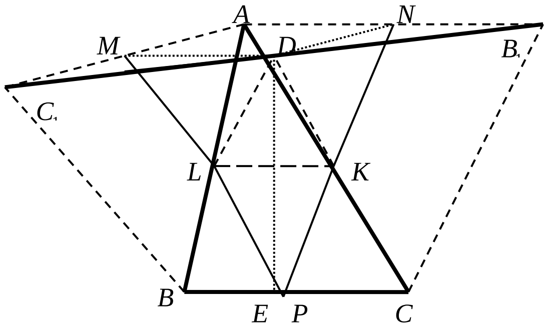
Звідси число $\sqrt{3}\left(3a^2+4\right)$ також повинно бути раціональним. А це виконується лише, при умові, що $3a^2+4=0$, що неможливо. Одержана суперечність завершує доведення. Відповідь: не можуть.

7. *а)* Занумеруємо операції: (1) – $\left(a+\frac{2}{b},b\right)$, (2) – $\left(a-\frac{2}{b},b\right)$, (3) – $\left(a,b+\frac{2}{a}\right)$, (4) – $\left(a,b-\frac{2}{a}\right)$. Тоді один з процесів можна описати таким чином:

$$(2007,2)\xrightarrow{(2)}(2006,2)\xrightarrow{(2)}(2005,2)\xrightarrow{(2)}\ldots\xrightarrow{(2)}(2,2)\xrightarrow{(4)}(2,1)\xrightarrow{(4)}(2,0)\xrightarrow{(4)}\ldots\xrightarrow{(4)}(2,-2007).$$

б) Якщо розглянути в кожний момент добуток компонент пари, то при виконанні будь-якої з чотирьох операцій цей добуток зміниться на 2. В початковий момент добуток дорівнює 4014, а в кінцевий дорівнює (-4014). Тому обов’язково при таких перетвореннях настане момент, коли добуток компонент пари дорівнює нулеві, що й доводить вказане твердження б).

8. Нехай M, N, L, K, D, P відповідно середини відрізків AC_1, AB_1, AB, AC, B_1C_1, BC. Покажемо, що рівними є трикутники MLD та DKN. Дійсно, $ML = AM = DN$, за властивостями середніх ліній правильного трикутника, аналогічно $MD = AN = NK$. $\angle LMD =$ $= \angle LMA - \angle DMA = 60^\circ - \angle DMA = 60^\circ - \angle DNA = ANK - \angle DNA = \angle KND$, тобто за двома сторонами та кутом між ними встановлюємо, що трикутники рівні. Але це означає, що $DL = DK$, тому DE – перпендикуляр до BC є також перпендикуляром до LK, а з рівності $DL = DK$ він є серединними перпендикуляром до відрізка LK. Таким чином, проведені в умові задачі перпендикуляри є серединними перпендикулярами до сторін трикутника LKP – серединного трикутника ABC, а тому вони перетинаються в одній точці – центрі описаного навколо ΔLKP кола.



Зауважимо, що це твердження не залежить від того, як проходить відрізок B_1C_1 – перетинаючи сторони AB, BC чи ні. В іншому випадку просто рівність відповідних кутів доводиться аналогічно, з додаванням до кутів в 60°

3.3. 9 клас (умови)

1. При яких дійсних значеннях параметра a нерівність

$$\left(ax^2+4(a+1)x+4a+1\right)\left((4a+1)x^2+4(a+1)x+a\right)\geq 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

2. На прямокутній клітчастій дошці в лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі. Перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє у цій грі, якщо дошка має розміри

а) 2007×2007;

б) 2006×2007 (2006 клітин по вертикалі)?

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (n,m), які задовольняють рівняння: $4^n+n\cdot 2^{n+1}+2n^2=m^2+4$.

4. УсерединітрикутникаABCзкутами $\angle C=90^\circ$ та $\angle A=60^\circ$ є така точка O, що $\angle AOB=120^\circ$, $OC=1$, $OB=4$. Знайдіть довжину відрізка AO.

5. В опуклому семикутнику $ABCDEFG$ паралельними є відрізки: AC і EF, BD і FG, CE і GA, DF і AB, EG і BC та FA і CD. Доведіть, що відрізки GB і DE також паралельні.

6. В опуклому 2007-кутнику усі сторони та діагоналі пофарбовано в один з k кольорів. Довільні три вершини многокутника задають такий трикутник, що принаймні дві його сторони мають однаковий колір. Знайдіть усі значення k, при яких таке розфарбування можливе.

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} |x_1-x_2|=ax_3, \\ |x_2-x_3|=ax_4, \\ \dots\dots\dots\dots \\ |x_{2005}-x_{2006}|=ax_{2007}, \\ |x_{2006}-x_{2007}|=ax_1, \\ |x_{2007}-x_1|=ax_2, \end{cases}$$

якщо параметр a задовольняє умові: а) $a>1$; б) $a=1$.

3.4. 9 клас (розв'язки)

1. Безпосередньою перевіркою, переконуємось, що значення $a = -1/4$ та $a = 0$ умову не задовольняють. Нехай тепер $a(4a+1) \neq 0$, тобто в дужках записані квадратні тричлени. В них однакові дискримінанти: $D = 16(a+1)^2 - 4a(4a+1) = 28a + 16$. Тоді потрібні умови виконуються, якщо

1) $\begin{cases} a(4a+1) > 0 \\ D = 28a + 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -\dfrac{4}{7}$.

2) $a(4a+1) > 0$ та параболи мають однакові корені. З цієї умови витікає, що вершини парабол співпадають, тому $\dfrac{2a+2}{a} = \dfrac{2a+2}{4a+1} \Rightarrow$ $a = -1$ або $a = -1/3$. Значення $a = -1$ не задовольняє умову 2); а про значення $a = -\frac{1}{3}$ перевіркою переконуємось, що воно задовольняє умови задачі. Відповідь: $a \in \left(-\infty, -4/7\right] \cup \left\{-1/3\right\}$.

2. а) Доведемо, що перший завжди виграє завдяки такій стратегії: кожним своїм ходом він ходить до кінця тієї вертикалі, де стоїть фішка, без порушень правил, тобто не перетинаючи ті поля, на яких фішка вже побувала. Це він робить кожного ходу. Тоді другий гравець вже не зможе перетнути ту вертикаль, де фішка вже побувала, оскільки перший гравець так би мовити своїм ходом виключає цю вертикаль з гри. Другий гравець може зробити щонайбільше 2006 ходів (усього 2007 вертикалей, але ліва з них виключається з гри відразу після ходу першого). Але своїми ходами другий гравець може зменшити кількість вільних клітин на вертикалі максимум на 1, тому на своєму другому ході перший має вертикаль, на якій 2006 вільних клітин. І цю перевагу принаймні в одну клітину (один хід) він зможе зберегти до кінця гри.

