МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. Є. КЛИМЮК

СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

РІВНЕ – 2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. Є. КЛИМЮК

СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчально-методичний посібник
для проведення практичних занять та самостійної роботи
для студентів напрямів підготовки
6.040301 “прикладна математика”, 6.040302 “інформатика”
денної форми навчання

РІВНЕ – 2015

УДК 519.816
ББК 22.18
К 49

Розглянуто та рекомендовано до друку Навчально-методичною радою Рівненського державного гуманітарного університету, протокол № 5 від 25.11.2014 р.

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри інформатики та прикладної математики, протокол № 9 від 25.11.2014 р.

Рецензенти:
Бомба А. Я. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету;
Власюк А. П. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. академіка Степана Дем’янчука;
Войтович І. С. – доктор педагогічних наук, професор кафедри інформаційно-комунікаційних технологій та методики викладання інформатики Рівненського державного гуманітарного університету

Климюк Ю. Є.
К 49 Системи і методи прийняття рішень : [навчально-методичний посібник] / Ю. Є. Климюк. – Рівне : РВВ РДГУ, 2015. – 243 с.

У навчально-методичному посібнику міститься повний виклад матеріалу лекцій з дисципліни “Системи та методи прийняття рішень”. У посібнику наведено приклади розв’язання задач, тестові і практичні завдання для самостійної перевірки засвоєння матеріалу. Він орієнтований на набуття студентами напрямів підготовки 6.040301 “прикладна математика” і 6.040302 “інформатика” денної форми навчання знань та навичок з теорії і методів багатокритеріальної оптимізації, основ теорії корисності, основних прийомів і методів прийняття рішень в умовах визначеності, ризику, конфлікту і невизначеності.

УДК 519.816
ББК 22.18
К 49

ЗМІСТ

ВСТУП

Проблема прийняття рішень носить фундаментальний характер, що визначається роллю, яку відіграють рішення в будь-якій сфері людської діяльності. Від того, хто і як організує свою та чужу діяльність, залежить зміст і якість життя, дотримання писаних і неписаних законів, майбутнє всіх і кожного.

Ефективність діяльності підприємств залежить від якості управлінських рішень. Визначальне місце у складі причин прийняття неефективних рішень займає незнання або недотримання технології їх розробки і організації виконання. Роль управлінських рішень зросла в умовах науково-технічного прогресу, що значно розширює можливості людини, з одного боку, у досягненні своїх цілей, а з іншого – у науковому обґрунтуванні прийнятого рішення, його оптимізації та практичній ефективності.

Особливої уваги заслуговує кібернетичний підхід до розробки рішень, відомий як теорія прийняття рішень. Він заснований на глобальному використанні математичного апарату та обчислювальної техніки. Формальна (математизована) теорія прийняття рішень в рамках нормативного підходу аналізує, як повинні прийматися рішення, при яких умовах вони будуть найбільш раціональними. Реалізується даний підхід в управлінні так званими великими системами, при виконанні наукових досліджень пошукового характеру. Його застосування в повсякденній господарській практиці поки-що залишається досить обмеженим. Сформоване становище пояснюється, з одного боку, відсутністю необхідності виконання складних розрахунків по знаходженню оптимальних рішень, з іншого – недоліком конкретних знань у осіб, які розробляють та приймають рішення. Це стосується виконання багатоваріантних розрахунків, вибору альтернатив, використання спеціальних прийомів при визначенні способу дій в умовах невизначеності, ризику та ін.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є: моделі та методи теорії вибору та прийняття рішень в різних нестандартних умовах.

Міждисциплінарні зв'язки: студент, для успішного оволодіння матеріалом даної дисципліни, повинен мати практичні навички з дисциплін: "Математичний аналіз", "Теорія ймовірності і математична статистика", "Алгебра", "Методи оптимізації", "Математичне моделювання та системний аналіз".

Метою дисципліни "Системи та методи прийняття рішень" є набуття студентами знань та навичок з теорії та прийомів і методів прийняття рішень у різних нестандартних умовах.

Завданням дисципліни є забезпечення знаннями та вміннями майбутніх бакалаврів щодо аналізу, систематизації і узагальнення наявної інформації в задачах прийняття рішень, перетворення складних задач в прості і їх розв'язування з використанням математичного апарату.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: поняття бінарних відношень, їх властивості та операції над ними; поняття функцій вибору, які породжені бінарними відношеннями, їх логічні форми, операції над функціями вибору, класи функцій вибору; поняття функції корисності; основні методи обробки експертної інформації; постановку багатокритеріальних задач оптимального управління, їх властивості та основні методи оптимізації; критерії прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності;

вміти: за заданим бінарним відношенням знаходити кращі елементи, виконувати певні операції, будувати функції вибору та їх логічні форми; визначати різними методами експертні оцінки; розв'язувати багатокритеріальні задачі оптимізації за різними алгоритмами побудови правила вибору на множині ефективних альтернатив; розв'язувати задачі прийняття рішень в умовах визначеності, ризику, конфлікту й невизначеності та приймати відповідні рішення, в тому числі, з використанням різних критеріїв.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 144 години / 4 кредити ECTS.

Дисципліна “Системи та методи прийняття рішень” складається з двох основних змістовних модулів, кожен з яких охоплює ряд тем.

Змістовий модуль 1. Основні поняття, постановки задач, моделі та методи теорії вибору та прийняття рішень в умовах визначеності.

Тема 1. Вступ. Основні поняття і визначення. Бінарні відношення.

Поняття задач теорії прийняття рішень. Системний аналіз при розв’язанні задач прийняття рішень.Блочна модель підготовки і прийняття рішення. Класифікація задач прийняття рішень. Людино-машинні системи і прийняття рішень. Поняття бінарних відношень та способи їх задання. Операції над відношеннями. Властивості відношень. Поняття R-оптимальності. Поняття інваріантих відношень, їх властивості. l-віддільні відношення.

Тема 2. Функції вибору.

Загальне поняття функції вибору. Функції вибору, породжені бінарними відношеннями. Логічні форми функцій вибору. Операції над функціями вибору. Класи функцій вибору. Взаємозв’язки класів функцій вибору. Функції вибору, породжені координатними відношеннями. Декомпозиція функцій вибору.

Тема 3. Методи обробки експертної інформації та розв’язку задач багатокритеріальної оптимізації.

Задача оцінювання. Загальна схема експертизи. Підготовка експертизи. Методи обробки експертної інформації. Методи шкалування. Постановка задач багатокритеріальної оптимізації. Метод ідеальної точки. Вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв. Метод послідовних поступок. Метод послідовного вводу обмежень. Метод бажаної точки.

Тема 4. Прийняття рішень в умовах визначеності.

Загальне поняття і властивості функції корисності. Алгоритми оптимізації функцій корисності. Розв’язання задач прийняття рішень в умовах визначеності. Експертне оцінювання методом аналітичної ієрархії.

Змістовий модуль 2. Моделі та методи прийняття рішень в умовах ризику, конфлікту та невизначеності.

Тема 5. Прийняття рішень в умовах ризику.

Основні положення та методи теорії ймовірності. Поняття ризику, його основні елементи й ознаки. Класифікація ризиків. Методи мінімізації ризиків. Постановка модельних задач прийняття рішень в умовах ризику. Поняття гри з “природою”. Обчислення показників ризику. Моделі прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику. Вибір рішень за допомогою дерева рішень. Функція корисності Неймана–Моргенштерна.

Тема 6. Прийняття рішень у конфліктних ситуаціях.

Особливості прийняття рішень у конфліктних ситуаціях. Сутність теорії ігор. Чиста та змішана стратегії.

Тема 7. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Поняття невизначеності у задачах прийняття рішень. Постановка модельних задач прийняття рішень в умовах невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності.

Навчально-методичний посібник побудовано таким чином, що теми модулів містять основні теоретичні відомості, приклади розв’язання типових задач, тестові і практичні завдання.

Якщо студент засвоїв якусь тему, то він може перевірити свої знання шляхом розв’язання тестових і практичних завдань та в разі позитивного результату перейти до опрацювання іншої теми.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ, МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ТЕОРІЇ ВИБОРУ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

1.1. Вступ. Основні поняття і визначення. Бінарні відношення

1.1.1. Поняття задач теорії прийняття рішень

Процеси прийняття рішень лежать в основі будь-якої цілеспрямованої діяльності. В економіці вони передують створенню виробничих і господарських об’єктів, забезпеченню їх оптимального функціонування і взаємодії; у наукових дослідженнях – дозволяють виділити найважливіші наукові проблеми, знайти способи їх вивчення, визначають розвиток експериментальної бази і теоретичного апарату; при створенні нової техніки – складають важливий етап у проектуванні машин, пристроїв, комплексів, будинків, у розробці технології їх побудови і експлуатації; у соціальній сфері – використовуються для організації функціонування і розвитку соціальних процесів. Оптимальні рішення дозволяють досягати цілей при мінімальних затратах трудових, матеріальних та сировинних ресурсів.

Під прийняттям рішення будемо розуміти особливий процес людської діяльності, орієнтований на вибір найкращого варіанту дій.

Методи пошуку оптимальних розв’язків розглядаються в розділах класичної математики, пов’язаних з вивченням екстремумів функцій, в математичному програмуванні. Проте розв’язки тут – це математичні об’єкти, основною властивістю яких є те, що вони забезпечують екстремум заданої функції або функціоналу. Часто оцінка розв’язку здійснюється за одним аспектом або критерієм. На практиці ж розв’язок потрібно оцінювати з різних точок зору, враховуючи фізичні (розміри, вагу), економічні (вартість, ресурсоємність), технічні та інші аспекти. Це вимагає побудови моделей оптимізації розв'язків одночасно за декількома аспектами або критеріями, що є *предметом* теорії вибору і прийняття рішень.

Життя щоденно приводить нас до таких ситуацій, коли потрібно прийняти конкретні рішення. Прийняття рішень – це основна функція людської діяльності. Кожна людина потрапляє в ситуації, коли їй доводиться приймати якесь рішення, ґрунтуючись на своєму досвіді, інтуїції і здоровому глузді.

Задача прийняття рішення лежить повністю на конкретній людині або на групі людей. Будемо називати людину або групу людей, які здійснюють вибір найкращого варіанта дій, *особою, що приймає рішення* (ОПР), оскільки для математичної моделі не важливо один чи декілька суб'єктів розв'язують проблему.

Очевидно, что процес прийняття рішень дуже складний і залежить від багатьох факторів і якостей ОПР: його характеру, досвіду, темпераменту, бачення проблеми, інтуїції, азартності, настрою тощо. Тому повний аналіз діяльності ОПР при прийнятті рішення провести складно. Однак цей процес у багатьох випадках має деякі спільні закономірності, що дозволяє будувати математичні моделі вирішення деяких проблемних ситуацій і отримувати оптимальні рішення для досягнення найкращих результатів. В останні десятиріччя при прийнятті відповідальних рішень, наслідки яких стосуватимуться великої кількості людей, все частіше звертаються до використання формальних методів.

Загальна структура задачі прийняття рішення повинна містити такі елементи:

– по-перше, у ОПР повинна бути певна ціль. Інколи ця ціль не формулюється у явному вигляді, але в тій чи іншій формі вона повинна бути обов'язково присутньою, інакше обговорення правильності рішень, що приймаються, не матиме сенсу;

– по-друге, ОПР повинна володіти засобами впливу на результат, інакше потреби у прийнятті рішення немає.

Ці дві ознаки є основними, тому можна запропонувати таке визначення: задача прийняття рішення – це така задача, яка може бути сформульована в термінах цілі, засобів і результату.

Математична модель задачі прийняття рішення представляє собою формальний опис її складових елементів: цілі, засобів, результатів, а також зв'язку між засобами і результатами.

Зауважимо, що в такій моделі суттєвим є те, що необхідно вказати відразу всю множину, з якої здійснюється вибір. Ця обставина, звичайно, є певним спрощенням дійсності, оскільки в реальних ситуаціях прийняття рішень складність часто полягає не в тому, щоб вибрати яку-небудь дію з наявного списку, а в тому, щоб прийти до якоїсь оригінальної, незвичної, нестандартної дії.

1.1.2. Системний аналіз при розв'язанні задач прийняття рішень

Фундаментальним поняттям системного аналізу є поняття "система". У науковій літературі зустрічається багато визначень цього поняття щодо загальних і конкретних систем різних видів. В описі процесів управління системи розглядаються в чисто інформаційному аспекті як комплекс відношень, зв'язків, інформації.

Системи оточують нас скрізь: кожний процес, явище, предмет – це системи. Безумовно, системами є фірми, корпорації, організації, галузі економіки і економіка в цілому.

При дослідженні систем використовують такі основні поняття:

– *елемент* – частина системи, що виконує специфічну функцію і є неподільною з погляду завдання, яке розв'язується;
– *підсистема* – сукупність елементів, об'єднаних єдиним процесом функціонування, що при взаємодії реалізують певну операцію для досягнення поставленою перед системою мети;
– *надсистема* – ширша система, в яку входить як складова досліджувана система.

Між елементами довільної системи і системами існують зв'язки, за допомогою яких вони взаємодіють між собою. Система має як внутрішні, так і зовнішні зв'язки. Зв'язки можуть бути як прямими, так і зворотними (наприклад, обмін інформацією). За допомогою зв'язків система перетворюється з простого набору компонентів в єдине ціле, разом з компонентами вони визначають стан та структуру системи, безумовно, при визначальному впливі функції.

Під структурою системи розуміють її стійку впорядкованість і зв'язки між елементами та підсистемами. Для визначення структури системи проводиться її *декомпозиція* (виділення підсистем і елементів, доступних аналізу).

Під *ієрархією* системи розуміють розташування її підсистем або елементів за певним порядком від вищого до нижчого. Завдяки ієрархічності структура складних систем може бути подана через структуру їх частин – від підсистем до елементів. Управлінські рішення в управлінській ієрархії взаємозалежні з цілями і являють собою "дерево рішень" із трьома рівнями галузей: стратегічних, функціональних (оперативних) і тактичних рішень.

Відповідність "дерева рішень" "дереву цілей" визначає "вагомість" кожного рішення в системі управління, необхідні ресурси для виконання кожного рішення, відповідальність і повноваження посадових осіб на кожному рівні управління з розробки, застосування і реалізації рішень.

Головним системотворним фактором системи є *функція* (перетворення входів системи у виходи; *вхід* системи – дія на неї зовнішнього середовища; *вихід* – результат функціонування системи для досягнення певної мети, або її реакція на вплив зовнішнього середовища).

Управління системою необхідне для забезпечення її цілеспрямованої поведінки при зміні умов зовнішнього середовища або умов її функціонування. Управління досягається за рахунок відповідної організації системи, під якою розуміють її структуру та спосіб функціонування.

Системний аналіз – це певний підхід до вирішення проблем, методологія дослідження та проектування складних систем, пошуку, планування та реалізації заходів, спрямованих на вирішення проблемних ситуацій.

Методологія системного аналізу передбачає наявність чітко виражених п’яти логічних елементів у процесі дослідження будь-яких систем, підсистем і їхніх компонентів, зокрема:

– мети діяльності системи;
– засобів чи напрямків дій, за допомогою яких може бути досягнута мета;
– витрат ресурсів, необхідних для кожного напрямку;
– логічної (чи математичної) моделі чи моделей, кожна з який являє собою систему зв’язків між цілями, засобами їхнього досягнення, навколишнім середовищем і потребами в ресурсах;
– критеріїв вибору кращих альтернатив. Правильна постановка проблеми, визначення мети, вимірника її досягнення чи вимірника ефективної діяльності системи важливо, бо дозволяє контролювати реальні досягнення запланованих результатів.

На рис. 1.1 подані основні елементи системного аналізу при виробленні рішення.

Рис. 1.1. Послідовний взаємозв’язок основних елементів реалізації системного підходу в процесі прийняття рішень

Загальним для всіх методик системного аналізу є формування варіантів подання системи (процесу розв’язання задачі) і вибір кращого варіанта. На кожній стадії дослідження, від інтуїтивної постановки проблеми до вибору оптимальних рішень за допомогою строгих математичних методів, використовуються різноманітні наукові методи й прийоми, що складаються з неоднакової кількості етапів аналізу, зміст яких залежить від складності розв’язуваних завдань.

Розглянемо принципову послідовність етапів системного аналізу, що найчастіше застосовуються на практиці (табл. 1.1).

Табл. 1.1. Принципова послідовність етапів системного аналізу

Назва етапу	Зміст виконуваних робіт
Аналіз проблеми	Чи існує проблема? Точне формулювання проблеми Аналіз логічної структури проблеми Розвиток проблеми (у минулому і в майбутньому) Зовнішні зв’язки проблеми (з іншими проблемами) Принципова можливість розв’язання проблеми
Визначення системи	Формулювання завдань, виходячи з проблеми Визначення позиції спостерігача Визначення об’єкта дослідження Виділення елементів (визначення меж поділу системи) Визначення зовнішнього середовища
Аналіз структури системи	Визначення рівнів ієрархії Виділення підсистем Визначення функціональних і структурних зв’язків
Формулювання загальної мети і стратегії системи	Визначення цілей – вимог надсистеми Визначення обмежень середовища Формулювання загальної мети Визначення критеріїв Декомпозиція критеріїв по підсистемах Композиція загального критерію з критеріями підсистем

Прод. табл. 1.1

Назва етапу	Зміст виконуваних робіт
Декомпозиція мети, виявлення потреби в ресурсах	Формулювання цілей вищого рангу Формулювання цілей підсистем Виявлення потреб у ресурсах
Виявлення ресурсів, композиція цілей	Оцінювання існуючої технології і виробничих потужностей Змінювання теперішнього стану ресурсів Оцінювання можливостей взаємодії з іншими системами Оцінювання соціальних факторів Композиція цілей
Прогноз і аналіз майбутніх умов	Аналіз стійких тенденцій розвитку системи Прогноз розвитку і зміни середовища Передбачення виникнення нових факторів, що можуть вплинути на розвиток системи Аналіз майбутніх можливостей та ресурсів
Оцінювання цілей і засобів	Обчислення оцінок за критерієм Оцінювання взаємозалежності цілей Оцінювання відносної важливості цілей Оцінювання дефіцитності і вартості ресурсів Оцінювання впливу зовнішніх факторів Обчислення комплексних розрахункових оцінок
Вибір варіантів	Аналіз цілей на сумісність Перевірка цілей на повноту Відсікання надлишкових цілей Розроблення варіантів досягнення окремих цілей Оцінювання і порівняння варіантів Синтез комплексу взаємозалежних варіантів
Реалізація варіантів	Моделювання економічного (технологічного) процесу Проектування організаційної структури Проектування інформаційних механізмів Виявлення недоліків організації управління та виробництва Виявлення та аналіз заходів щодо удосконалення організації

Формалізовані процедури базуються на використанні прикладної математики (зокрема, таких її розділів, як дослідження операцій, математичне програмування, теорія розробки та прийняття рішень, теорія масового обслуговування, моделі управління запасами, теорія ігор тощо) та обчислювальної техніки. Іноді математичними методами досліджується зв'язана множина процедур і здійснюється моделювання процесу прийняття рішення.

Багато спеціалістів бачать різницю між *системним аналізом* і методом дослідження операцій в наявності не тільки якостей, властивих строгим якісним методам прийняття рішення, але й інтуїтивного підходу, що залежить від мистецтва аналітика чи ОПР. У зв'язку з цим можуть вирішуватись завдання, які важко чи неможливо оцінити кількісно, тому рекомендується всі проблеми поділити на класи (табл. 1.2).

Табл. 1.2. Типи проблем і основні методи їх вирішення

Клас проблем	Характеристика проблем	Методи вирішення проблем і завдань
1. Добре структуровані проблеми	Залежності між елементами, ознаками і характеристиками можуть бути виражені в числах чи символах, що приводять до кількісних оцінок	Методи математичного моделювання (класичні методи), ланцюгове моделювання, лінійне, нелінійне та інші види математичного програмування, теорія масового обслуговування
2. Неструктуровані проблеми	Істотні залежності, характеристики і ресурси описані якісно, кількісні залежності між ними невідомі, або ж виявити їх дуже складно	Інтуїтивні методи (експертиза, “мозковий штурм”, метод комісії та ін.), метод побудови сценаріїв, евристичні методи
3. Слабко структуровані проблеми	Містять в собі якісні елементи і кількісні показники, причому якісні категорії здебільшого домінують	Системний аналіз, теорія ігор, аналіз теорії корисності, евристичне моделювання (програмування)

Порівнюючи методи оцінки за економічним та системним аналізом, можна сказати, що в системному аналізі дані й показники набувають, крім кількісних ознак, ще й якісного вираження. Наприклад, авторитет майстра, його внесок у виробництво чи моральний стан працюючих, їх відношення до роботи практично не можна виразити якісно, але в багатьох випадках саме ці фактори являються вирішальними для результату діяльності даної ланки. Таким чином, системний аналіз допомагає вивчити проблему більш глибоко і всебічно, ніж при звичайному економічному аналізі.

При системному аналізі можна виявити не тільки причини, що викликають які-небудь негативні наслідки, але й умови, в яких виникають ці причини, а відповідно й передбачити проведення відповідних заходів, що ліквідують негативні явища. Звідси випливає інша відмінна особливість системного аналізу. Слід відзначити, що існує можливість неповноти інформації і самого аналізу, неможливо інколи визначити фактори соціально-політичного характеру, моральні фактори, які оцінює ОПР лише на основі власних думок та інтуїції. Але важливо те, що на них загострюється увага і їх можна врахувати при прийнятті рішень.

Визначення ефективності, яке є обов'язковим в системному аналізі, має приблизний характер, але напрям дії при цьому можна вибрати. Для підвищення точності вибраних рішень, передбачення результатів наслідків у майбутньому рекомендується вибирати декілька можливих альтернатив і для кожної намітити пріоритетну дію.

Найважливіші *принципи системного аналізу* полягають у наступному: процес прийняття рішень повинен починатися з виявлення і чіткого формування кінцевої мети; необхідно розглядати всю проблему як цілісну єдину систему і виявити всі наслідки й взаємозв'язки кожного окремого рішення; виявити і проаналізувати можливі альтернативні шляхи досягнення мети; конкретизувати мету окремих підрозділів, які не повинні вступати в конфлікт з метою всього підприємства, об'єднання.

Центральною процедурою системного аналізу є побудова узагальненої моделі, що відображає всі фактори і взаємозв'язки реальної ситуації, які можуть проявитися у процесі здійснення рішення. Одержана модель досліджується з метою виявлення близькості результату використання того чи іншого із альтернативних варіантів до бажаного, порівняння витрат ресурсів кожного з варіантів, установлення рівня чуттєвості моделі до різних зовнішніх впливів.

Коли є одна чітко виражена ціль, ступінь досягнення якої можна оцінити на основі одного критерію, використовують методи математичного програмування (з урахуванням наступних логічних думок). Якщо ступінь досягнення мети оцінюється кількома критеріями, використовують апарат корисності, за допомогою якого проводиться впорядкування критеріїв і визначення важливості кожного з них. Коли розвиток подій визначається взаємодією декількох осіб, які переслідують свої цілі, рішення приймають за допомогою методів групового вибору.

Методом системного аналізу, спрямованим на забезпечення єдності вибраної цілі та засобів її досягнення, є побудова дерева цілей.

Метод побудови дерева цілей

“Дерево цілей” – ієрархічна деревоподібна структура, яку отримують поділом загальної цілі на підцілі, а їх, у свою чергу, на детальніші складові – нові підцілі, функції тощо (див. “дерево цілей” на рис. 1.2). При цьому головну ціль розміщують на найвищому рівні.

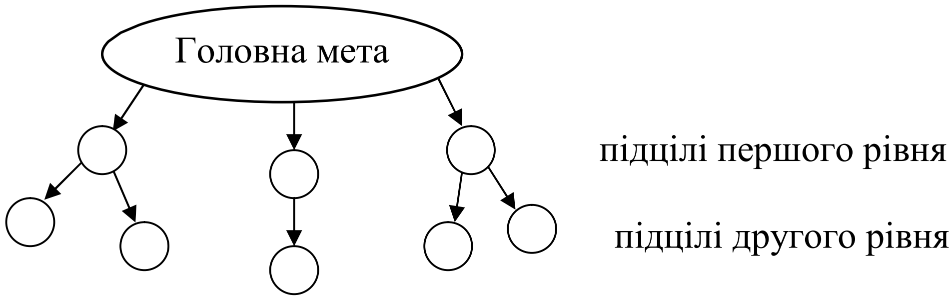

Рис. 1.2. Граф “дерева цілей”

Метод уможливлює поділ складного завдання, яке важко формалізувати, на сукупність простіших завдань, для розв'язання яких існують перевірені прийоми й методи. Послідовний поділ розв'язуваної проблеми на підпроблеми є важливим етапом системного аналізу проблем. Поділ продовжують доти, доки не отримають прості, звичні, очевидні завдання, які можна розв'язати відомими методами.

Для прикладу розглянемо організаційну структуру підприємства. Показником нульового рівня дерева цілей (критерієм функціонування) може бути максимізація заново створеної вартості. Підцілями першого рівня можуть бути: підвищення якості продукції, ресурсозбереження, розширення ринку збуту, підвищення якості сервісу, організаційно-технічний розвиток виробництва, підвищення якості життя працівників, охорона зовнішнього довкілля тощо. Потім здійснюють поділ цих підцілей на підцілі другого й третього рівнів.

Слід пам'ятати, що вибір неправильних цілей призведе не стільки до розв'язання існуючої проблеми, скільки до виникнення нових проблем.

На наступному етапі необхідно визначити критерії та обмеження. Під критеріями розуміють кількісні показники якісних цілей, які повинні точніше їх характеризувати. Критерії мають якомога точніше відповідати цілям, хоча і не можуть повністю збігатися з ними, оскільки вони фіксуються в різних шкалах вимірювання: цілі – в номінальних, а критерії – у шкалах, що передбачають упорядкування.

Найпоширенішими й важливими критеріями при аналізі ефективності функціонування економічних систем (наприклад, підприємств) є прибуток, собівартість продукції, обсяги виробництва та збуту, якість, надійність та конкурентоспроможність продукції, ефективність управління тощо.

При формуванні критеріїв головним є не їх кількість, а те, наскільки повно вони характеризують ціль. Тому тут прагнуть досягти компромісу між повнотою опису цілей та кількістю критеріїв. Для повноти опису проблемної ситуації необхідно розглядати три взаємодіючі системи:

– систему, в якій існуюча ситуація розглядається як проблема;
– систему, в рамках якої можна вплинути на проблему для її вирішення;
– зовнішнє середовище, в якому існують і з яким взаємодіють ці дві системи.

Слід враховувати, що характер цілей цих трьох систем істотно відрізняється: для першої системи треба розв'язати проблему, для другої головна мета полягає в розв'язанні проблеми з найменшими витратами ресурсів, при цьому треба врахувати вплив зовнішнього середовища.

Так, наприклад, якщо метою першого рівня є збільшення доходів, то цілями другого рівня може бути збільшення обсягів виробництва та продажу, збільшення частки ринку, цілями третього рівня поліпшення обслуговування клієнтів, розширення та поліпшення номенклатури товарів і послуг, а цілями четвертого рівня підвищення продуктивності праці тощо.

Слід зауважити, що на практиці процес структуризації здійснювати дуже непросто. Він вимагає особливої чіткості мислення, тому що в реальних системах багато неформальних відносин, складних взаємодій, які важко виділити і врахувати.

Практичний додаток системного аналізу надзвичайно великий за змістом. Найважливішими розділами є науково-технічні розробки і різні задачі економіки. Посилання на системність досліджень, аналізу, підходу включає біологію, екологію, військову справу, психологію, соціологію, медицину, керування державою і регіоном, лісове і сільське господарство, навчання та багато чого іншого.

Схема процесу ухвалення рішення найбільш доцільна з наступними компонентами: аналіз вихідної ситуації; аналіз можливостей вибору; вибір рішення; оцінка наслідків рішення і його коригування.

1.1.3. Блочна модель підготовки і прийняття рішення

Для підготовки й ухвалення рішення використовують блочну модель, яка зображена на рис. 1.3.

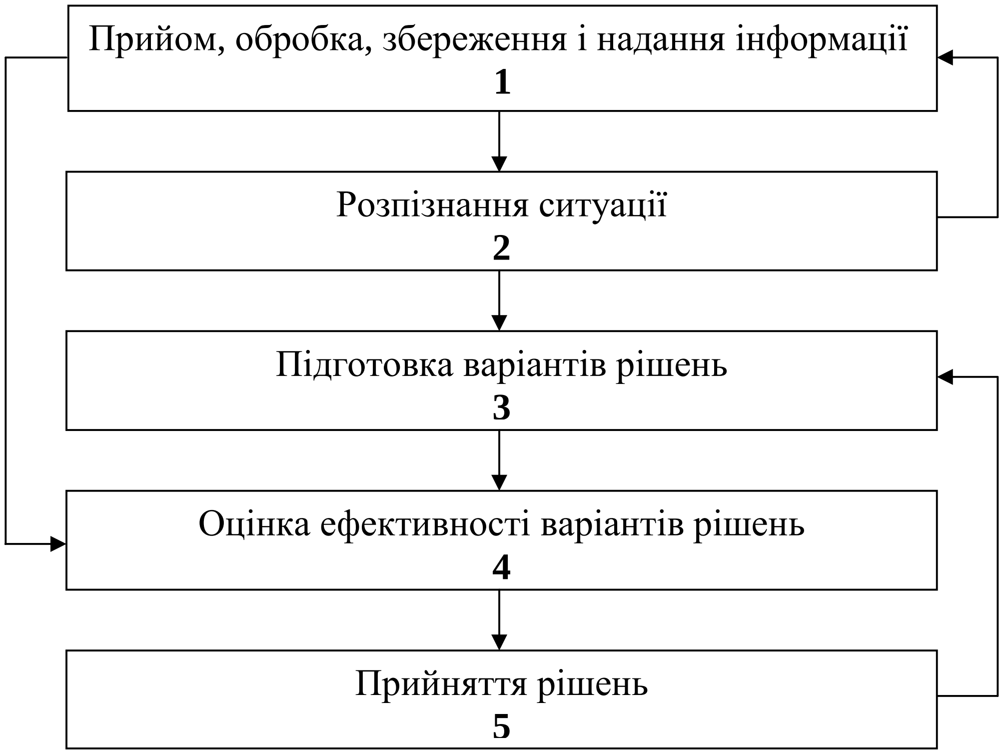

Рис. 1.3. Блочна модель підготовки і прийняття рішення

Дана модель відбиває прямі й зворотні зв'язки, що існують між блоками:

Блок 1. Проводиться збір, обробка і збереження інформації. Ця інформація класифікується, систематизується і при необхідності передається в інші блоки для прийняття рішень.

Блок 2. Ідентифікується сформована ситуація з раніше накопиченими для використання вже апробованого досвіду вирішення подібних задач, визначаються ознаки принципово нової ситуації, що вимагає розробки нових підходів до її вирішення, розпізнаються дії конкурентів, що дезінформують.

Блок 3. Виробляються проекти (альтернативи) вирішення проблеми на основі обліку обмежень і критеріїв. При цьому складність проблеми визначає необхідні засоби її вирішення.

Блок 4. Оцінюються альтернативи вирішення проблеми, використовуючи стандарти (критерії) прийняття рішень, що знаходяться в інформаційному блоці 1, з огляду на обмеження в можливостях, і способи оцінки, якими володіє ОПР.

Блок 5. Приймається рішення. При цьому якщо проблема була правильно визначена, а альтернативні рішення об'єктивно оцінені, то прийняти рішення неважко. Якщо ні, то треба повернутися в блок 3. Це складно зробити в умовах ризику, конфлікту і невизначеності.

Багатогранність і складність виробничих, соціальних та інших факторів зовнішнього і внутрішнього середовища вимагають від ОПР адекватних дій. У цих умовах рішення можуть бути зовсім різними за формою, спрямованістю, глибиною і часом розробки, прийняттям, реалізацією. Деякі рішення ОПР приймає швидко на основі наявного досвіду, інші – після ретельної математичної обробки й обґрунтування. У таких умовах упорядкування і класифікація рішень стають необхідними.

Основне трактування поняття "рішення" в науковій літературі – процес (акт) вибору чи результат вибору.

Рішення можна класифікувати в такий спосіб:

- за терміном дії – оперативні (прийняті рішення реалізуються годинами, цілодобово, тижнями), стратегічні (реалізуються протягом декількох років відповідно до прийнятого стратегічного плану) і тактичні (реалізуються протягом року);
- за ступенем вимірності кожної координати цінності;
- за розміром цінності, тобто числом різних координат, які необхідно враховувати при рішенні,
- за ступенем невизначеності (повноти інформації) – рішення, прийняті в умовах визначеності, ризику, конфлікту і невизначеності;
- за ступенем унікальності – рутинні, нетворчі й унікальні (творчі);
- за кількістю ОПР – індивідуальні й колективні (групові);

– за типом застосовуваних критеріїв і часу (швидкості) вирішення завдань: автоматичні рішення, бліц-рішення (прийняті протягом декількох хвилин); експрес-рішення (приймаються протягом декількох годин), лонговані рішення (прийняття рішення триває протягом тижнів і місяців).

Для вирішення проблем можна виділити три основні підходи, зображені на рис. 1.4.