б) Після будь-якого ходу першого другий ходить до кінця тієї горизонталі, де стоїть фішка. Так само як в попередньому пункті, другий завжди має на 1 клітину більше від першого, а тому виграє.

Відповідь: а) перемагає перший гравець; б) перемагає другий гравець.

3. Перепишемо задане рівняння у такому вигляді: $(2^n + n)^2 - m^2 = 4 - n^2$. При $n > 2$ права частина останньої рівності від'ємна, тому $(2^n + n - m)(2^n + n + m) < 0$, звідки випливає умова $2^n + n < m$, але

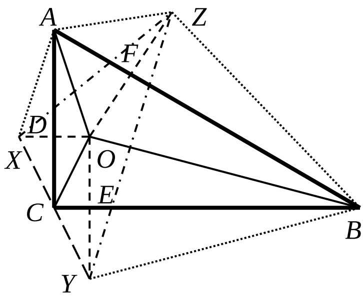
тоді для цілих чисел $2^n + n + 1 \le m$. Таким чином маємо таку нерівність:

$$(2^n + n + 1)^2 = 4^n + n^2 + 1 + n \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1} + 2n \le m^2 = 4^n + 2n^2 + n \cdot 2^{n+1} - 4 .$$

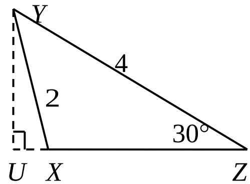
Після спрощень маємо: $2^{n+1} + 2n + 1 \le n^2$, яка при $n > 2$ невірна, що легко доводиться методом математичної індукції.

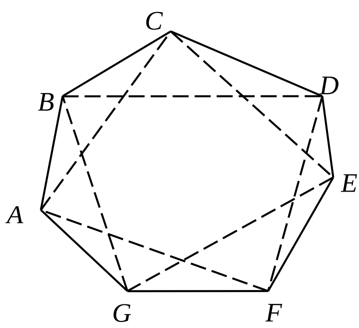
Залишається перевірити $n = 1$ та $n = 2$. При $n = 1$ маємо $m^2 = 6$ – не має розв'язків в натуральних числах. При $n = 2$ маємо $m^2 = 36$, а тому пара $(2,6)$ є єдиним натуральним розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $(2,6)$.



4. Побудуємо точки X, Y, Z, що симетричні точці O відносно сторін ΔABC, як на рисунку. Тоді $CX = = CY = CO = 1$, $AX = AO = AZ$, $YB = = OB = ZB$, крім того точки X, C, Y лежать на одній прямій, оскільки кут $\angle XCY = 180°$. $\angle XAZ = 2 \cdot \angle CAB = $. $\angle XAZ = 2 \cdot \angle CAB = 120°$ ΔAXZ – рівнобедрений з кутом $120°$ при вершині, тому $\angle XZA = 30°$. Оскільки $\angle AZB = \angle AOB = 120°$, то $\angle XZB = 90°$. ΔBZY – рівносторонній, тому що він рівнобедрений та з кутом при вершині $60°$, тому $YZ = 4$ і кут $\angle XZY = 30°$. Це означає, що у трикутника XYZ проти кута $\angle XZY = 30°$ розташована сторона $XY = 2$, а сторона $ZY = 4$ – вдвічі більша. Легко показати, що тоді у цього трикутника $\angle YXZ = 90°$. Дійсно, якщо він не прямий, то опустимо з вершини Y перпендикуляр на пряму XZ, тоді ми маємо прямокутний ΔYZU з кутом $\angle Z = 30°$, тому його катет $YU = 2$, але тоді перпендикуляр YU до прямої XZ рівний за довжиною до похилої $YX = 2$, що неможливо. Одержана суперечність показує, що ΔXYZ прямокутний. Тому $XZ = 2\sqrt{3}$ і $AX = 2$. Оскільки $AO = AX$, то й $AO = 2$. Відповідь: $AO = 2$.





5. З паралельності вказаних відрізків послідовно отримуємо рівність площ таких трикутників: $S_{GBD} = S_{BDF} = S_{DFA} = S_{FAC} = S_{ACE} = S_{CEG} =$

$= S_{EGB}$, отже $S_{GBD} = S_{EGB}$, що рівносильне умові паралельності відрізків $GB \parallel DE$.

7. Покажемо, що максимальне можливе значення $k = 2006$. Доведення проведемо методом математичної індукції для n –кутника і покажемо, що $k = n-1$. База при $n = 3$ – очевидна. Нехай твердження доведено для деякого n. Доведемо для $n+1$. Припустимо, що нам вдалося за правилами окрасити сторони та діагоналі опуклого $n+1$-кутника не менше ніж в $(n+1)$ колір. Розглянемо деяку вершину A цього багатокутника та вилучимо її і усі відрізки, якими вона з'єднана з іншими точками. За припущенням індукції, той n -кутник, що залишився, можна пофарбувати не більше як в $(n-1)$ колір. Але тоді принаймні два відрізки, що виходять з вершини A мають два „нові" кольори: $n-$ й та $(n+1)-$й. Візьмемо ці відрізки в якості сторін трикутника, тоді третій відрізок цього трикутника пофарбовано в один з перших $(n-1)$ кольорів, а це суперечить умові розфарбування $(n+1)$ –кутника.

Покажемо тепер, як досягти потрібного розфарбування. Перенумеруємо усі вершини числами від 1 до 2007, а кольори від 1 до 2006, і фарбуємо таким чином. Для вершини, що має номер $k \geq 2$ усі відрізки, що її з'єднують з вершинами з меншими номерами фарбуємо кольором $(k-1)$. Тоді використано як раз 2006 кольорів. Умови задачі виконуються, оскільки для будь-якого трикутника можна розглянути вершину, що має найбільший номер, тоді ця вершина з'єднана з двома іншими відрізками однакового кольору.

Для того, щоб реалізувати будь-яку іншу кількість кольорів, що не перевищує 2006, достатньо просто об'єднати декілька різних кольорів в один.

Відповідь: $1 \leq k \leq 2006$.

8. а) Зрозуміло, що усі невідомі – невід'ємні числа. Очевидний розв'язок - $x_1 = x_2 = ... = x_{2007} = 0$. Припустимо, що ненульові невідомі. Нехай найбільше з них x_3, але тоді $x_1 \leq x_3 < ax_3$ і $x_2 \leq x_3 < ax_3$, звідки $\left| x_1 - x_2 \right| < ax_3$ і розв'язків немає.