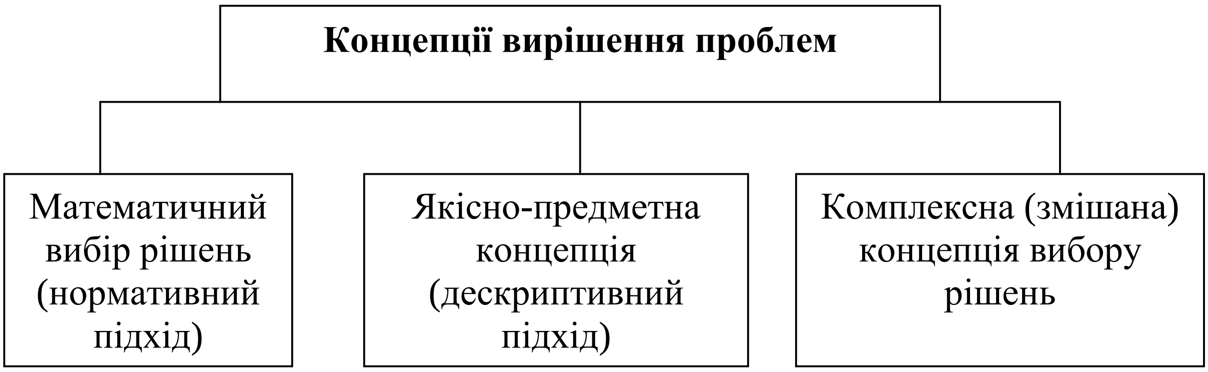

Рис. 1.4. Основні підходи до вирішення проблем

За допомогою *нормативних моделей* вибір найкращих альтернатив здійснюють, виходячи із заданого критерію і ситуації, в якій приймаються рішення. Нормативні моделі наголошують на тому, як ОПР повинна підходити до прийняття рішень. Математична теорія прийняття рішень заснована на припущенні, що всі ОПР є “економічно мислячими” людьми і вони намагаються максимізувати результати господарської діяльності підприємства (наприклад, прибуток). Але у житті ОПР не завжди прагнуть максимізувати економічний результат. Замість цього ОПР приймає задовільне, “досить гарне” рішення. У цьому випадку при прийнятті рішень можуть використовуватися такі критерії, як “прийнята величина прибутку”, “надійне виконання плану” і т. п. Математична теорія прийняття рішень не дає рецептів для демонстрації того, як рішення фактично повинні прийматися.

Спроби осмислити щирі причини прийняття рішень привели до виникнення якісно-предметної концепції, що розглядає поведінкову теорію прийняття рішень. Вона має яскраво виражений пояснюючий характер. Опис того, чим керуються ОПР при ухваленні рішення, використання ними аргументів, технологічних аспектів цього процесу (дескриптивна модель) – важливе і складне завдання. Ця складність збільшується тим, що чимало кількісних оцінок, використовуваних при підготовці рішень мають суб'єктивний характер. Багато рішень приймаються інтуїтивно.

Комплексне використання нормативних і дескриптивних моделей має такі особливості:

1. Побудова комплексних методик обґрунтування рішень, які поєднують у собі застосування взаємодоповнюючих методів *структуризації, характеризації та оптимізації, що* дає змогу знижувати невизначеність у процесі обґрунтування рішень, підвищує ефективність діяльності ОПР.

2. Сполучення формальних і неформальних методів обґрунтування рішень припускає широке використання експертних оцінок і людино-машинних процедур підготовки прийняття рішень. Участь ОПР в процесі вироблення рішення на всіх його етапах обов'язкова.

Комплексний підхід дає можливість сконцентрувати неформальне мислення ОПР на найбільш критичних аспектах проблемної ситуації, в якій приймається рішення, а також на пропонованих альтернативах вирішення виниклої проблеми.

1.1.4. Класифікація задач прийняття рішень

З метою аналізу і класифікації задач прийняття рішень будемо виділяти такі дві компоненти: перша включатиме в себе опис засобів і результатів, а також способів їх зв'язку, а друга – опис цілі.

Необхідний для математичної моделі задачі прийняття рішень формальний опис засобів і результатів можна здійснювати, задавши дві множини: множину X, елементи якої назвемо альтернативами, і множину A, елементи якого назвемо наслідками. Альтернативи – це те, що ми вибираємо, а результати – те, до чого приходимо.

Розглянемо основні типи залежності наслідків від альтернатив в задачах прийняття рішень.

1. Найпростіший тип зв'язку альтернатив з результатами – коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку. У такому випадку задається функціональна залежність результатів від альтернатив.

2. Більш складний тип зв'язку отримується, коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи. Тут має місце стохастична залежність наслідків від альтернатив.

3. Ще більш складний тип зв'язку отримується, коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи, але на їх появу впливають сторонні чинники.

4. Якщо кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, причому відсутня навіть стохастична залежність наслідків від альтернатив, то матимемо четвертий тип зв'язку альтернатив і наслідків.

Якщо особа, що приймає рішення, інформована про тип зв'язку, то кажуть в першому випадку, що прийняття рішення здійснюється *в умовах визначеності*, в другому випадку – *в умовах ризику*, в третьому – *в умовах конфлікту*, а в четвертому – *в умовах невизначеності*.

Розглянемо далі способи опису цілей ОПР. Будемо розуміти під цілеспрямованою таку систему, поведінка якої виявляє направленість на певний наслідок. Цілеспрямованість тут ґрунтується на поведінці системи і не пов'язана з наявністю свідомості. Зважаючи на це можемо виділити наступні типи цілей:

1. *Якісна ціль* характеризується тим, що будь-який можливий наслідок або повністю задовольняє ціль, або повністю не задовольняє. При наявності такої цілі немає сенсу стверджувати, що "ціль виконана наполовину" або "на 99%". Якісну ціль можна формалізувати у вигляді деякої підмножини B множини A всіх можливих наслідків, де кожен наслідок $a \in B$ задовольняє ціль, а будь-який наслідок $a \notin B$ не задовольняє.

2. *Максимізація заданої функції.* Як правило, в математичних моделях прийняття рішень ціль ототожнюється з максимізацією (або мінімізацією) деякої функції, заданої на множині всіх наслідків і такої, що приймає дійсні значення (яку називають цільовою функцією).

Інколи наслідки характеризуються не одним числом, а набором n чисел, що називаються показниками (або критеріями) ефективності. Таку "багатомірну" ціль, як правило, намагаються звести до "одномірної" за допомогою агрегування n показників ефективності в один.

Маючи ціль, задану за допомогою цільової функції f, можна визначити, пов'язану з цією ціллю, перевагу наслідків: з двох наслідків більшу перевагу матиме той, якому відповідає більше значення цільової функції.

3. Проте, можна говорити про перевагу і без наявності цільової функції, наприклад, вказуючи множину всіх тих пар наслідків, для яких перший наслідок у парі має більшу перевагу ніж другий, тобто вказується відношення переваг. Представлення переваг з відношення можливе тоді, коли такі переваги володіють властивістю лінійності (один з двох наслідків має більшу перевагу над іншим або він байдужий до іншого) та властивістю транзитивності (якщо перший наслідок має більшу перевагу над другим, а другий – над третім , то перший має більшу перевагу у порівнянні з третім).

Потрібно зазначити, що реальні переваги людей можуть і не володіти властивістю лінійності і транзитивності. Наприклад, ситуація "хто кращий: батько чи мати?". Тут об'єкти непорівняльні. Тобто поняття переваги є суттєво більш широким поняттям, ніж поняття переваги, пов'язаної з цільовою функцією. Тому, при формалізації цілі або переваги ми не повинні обов'язково представляти їх за допомогою цільової функції.

Прикладами ситуацій прийняття рішень в умовах визначеності є задачі лінійного програмування, динамічного програмування, класичні задачі оптимізації і т. п. При всій різноманітності таких задач в них використовується одна і та ж схема: кожній альтернативі відповідає визначений наслідок, а "корисність" кожного наслідку оцінюється деяким числом.

Тобто математичною моделлю задачі прийняття рішень в умовах визначеності з числовою оцінкою наслідків є дійсна функція, яка задана на множині альтернатив. Знаходження оптимального рішення для такої задачі рівносильно знаходженню екстремумів цієї функції.

Оскільки для задач прийняття рішень в умовах визначеності з числовою оцінкою наслідків ціль адекватна максимізації чи мінімізації цільової функції, то для таких задач є фактично єдина концепція оптимальності рішення: оптимальним буде рішення, яке забезпечує найбільше (чи найменше) значення.

Припустимо тепер, що ми маємо задачу прийняття рішення також в умовах визначеності, але наслідки в ній оцінюються за двома показниками. Нехай ці показники представляються у вигляді функцій $f(x)$ і $g(x)$. Тільки у вийняткових ситуаціях максимум двох незалежних одна від одної функцій досягається в одній точці (рис. 1.5). Яке рішення буде оптимальним у цьому випадку? У даному випадку мова, взагалі кажучи, йде не про те, як знайти оптимальне рішення, а що потрібно розуміти під оптимальним рішенням!

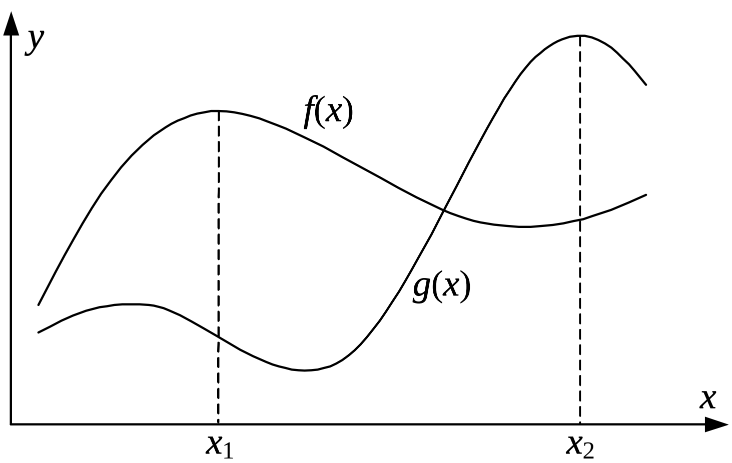

Рис. 1.5. Графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$

Розглянемо приклад розробки моделі автомобіля. Припустимо, що при розробці моделі автомобіля нас цікавлять наступні два показники: термін служби (u) і максимальна швидкість (v), причому потрібно максимізувати обидва ці показники. Ми маємо можливість змінювати деякі технічні характеристики автомобіля (потужність двигуна, форма кузова, вагу окремих агрегатів і т. п.) в деяких заданих межах. При цьому кожному фіксованому набору значень цих характеристик відповідає певне значення u_0 терміну служби і значення v_0 – максимальної швидкості. Таким чином, взявши за альтернативи набори значень змінних характеристик автомобіля, а в якості наслідків – відповідні їм пари чисел (u_0,v_0) приходимо до задачі вибору рішень в умовах визначеності. Зобразивши всі такі пари чисел (u_0,v_0) на площині змінних u і v, одержимо (рис. 1.6) деяку область D, кожна точка якої представляє геометрично можливий наслідок. Прийняття рішень у цьому випадку полягає у виборі конкретної точки області D. Яку ж точку потрібно взяти в якості оптимальної?

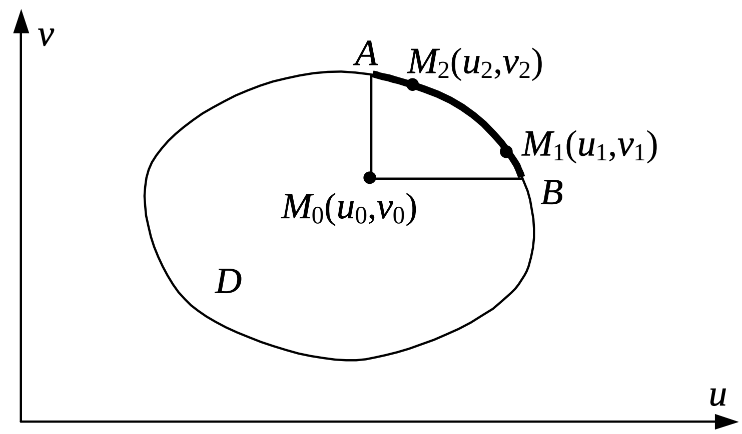

Рис. 1.6. Множина можливих наслідків

Нехай ми обрали точку $M_0(u_0,v_0)$. Побудуємо криволінійний трикутник AM_0B. Для будь-якої точки цього трикутника обидва показники – термін служби і максимальна швидкість – будуть більшими ніж для точки M_0, а вибір точки M_0 в якості оптимальної є невдалим. Аналогічні міркування можуть бути застосовані до будь-якої точки області D, для якої можна побудувати такий криволінійний трикутник. Отже, при виборі наслідку необхідно обмежитись лише тими точками, для яких побудова такого криволінійного трикутника неможлива. Іншими словами, потрібно обмежитись тими наслідками, для яких неможливе одночасне покращення обох показників. Такі наслідки називають ефективними або оптимальними за Парето. Множина всіх ефективних точок представляє собою, взагалі кажучи, північно-східну границю області D (жирна лінія на рисунку). Отже, вибір наслідку необхідно здійснювати з множини ефективних точок. Але яку саме ефективну точку потрібно визнати оптимальною (наприклад, $M_1(u_1, v_1)$ чи $M_2(u_2, v_2)$)? Ефективні точки є непорівняльними між собою за перевагою, а якщо ми все ж таки хочемо їх якось порівняти, то для цього необхідна додаткова інформація типу: скількома одиницями виграшу за одним показником можна компенсувати програш одиниці за другим показником (інформація про співвідношення показників ефективності)?

Задачі прийняття рішень за умов ризику називають стохастичними. У таких задачах кожній стратегії ставиться у відповідність не один, а кілька можливих наслідків з відомими умовними ймовірностями їх реалізації. Для прийняття рішень за умов ризику найчастіше використовують методи зведення стохастичних задач прийняття рішень до детермінованих, наприклад, метод штучного зведення до детермінованої схеми та метод оптимізації в середньому.

Сутність методу штучного зведення до детермінованої схеми полягає у тому, що всі випадкові фактори наближено замінюють деякими невипадковими характеристиками, як правило, їх математичними сподіваннями. У результаті стохастична задача прийняття рішень замінюється детермінованою.

Сутність методу оптимізації в середньому полягає в переході від випадкового показника ефективності до деякої статистичної характеристики.

Конфлікти притаманні життю людини на всіх рівнях її буття – міждержавному (ідеологічні, економічні, воєнні конфлікти), всередині суспільства між окремими групами (між поколіннями чи політичними партіями), між окремими людьми (у трудовому колективі, у сім’ї). Основа конфліктів – неспівпадання інтересів двох або більше сторін. При цьому неспівпадання інтересів може бути як абсолютним, антагоністичним (виграш однієї сторони досягається за рахунок програшу протилежної), так і не антагоністичним, при якому інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні повністю співпадаючими (виробник–споживач, викладач–студент тощо). Задача політиків, економістів, кожної людини, зокрема, – уміти "розумно" розв'язувати конфлікти, по можливості не вибираючи крайніх форм (війна, бійка, відрахування студента з вузу і т. д.). Для розв'язання конфлікту (та ще й "розумного") потрібно перш за все вміти його описувати ("формалізувати") та проводити аналіз. Цим займаються соціологи, психологи, економісти і т. д., формалізуючи, аналізуючи та рекомендуючи ті або інші дії для розв'язання конфлікту. Займаються цим і математики, будуючи математичні моделі та створюючи засоби їх аналізу. Прийняттям оптимальних рішень в умовах конфлікту займаєтья теорія ігр. Теорія ігор намагається математично зафіксувати поведінку в стратегічних ситуаціях, в яких успіх суб'єкта, що робить вибір, залежить від вибору інших учасників. Якщо спочатку розвивався аналіз ігор, в яких один із супротивників виграє за рахунок інших (ігри з нульовою сумою), то згодом почали розглядати широкий клас взаємодій, які були класифіковані за певними критеріями. На сьогоднішній день "теорія ігор щось на кшталт парасольки чи універсальної теорії для раціональної сторони соціальних наук, де соціальні можемо розуміти широко, включаючи як людських, так нелюдських гравців (комп'ютери, тварини, рослини)".

Задача прийняття рішення за умов невизначеності полягає у виборі оптимальної стратегії, успіх реалізації якої залежить від деяких невизначених факторів, що не підвласні ОПР та невідомі на момент прийняття рішення. Такі невизначені фактори зумовлені прийняттям особливо складних рішень, рішень, що мають довготермінові наслідки або можуть бути пов'язані з нечітким усвідомленням ОПР як власних цілей та можливостей, так і інших гравців. Окрім цього, невизначеність може бути пов'язана із затрудненнями кількісної оцінки складних цілей та якісних критеріїв, що важко формалізуються. Такі задачі розв'язують методами теорії ігор та теорії мінімаксу.