Відповідь: $x_1 = x_2 = ... = x_{2007} = 0$

б) Аналогічно, нехай є ненульовий розв'язок, нехай найбільше з них x_3. Тоді, з обмежень $x_1 \leq x_3$ і $x_2 \leq x_3 \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq x_3$, тому рівність можлива лише при умові, що $x_1 = x_3$ та $x_2 = 0$, або $x_2 = x_3$ та $x_1 = 0$. Як побачимо нижче ці умови аналогічні, а тому розглянемо другу з них. З умов системи послідовно одержимо: $|x_2 - x_3| = x_4 = 0 \Rightarrow |x_3 - x_4| = x_5 = x_3$ $\Rightarrow |x_4 - x_5| = x_6 = x_5 = x_3 \Rightarrow |x_5 - x_6| = x_7 = 0$ і т.д. Таким чином усі невідомі розбиваються таким чином $(b, b, 0, b, b, 0, b, b, 0, \ldots)$ і це може початися з будь-якого місця.

Відповідь: $(0,0,0,\ldots,0)$, або $(b,b,0,b,b,0,b,b,0,\ldots,b,b,0)$, або $(b,0,b,b,0,b,b,0,\ldots,b,b,0,b)$, або $(0,b,b,0,b,b,0,b,b,0\ldots,0,b,b)$, де b - довільне додатне число.

3.5. 10 клас (умови)

1. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1. На променях BB_1 і CC_1 за точками B_1 і C_1 вибираються точки P і Q відповідно так, що $\angle APC = \angle AQB = 90°$. Радіуси кіл, які вписані в трикутники APC та AQB, рівні. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

2. На клітчастій дошці розміром $n \times n$ двоє гравців по черзі малюють многокутники (не обов'язково опуклі) одиничної площі з вершинами у вузлах сітки. Забороняється малювати многокутник, який має спільні точки з вже намальованими. Програє той, хто не може намалювати черговий многокутник. Хто виграє у цій грі?

3. Знайдіть усі функції $f: X \to R$, які для будь-яких чисел $x, y \in X$ задовольняють рівняння: $f(x+y) + f(xy-1) = \left(f(x)+1\right)\left(f(y)+1\right)$, якщо множина X є множиною: а) цілих чисел; б) раціональних чисел.

4. Розв'яжіть нерівність:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{x^2+1}{x}\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \geq 0.$$

5. У країні Карнавалії 669 міст, деякі з яких з'єднані дорогами з одностороннім рухом. Кожний день у довільних двох містах проводять карнавал, на час якого всі дороги, що входять і виходять з цих міст, перекриваються. Але схема доріг в Карнавалії влаштована так, що мешканці інших 667 міст можуть проїхати з будь-якого одного міста в будь-яке інше скориставшись однією або декількома дорогами, не

порушуючи правил руху. Яка найменша кількість доріг може бути в Карнавалії?

6. В гострокутному трикутнику ABC кут ABC дорівнює $60°$. Точка D належить стороні AC. Доведіть нерівність:

$$\sqrt{3}BD \le AC + \max\{AD, DC\}.$$

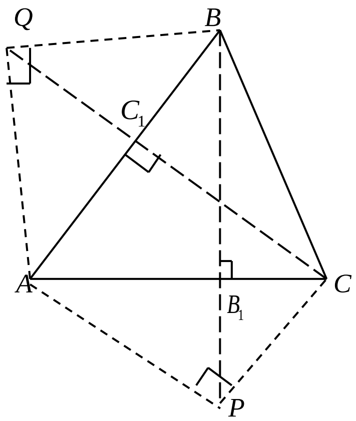
7. Доведіть, що для довільних різних простих чисел p і q рівняння

$$x(x+1) = pq(x-y)$$

а) має рівно два розв'язки в натуральних числах (x, y);

б) в обох розв'язках значення y однакове.

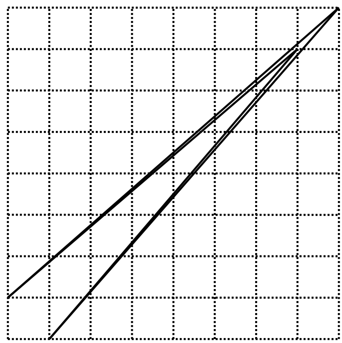
3.6. 10 клас (розв'язки)



1. Зрозуміло, що $\angle AQC_1 = \angle QBA$, тому трикутники AQC_1 та QBA подібні $\Rightarrow$ $AQ^2 = AC_1 \cdot AB$, аналогічно. Але точки B, C_1, B_1, C – циклічні, а тому $AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB = AQ^2 = AP^2$ $\Rightarrow$ $AP = AQ$. Далі можна доводити по різному, наприклад, таким чином, якщо позначити r – радіуси вписаних кіл, то

$$tg\frac{\angle QAB}{2} = \frac{r}{AQ - r\sqrt{2}} = tg\frac{\angle CAP}{2} \quad \Rightarrow$$

$\angle QAB = \angle CAP$ $\Rightarrow$ $AC = AB$, тобто трикутник обов'язково рівнобедрений. Відповідь: ΔABC рівнобедрений.



2. Покажемо, що перший завжди виграє завдяки симетричній стратегії, але для цього він повинен намалювати першім таку ламану, як зображена на рисунку.

Доволі легко переконатися, що

площа багатокутника, який складається з двох трикутників як раз складає 1, а тому цілком задовольняє умови. Інші ламані можна малювати лише по різні боки від цієї, я між ними – неможливо, а тому симетрична стратегія цілком спрацьовує.

Відповідь: виграє перший гравець.

3. Покладемо в рівняння $y=0$. Тоді $f(x)f(0)=f(-1)-f(0)-1$. Припустимо, що $f(0)\neq 0$, тоді $f(x)=c$, де c – стала. Але рівняння $c+c=(c+1)(c+1)$ не має дійсних коренів, тому наше припущення хибне. Таким чином $f(0)=0$, а отже $f(-1)=1$.

Покладемо у вихідне рівняння $y=-1$. Тоді $f(x-1)+f(-x-1)=2f(x)+2$. В одержане рівняння покладемо спочатку $x=-1$, тоді $f(-2)=4$. Далі $x=1$, тоді $f(1)=1$.

Покладемо у вихідне рівняння $y=1$, тоді:

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+2.$$

Враховуючи одержані рівності, матимемо: $f(-x-1)=f(x+1)$, що доводить, що функція – парна: $f(-x)=f(x)$.

Методом математичної індукції доведемо, що для будь-яких натуральних n : $f(x+n)=(n+1)f(x)-nf(x-1)+n^2+n$.

База індукції одержується при підстановці $y=1$. Зробимо індукційний перехід: замінимо в попередній рівності x на $x+1$, отримаємо:

$$f(x+n+1)=(n+1)f(x+1)-nf(x)+n^2+n=$$
$$=(n+1)\left(2f(x)-f(x-1)+2\right)-nf(x)+n^2+n=$$
$$=(n+2)f(x)-(n+1)f(x-1)+(n+1)^2+n+1.$$

Аналогічно доводиться рівність

$$f(x-n)=-(n-1)f(x)+nf(x-1)+n^2-n.$$

При підстановці в одержані рівності $x=0$ для всіх цілих n матимемо: $f\left(n\right)=n^2$.

Поклавши в початкову рівність $y=n$, та врахувавши одержані результати, отримаємо: $f(nx-1)=-f(x+n)+(f(x)+1)(n^2+1)$, $f(nx-1)=(n^2-n)f(x)+nf(x-1)-n+1$. Аналогічно поклавши $y=-n$, матимемо: $f(nx+1)=(n^2+n)f(x)-nf(x-1)+n+1$. Внаслідок чого одержимо рівність: $f(nx-1)+f(nx+1)=2n^2f(x)+2$, замінивши в якій x

на $\dfrac{m}{n}$, де число m – ціле, а n – натуральне, дістанемо: $f(m-1)+f(m+1)=2n^2 f\left(\dfrac{m}{n}\right)+2$, звідки: $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$. Отже, для всіх $x\in Q$: $f\left(x\right)=x^2$.

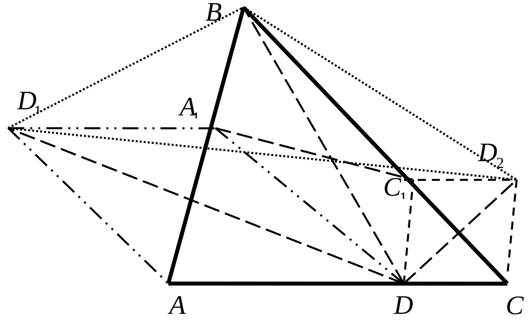
Перевіркою впевнюємося, що $f\left(x\right)=x^2$ – розв’язок нашого рівняння. Відповідь: $f\left(x\right)=ax^2$.

4. Зрозуміло, що при усіх дійсних x: $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$ і тому $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ має той самий знак, що й число x, а $\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)>0$. Тому при $x>0$ ліва частина додатна, при $x<0$ – від’ємна, значення $x=0$ не входить до області визначення. Відповідь: $x>0$.

5. З кожного міста має виходити не менше 3 доріг. Дійсно, якщо з міста А виходить не більше $k\le 2$ доріг, то позначимо для $k=2$ ці міста через Б та В, для $k=1$ місто В вибирається довільним чином. Нехай місто Г не співпадає з А, Б та В. Тоді з А до Г не можна проїхати повз міста Б та В. Отже, потрібно не менше $3\cdot 669=2007$ доріг.

Покажемо, що 2007 доріг достатньо. Розмістимо міста по колу. Нехай з кожного міста виходить дорога до 3 міст, які ідуть після нього за годинниковою стрілкою. При вилученні будь-яких 2 міст ми можемо проїхати всі міста у напрямку годинникової стрілки. Справді, кожне наступне невилучене місто буде не більше, ніж на 3 позиції далі попереднього, тому між містами є дорога. Отже, з кожного міста можна дістатися до кожного, просто кожен раз переїжджаючи до наступного по колу невилученого міста. Відповідь: 2007.

6. Нехай D_1, D_2 – образи точки D при симетрії відносно AB і BC відповідно. Тоді $BD=BD_1=BD_2=b$, і кут $\angle D_1BD_2=120^\circ$, тому за теоремою косинусів $D_1D_2=\sqrt{2b^2-2b^2\cos 120^\circ}=$



$\sqrt{3}b = \sqrt{3}BD$. Точки A_1 і C_1 – образи точок A і C при симетрії відносно DD_1 та DD_2 відповідно. Тоді $DC_1 = DC$, $A_1D = AD$. $\angle CDC_1 + \angle ADA_1 = 180° - 2\cdot\angle ACB + 180° - 2\cdot\angle CAB = 360° - 2\cdot\left(\angle ACB + \angle BCA\right) =$ $= 360° - 2\cdot 120° = 120° \Rightarrow A_1DC_1 = 180° - \angle CDC_1 + \angle ADA_1 = 60°$. Тоді в трикутнику A_1DC_1 сторона A_1C_1 – середня за величиною, тому $A_1C_1 \le \max\{DA_1, DC_1\}$, остаточно маємо $\sqrt{3}BD = D_1D_2 \le$ $\le D_1A_1 + A_1C_1 + C_1D_2 \le AD + \max\{AD, DC\} + DC$.

7. а) Оскільки p, q – прості, то або $x \vdots p$, або $x \vdots q$. Якщо це не так, то $(x+1) \vdots p$ і $(x+1) \vdots q$, тому $(x+1) > pq$ і $x > x - y$, то маємо суперечність з умовою задачі $x(x+1) > pq(x-y)$. Розглянемо ці два випадки:

1) Нехай $x \vdots p$. Зауважимо, що $x = pq\dfrac{x-y}{x+1} < pq$, тому $x \not\vdots q$ і $(x+1) \vdots q$.

Позначимо через $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$ остачі від ділення чисел $p\cdot 1, p\cdot 2, \ldots, p\cdot(q-1)$ на q. Усі $q-1$ остачі відмінні від нуля і різні (якби $r_i = r_j$, то $p(i-j) \vdots q$ – що неможливо), тому знайдеться рівно одне натуральне n ($1 \le n \le q-1$) таке, що $pn + 1 = mq$, де m – натуральне. Отже, $x_1 = pn$, а з заданого рівняння знаходимо, що $y_1 = n(p-m)$.

2) Нехай тепер $x \vdots q$. Повністю аналогічно знайдемо другий розв’язок $x_2 = qk$ і $y_2 = k(q-l)$, де $qk + 1 = lp$.

б) Розглянемо число $N = pq - 1 - pn$. Воно натуральне, розташоване на інтервалі $(1, pq-1)$, з умови $pn + 1 = mq \vdots q$ і саме число $N \vdots q$. Крім того, $N + 1 = pq - pn \vdots p$. Таким чином ми знайшли два послідовних числа на інтервалі $(1, pq-1)$, перше з яких ділиться на q, а друге – на p, але за побудовою розв’язків рівняння це повинні бути числа x_2 та $x_2 + 1$. Тобто можемо записати рівність:

$$N = pq - 1 - pn = qk \Leftrightarrow pn + qk = pq - 1.$$

Тому

$$y_1 = n(p-m) = n\left(p - \frac{pn+1}{q}\right) = n\left(p - \frac{pq-qk}{q}\right) = n\big(p - (p-k)\big) = nk.$$

Аналогічно і $y_2 = k(q-l) = nk$, що й треба було довести.