Розглянемо для прикладу невелике підприємство легкої промисловості, яке може випускати продукцію одного з трьох видів: парасолі, капелюхи або плащі. Готуючись до літнього сезону, керівник підприємства повинен прийняти рішення – який з цих трьох видів продукції випускати. При цьому наслідок (прибуток підприємства) залежатиме від того, яким буде літній сезон – дощовим, спекотним чи помірним. Дощовитого літа найбільший прибуток принесе виробництво парасоль, спекотного – капелюх, а помірного літа – плащів. Яке рішення слід прийняти, якщо за ціль вважати максимізацію доходу.

Таку задачу прийняття рішення можна розглядати як задачу прийняття рішення в умовах невизначеності. Для таких задач важливим є те, чи можна кожному стану середовища приписати ймовірність його настання. Якщо це можливо, то ми отримаємо фактично задачу прийняття рішення в умовах ризику. Якщо ж в задачі з'являється підприємство-конкурент, то наша задача перетвориться на задачу прийняття рішень в умовах конфлікту.

1.1.5. Людино-машинні системи і прийняття рішень

Як би не розумілася складність, простота розуміється однаково: простим є випадок, коли стороння допомога не потрібна. У складних випадках, особливо якщо ОПР стикається зі складністю в обтяжуючих умовах дефіциту часу або інших екстремальних обставин, йому потрібна кваліфікована допомога експертів в оцінці можливих альтернатив. Однак існують природні межі людських здібностей при сприйнятті і обробці інформації. Роботу експертів лімітують не тільки міжособистісні відносини, але і внутрішні психологічні та фізіологічні причини. Виявляється, людина одночасно може оперувати лише з невеликим числом операндів (понять, ідей, моделей, альтернатив і т. д.). Крім того, зіткнувшись, наприклад, з багатокритеріальним завданням, експерт часто проявляє мінливість, невпевненість, нелогічність, прагнення до різкого спрощення завдання. Нарешті, в ряді випадків грає роль і низька швидкодія нервової та м'язової системи людини.

У всіх цих випадках можливості комп'ютера перевершують здібності людини, і виникає проста, але дуже плідна ідея створення системи, яка об'єднала б гідності людини і машини та компенсувала їх недоліки.

Навряд чи можливо, та й не варто створювати універсальну систему на всі випадки життя. На практиці йдуть шляхом створення людино-машинних систем, що звуться проблемно-орієнтованими. Навіть у порівняно конкретній сфері прийняття рішень спостерігається розгалуження типів систем за типами задач вибору. На сьогоднішній день існує кілька самостійних напрямків розвитку пакетів прикладних програм для прийняття рішень.

До першого відносяться програми та пакети програм для вирішення конкретних цілком визначених задач прийняття рішень. Прикладом може служити математичне забезпечення комп'ютерів для статистичної обробки даних (тобто вибору в умовах ризику).

Другий напрямок – створення баз знань та експертних систем. На даний час це, мабуть, головний шлях руху до "штучного інтелекту". Експертні системи мають широкі перспективи: відомі їхні численні практичні реалізації в різноманітних предметних областях.

Якщо перший напрямок орієнтований на повну автоматизацію добре формалізованих задач, то другий – на створення систем, що накопичує досвід експертів, які, по суті, згодом замінюють самих експертів.

У третьому сучасному напрямку розвитку людино-машинних систем прийняття рішень робиться основний акцент на участь самої ОПР у спробах формалізувати завдання прийняття рішення, у самостійному порівнянні і оцінюванні за допомогою комп'ютера різних альтернатив різними способами. Цей третій напрямок представлено "системами підтримки рішень". Вони орієнтовані не на автоматизацію функцій ОПР, а на надання йому допомоги у пошуку хорошого (найкращого) рішення. Звичайно, в математичне та програмне забезпечення систем підтримки рішень входять і формалізовані процедури, які ОПР може використовувати у разі потреби.

1.1.6. Поняття бінарних відношень та способи їх задання

При описі задач вибору про одне й те ж явище можна говорити різними словами. На сьогоднішній день склалося три основних мови опису вибору. Найпростішою, найбільш розвиненою (і, мабуть, тому частіше вживаною) є мова критеріїв. Другою, більш загальною мовою, на якій описується вибір, є мова бінарних відношень. Третя мова – мова функцій вибору, яка є найбільш загальною і дозволяє описати будь-який вибір. Проте вона перебуває на початковій стадії розвитку і поки-що займається переважно описом старих ситуацій в нових термінах. Розглядатимемо надалі задачі прийняття рішень, в яких ціль формалізується за допомогою задання відношень переваги, пов'язаних з нею.

Властивості предметів оточуючого світу можемо розділити на два типи: властивості першого типу можуть бути віднесені до окремих предметів (може бути "високим", "червоним", "металевим" і т. п.). Властивості другого типу можуть бути віднесені лише до наборів предметів, наприклад, властивість "бути родичем" відноситься до пар людей, властивість "бути більшим" – до пар чисел, "знаходитись між" – до трьох предметів і т. п. Властивість другого типу прийнято називати відношеннями. При цьому властивості, що відносяться до пар предметів, називають бінарними відношеннями; до трьох предметів – тернарними відношеннями і т. д.

У подальшому будемо розглядати бінарні відношення. Бінарне відношення можна визначити як множину, що складається з пар елементів. Пара, що складається з елементів a і b, записується у вигляді $(a;b)$, причому a називається першою, а b – другою компонентою цієї пари. Відзначимо, що порядок компонент у парі суттєвий, тобто при $a \neq b$ пари $(a;b)$ і $(b;a)$ вважаються різними: в даному випадку кажуть, що пари впорядковані. Як правило бінарні відношення позначають буквою R. Запис $(a;b) \in R$ крім прямого способу читання – "пара $(a;b)$ належать відношенню R" читають також і так: "a знаходиться з b у відношенні R" (інколи знак відношення розміщують між елементами, тобто пишуть $a\,R\,b$ замість $(a;b) \in R$).

Якщо всі елементи, що є першими компонентами впорядкованих пар, які входять у відношення R, належать деякій множині A, а елементи, що є другими компонентами – деякій множині B, то в цьому випадку кажуть, що R є відношенням між елементами множин A і B; якщо при цьому $A=B$ – то відношенням на множині A. Через $A\times B$ позначають множину, що складається з усіх впорядкованих пар виду $(a;b)$, де $a\in A$ і $b\in B$. Бінарні відношення можна задати: перераховуючи всі пари, що входять в нього; за допомогою булевих матриць; за допомогою графа; за допомогою загальної властивості; за допомогою перерізів.

Задання бінарного відношення перерахунком всіх пар. Виписуються всі пари (x,y), для яких виконується відношення: $R=\{(a,b),(b,c),(b,d),...\}$.

Задання бінарного відношення матрицею. Нехай Ω складається з n елементів. Побудуємо квадратну матрицю $n\times n$, що позначається $A(R)=\left(a_{i,j}(R)\right)$ $(i,j=\overline{1,n})$ за наступним правилом: $a_{i,j}(R)=\begin{cases}1, (x_i,y_i)\in R,\\ 0, (x_i,y_i)\notin R.\end{cases}$

Задання бінарного відношення графом. Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам множини Ω вершини графа G. Елемент x_i і відповідну вершину графа будемо позначати однаково. Граф $G(R)$ відношення R містить дугу, спрямовану від x_i до x_j тоді і тільки тоді, коли виконується $x_i\,R\,x_j$.

Задання відношення за допомогою загальної властивості. Формальне задання відношення R властивістю записується в такий спосіб: $R=\{(x,y):x,y\in\Omega,[\textit{властивість, що задається}]\}$.

Наприклад, $R=\{(x,y):x,y\in N,[x\ \textit{ділиться на}\ y]\}$.

Задання перерізами. Розглянемо відношення R на множині Ω.

Верхнім перерізом $R^+(x)$ називається множина елементів $y\in\Omega$ таких, що $(y,x)\in R$:

$R^+(x)=\{y\in\Omega:(y,x)\in R\}$.

Аналогічно визначається і *нижній переріз*:

$R^{-}(x)=\{y\in\Omega:(x,y)\in R\}$.

Таким чином, множина $R^{-}(x)$ – це множина всіх елементів $y\in\Omega$, з якими фіксований елемент $x\in\Omega$ знаходиться у відношенні R. Множина $R^{+}(x)$ – це множина всіх елементів $y\in\Omega$, які знаходиться у відношенні R з фіксованим елементом $x\in\Omega$.

У загальному випадку відношення R повністю задане, якщо для кожного $x\in\Omega$ задана множина $R^{+}(x)$ (або для кожного $x\in\Omega$ задана множина $R^{-}(x)$).

Перші три способи задання відношення придатні тільки, якщо область задання відношення Ω – скінченна множина, останні два способи придатні і для задання відношення на нескінченній множини Ω.

Приклад 1.1. Описати словесно або зобразити на графіку множину (відношеня на множині дійсних чисел): $\{(x,y)\in E_2 : x^2+y^2=1\}$. Виписати всі верхні перерізи.

Розв'язання. Задана множина є множиною точок, розміщених на колі одиничного радіуса із центром в початку координат.

Нагадаємо, що $R^{+}(x)=\{y\in\Omega:(y,x)\in R\}$. Випишемо верхні перерізи:

$\forall x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\ \ R^{+}(x)=\varnothing$,

$R^{+}(-1)=R^{+}(1)=\{0\}$,

$\forall x\in(-1,1)\ \ R^{+}(x)=\left\{-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\right\}$.

1.1.7. Операції над відношеннями

Розглянемо основні операції над відношеннями. Будемо вважати, що всі відношення задані на одній і тій же множині Ω. Оскільки будь-яке відношення R є підмножиною множини пар Ω^2, то для відношень можна визначити всі ті операції, які визначені для підмножин фіксованої множини: перетин, об'єднання, доповнення і т. д.

Найчастіше використовуються такі операції:

1. *Вкладення.* Відношення R_1 вкладено у відношення R_2 (позначається $R_1 \subseteq R_2$), якщо множина пар, для яких виконується відношення R_1, міститься у множині пар, для яких виконується R_2, тобто

$$R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega : xR_1y \Rightarrow xR_2y.$$

Наприклад, відношення "менше" вкладено у відношення "менше або дорівнює".

Приклад 1.2. Для відношення з прикладу 1.1 записати вкладені відношення.

Розв'язання. Очевидно, що для множини (відношеня на множині дійсних чисел): $\left\{(x, y) \in E_2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ вкладеними множинами (вкладеними відношеннями на множині дійсних числе), наприклад, будуть: $\left\{(x, y) \in E_2 : x = \sqrt{1 - y^2}\right\}$, $\left\{(x, y) \in E_2 : x = -\sqrt{1 - y^2}\right\}$, $\left\{(x, y) \in E_2 : y = \sqrt{1 - x^2}\right\}$, $\left\{(x, y) \in E_2 : y = -\sqrt{1 - x^2}\right\}$ тощо.

2. *Доповнення.* Відношення $\overline{R}$ називається доповненням відношення R, якщо воно виконується для тих і тільки тих пар, для яких не виконується відношення R, тобто

$$\overline{R} = \Omega \times \Omega \setminus R \text{ або } \overline{R} = \left\{(x, y) : (x, y) \notin R\right\}.$$

Очевидно, що $\overline{R} = \Omega^2 \setminus R$. У матричному записі $a_{ij}\left(\overline{R}\right) = 1 - a_{ij}\left(R\right)$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Приклад 1.3. Для відношення з прикладу 1.1 записати доповнювальне відношення.

Розв'язання. Очевидно, що для множини (відношеня на множині дійсних чисел): $\left\{(x, y) \in E_2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ доповненням множини (доповненням відношеня на множині дійсних чисел) буде $\left\{(x, y) \in E_2 : x^2 + y^2 <> 1\right\}$.

3. *Перетин.* Перетином відношень R_1 і R_2 ($R_1 \cap R_2$) називається відношення, що визначається перетином відповідних підмножин з Ω^2, тобто

$$R_1 \cap R_2 = \left\{(x,y):(x,y) \in R_1 \text{ і } (x,y) \in R_2\right\}.$$

Приклад 1.4. Для відношення з прикладу 1.1 вказати пару відношень, що у результаті перетину його утворюють.

Розв'язання. Очевидно, що множина (відношеня на множині дійсних чисел): $\left\{(x,y) \in E_2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ утворюється, наприклад, у випадку перетину наступних множин (відношень на множині дійсних чисел): $\left\{(x,y) \in E_2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\}$ і $\left\{(x,y) \in E_2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

4. *Об'єднання.* Об'єднанням відношень R_1 і R_2 ($R_1 \cup R_2$) називається відношення, що визначається об'єднанням відповідних підмножин з Ω^2, тобто

$$R_1 \cup R_2 = \left\{(x,y):(x,y) \in R_1 \text{ або } (x,y) \in R_2\right\}.$$

Наприклад, якщо R_1 – відношення "більше" на множині чисел, R_2 – відношення "дорівнює", то $R_1 \cup R_2$ – це відношення "більше або дорівнює".

Вводяться також спеціальні операції:

1. *Обернення.* Оберненим до відношення R називається відношення R^{-1}, яке визначається умовою $x\,R^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,R\,x$. Наприклад, якщо R – відношення "більше" на множині дійсних чисел, то R^{-1} – відношення "менше" (дійсно, з $x < y$ випливає $y > x$ і навпаки). Якщо R означає "бути чоловіком", то що означатиме R^{-1} ("бути жінкою").

Твердження 1.1. $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Доведення. За визначенням оберненого відношення $x\left(R^{-1}\right)^{-1}y$ рівносильне $y\,R^{-1}\,x$; останнє за тим же визначенням рівносильне $x\,R\,y$.

Твердження 1.2. $\overline{R^{-1}} = \left(\overline{R}\right)^{-1}$.

Доведення. Самостійно (скористатись матричним способом задання відношень).

2. *Двоїстість*. Двоїстим до R називається відношення R^d, що визначається формулою:

$$R^d = \overline{R^{-1}}.$$

Іншими словами, двоїстим до R є відношення R^d – доповнення до оберненого до R.

Твердження 1.3. *Відношення R і R^d пов'язані співвідношеннями:*

1. $\left(R^d\right)^d = R$;

2. $\left(R_1 \cup R_2\right)^d = R_1^d \cap R_2^d$;

3. $\left(R_1 \cap R_2\right)^d = R_1^d \cup R_2^d$.

Доведення. Маємо $\left(R^d\right)^d = \overline{\left(\overline{R^{-1}}\right)^{-1}} = \overline{\left(\left(\overline{R}\right)^{-1}\right)^{-1}} = \overline{\overline{R}} = R$. Перше співвідношення доведено.

$$\left(\left(R_1 \cup R_2\right)^d\right)^+(x) = \overline{\left(\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1}\right)}^+(x) = \Omega \setminus \left(\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1}\right)^+(x) =$$

$$= \Omega \setminus \left(\left(R_1 \cup R_2\right)\right)^-(x) = \left(\Omega \setminus R_1^-(x)\right) \cap \left(\Omega \setminus R_2^-(x)\right) =$$

$$= \left(\Omega \setminus \left(R_1^{-1}\right)^+(x)\right) \cap \left(\Omega \setminus \left(R_2^{-1}\right)^+(x)\right) = \left(\left(R_1^d\right)^+(x)\right) \cap \left(\left(R_2^d\right)^+(x)\right).$$

Друге співвідношення доведено. Третє співвідношення доводиться аналогічно.

3. *Добуток або композиція*. Добутком відношень R_1 і R_2 називається відношення, що визначається наступним чином: $x\, R_1 \cdot R_2\, y$, якщо існує $z \in \Omega$, для якого $x\, R_1\, z$ і $z\, R_2\, y$, де $R_1 \cdot R_2$ – символ добутку відношень. Наприклад, нехай R_1 – відношення "бути братом", а R_2 – відношення "бути батьком". Тоді добуток $R_1 \cdot R_2$ є відношення "бути братом одного з батьків", тобто бути "дядьком".

Розглянемо матрицю $A\left(R_1 \cdot R_2\right)$ добутку відношень R_1 і R_2.

Твердження 1.4. $A\left(R_1 \cdot R_2\right) = A\left(R_1\right) \cdot A\left(R_2\right)$.

Доведення. Самостійно.

4. *Звуження.* Відношення $\langle R_1, \Omega_1 \rangle$ називається звуженням відношення $\langle R, \Omega \rangle$ на множині Ω_1, якщо $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і $R_1 = R \cap \Omega_1^2$.

1.1.8. Властивості відношень

Розглянемо основні властивості бінарних відношень, які використовуються в теорії вибору і прийняття рішень.

1. Відношення R називається рефлексивним, якщо для довільного $x \in \Omega$ $x\,R\,x$. Наприклад, відношення "бути схожим на", "бути не старшим" – рефлексивні, а відношення "бути братом", "бути старшим" – не рефлексивні. У матриці $A(R)$ рефлексивного відношення R на головній діагоналі стоять одиниці.