3.7. 11 клас (умови)

1. Фігура на координатній площині задана рівнянням:

$$9(x+y+4)^2+4(x-y+2)^2=36.$$

Довести, що ця фігура центр симетрії і знайти його координати.

2. Нехай $P(x)$ – такий многочлен, що $P(n)=1^{2008}+2^{2008}+...+n^{2008}$ для всіх натуральних n . Знайдіть $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. Знайти усі функції $f:R\to R$, які задовольняють умови:

1) для всіх дійсних значеннях x,y справджується рівність: $f\left(f(x)y+x\right)=xf(y)+f(x)$;

2) рівняння $f(t)=-t$ має єдиний розв’язок.

4. Довести, що існує нескінченна кількість таких натуральних чисел n , що кожний з проміжків $\left(n;n+2007\sqrt{n}\right)$ не містить жодного числа виду m^3, m^5, m^7, де m – натуральне число.

5. Нехай $x_1,x_2,...,x_n$, $n>1$ – набір різних чисел з проміжку $[0,1]$. Позначимо через A_k середнє арифметичне всіх можливих добутків різних k елементів набору. Доведіть, що послідовність A_k незростаюча.

6. В гострокутному трикутнику ABC проведена бісектриса AA_1, точка M – її середина. На відрізку BM існує така точка P, що кут APC дорівнює $90°$, на відрізку CM існує така точка Q, що $\angle AQB=90°$. Доведіть, що точки P,M,Q,A_1 належать одному колу.

3.8. 11 клас (розв’язки)

1. Розглянемо систему рівнянь: $\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-2\end{cases}$, з якої знайдемо шуканий центр симетрії заданої фігури: $C(-3,-1)$. Якщо точка $M(x_0,y_0)$ належить фігурі, тобто її координати задовольняють рівняння (1), то точка $M'(x',y')$, яка є центральносиметричною до точки M відносно точки C, має такі координати $x'=-6-x_0, y'=-2-y_0$. Покажемо, вони також

задовольняють вихідне рівняння:

$$9(x'+y'+4)^2+4(x'-y'+2)^2=9(-6-x_0-2-y_0+4)^2+4(-6-x_0+2+y_0+2)^2=$$

$$=9(x_0+y_0+4)^2+4(x_0-y_0+2)^2=36\,,$$

Що й треба було довести.

Відповідь: координати центра симетрії фігури $(-3,-1)$

2. Розглянемо функцію $Q(x)=P(x)-P(x-1)$. Вона є многочленом і для будь-якого натурального $n>1$ вірно $Q(n)=R(n)$, де $R(x)=x^{2008}$ - многочлен. Оскільки ці два многочлени співпадають у нескінченній кількості точок, то вони тотожньо співпадають, а тому $\forall x\in R$ $Q(x)=x^{2008}$.

Для цілих та невід'ємних n : $P(1)-P(-n)=(P(1)-P(0))+(P(0)-P(-1))+$ $+(P(-1)-P(-2))+\ldots+(P(-n+1)-P(-n))=Q(1)+Q(0)+Q(-1)+\ldots+Q(-n+1)$. Тому $P(-n)=P(1)-(Q(1)+Q(0)+\ldots+Q(-n+1))=1-\left(1^{2008}+0^{2008}+(-1)^{2008}+\right.$ $\left.+\ldots+(-n+1)^{2008}\right)=-\left(0^{2006}+(-1)^{2006}+\ldots+(-n+1)^{2006}\right)$. Оскільки 2008 - парне число, то: $P(-n)=-\left((-1)^{2008}+\ldots+(-n+1)^{2008}\right)=-\left(1^{2008}+2^{2008}+\ldots+(n-1)^{2008}\right)=$ $=-P(n-1)$. Отже для усіх натуральних n :

$$P(n)+P((-n+1))=P(n)-P((n+1)-1)=P(n)-P(n)=0\,.$$

Оскільки і функція $S(x)=P(x)-P((-x+1))$ є многоченом, то $S(x)\equiv 0$, а тому при $x=-\frac{1}{2}$ маємо: $0=S\left(-\frac{1}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\right)+P\left(\frac{1}{2}-1\right)=2P\left(-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Відповідь: $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

3. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція $f(x)\equiv 0$ задовольняє умови задачі. Далі будемо шукати такі функції, для яких існує $x_0\in R$, для якого $f\left(x_0\right)\neq 0$.

Підставимо в умову 1) $x=0$ і одержимо: $f\left(f(0)y\right)=f(0)$. Якщо $f(0)\neq 0$, то функція f є сталою. Припустимо, що $f(x)\equiv c\neq 0$, підставимо це в 1) і переконаємось, що вона цю умову не задовольняє, оскільки ми одержимо рівність $c=2xc+c$, яка повинна справджуватись при усіх дійсних x , що не вірно. З усього цього маємо умову: $f(0)=0$.

Підставимо тепер в умову 1) $x=y$, тоді маємо $f\left(f(x)x+x\right)=xf(x)+f(x)$, або: $f\left(x\left(f(x)+1\right)\right)=f(x)(x+1)$. Сюди підставимо $x=-1$ і одержимо: $f\left(-\left(f(-1)+1\right)\right)=0$.

Припустимо, що існує таке число $x_0 \neq 0$, для якого $f\left(x_0\right)=0$. Підставимо це значення x_0 в умову 1) і одержимо рівність:

$$f\left(x_0\right)=f(y)x_0=0,$$

яка повинна виконуватись для усіх дійсних $y \in R$, звідки слідує тотожна рівність нулеві функції, що суперечить нашому припущенню. Тому функція приймає значення 0 лише в єдиній точці $x_0=0$. Тоді маємо: $f(-1)=-1$.

Підставимо тепер в умову 1) $y=-1$: $f\left(-f(x)+x\right)=f(-1)x+f(x)$, або $f\left(x-f(x)\right)=f(x)-x$.

Якщо існує принаймні одне значення x_0 таке, що $f\left(x_0\right)-x_0=t\neq 0$, то будемо мати, що для цього $t\neq 0$ виконується рівність $f(t)=-t$, наведена рівність виконується також для $t=0$, а тому порушується умова 2) задачі. Таким чином ми одержали суперечність з припущенням, що $f\left(x_0\right)-x_0=t\neq 0$, а тому функція має вигляд: $f(x)=x,\ x\in R$. Перевіркою переконуємось, що ця функція задовольняє умови.

Відповідь: $f\equiv 0$ або $f(x)=x,\ x\in R$.

4. Нехай $n=s^{3\cdot 5\cdot 7}$, де s – натуральне число більше 10. Тоді всі числа $a\in\left(n;n+2007\sqrt{n}\right)$ задовольняють нерівність:

$$\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=n<a<n+2007\sqrt{n}<n+3\sqrt[3]{n^2}<\left(\sqrt[3]{n}+1\right)^3.$$

Оскільки за побудовою $\sqrt[3]{n}$ – натуральне число, то серед чисел проміжку $\left(n;n+2007\sqrt{n}\right)$ немає жодного числа виду m^3. Так само доводиться, що на цьому проміжку немає чисел виду m^5 та m^7. Достатньо навести нерівності:

$$\left(\sqrt[5]{n}\right)^5=n<a<n+2007\sqrt{n}<n+5\sqrt[5]{n^4}<\left(\sqrt[5]{n}+1\right)^5,$$

$$\left(\sqrt[7]{n}\right)^7=n<a<n+2007\sqrt{n}<n+7\sqrt[7]{n^6}<\left(\sqrt[7]{n}+1\right)^7.$$

5. Розглянемо очевидну нерівність

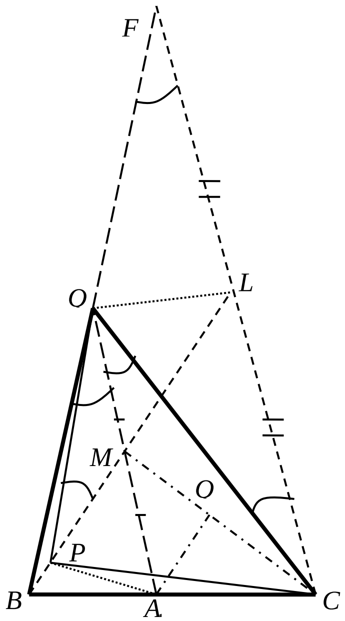
$$\sum x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}\left(1-x_j\right)\geq 0,$$

де всі можливі добутки різних k елементів множини M домножуються на всі можливі вирази $\left(1-x_j\right)$, причому x_j відрізняється від елементів $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$.

Розкриємо дужки. Оскільки кожен добуток $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$ домножувався на $(n-k)$ різних дужок типу $\left(1-x_j\right)$, а після розкриття дужок кожен добуток з різних $(k+1)$ елементів множини M зустрінеться рівно $(k+1)$ разів, то маємо: $(n-k)A_k C_n^k-(k+1)C_n^{k+1}\geq 0$.

Поділивши останню нерівність на $(n-k)C_n^k$, з урахуванням тотожності $C_n^k\cdot\dfrac{n-k}{k+1}=C_n^{k+1}$, отримуємо: $A_k\geq A_{k+1}$, що й треба було довести.

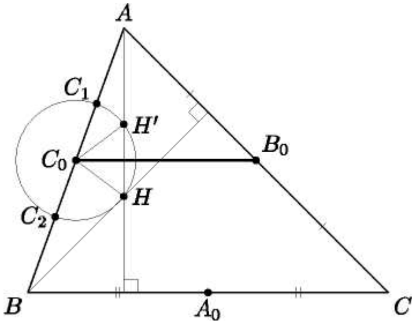
6. Проведемо через точку C пряму, паралельну бісектрисі AA_1, та позначимо через F – її точку перетину з прямою AB. Точка L – перетин прямих BM і CF. З гомотетичності трикутників BAA_1 і BFC витікає, що L – середина FC. Оскільки $\angle BFC=\angle BAA_1=\angle A_1AC=$ $=\angle ACF$, то ΔACF – рівнобедрений. Тому AL, як медіана, є також висотою, а тому $AL\perp CF$. Таким чином точки $P, A, L,$ C лежать на одному колі, звідки $\angle APM=\angle ACL=\angle BAM$, тому трикутники APM і BAM – подібні за двома кутами, оскільки кут $\angle BMA$ у них спільний, і до того ж $\angle APM=\angle BAM$. З подібності випливає:



$\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{MP}{AM}\Rightarrow MA^2=MB\cdot MP=MA_1^2\quad\Rightarrow$ $\dfrac{MA_1}{MB}=\dfrac{MP}{MA_1}$. Оскільки кут $\angle BMA_1$ – спільний у трикутників BMA_1 і PMA_1, то вони подібні за двома сторонами та кутом між ними, тому $\angle MBA_1=\angle PA_1M$. Аналогічно для точки Q одержимо, що $\angle MCA_1=\angle QA_1M$. Тоді сума кутів $\angle PA_1Q+\angle PMQ=$ $=\angle PA_1M+\angle MA_1Q+\angle PMQ=\angle MBC+\angle BCM+\angle CMB=180^\circ$, з чого й витікає, що чотирикутник $PMQA_1$ – вписаний.

4. ЗАДАЧІ МІЖНАРОДНИХ ОЛІМПІАД

1. *(Росія)* Нехай H – точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Коло з центром у середині сторони BC проходить через точку H та перетинає пряму BC у точках A_1 та A_2. Аналогічно, коло з центром у середині сторони CA проходить через точку H та перетинає пряму CA у точках B_1 та B_2, коло з центром у середині сторони AB проходить через точку H та перетинає пряму AB у точках C_1 та C_2. Доведіть, що точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі.



Розв'язання. Нехай B_0 та C_0 – середини відрізків AC та AB відповідно. Проведемо пряму B_0C_0. Нехай H' – точка, симетрична точці H відносно прямої B_0C_0. Оскільки $AH \perp B_0C_0$, то точка H' лежить на прямій AH. З симетричності точок H та H' відносно прямої B_0C_0 випливає, що $C_0H = C_0H'$. Отже, точка H' лежить на колі з центром в точці C_0 та радіусом C_0H. З теореми про січні для цього кола отримуємо $AC_1\ AC_2 = AH'\ AH$. Аналогічно, $AB_1\ AB_2 = AH'\ AH$, тобто $AB_1\ AB_2 = AC_1\ AC_2$ і за оберненою теоремою про січні точки B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі. Позначимо його через ω_1. Серединні перпендикуляри до B_1B_2 та до C_1C_2 співпадають з серединними перпендикулярами до сторін AC та AB відповідно, тому центр кола ω_1 – це центр O описаного навколо ΔABC кола.

Аналогічно точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежать на одному колі ω_2 з центром в точці O. Оскільки кола ω_1 та ω_2 мають спільний центр і проходять через точку B_1, то ці кола співпадають і всі точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі.