2. Відношення R називається антирефлексивним, якщо воно виконується лише для об'єктів, які не співпадають між собою, тобто з $x\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$. В матриці $A(R)$ антирефлексивного відношення R на головній діагоналі стоять нулі.

3. Відношення R називається симетричним, якщо для всіх x і y, для яких виконується $x\,R\,y$, виконується також $y\,R\,x$ ($R \subseteq R^{-1}$). Наприклад, відношення "бути схожим", "бути родичем" (але не "бути чоловіком") є симетричними. Матриця $A(R)$ симетричного відношення R симетрична $\left(a_{i,j}(R) = a_{j,i}(R)\right)$.

Твердження 1.5. Відношення R симетричне тоді і тільки тоді, коли $R = R^{-1}$.

Доведення. За визначенням симетричного відношення $R \subseteq R^{-1}$. В силу того, що $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$, отримаємо $R^{-1} \subseteq \left(R^{-1}\right)^{-1}$, або $R^{-1} \subseteq R$. Порівнюючи це вкладення з вихідним, приходимо до висновку, що $R = R^{-1}$. Протилежне очевидне. Твердження доведено.

4. Відношення R називається асиметричним, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$. Іншими словами з двох виразів $x\,R\,y$ і $y\,R\,x$ принаймні одне є невірним. В матриці $A(R)$ асиметричного відношення R $a_{i,j}(R) \wedge a_{j,i}(R) = 0$ для всіх i, j. Наприклад, відношення "бути братом" не є ні симетричним, ні асиметричним. Примітка: тут $\wedge, \vee$ – знаки кон'юнкції і диз'юнкції відповідно.

Твердження 1.6. Якщо відношення R асиметричне, то воно антирефлексивне.

Доведення. Нехай для $x \in \Omega$ виконується $x\,R\,x$. За визначенням оберненого відношення це означає, що $x\,R^{-1}\,x$. Але тоді $x\left(R \cap R^{-1}\right)x$, тобто $R \cap R^{-1} = \varnothing$, що протиречить асиметричності.

5. Відношення R називається антисиметричним, якщо вирази $x\,R\,y$ і $y\,R\,x$ справедливі одночасно лише тоді, коли $x = y$. В матриці $A(R)$ антисиметричного відношення R $a_{ij}(R) \wedge a_{ji}(R) = 0$, якщо $i \neq j$.

6. Відношення R називається транзитивним, якщо $x\,R\,z$ і $z\,R\,y$, то $x\,R\,y$ або $\forall x \in \Omega, \forall y \in R^{-}(x) : R^{-}(y) \subseteq R^{-}(x)$. У матриці $A(R)$ транзитивного відношення R для будь-яких i, k $\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{i,j}(R) \wedge a_{i,k}(R)\right) \leq a_{i,k}(R)$.

7. Відношення R називається від'ємно транзитивним, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

8. Відношення R називається сильно транзитивним, якщо воно одночасно транзитивне і від'ємно транзитивне.

9. Відношення R називається ациклічним, якщо $R^{k} \cap R^{-1} = \varnothing$ для будь-якого k або $\forall x \in \Omega, \forall k : x \notin (R^{k})^{-}(x)$. Наприклад, відношення "бути батьком" ациклічне, але не транзитивне.

10. Відношення R називається повним, якщо для $\forall\, x, y \in \Omega$, таких, що $x \neq y$, виконується $x\,R\,y$ або $y\,R\,x$.

11. Відношення R називається абсолютно повним, якщо для $\forall\, x, y \in \Omega$ виконується $x\,R\,y$ або $y\,R\,x$. Позначається через U. Для абсолютно повного відношення U матриця $A(U)$ така, що $a_{ij}(U) = 1$ для всіх i та j.

12. Відношення називається порожнім (позначається $\varnothing$), якщо для $\forall\, x, y \in \Omega$ не виконується як $x\,R\,y$, так і $y\,R\,x$. Для порожнього відношення матриця $A(\varnothing)$ така, що $a_{ij}(\varnothing) = 0$ для всіх i та j.

Скористаємось розглянутими властивостями для виділення відношень, які представляють інтерес для теорії вибору і прийняття рішень.

1. Відношення R називається відношенням еквівалентності (еквівалентністю), якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Позначають символом ~. Наприклад, відношення “бути на одному курсі” на множині студентів одного факультету.

2. Відношенням нестрогого порядку $\leq$ називається відношення, що володіє властивостями рефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

3. Відношенням строгого порядку називається відношення, що володіє властивостями антирефлексивності, асиметричності і транзитивності. Нестрогому порядку можна задати відповідний строгий порядок і навпаки. Тому надалі будемо користуватись терміном частинний порядок, розуміючи під ним нестрогий порядок.

4. Відношенням лінійного порядку називають відношення, якщо це повне відношення нестрогого порядку.

5. Відношенням домінування називається відношення, що володіє властивостями антирефлексивності і асиметричності. Будемо говорити, що x домінує над y, якщо x в якому-небудь розумінні переважає над y.

6. Відношенням квазіпорядку називають відношення, що володіє властивістю рефлексивності і транзитивності.

7. Відношенням упорядкування називають відношення, якщо воно повне, рефлексивне і транзитивне.

Приклад 1.5. Проаналізувати властивості відношення R, яке задано матрицею відношення (табл. 1.3) на множині альтернатив $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Табл. 1.3. Відношення R

R	1	2	3	4	5	6
1		1		1	1	1
2					1	
3	1	1		1	1	1
4		1			1	
5						
6		1		1	1	

Тут матриця задана у вигляді таблиці, в якій вказані тільки ненульові елементи матриці (тобто на перетині i-го рядка та j-го стовпця таблиці знаходиться 1, якщо $(x_i, x_j) \in R$).

Розв'язання. Побудуємо спочатку відношення $R^{-1} = \{(y, x) : x\,R\,y\}$ (табл. 1.4).

Табл. 1.4. Відношення R^{-1}

R^{-1}	1	2	3	4	5	6
1			1			
2	1		1	1		1
3						
4	1		1			1
5	1	1	1	1		1
6	1		1			

За означенням відношення R є антирефлексивним та асиметричним. Перевіримо транзитивність відношення R (табл. 1.5).

Табл. 1.5. Перевірка транзитивності відношення R

$R^{-}(1)=\{2,4,5,6\}$	$R^{-}(2)=\{5\}\subset R^{-}(1)$ $R^{-}(4)=\{2,5\}\subset R^{-}(1)$ $R^{-}(5)=\varnothing\subset R^{-}(1)$ $R^{-}(6)=\{2,4,5\}\subset R^{-}(1)$
$R^{-}(2)=\{5\}$	$R^{-}(5)=\varnothing\subset R^{-}(2)$
$R^{-}(3)=\{1,2,4,5,6\}$	$R^{-}(1)=\{2,4,5,6\}\subset R^{-}(3)$ $R^{-}(2)=\{5\}\subset R^{-}(3)$ $R^{-}(4)=\{2,5\}\subset R^{-}(3)$ $R^{-}(5)=\varnothing\subset R^{-}(3)$ $R^{-}(6)=\{2,4,5\}\subset R^{-}(3)$
$R^{-}(4)=\{2,5\}$	$R^{-}(2)=\{5\}\subset R^{-}(4)$ $R^{-}(5)=\varnothing\subset R^{-}(4)$
$R^{-}(5)=\varnothing$	–
$R^{-}(6)=\{2,4,5\}$	$R^{-}(2)=\{5\}\subset R^{-}(6)$ $R^{-}(4)=\{2,5\}\subset R^{-}(6)$ $R^{-}(5)=\varnothing\subset R^{-}(6)$

Отже, відношення R є транзитивним.

Побудуємо тепер $\overline{R}=\{(x,y):(x,y)\notin R\}$ (табл. 1.6).

Табл. 1.6. Відношення $\overline{R}$

$\overline{R}$	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2	1	1	1	1		1
3			1			
4	1		1	1		1
5	1	1	1	1	1	1
6	1		1			1

Перевіримо транзитивність відношення $\overline{R}$ (табл. 1.7).

Табл. 1.7. Перевірка транзитивності відношення $\overline{R}$

$\overline{R}^{-}(1) = \{1,3\}$	$\overline{R}^{-}(1) = \{1,3\} \subseteq \overline{R}^{-}(1)$ $\overline{R}^{-}(3) = \{3\} \subset \overline{R}^{-}(1)$
$\overline{R}^{-}(2) = \{1,2,3,4,6\}$	$\overline{R}^{-}(1) = \{1,3\} \subset \overline{R}^{-}(2)$ $\overline{R}^{-}(2) = \{1,2,3,4,6\} \subseteq \overline{R}^{-}(2)$ $\overline{R}^{-}(3) = \{3\} \subset \overline{R}^{-}(2)$ $\overline{R}^{-}(4) = \{1,3,4,6\} \subset \overline{R}^{-}(2)$ $\overline{R}^{-}(6) = \{1,3,6\} \subset \overline{R}^{-}(2)$
$\overline{R}^{-}(3) = \{3\}$	$\overline{R}^{-}(3) = \{3\} \subseteq \overline{R}^{-}(3)$
$\overline{R}^{-}(4) = \{1,3,4,6\}$	$\overline{R}^{-}(1) = \{1,3\} \subset \overline{R}^{-}(4)$ $\overline{R}^{-}(3) = \{3\} \subset \overline{R}^{-}(4)$ $\overline{R}^{-}(4) = \{1,3,4,6\} \subseteq \overline{R}^{-}(4)$ $\overline{R}^{-}(6) = \{1,3,6\} \subset \overline{R}^{-}(4)$
$\overline{R}^{-}(5) = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$	$\forall x \in \Omega:\ \overline{R}^{-}(x) \subseteq \overline{R}^{-}(5)$
$\overline{R}^{-}(6) = \{1,3,6\}$	$\overline{R}^{-}(1) = \{1,3\} \subset \overline{R}^{-}(6)$ $\overline{R}^{-}(3) = \{3\} \subset \overline{R}^{-}(6)$ $\overline{R}^{-}(6) = \{1,3,6\} \subseteq \overline{R}^{-}(6)$

Отже, відношення $\overline{R}$ є транзитивним, тоді R є ще й від’ємно транзитивним, тобто відношення R сильно транзитивне.

Крім того, оскільки для відношення R виконується $R \cup R^{-1} = U \setminus E$, то воно є повним.

Відповідь: R є антирефлексивним асиметричним сильно транзитивним повним відношенням, тобто *сильно транзитивним повним* відношенням *строгого порядку*.

1.1.9. Поняття R-оптимальності

Приведений раніше матеріал був пов'язаний з формалізацією поняття попарного порівняння елементів, яке необхідне для виділення кращого елемента з всієї множини Ω. Щоб виділити кращі елементи, необхідно формалізувати паняття “кращий елемент”.

Введемо необхідні поняття. Елемент $x \in \Omega$ назвемо *максимумом по відношенню* R, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $x\,R\,y$. Аналогічно, $x \in \Omega$ називається *мінімумом по відношенню* R, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $y\,R\,x$.

Максимуми і мінімуми по відношенню R можуть існувати або не існувати. Наприклад, множина всіх дійсних чисел з відношенням “більше або дорівнює” не має ні максимума, ні мінумума по цьому відношенню. Звуження цього відношення на множину всіх невід'ємних чисел має мінімум (нуль), але не має максимуму.

Від максимуму і мінімуму потрібно відрізняти поняття мажоранти і міноранти по відношенню R. Елемент $x \in \Omega$ називається *мажорантою по відношенню* R, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $y\,\overline{R}\,x$. Елемент $x \in \Omega$ називається *мінорантою по відношенню* R, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $x\,\overline{R}\,y$.

Нехай R – довільне відношення на множині Ω; $\Omega^{+}(R)$ – множина максимумів по відношенню R; $\Omega_{+}(R)$ – множина мажорант; $\Omega^{-}(R)$ – множина мінімумів; $\Omega_{-}(R)$ – множина мінорант.

Твердження 1.7. $\Omega^{+}(R) = \Omega_{+}\left(R^{d}\right)$, $\Omega^{-}(R) = \Omega_{-}\left(R^{d}\right)$.

Доведення. Нехай $x \in \Omega^{+}(R)$. Це означає, що для всіх $y \in \Omega$ виконується $x\,R\,y$ або $y\,R^{-1}\,x$ і, отже, не виконується $y\,\overline{R^{-1}}\,x$, тобто не виконується $y\,R^{d}\,x$. Це означає, що $x \in \Omega_{+}\left(R^{d}\right)$, що доводить включення $\Omega^{+}(R) \subseteq \Omega_{+}\left(R^{d}\right)$. Навпаки, нехай $x \in \Omega_{+}\left(R^{d}\right)$. Це означає, що для всіх $y \in \Omega$ виконується

$y\,\overline{R^d}\,x$ або $x\left(\overline{R^d}\right)^{-1}y$; в силу першого співвідношення твердження 1.3 для всіх $y \in \Omega$ виконується $x\,R\,y$, тобто $x \in \Omega^{+}(R)$. Перше співвідношення доведено, друге доводиться аналогічно. Твердження доведено.

Множину $\Omega_{+}(R)$ називають також *множиною недомінуючих по* R *елементів*; елементи, що в неї входять, називаються R-*оптимальними*. Множину всіх R-оптимальних на Ω елементів позначають Ω^{R}, а множину максимумів за відношенням $R - \Omega_{R}$.

Максимальним ланцюгом за відношенням R, заданим на Ω (*максимальним ланцюгом*), називають послідовність елементів $x_1,...,x_m$ таку, що:

1) $x_i\;R\;x_{i+1} \quad \left(i=\overline{1,m-1}\right)$;

2) не існує послідовності з властивістю 1) більшої довжини.

1.1.10. Поняття інваріантих відношень, їх властивості

Вирішення практичної задачі вибору може виявитись ускладненим при заданні альтернатив у вигляді елементів абстрактної множини, оскільки воно може вимагати більш детального їх опису. З цією метою кожну альтернативу представляють у критеріальному просторі. Для формального опису критеріального простору використовують евклідовий простір E_m. Це вимагає деякої модифікації загальної конструкції бінарного відношення з врахуванням властивостей E_m. Отже, *бінарне відношення на* E_m є відношення з областю задання E_m. Надалі будемо називати його просто відношенням.

Прийнято серед усіх відношень виділяти відношення, інваріантні відносно перенесення, або просто інваріантні. *Відношенням*, *інваріантним відносно перенесення*, називається таке відношення, для якого верхній переріз в будь-якій точці може бути отриманий паралельним перенесенням верхнього перерізу в будь-якій іншій точці, тобто для довільних $x^1, x^2 \in E_m$ виконується:

$$R^{+}\left(x^1\right) = R^{+}\left(x^2\right) + x^1 - x^2 .$$

Твердження 1.8. *Відношення R інваріантне тоді і тільки тоді, коли* $\left[x^1 + x^2 = x^3 - x^4\right] \Rightarrow \left[x^1 R x^2 \Leftrightarrow x^3 R x^4\right]$.

Клас відношень, інваріантних відносно перенесення, позначимо $\boldsymbol{I}$; для вказівки розмірності простору, на якому задані відношення з $\boldsymbol{I}$, будемо записувати $\boldsymbol{I}_m$.

Твердження 1.9. *Нехай* $R \in \boldsymbol{I}$. *Тоді:*

1. $R^-(0) = -R^+(0)$.

2. $[R \text{ *транзитивне*}] \Leftrightarrow \left[a, b \in R^-(0) \Rightarrow (a+b) \in R^-(0)\right]$.

3. $[R \text{ *ациклічне*}] \Leftrightarrow \left[a^1, \ldots, a^k \in R^-(0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a^k \notin R^+(0)\right]$.

У силу інваріантності відношень $R \in \boldsymbol{I}$ для їх задання достатньо описати верхній і нижній переріз на початку координат.

Твердження 1.10. $R_1^-(0) \subseteq R_2^-(0) \Rightarrow R_1 \subseteq R_2$.

Твердження 1.11. *Для будь-якого інваріантного відношення має місце:* $R^+(x) = 2x - R^-(x)$.

Конусом називають множину *K* точок з E_m, що володіють наступними властивостями:

а) якщо $x \in K$ і $a > 0$, то $a\ x \in K$;

б) якщо $x \in K$ і $y \in K$, то $(x+y) \in K$.

Конус називається *тілесним*, якщо його внутрішність не порожня, тобто є точки, які містяться в ньому з деяким околом. Кажуть, що відношення R_K *породжене конусом K*, якщо воно задається формулою:

$x\, R_K\, y \Leftrightarrow (x - y) \in K \setminus \{0\}$.

Твердження 1.12. *Відношення* R_K *інваріантне для будь-якого конуса* K.

Наведемо приклади інваріантних відношень.