2. *(Франція)* Нехай n та k – такі натуральні числа, що $k \geq n$, а число $k - n$ парне. Є $2n$ ламп, які занумеровані числами 1, 2, ..., $2n$, кожна з яких може знаходитись в одному з двох станів: увімк. (увімкнена) або вимк. (вимкнена). Спочатку всі лампи були вимкнені. Розглядаються впорядковані послідовності кроків: на кожному кроці рівно одна лампа змінює свій стан на протилежний (з увімк. на вимк. або з вимк. на увімк.).

Позначимо через N число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n-ту увімкнені, а усі лампи з (n + 1)-ї по ($2n$)-у – вимкнені.

Позначимо через M число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n-ту увімкнені, усі лампи з (n+1)-ї по ($2n$)-у вимкнені, але при цьому жодна з ламп з (n + 1)-ї по ($2n$)-у жодного разу не змінювала свого стану.

Знайдіть значення відношення N/M.

Розв'язання. Назвемо припустимою послідовність з k перемикань ламп, яка приводить до стану, описаного в умові задачі (лампи з номерами 1,... ,n увімкнені, а лампи з номерами n + 1,..., $2n$ вимкнені). Якщо при цьому жодна з ламп з номерами n + 1,..., $2n$ не змінювала свого стану, то таку послідовність назвемо припустимою з обмеженням. Відповідно, N – це кількість припустимих послідовностей, і серед них M послідовностей – з обмеженнями.

Для того, щоб знайти значення відношення N/M, встановимо між множиною припустимих послідовностей з обмеженнями та множиною усіх припустимих послідовностей відповідність один-до-багатьох, тобто кожній припустимій послідовності з обмеженнями p поставимо у відповідність деяку множину припустимих послідовностей N_p таким чином, щоб при $p_1 \neq p_2$ множини N_{p_1} та N_{p_2} не перетинались та кожна множина N_p складалась з однакової кількості K послідовностей (звідси очевидно випливатиме, що $N/M = K$).

В кожній припустимій послідовності, з обмеженням чи без, кожна з ламп з номерами від 1 до n переходить зі стану вимк. до увімк., а отже змінює свій стан непарну кількість разів. Аналогічно кожна з ламп з номерами від n + 1 до $2n$ змінює свій стан парну кількість разів.

Зауважимо, що $M > 0$, тобто припустимі послідовністі з обмеженнями існують (це випливає з того, що $k - n$ – парне число; переключимо лампи з 2-ї по n-ту по одному разу, а першу лампу – $k - n + 1$ разів, і це буде шукана послідовність).

Розглянемо довільну послідовність з обмеженнями p. Нехай лампа з номером l, $1 \le l \le n$, змінювала свій стан k_l разів. Як вже відмічалося, k_l – непарні числа, і зрозуміло, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$. Нехай $l_i(p)$ – номер лампи, яка змінювала свій стан у послідовності p на i-му кроці, $1 \le i \le k$. Побудуємо множину послідовностей N_p наступним чином: деяка припустима послідовність q входить до N_p тоді і лише тоді, коли для всіх кроків i, $1 \le i \le k$, $l_i(q) = l_i(p)$ або $l_i(q) = l_i(p) + n$ (тобто змінює свій стан або лампа з тим саме номером, або лампа з номером, більшим на n). Тоді для різних припустимих послідовностей з обмеженням $p_1 \neq p_2$ буде $N_{p_1} \bigcap N_{p_2} = \varnothing$, і кожна припустима послідовність q входить до деякого N_p (щоб відновити р за послідовністю q, достатньо замінити в q кожне перемикання лампи з номером $i + n$, $1 \le i \le n$, на перемикання лампи з номером i).

Знайдемо кількість елементів в кожній з множин Np. Множину моментів зміни стану лампи з номером l в припустимій послідовності p з обмеженнями можна розбити на 2 множини A і B 2^{k_l} способами (елементи першої множини мають відповідати перемиканням лампи з номером l в припустимій послідовності, другої – перемиканням лампи з номером $l+n$). Але, як вже відмічалося, l-та лампа має змінювати свій стан непарну кількість разів, а $(l + n)$-та – парну, тому з кожних двох розбиттів A, B та B, A рівно одне відповідає припустимій послідовності (k_l – непарне число). Отже, всього є $2^{k_l - 1}$ розбиттів. Але розбиття при $l = 1, 2, \ldots, n$ можна обирати незалежно, а тому кожній припустимій послідовності з обмеженнями відповідають $2^{k_1} \cdot 2^{k_1 - 1} \cdot 2^{k_2 - 1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n - 1} = 2^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} = 2^{k-n}$ послідовностей. Отже, Np складається з 2^{k-n} послідовностей, і відповідність $p \leftrightarrow Np$ є шуканим відношенням один-до-багатьох, звідки $N/M = K = 2^{k-n}$.

3. (*Південна Корея*) Знайдіть усі функції f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (тобто функції, що визначені на множині усіх додатних дійсних чисел та приймають додатні значення) такі, що

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для довільних додатних w, x, y, z, які задовольняють рівність $wx=yz$.

Розв'язання. Підстановка $x = y = z = w = 1$ у рівняння дає $(f(1))^2 = f(1)$, тому $f(1) = 1$. Візьмемо довільне $a > 0$ і підставимо числа $x = a$, $y = 1$, $z = w = \sqrt{a}$. Отримаємо

$$\frac{(f(a))^2 + 1}{2f(a)} = \frac{a^2 + 1}{2a},$$

звідки простими перетвореннями одержуємо

$$a(f(a))^2 - (a+1) \cdot f(a) + a = 0 .$$

Отримане рівняння є квадратним відносно $t = f(a)$ і його розв′язками при кожному $a > 0$ є

$$f(a) = a \text{, або } f(a) = \frac{1}{a} \tag{1}$$

Дослідимо, чи існує така функція $f(x)$, яка приймає одночасно і значення a, і значення $\frac{1}{b}$ у деяких точках a, b не рівних 1. Підставимо у початкове рівняння $x = a,\ y = b,\ z = w = \sqrt{ab}$ та отримаємо

$$\frac{(a^{-2}+b^2)}{2f(ab)} = \frac{(a^2+b^2)}{2ab},$$

тобто
$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2}+b^2)}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Згідно з (1) $f(ab) = ab$ або $f(ab) = \frac{1}{ab}$. Підстановка кожного з цих виразів у (2) призводить до протиріччя з умовою $a \neq 1, b \neq 1$.

Отже, залишились два можливих розв′язки: $f_1(x) \equiv x$ та $f_2(x) \equiv \frac{1}{x}$. Перевіркою пересвідчуємося, що вони задовольняють умову.

Відповідь: $f_1(x) \equiv x$ та $f_2(x) \equiv \frac{1}{x}$

4. *(Австрія)* (а) Доведіть, що нерівність $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$ виконується для всіх відмінних від 1 дійсних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$.

(б) Доведіть, що вказана нерівність обертається на рівність для нескінченої кількості трійок відмінних від 1 раціональних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$.

Розв′язання. (а) Зробимо заміну

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c, \text{ тобто } x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

Нерівність зведеться до $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$. На нові змінні накладаються обмеження $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1,$ а умова $xyz = 1$ переходить в умову $(a-1)(b-1)(c-1) = abc$. Рівносильними перетвореннями отримуємо:

$$a + b + c - 1 = ab + bc + ca,$$
$$2(a + b + c - 1) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2 = (a + b + c)^2 - 2(a + b + c),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a + b + c - 1)^2,$$

Звідки випливає шукана нерівність $a^2+b^2+c^2\geq 1$.

(б) З рівняння $a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c-1)^2$, бачимо, що запропонована нерівність перетворюється на рівність тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

та a, b, c відмінні від 0 та 1. Підставимо $c=1-a-b$ в перше рівняння, що дає

$$a^2+b^2+ab-a-b=0.$$

Якщо a, b, c - раціональні, то й $\lambda=\dfrac{b}{a}$ - раціональне. Отже, при $b=\lambda a$ отримуємо $a^2(1+\lambda^2+\lambda)-a(1+\lambda)=0$, і, оскільки $a\neq 0$, то знаходимо

$$a=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2},\quad b=\frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2},\quad c=\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2},$$

і треба лише відкинути $\lambda=-1$ та $\lambda=0$, які призводять до неприпустимих a, b, c. Будь-яке інше раціональне λ дає шукану трійку (її можна явно виписати, якщо застосувати обернену підстановку $x=\dfrac{a}{a-1}$ і т.д.):

$$x=-\frac{1+\lambda}{\lambda},\quad y=-\lambda(1+\lambda),\quad z=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

5. *(Австралія)*. Дано натуральне число *n* та попарно різні натуральні числа $a_1,\ldots,a_k$ $(k\geq 2)$ з множини $\{1,\ldots,n\}$ такі, що для кожного $i=1,\ldots,k-1$ число $a_i(a_{i+1}-1)$ ділиться на *n*. Доведіть, що число $a_k(a_1-1)$ не ділиться на *n*.

Розв'язання. Припустимо супротивне: $a_k(a_1-1)\vdots n$. Для спрощення записів покладемо $a_{k+1}=a_1$. Оскільки $a_i(a_{i+1}-1)$ ділиться на *n*, то для усіх *i* від 1 до *k* маємо $a_i\equiv a_i a_{i+1}(\mathrm{mod}\, n)$. Таким чином, $a_1\equiv a_1a_2\equiv a_1a_2a_3\equiv\ldots\equiv a_1a_2\ldots a_k\left(\mathrm{mod}\, n\right)$. Аналогічно для кожного $1\leq i\leq k$ маємо $a_i\equiv a_1a_2\ldots a_k\left(\mathrm{mod}\, n\right)$. Звідси випливає, що всі a_i дають однакову остачу при діленні на *n*. Враховуючи, що $1\leq a_i\leq n$, маємо $a_1=a_2=\ldots=a_k$, що суперечить умові.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад/ И.Л. Бабинская. – М.: Наука. – 1975.
2. *Васильев Н.Б.* Задачи всесоюзных математических олимпиад/ Н.Б. Васильев, А.А. Егоров – М.: Наука. – 1988. – 284 с.
3. *Вишенський В.А.* Конкурсні задачі з математики: Навч. посіб. /В.А. Вишенський, М.О. Перестюк, А.М. Самойленко. – К.: Вища шк. – 2001. – 432 с.
4. *Вишенський В.А.,* Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. /В.А. Вишенський, М.В. Карташев, В.І. Михайловский, М.Й. Ядренко – К.: Либідь. – 1993.
5. *Вишенський В.А.* Збірник задач для учасників олімпіад юних математиків / В.А. Вишенський, М.Й. Ядренко. – К.: Рад. шк. – 1963. – 110 с.
6. *Гальперин Г.А.* Московские математические олимпиады /Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго. – М.: Просвещение. – 1986. – 302 с.
7. *Гєнкін С.А.* Ленінградські математичні гуртки /С.А. Гєнкін, І.В. Ітенберг, Д.В. Фомін. – К.: ТВіМС. – 1997.
8. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, М.Ж. Раббот, А.Л. Тоом– М.: Наука. – 1981. – 172 с.
9. Зарубежные математические олимпиады. /Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др; Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416 с.
10. *Кюршак Й.* Венгерские математические олимпиады /Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. – М.: Мир. – 1976. – 543 с.
11. *Лейфура В.М.* Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язання /В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Євросвіт. – 1999.
12. *Морозова Е.А.* Международные математические олимпиады/ Е.А. Морозова, И.С. Петраков, В.А. Скворцов. – М.: Просвещение. –

1976. – 288 с.

13. *Пойа Д.* Как решать задачу /Д. Пойа. – М.: Просвещение.–1959. – 244 с.

14. *Пойа Д.* Математическое открытие/ Д. Пойа. – М.: Наука.–1972. –448 с.

15. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. / О.А. Сарана– К.: Видавництво А.С.К. – 2004. –344 с.

16. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко – К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те. – 1984. – 238 с.

17. *Страшевич С.* Польские математические олимпиады / С. Страшевич, Е. Бровкин. – М.: Мир. – 1978. – 338 с.

18. *Триг Ч.* Задачи с изюминкой / Ч. Триг. – М.: Мир. – 1975. – 302 с.

19. Українські математичні олімпіади: Довід. /В.А. Вишневський, О.Г. Ганюшкін, М.В. Карта шов та ін. – К.: Вища шк.. – 1993. – 415 с.

20. *Штейнгауз Г.* Сто задач / Г. Штейнгауз. – М.: Наука. – 1976. – 168 с.

21. *Яковлев Г.Н.* Всероссийские математические олимпиады школьников / Г.Н. Яковлев, Л.П. Купцов, С.В. Резниченко, П.Б. Гусятников. – М.: Просвещение. – 1992.

22. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування /В.А. Ясінський – Вінниця: Вінницький пед. ун-т. – 1998.

Навчальне видання

Від задачки до задачі

Андрій Ярославович Бомба,
Ірина Анатоліївна Барановська,
Анна Вікторівна Теребус

Набрано при кабінеті математики Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
33028, м. Рівне, вул. Чорновола, 74