Відношення Парето (P):

$$(\forall x, y \in \Omega)\,[xPy] \Leftrightarrow \left\{\left(\forall\ j = \overline{1,m}\right)\left[x_j \geq y_j\right] \wedge \left(\exists\ j_0 \in \{1, \ldots, m\}\right)\left[x_{j_0} > y_{j_0}\right]\right\}.$$

На рис. 1.7 зображені верхні і нижні перерізи відношення P в точці $x^* \in E_2$:

$$P^-\left(x^*\right)=\left\{\overline{x}\in E_m \middle|\ x^* P\,\overline{x}\right\},$$

$$P^+\left(x^*\right)=\left\{\overline{x}\in E_m \middle|\ \overline{x} P\, x^*\right\}.$$

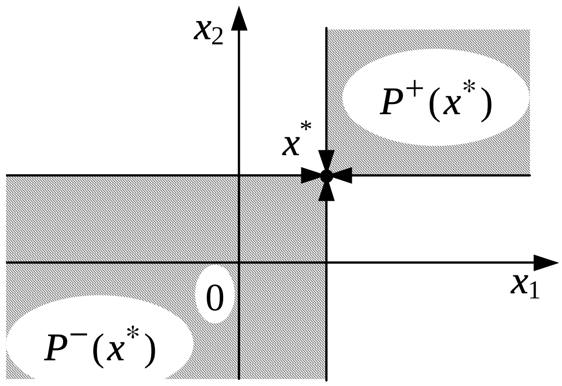

Рис. 1.7. $P^+\left(x^*\right)$ і $P^-\left(x^*\right)$

Множиною Парето на $\Omega \subseteq E_m$ називається множина:

$$\Omega^P=\left\{x\in\Omega:\ \forall y\in\Omega\ \ y\overline{P}\,x\right\}.$$

З означення множини випливає, що Ω^P містить тільки ті елементи x^*, для яких $P_\Omega^+\left(x^*\right)=\varnothing$.

Альтернативи, які входять в Ω^P, володіють наступною властивістю. Якщо розглянути будь-яку координату x_j^i альтернативи $x^i \in \Omega^P$, то серед альтернатив, що залишились в Ω^P не знайдеться x^k, для якої виконувалось би:

$$x_j^k > x_j^i,\ \left(x_1^k,\dots,x_{j-1}^k,x_{j+1}^k,\dots,x_m^k\right)P\left(x_1^i,\dots,x_{j-1}^i,x_{j+1}^i,\dots,x_m^i\right).$$

Бінарне відношення R на E_m називається *раціональним*, якщо $P \subseteq R$.

Нехай на осях координат заданий лінійний порядок, такий, що $k_1 > k_2 > \dots > k_m$, де k_i – номер координати на i-му місці порядку.

Відношення лексикографії (L):

$$\left(\forall x,y\in E_m\right)\left[xLy\right]\Leftrightarrow\left\{\left[x_{k_1}>y_{k_1}\right]\vee\left[\left(x_{k_1}=y_{k_1}\right)\wedge\left(x_{k_2}>y_{k_2}\right)\right]\vee\dots\wedge\left[x\neq y\right]\right\}.$$

Множина Ω^L складається з єдиного елемента.

Відношення P і L породжені конусами; конус K, що породжує відношення $P = P_K$, співпадає з *невід'ємним ортантом* E_m, що позначається:

$$E_m^+ = \left\{ x \in E_m : \left(\forall i = \overline{1,m} \right) \left[x_i \geq 0 \right] \right\}.$$

1.1.11. l-віддільні відношення

Нехай $l \in E_m$ і (a,b) – скалярний добуток векторів a і b. Відношення R на E_m називається l*-віддільним*, якщо:

$$x\,R\,y \Rightarrow (l,x) > (l,y). \tag{1.1}$$

Нехай відношення R l_1-віддільне і l_2-віддільне, тобто $x\,R\,y \Rightarrow$ $\Rightarrow (l_1,x) > (l_1,y)$, $(l_2,x) > (l_2,y)$. Легко бачити, що при цьому R буде також $(l_1 + l_2)$-віддільне. Якщо R l-віддільне і s – додатне число, то R буде sl-віддільне.

Твердження 1.13. *Множина векторів $l \in E_m$, для яких відношення R l-віддільне, представляє собою конус, що позначається K_R.*

Назвемо конус K_R *двоїстим конусом відношення*. Цей термін пов'язаний з добре відомим поняттям двоїстого конуса: конусом $\Omega = \{1,2,...,l\}$, двоїстим до конуса K, називається конус, утворений множиною векторів $l \in E_m$ таких, що $(l,x) \geq 0$ для всіх $x \in K$.

Якщо в (1.1) замінити строгу нерівність на нестрогу, то прийдемо до поняття *нестрогої l-віддільності*.

Встановимо властивості, при яких відношення R нестрого l-віддільне.

Теорема 1.1. *Нехай:*

1) $R \in \boldsymbol{I}$;

2) існує тілесний конус К такий, що $K \subseteq R^+(0)$;

3) R ациклічне.

Тоді R нестрого l-віддільне.

Відношення $R \subseteq E_m^2$ називається *віддільним на множині X*, якщо існує l таке, що (1) виконується, якщо $x, y \in X$. Відношення R називається *віддільним*, якщо воно віддільне на кожній множині $X \in E_m$. Зауважимо, що l залежить від *X*: $l = l\left(X\right)$.

Теорема 1.2. *Нехай $R \in \boldsymbol{I}$, R ациклічне і всі координати точок x з скінченної множини Ω – раціональні числа, тоді R віддільне на Ω.*

Умова раціональності координат елементів Ω не є обмежуючим фактором, оскільки при розв'язанні практичних задач механізми виміру об'єктів за критеріями такі, що в результаті отримують раціональні числа (наприклад, "вага" в кілограмах і т. д.). Відмова від умови раціональності приводить до відсутності віддільності.

Повернемося до основного означення l-віддільності. Що ж "відділяють" віддільні відношення, тобто з чим пов'язана їх назва? Нехай $b \in E_m$. Як розміщені в E_m множини $R^-\left(b\right)$ і $R^+\left(b\right)$, якщо R l-віддільне? Проведемо через точку b гіперплощину λ: $\left(l, x\right) = \left(l, b\right)$. Якщо $y \in R^+\left(b\right)$, то yRb $\left(l, y\right) > \left(l, b\right)$. Якщо ж $y \in R^-\left(b\right)$, то bRy і $\left(l, y\right) < \left(l, b\right)$. Іншими словами, множина "кращих, ніж b" елементів $\left(R^+\left(b\right)\right)$ лежить по інший бік гіперплощини λ, що проходить через b, ніж множина "гірших, ніж b" елементів $\left(R^-\left(b\right)\right)$. Зрозуміло, що для інваріантних відношень достатньо (для віддільності) довести віддільність верхнього перерізу від нижнього тільки у нулі.

Розглянемо тепер, яким чином властивість віддільності на Ω дозволяє знаходити недомінуючі за відношенням R елементи.

Твердження 1.14. *Нехай R – віддільне на Ω відношення. Тоді* $\arg\max\limits_{\Omega} \subseteq \Omega^R$.

Розглянемо на E_m відношення R_l, яке визначимо наступним чином: $\left(\forall x, y \in E_m\right)\left[x\, R_l\, y \Leftrightarrow \left(l, x\right) > \left(l, y\right)\right]$.

На рис. 1.8 зображені верхні і нижні перерізи відношення R_l у точці $x^* \in E_2$. Легко перевірити, що $\Omega^{R_l} = \arg\max\limits_{\Omega}\left(l, x\right)$, де Ω^{R_l} – множина недомінуючих по відношенню R_l векторів. Звідси випливає, що пошук множини Ω^{R_l} недомінуючих по відношенню R_l векторів (точок) еквівалентний відшуканню максимумів функції $y = \left(l, x\right)$, яку, як правило, називають *лінійною згорткою*.

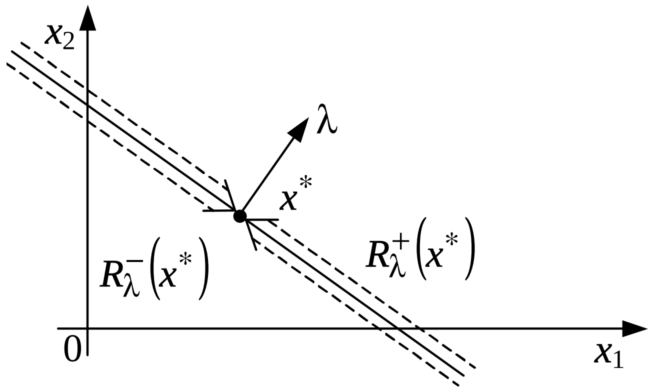

Рис. 1.8. $R_l^+(x^*)$ і $R_l^-(x^*)$

1.1.12. Тест для самоконтролю

I. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. У задачах прийняття рішення особою, що приймає рішення (ОПР), називають:

а) одного суб'єкта, який розв'язує проблему

б) декілька суб'єктів, які розв'язують проблему

в) обидві відповіді правильні

2. Кажуть, що ОПР здійснює прийняття рішення в умовах визначеності, якщо встановлений наступний зв'язок альтернатив з результатами:

а) коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку

б) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи в) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи, але на їх появу впливають сторонні чинники

г) якщо кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, причому відсутня навіть стохастична залежність наслідків від альтернатив

3. Бінарне відношення можна задати:

а) перерахунком всіх пар

б) матрицею

в) графом

г) за допомогою загальної властивості

д) перерізами

е) всіма переліченими способами

4. Для відношення R на множині Ω множина $\{x \in \Omega : (x, y) \in R\}$:

а) є верхнім перерізом

б) є нижнім перерізом

в) правильної відповіді немає

5. Для довільних $x^1, x^2 \in E_m$, якщо R інваріантне відношення, виконується:

а) $R^+(x^1) = R^+(x^2) + x^1 - x^2$

б) $R^-(x^1) = R^-(x^2) + x^1 - x^2$

в) $R^+(x^1) = R^+(x^2) - x^1 + x^2$

г) $R^-(x^1) = R^-(x^2) - x^1 + x^2$

6. Відношення R на E_m називається l-віддільним, якщо

а) $x\,R\,y \Rightarrow (l, x) \geq (l, y)$

б) $x\,R\,y \Rightarrow (l, x) > (l, y)$

в) $x\,R\,y \Rightarrow (l, y) > (l, x)$

г) $x\,R\,y \Rightarrow (l, y) \geq (l, x)$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Основними операціями над відношеннями є:

а) вкладення

б) обернення

в) перетин

г) об'єднання

д) доповнення

е) двоїстість

є) композиція

ж) звуження

8. До спеціальних операцій над відношеннями належать:

а) вкладення

б) обернення

в) перетин

г) об'єднання

д) доповнення

е) двоїстість

є) композиція

ж) звуження

9. Відношенням нестрогого порядку називається відношення, що володіє властивостями:

а) рефлективності
б) антирефлексивності
в) симетричності
г) асиметричності
д) антисиметричності
е) транзитивності

10. Відношенням строгого порядку називається відношення, що володіє властивостями:

а) рефлективності
б) антирефлексивності
в) симетричності
г) асиметричності
д) антисиметричності
е) транзитивності

III. Запишіть відповідь:

11. Математична модель задачі прийняття рішення представляє собою формальний опис її складових елементів, якими є: ___________________________

____

12. Якою формулою визначається двоїсте відношення: ____________________

1.1.13. Завдання для самостійного виконання

1. Описати словесно та зобразити на графіку кожну з наступних множин (відношень на множині дійсних чисел):

1) $\{\langle x, y\rangle \in E_2 |\ x < y\}$

2) $\{\langle x, y\rangle \in E_2 |\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x + y \leq 1\}$;

3) $\{\langle x, y\rangle \in E_2 |\ x \geq y\}$;

4) $\{\langle x, y\rangle \in E_2 |\ x = y\}$.

2. Виписати всі верхні перерізи для відношень $R \subseteq E_2$ задачі 1.

3. В задачі 1 вказати всі пари вкладених і взаємно доповнювальних відношень.

4. Довести, що для будь-якого R:

$$\overline{R^{-1}} = \left(\overline{R}\right)^{-1}.$$

5. Довести, що для будь-яких R_1 і R_2:

$$a_{i,j}\left(R_1 \cap R_2\right) = a_{i,j}\left(R_1\right) \wedge a_{i,j}\left(R_2\right),\ i, j = \overline{1, n}.$$

6. Для відношень із задачі 1 виписати доповнювальні, обернені і двоїсті відношення.

7. Нехай $\Omega=\left\{x^1,...,x^6\right\}$; $x_1^1=2$, $x_1^2=3$, $x_1^3=1$, $x_1^4=1$, $x_1^5=4$, $x_1^6=5$; $x_2^1=5$, $x_2^2=3$, $x_2^3=4$, $x_2^4=3$, $x_2^5=3$, $x_2^6=4$. Знайти $P_\Omega^+\left(x^1\right)$, $P_\Omega^+\left(x^2\right)$, $P_\Omega^+\left(x^3\right)$, $P_\Omega^+\left(x^4\right)$, $P_\Omega^+\left(x^5\right)$, $P_\Omega^+\left(x^6\right)$, $P_\Omega^-\left(x^1\right)$, $P_\Omega^-\left(x^2\right)$, $P_\Omega^-\left(x^3\right)$, $P_\Omega^-\left(x^4\right)$, $P_\Omega^-\left(x^5\right)$, $P_\Omega^-\left(x^6\right)$.

8. Проаналізувати властивості відношення R, яке задано матрицею відношення (табл. 1.8) на множині альтернатив $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Табл. 1.8. Відношення R

R	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2	1	1	1	1		1
3			1			
4	1		1	1		1
5	1	1	1	1	1	1
6	1		1			1

9. Довести, що $R_K^-(0)=-K\setminus\{0\}$.

10. Довести, що для будь-яких точок x^0, $x^*\in E_m$:

а) $L^-\left(x^0\right)=L^-\left(x^*\right)+x^0-x^*$,

б) $L^+\left(x^0\right)=L^+\left(x^*\right)+x^0-x^*$.

1.2. Функції вибору

1.2.1. Загальне поняття функції вибору

У практичній ситуації вибору при деякій множині альтернатив Ω ОПР, вибираючи деяку альтернативу, керується своїм особистим уявленням про кращі альтернативи. У різних ОПР в одній і тій же ситуації уявлення про кращі альтернативи можуть відрізнятись, а отже, вони можуть вибирати різні альтернативи. Таким чином, за відомим вибором у конкретній ситуації навряд чи можна повністю описати ті причини, які спричинили зробити саме даний вибір, а не інший, тобто відновити логіку вибору.

Розглянемо декілька взаємопов'язаних ситуацій вибору, в яких множина альтернатив X є підмножиною Ω. Позначимо через $C(X)$ множину альтернатив, виділених ОПР з X. Будемо вважати, що вибір здійснює одна і та ж ОПР. Для позначення $C(X)$ будемо використовувати термін *вибір з X*.

Нехай Ω – множина всіх груп університету; X – довільні підмножини Ω (наприклад, множини груп 4-го курсу, множини груп факультету математики та інформатики і т.д.). Нехай $C(X)$ – краща група із множини груп X. Не приймаючи до уваги, хто і з яких причин робив вибір, природно вважати, що краща група університету буде кращою групою свого курсу, свого факультету і т.д. Формально це записується так: якщо $X' \subseteq X$ і $x \in C(X) \cap X'$, то $x \in C(X')$. Ситуацію вибору, коли найкраща група університету виявляється не кращою групою свого факультету, навряд чи можна вважати об'єктивною, незалежно від того, за якими показниками проводиться вибір. Отже, не всякий вибір у конкретній ситуації може бути визнаний логічно обґрунтованим при відомих виборах в інших ситуаціях, пов'язаних з даною, оскільки множини $C(X)$ є залежними при різних X. Для формалізації взаємної залежності виборів $C(X)$ при взаємопов'язаних ситуаціях використовують поняття функції вибору.

Функцією вибору C називають відображення, що співставляє кожному $X \subseteq \Omega$ його підмножину $C(X) \subseteq X$.

Будемо інтерпретувати $C(X)$ як елементи, що мають найбільшу перевагу в X. Зауважимо, що в загальному визначенні функції вибору ніяких обмежень на $C(X)$ не накладається, зокрема, не виключається можливість порожнього вибору: $C(X) = \varnothing$. Таке значення називають “відмовою від вибору”.

1.2.2. Функції вибору, породжені бінарними відношеннями

Співставимо довільному бінарному відношенню функцію вибору. Нехай на Ω задане бінарне відношення R і для $x, y \in \Omega$ виконується $x\,R\,y$. Будемо вважати, що для вибору надана множина $X = \{x, y\}$. Враховуючи, що $x\,R\,y$, при описі результату вибору з X можна вважати, що y не включається в $C(X)$. З іншого боку, можна вважати, що x повинно бути включено в $C(X)$. Розгляд всіх пар елементів з Ω, для яких виконується $x\,R\,y$, з врахуванням сказаного вище породжує на Ω дві різні функції вибору:

$$C^R(X) = \{x \in X \mid \forall y \in X \; y\,\overline{R}\,x\}, \tag{1.2}$$

$$C_R(X) = \{x \in X \mid \forall y \in X \; x\,R\,y\}. \tag{1.3}$$

Функції вибору $C^R(X)$ і $C_R(X)$, породжені бінарним відношенням R, називають *блокуванням* і *перевагою* відповідно.

Твердження 1.15. *Нехай R_1 – звуження відношення R, заданого на Ω, на множину $X \subseteq \Omega$; R_1^d – відношення, двоїсте до R_1; R^d – відношення, двоїсте до R; R_2^d – звуження R^d на X. Тоді $R_1^d = R_2^d$.*

Нехай R – бінарне відношення на Ω; R_1 – його звуження на $X \subseteq \Omega$. Формула (1.2) означає, що $C^R(X)$ складається з усіх мажорант R_1, а формула (1.3) – що $C_R(X)$ складається з максимумів по R_1, тобто $C^R(X) = X^{R_1}$, $C_R(X) = X_{R_1}$.

Твердження 1.16. *Функції вибору C^R і C_R пов'язані співвідношеннями:*

$$C^R = C_{R^d}, \; C_R = C^{R^d},$$

де R^d – відношення, двоїсте до R.

У силу останнього твердження з двох функцій вибору, породжених бінарним відношенням R, достатньо розглядати тільки одну, оскільки блокування по відношенню R співпадає з перевагою за двоїстим відношенням R^d і навпаки. Надалі будемо співставляти бінарному відношенню R функцію блокування C^R, що визначається формулою (1.2) і називатимемо її *функцією вибору, породженою відношенням* R. Такі функції називають також *нормальними*. Не всі функції вибору нормальні.

Довільна функція вибору C не обов'язково співпадає з деякою C^R. Різні бінарні відношення можуть породжувати одну і ту ж функцію вибору C.

Для формального опису класу нормальних функцій вибору визначимо для $X \subseteq \Omega$ накриваюче сімейство $X_i \subseteq \Omega \quad (i \in I)$ таке, що $\bigcup_{i \in I} X_i \supseteq X$.

Твердження 1.17. *Функція вибору C є нормальною тоді і тільки тоді, коли для будь-якої множини* $X \subseteq \Omega$ *і будь-якого накриваючого її сімейства* $X_i \, (i \in I)$ $X \setminus C(X) \subseteq X \setminus \bigcap_{i \in I} C(X_i)$.

Твердження 1.17 означає, що будь-який об'єкт з X, що не потрапив у число кращих, тобто в $C(X)$, обов'язково не входить в $C(X_i)$ хоча б для однієї множини X_i з накриваючого X сімейства. Як наслідок, можна відзначити, що якщо функція C нормальна, то $X \subseteq X_1 \Rightarrow X \setminus C(X) \subseteq X \setminus C(X_1)$, тобто, якщо елемент не вибраний з множини X, то він не буде вибраним з будь якої множини, що її містить.

Твердження 1.18. $C^R(X) \neq \varnothing$ *для будь-якого* $X \subseteq \Omega$ *тоді і тільки тоді, коли відношення* R *ациклічне.*

1.2.3. Логічні форми функцій вибору

Нехай $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}, \quad X \subseteq \Omega$. Співставимо кожному елементу булеву змінну b_i. Встановимо взаємно однозначну відповідність між 2^n підмножин 2^n векторів довжини n з компонентами 0 і 1 за формулами $b(X) = \langle b_1(X), ..., b_n(X) \rangle$, $b_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_i \in X, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i \notin X. \end{cases}$ Множині Ω відповідає вектор $b(\Omega) = \langle 1, ..., 1 \rangle$, а множині $\varnothing$ – вектор $b(\varnothing) = \langle 0, ..., 0 \rangle$.

Нехай на Ω задана функція вибору *C*. Розглянемо сімейство функцій від $n-1$ змінних $f_1(g_1,...,g_{n-1}),...., f_n(g_1,...,g_{n-1})$, які побудовані за наступним правилом:

$$b_i(X) \wedge f_i(b(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \quad (1.4)$$

де $f_1(b) = f_1(b_2,...,b_n)$, $f_i(b) = f_i(b_1,...,b_{i-1},b_{i+1},...,b_n), i = \overline{2,n-1}$, $f_n(b) = f_n(b_1,...,b_{n-1})$.

Логічною формою функції вибору C (ЛФФВ(*C*)) називається сімейство функцій $\langle f_1,..., f_n \rangle$ від $n-1$ змінних, побудоване за допомогою формули (1.4).

Якщо задано довільне сімейство булевих функцій $\langle f_1,..., f_n \rangle$ від $n-1$ змінних, то співвідношення (1.4) однозначно визначає функцію вибору *C*; ЛФФВ(*C*) співпадає з вихідним сімейством $\langle f_1,..., f_n \rangle$. Отже, задання функції вибору еквівалентно заданню ЛФФВ(*C*).

Твердження 1.19. *Нехай* $|\Omega| = N$. *Загальне число різних функцій вибору на* Ω *дорівнює* $2^{N \cdot 2^{N-1}}$.

Твердження 1.19 визначає потужність множини можливих функцій вибору на Ω.

Приклад 1.6. Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і задана функція вибору $C(x_i) = x_i$; $C(x_i, x_j) = x_k$, де $k = \min\{i, j\}$; $C(x_i, x_j, x_k) = \{x_i, x_j, x_k\} \setminus x_r$, де $r = \max n\{i, j, k\}$; $C(\Omega) = x_1$. Побудувати для неї логічну форму.

Розв'язання. Побудуємо для описаної функції вибору логічну форму. З табл. 1.9 з допомогою правила побудови ЛФФВ (1.4) отримаємо таблиці, що задають функції f_1, f_2, f_3, f_4 (табл. 1.10–1.13).

Використовуючи табл. 1.10–1.13 і розклад функцій у досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ), маємо: $f_1(b_2, b_3, b_4) \equiv 1$, $f_2(b_1, b_3, b_4) = \overline{b_1} \vee \overline{b_3} b_4 \vee b_3 \overline{b_4}$, $f_3(b_1, b_2, b_4) = \overline{b_1}\,\overline{b_2} \vee \overline{b_2} b_4 \vee \overline{b_1} b_4$, $f_4(b_1, b_2, b_3) = \overline{b_1}\,\overline{b_2}\,\overline{b_3}$, $ЛФВ(C) = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$.

Табл. 1.9. ЛФФВ C

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1	x_1	$\langle 1000\rangle$	$\langle 1000\rangle$
x_2	x_2	$\langle 0100\rangle$	$\langle 0100\rangle$
x_3	x_3	$\langle 0010\rangle$	$\langle 0010\rangle$
x_4	x_4	$\langle 0001\rangle$	$\langle 0001\rangle$
$x_1,\ x_2$	x_1	$\langle 1100\rangle$	$\langle 1000\rangle$
$x_1,\ x_3$	x_1	$\langle 1010\rangle$	$\langle 1000\rangle$
$x_1,\ x_4$	x_1	$\langle 1001\rangle$	$\langle 1000\rangle$
$x_2,\ x_3$	x_2	$\langle 0110\rangle$	$\langle 0100\rangle$
$x_2,\ x_4$	x_2	$\langle 0101\rangle$	$\langle 0100\rangle$
$x_3,\ x_4$	x_3	$\langle 0011\rangle$	$\langle 0010\rangle$
$x_1,\ x_2,\ x_3$	$x_1,\ x_2$	$\langle 1110\rangle$	$\langle 1100\rangle$
$x_1,\ x_2,\ x_4$	$x_1,\ x_2$	$\langle 1101\rangle$	$\langle 1100\rangle$
$x_1,\ x_3,\ x_4$	$x_1,\ x_3$	$\langle 1011\rangle$	$\langle 1010\rangle$
$x_2,\ x_3,\ x_4$	$x_2,\ x_3$	$\langle 0111\rangle$	$\langle 0110\rangle$
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$	x_1	$\langle 1111\rangle$	$\langle 1000\rangle$

Табл. 1.10

β_2	β_3	β_4	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Табл. 1.11

β_1	β_3	β_4	f_2
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Табл. 1.12

β_1	β_2	β_4	f_3
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Табл. 1.13

β_1	β_2	β_3	f_4
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Нехай задана ЛФФВ(C), тобто задано впорядковане сімейство булевих функцій від $n-1$ змінних $\left\langle f_1,..., f_n\right\rangle$. Розглянемо 2^{n-1} наборів з нулів і одиниць довжини $n-1$. Занумеруємо їх числами від 1 до 2^{n-1} у наступному порядку:

$$1\leftrightarrow\left\langle 0,0,...,0,0\right\rangle,$$

$$2\leftrightarrow\left\langle 0,0,...,0,1\right\rangle,$$

$$3\leftrightarrow\left\langle 0,0,...,1,0\right\rangle,$$

. . . .

$$2^{n-1}\leftrightarrow\left\langle 1,1,...,1,1\right\rangle.$$

Набір з j-м номером позначимо через $b^j = \left\langle b_1^j, ..., b_{n-1}^j \right\rangle$ ($j = \overline{1, 2^{n-1}}$). Розглянемо всеможливі пари виду $\left\langle i, b^j \right\rangle$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 2^{n-1}}$); номер i буде відповідати номеру функції f_i в ЛФФВ(C). Загальне число q всіх таких пар дорівнює $n \cdot 2^{n-1}$. Занумеруємо пари $\left\langle 1, b^1 \right\rangle, \left\langle 1, b^2 \right\rangle, ..., \left\langle 1, b^{2^{n-1}} \right\rangle, \left\langle 2, b^1 \right\rangle, ..., \left\langle n, b^{2^{n-1}} \right\rangle$ послідовністю чисел від 1 до $q = n \cdot 2^{n-1}$.

Розглянемо q-вимірний одиничний куб D^q, вершини якого q-вимірні вектори з компонентами нуль чи одиниця. Співставимо функції вибору C вершину $x^C = \left\langle x_1^C, ..., x_q^C \right\rangle$ куба D^q: $x_r^C = f_i\left(b^j\right)$ $\left(r = \overline{1, q};\ i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, 2^{n-1}}\right)$, де r – номер пари $\left\langle i, b^j \right\rangle$; $\left\langle f_1, ..., f_n \right\rangle$ – ЛФФВ(C).

Нехай тепер x – довільна вершина. Вона визначає деяку функцію вибору C^x співвідношеннями: $f_i^x\left(b^j\right) = x_r$ $\left(r = \overline{1, q};\ i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, 2^{n-1}}\right)$; ЛФВ$\left(C^x\right) = \left\langle f_1^x, ..., f_n^x \right\rangle$. Тоді справедливе твердження.

Твердження 1.20. *Множині всіх функцій вибору на множині* Ω *взаємно однозначно відповідає множина вершин* $n \cdot 2^{n-1}$*-вимірного одиничного куба.*

Послідовність вершин називають *шляхом,* а число вершин – *довжиною шляху*.

Приклад 1.7. Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і задано сімейство булевих функцій $f_1(g_1, g_2, g_3) = g_1 \vee \overline{g_2}$, $f_2(g_1, g_2, g_3) \equiv 1$, $f_3(g_1, g_2, g_3) \equiv 0$, $f_4(g_1, g_2, g_3) = g_2$, *ЛФФВ*$(C) = \left\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \right\rangle$. Визначити функцію вибору за її логічною формою.

Розв'язання. Перенумеруємо змінні згідно з правилом: $f_1(b) = f_1(b_2, ..., b_n)$, $f_i(b) = f_i(b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n)$, $i \neq \overline{1, n}$, $f_n(b) = f_n(b_1, ..., b_{n-1})$. Отримаємо: $f_1(b_2, b_3, b_4) = b_2 \vee \overline{b_3}$, $f_2(b_1, b_3, b_4) \equiv 1$, $f_3(b_1, b_2, b_4) \equiv 0$, $f_4(b_1, b_2, b_3) = b_2$. Отримані функції зведемо в табл. 1.14–1.17.

Табл. 1.14

β_2	β_3	β_4	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Табл. 1.15

β_1	β_3	β_4	f_2
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Табл. 1.16

β_1	β_2	β_4	f_3
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Табл. 1.17

β_1	β_2	β_3	f_4
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Використовуючи табл. 1.14–1.17, отримаємо функцію вибору C (табл. 1.18).

Табл. 1.18. Шукана функція вибору C

	b_1	b_2	b_3	b_4	$b_1 f_1$	$b_2 f_2$	$b_3 f_3$	$b_4 f_4$	$C(X)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	x_1
x_2	0	1	0	0	0	1	0	0	x_2
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_1, x_2	1	1	0	0	1	1	0	0	x_1, x_2
x_1, x_3	1	0	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_1, x_4	1	0	0	1	1	0	0	0	x_1
x_2, x_3	0	1	1	0	0	1	0	0	x_2
x_2, x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	x_2, x_4
x_3, x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_1, x_2, x_3	1	1	1	0	1	1	0	0	x_1, x_2
x_1, x_2, x_4	1	1	0	1	1	1	0	1	x_1, x_2, x_4
x_1, x_3, x_4	1	0	1	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_2, x_3, x_4	0	1	1	1	0	1	0	1	x_2, x_4
x_1, x_2, x_3, x_4	1	1	1	1	1	1	0	1	x_1, x_2, x_3

Встановимо частковий порядок на множині **M** всіх функцій вибору на Ω. Функція вибору C_1 *вкладена* у функцію C_2 (позначають $C_1 \preceq C_2$), якщо $C_1(X) \subseteq C_2(X), \quad X \subseteq \Omega$. Якщо $C_1 \preceq C_2$ і невірно, що $C_2 \preceq C_1$, то C_1 *строго вкладена* в C_2 ($C_1 \prec C_2$).

Визначимо бінарне відношення на множині **M** формулою: $C_1 R C_2 \Leftrightarrow C_1 \preceq C_2$. Поняття вкладеності функцій вибору є природнім узагальненням відповідного поняття для бінарних відношень.

Твердження 1.21. *Нехай R_1, R_2 – відношення на Ω, такі, що $R_1 \le R_2$. Тоді $C^{R_2} \preceq C^{R_1}$.*

Найближчою до C зверху (знизу) називають функцію вибору $\overline{C}$ $(\underline{C})$ таку, що $C \prec \overline{C}$ $(\underline{C} \prec C)$ і не існує C^* (C_*) такої, що $C \prec C^* \prec \overline{C}$ $(\underline{C} \prec C_* \prec C)$. Нехай $C_1 \prec C_2 \prec ... \prec C_k$ – послідовність строго вкладених функцій вибору. Послідовність називається *максимальною*, якщо не існує іншої послідовності, в яку вона входить як частина.

Теорема 1.3. *Будь-якому шляху по кубу D^q з вершини $\langle 0,...,0 \rangle$ у вершину $\langle 1,...,1 \rangle$ мінімальної довжини взаємно однозначно відповідає максимальна послідовність вкладених функцій вибору. Найближчим функціям C_1 і C_2 відповідають ЛФФВ(C_1) і ЛФФВ(C_2), у яких тільки для одного $i \in \{1,...,n\}$ ДДНФ (досконалої дизюнктивної нормальної форми) функцій $f_i^{C_1}$ і $f_i^{C_2}$ відрізняються однією елементарною кон'юнкцією.*

1.2.4. Операції над функціями вибору

Введемо наступні операції:

1. *Об'єднанням функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція *C*, що визначається формулою:

$$C(X) = C_1(X) \cup C_2(X).$$

2. *Перерізом функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція *C*, що визначається формулою:

$$C(X) = C_1(X) \cap C_2(X).$$

3. *Доповненням функції* C_1 називається функція $\overline{C}_1$, що визначається формулою:

$$\overline{C}_1(X) = X \setminus C_1(X).$$

Між введеними операціями і операціями над ЛФФВ існує відповідність.

Теорема 1.4. *Нехай:*

а) $C = C_1 \cup C_2$*;*

б) $C = C_1 \cap C_2$*;*

в) $C = \overline{C}_1$.

Тоді для довільного $i = \overline{1,n}$

а) $f_i^C = f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$*;*

б) $f_i^C = f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$*;*

в) $f_i^C = \overline{f}_i^{C_1}$.

4. *Добутком функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція C, що визначається рівністю:

$$C(X) = C_2(C_1(X)).$$

Суть цієї операції полягає в тому, що спочатку здійснюють вибір у відповідності з функцією вибору C_1, а потім з $C_1(X)$ здійснюють вибір у відповідності з функцією C_2. Такі ситуації бувають, наприклад, коли початковий відбір здійснює експертна комісія, а остаточний вибір з відібраних комісією проектів здійснює ОПР.

Зв'язок між ЛФФВ добутку і ЛФФВ співмножників складніший, ніж при введених раніше операціях.

Твердження 1.22. *Нехай* $C = C_1 \cdot C_2$. *Тоді*

$$f_i^{C_1 \cdot C_2} = f_i^{C_1}(b_1,...,b_{i-1},b_{i+1},...,b_n)\, f_i^{C_2}\Big(b_1 f_1^{C_1}(b_2,...,b_{i-1},1,b_{i+1},...,b_n),...,$$
$$b_{i-1} f_{i-1}^{C_1}(b_1,...,b_{i-2},1,b_{i+1},...,b_n),\, b_{i+1} f_{i+1}^{C_1}(b_1,...,b_{i-1},1,b_{i+2},...,b_n),...,$$
$$b_n f_n^{C_1}(b_1,...,b_{i-1},1,b_{i+1},...,b_{n-1})\Big).$$

Доведення. Нехай маємо $b(X)=\langle b_1(X),...,b_n(X)\rangle$. Розглянемо деяку множину $Y=C_1(X)$. Зрозуміло, що $b(Y)=\left\langle b_1 f_1^{C_1}\left(b(X),...,b_n f_1^{C_1}\left(b(X)\right)\right)\right\rangle$. Побудуємо ЛФФВ функції вибору $C_1 \cdot C_2$. Для цього підставимо у (1.4) замість $b(X)$ вираз $b(Y)=b\left(C_1(X)\right)$. При цьому одержимо $x_i \in C(X) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b_i f_i^{C_1}\left(b(X)\right) f_i^{C_2}\left(b_1 f_1^{C_1}\left(b(X)\right),...,b_{i-1} f_{i-1}^{C_1}\left(b(X)\right),b_{i+1} f_{i+1}^{C_1}\left(b(X)\right),...,b_n f_n^{C_1}\left(b(X)\right)\right),$$

звідки і випливає наша рівність. Твердження доведено.

Між властивостями функцій і результатами операцій над ними також існує зв'язок. Можна довести, що

Твердження 1.23. *Нехай* C_1 *і* C_2 *– нормальні функції вибору. Тоді* $C_1(X) \cap C_2(X)$ *– також нормальна функція вибору.*

1.2.5. Класи функцій вибору

Функції вибору зручно класифікувати за тими умовами, які використовують при їх вивченні. Приведемо деякі з них:

1. *Умова спадковості* (СП):

якщо $X' \subseteq X$, то $C(X') \supseteq C(X) \cap X'$.

2. *Умова незалежності від відкинутих альтернатив* (Н):

якщо $C(X) \subseteq X' \subseteq X$, то $C(X')=C(X)$.

3. *Умова згоди* (З):

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C\left(\bigcup_i X_i\right).$$

4. *Умова Плотта – незалежності вибору від шляху* (КС):

$$C(X_1 \cup X_2)=C\left(C(X_1) \cup C(X_2)\right).$$

Функції вибору, що задовольняють умові Плотта, називаються *квазісуматорними*.

5. *Умова суматорності* (СМ):

$$C(X_1 \cup X_2)=C(X_1) \cup C(X_2).$$

6. *Умова мультиплікаторності* (МП):

$$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2).$$

7. *Умова монотонності* (М):

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) \subseteq C(X_2).$$

Зміст умови спадковості (СП) полягає в наступному. Якщо розглянути вибір з довільної множини і вибір з деякої її підмножини, то всі альтернативи, які були обрані з вихідної множини і увійшли в підмножину, що розглядається, будуть вибрані з цієї підмножини. Наприклад, якщо проводиться університетський конкурс, то умова (СП) означає, що загальноуніверситетський переможець повинен бути переможцем відповідного конкурсу в межах факультету.

Зміст умови незалежності від відкинутих альтернатив (Н) полягає в тому, що якщо розглянути довільну підмножину X', яка містить всі альтернативи вибрані з *X*, то вибір з X' буде співпадати з вибором із вихідної підмножини; зокрема, $C(C(X)) = C(X)$. Якщо проведений конкурс, в якому проект *x* не включений в число переможців, то в конкурсі, в якому приймають участь всі ті ж проекти, що і в першому конкурсі, за виключенням *x*, склад переможців залишеться попереднім.

Зміст умови згоди (З) полягає в тому, що альтернативи, які були вибрані з кожної множини X_i, будуть також вибрані з їх об’єднання.

Умова Плотта вимагає, щоб вибір з об’єднання множин співпадав з вибором із об’єднання виборів, зроблених з кожної множини окремо. Якщо проводиться міжнародний конкурс, то це означає, що можна спочатку відібрати переможців національних конкурсів, а потім проводити конкурс серед них.

Умова суматорності припускає, що вибір з об’єднання множин дорівнює об’єднанню виборів з кожної множини окремо.

Зміст умов мультиплікаторності і монотонності очевидни; зокрема, монотонність означає, що вибір з більш широкої множини буде ширшим.

Кожне з сформульованих умов визначає деякий клас функцій вибору, що задовольняють даній умові. Функції вибору задовольняють перелічені властивості тоді, коли для їх логічних форм виконуються певні співвідношення.

Теорема 1.5. *Функція вибору C є:*

а) спадковою;

б) незалежною від відкинутих альтернатив;

в) такою, що задовольняє умову згоди;

г) квазісуматорною;

д) суматорною;

е) мультиплікаторною;

є) монотонною

тоді і тільки тоді, коли

а) $b^1 \le b^2 \Rightarrow f_i\left(b^1\right) \ge f_i\left(b^2\right)\left(i = \overline{1,n}\right)$;

б) $b_i^2 f_i\left(b^2\right) \le b_i^1 \le b_i^2 \left(i = \overline{1,n}\right) \Rightarrow b_i^2 f_i\left(b^2\right) = b_i^1 f_i\left(b^1\right)\left(i = \overline{1,n}\right)$;

в) $f_i\left(b^1\right) \wedge f_i\left(b^2\right) \le f_i\left(b^1 \vee b^2\right)\left(i = \overline{1,n}\right)$;

г) $\left(b_i^1 \vee b_i^2\right) f_i\left(b^1 \vee b^2\right) =$

$$= \left(b_i^1 f_i\left(b^1\right) \vee b_i^2 f_i\left(b^2\right)\right) f_i\left(b_1^1 f_1\left(b^1\right) \vee b_1^2 f_1\left(b^2\right), \ldots, b_n^1 f_n\left(b^1\right) \vee b_n^2 f_n\left(b^2\right)\right)\left(i = \overline{1,n}\right);$$

д) $f_i\left(b\right) \equiv 0$ *або* $f_i\left(b\right) \equiv 1$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

е) $f_i\left(b^1 \wedge b^2\right) = f_i\left(b^1\right) \wedge f_i\left(b^2\right)\left(i = \overline{1,n}\right)$;

є) $b^1 \le b^2 \Rightarrow f_i\left(b^1\right) \le f_i\left(b^2\right)\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Хоча виділені класи функцій вибору описують умови, що найчастіше використовуються, вони не вичерпують всю їх різноманітність.

Розглянемо ряд властивостей функцій вибору, які є природнім узагальненням розглянутих раніше властивостей відношень.

Функцію вибору назвемо:

– *рефлексивною*, якщо $C(X)=\varnothing$;

– *антирефлексивною*, якщо $C(X)=X$;

– *повною*, якщо $C(X)\neq\varnothing$ для всіх $X\neq\varnothing$;

– *транзитивною*, якщо $C(X_1\cup X_2)=C(X_1)\neq\varnothing$,

$C(X_2\cup X_3)=C(X_2)\neq\varnothing \Rightarrow C(X_1\cup X_3)=C(X_1)$;

– *ациклічною*, якщо $C(X_k\cup X_{k+1})=C(X_{k1})\neq\varnothing \quad \left(k=\overline{1,n-1}\right)\Rightarrow X_1\neq X_n$.

Поняття рефлексивності і антирефлексивності функцій вибору близькі до аналогічних понять для бінарних відношень. Транзитивність можна інтерпретувати так: якщо вибір з об'єднання множин X_1 і X_2 міститься в X_1, а з X_2 і X_3 міститься в X_2, то вибір з об'єднання множин X_1 і X_3 повинен міститись в X_1. Наприклад, якщо проводилась олімпіада в трьох групах, і кращими серед студентів першої і другої групи виявились два студенти з першої групи, кращими серед студентів другої і третьої групи – три студенти з другої групи, то, зрозуміло, що кращими серед студентів першої і третьої групи будуть згадані студенти з першої групи. Проілюструємо властивість ациклічності також на прикладі: нехай кращими серед студентів першої і другої визнані два студенти з першої групи. Нехай взяли роботи студентів однієї з груп першої чи другої (позначимо через *X*). Тоді, якщо кращими серед студентів другої групи і групи *X* стали три студенти другої групи, то зрозуміло, що група *X* не є першою групою. Відповідна функція вибору ациклічна.

Твердження 1.24. *Функція вибору C є:*

а) рефлексивною,

б) антирефлексивною,

в) повною,

г) транзитивною,

д) ациклічною

тоді і тільки тоді, коли:

а) $f_i(0,...,0)=0\left(i=\overline{1,n}\right)$,

б) $f_i(0,...,0)=1\left(i=\overline{1,n}\right)$,

в) для всіх b *виконується* $\bigvee\limits_{i=1}^{n} f_i(b)=1$,

г) $\left(b_i^1 \vee b_i^2\right) f_i\left(b^1 \vee b^2\right)=b_i^1 f_i\left(b^1\right),\left(b_i^2 \vee b_i^3\right) f_i\left(b^2 \vee b^3\right)=b_i^2 f_i\left(b^2\right)\left(i=\overline{1,n}\right)$,

$\bigvee\limits_{i=1}^{n} b_i^1 f_i\left(b^1\right)=\bigvee\limits_{i=1}^{n} b_i^2 f_i\left(b^2\right)=1 \Rightarrow \left(b_i^1 \vee b_i^3\right) f_i\left(b^1 \vee b^3\right)=b_i^1 f_i\left(b^1\right)\left(i=\overline{1,n}\right)$,

д) $\left(b_i^k \vee b_i^{k+1}\right) f_i\left(b^k \vee b^{k+1}\right)=b_i^k f_i\left(b^k\right)\left(i=\overline{1,n}\right)$,

$\bigvee\limits_{i=1}^{n} b_i^k f_i\left(b^k\right)=1\left(k=\overline{1,n-1}\right) \Rightarrow b^1 \neq b^n$.

Твердження 1.25. *Якщо відношення* R*:*

а) транзитивне,

б) ациклічне,

то функція C_R *є:*

а) транзитивною,

б) ациклічною.

Твердження 1.26. *Якщо* R *антирефлексивне і* C^R *– транзитивна функція вибору, то відношення R транзитивне.*

1.2.6. Взаємозв'язки класів функцій вибору

Встановимо зв'язки між класами функцій вибору.

Твердження 1.27. *Функція вибору нормальна тоді і тільки тоді, коли вона належить перетину класів СП і З.*

Функція вибору C називається *загальною скалярною функцією*, якщо існує числова функція g на Ω така, що $C(X)=\arg\max\limits_{X} g(x)$ і просто *скалярною*, якщо $g(x)\neq g(y)$ при $x \neq y$. Такі функції породжуються певними бінарними відношеннями.

Твердження 1.28. *Функція вибору C є загальною скалярною функцією вибору тоді і тільки тоді, коли вона породжена сильно транзитивним антирефлексивним бінарним відношенням.*

Функцію вибору *C*, що є об'єднанням скалярних, називають *сукупно-екстремальною* (клас сукупно-екстремальних функцій позначають через CE). Суть введеного поняття полягає в наступному. На Ω задано r числових функцій (критеріїв) $g_1,...,g_r$. З пред'явленої множини *X* спочатку відбирають елементи, які оптимальні за 1-им критерієм ($\arg\max\limits_X g(x_1)$), потім – за 2-им і т.д., після чого береться об'єднання отриманих виборів.

Введемо поняття характеристичної функції і заборон. Нехай функція вибору *C* суматорна ($C \in CM$). Покладемо $A = \left\{ x_i \middle| \ f_i \equiv 1 \quad \left(i = \overline{1, N} \right) \right\}$. З (1.4) безпосередньо випливає, що для довільного $X \subseteq \Omega$ маємо $C(X) = X \cap A$. Звідси при $X = \Omega$ отримаємо $A = C(\Omega)$. Це приводить до наступного поняття. Нехай $A \subseteq \Omega$.

Функцію вибору, що визначається формулою:

$$C_A^c(X) = X \cap A, \tag{1.5}$$

називають *характеристичною функцією множини A*. Згідно з теоремою 1.5, будь-яка суматорна функція є характеристичною функцією деякої $A \subseteq \Omega$.

Нехай C_1 – довільна функція вибору на Ω, $A \subset \Omega$. Розглянемо функцію вибору *C*, що визначається формулою:

$$C = C_A^c \cap C_1. \tag{1.6}$$

Легко бачити, що $C_A^c \cdot C_1 = C_A^c \cap C_1$.

Суть формули (1.6) полягає в наступному. Спочатку робиться вибір C_1, а потім у вибраній множині залишають тільки елементи, що належать *A*, або, що те саме, з нього видаляють всі елементи, що належать $B = \Omega \setminus A$.

Функцію C_1, що входить у формулу (1.6), називають *функцією вибору із забороною*, оскільки у відповідності з (1.6) забороняється вибирати елементи з $C_1(X)$, що входять в $B = \Omega \setminus A$.

Для будь-якої множини A функцій вибору виділимо підмножину $A^{\bar{\varnothing}}$:

$$A^{\bar{\varnothing}} = \left\{ C \in A \middle| \ (\forall X \subseteq \Omega, \quad X \neq \varnothing) \quad \left[C(X) \neq \varnothing \right] \right\}.$$

Твердження 1.29. *Множина сукупно екстремальних функцій співпадає з* $(СП \cap H)^{\bar{\varnothing}} = СП^{\bar{\varnothing}} \cap H^{\bar{\varnothing}}$.

Таким чином, будь-яка функція вибору з перетину класів *СП* і *Н* представляється у вигляді об'єднання скалярних, якщо вибір з будь-якої непорожньої підмножини непорожній.

Інший зв'язок встановлює:

Твердження 1.30. $СП \cap H = КС$.

Функція вибору C на Ω називається *паретівською*, якщо існують числові функції $g_1, \ldots, g_m$ такі, що:

$$C(X) = \left\{ x \middle| (\exists y \in X, y \neq x) \left[g_i(y) \geq g_i(x) \left(i = \overline{1, m} \right) \right] \right\}.$$

Твердження 1.31. *Функція вибору C є паретівською тоді і тільки тоді, коли вона породжена транзитивним антирефлексивним бінарним відношенням.*

Твердження 1.32. *Клас* Π *паретівських функцій вибору співпадає з* $(СП \cap H \cap З)^{\bar{\varnothing}}$.

Твердження 1.33. *Для будь-якої функції* $C \in СП \cap H \cap З$ *існує* $B \subseteq \Omega$ *таке, що* $C = C_1 \cap C_B^c$, *де* $C_1 \in \Pi$, C_B^c *– характеристична функція множини B.*

1.2.7. Функції вибору, породжені координатними відношеннями

Серед всіх бінарних відношень, заданих на E_m, особливе місце займають координатні відношення, для порівняння за якими пари альтернатив достатньо мати інформацію лише про знаки різниць одноіменних координат. Можна сказати, що структура будь-якої скінченної множини $\Omega \in E_m$ з точки зору вибору за будь-яким із відношень такого типу повністю визначається порядком розміщення всіх його елементів по кожній осі простору E_m. Прикладами координатних відношень є відношення Парето і лексикографії, які, нагадаємо, визначаються наступним чином:

$$xPy \Leftrightarrow \left(\forall j=\overline{1,m}\right)\ \left[x_j > y_j\right] \text{ і } [x \neq y];$$

$$xLy \Leftrightarrow \left[x_{i_1} > y_{i_1}\right], \text{ або } \left[x_{i_1} = y_{i_1}, x_{i_2} > y_{i_2}\right], \text{ або} \ldots \left[x_{i_1} = y_{i_1}, \ldots, x_{i_{m-1}} = y_{i_{m-1}}, x_{i_m} > y_{i_m}\right].$$

Перепишемо ці визначення в іншій формі. Нехай $t_j(x,y) = x_j - y_j, \quad a_j(x,y) = \operatorname{sgn}\left(t_j(x,y)\right)$, де $\operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } b > 0, \\ 0, \text{ якщо } b = 0, \\ -1, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$ Тоді

$$xPy \Leftrightarrow \left(\forall j=\overline{1,m}\right)\ \left[t_j(x,y) \geq 0\right] \text{ і } \left(\exists j_0 \in \{1,\ldots,m\}\right)\ \left[t_{j_0}(x,y) > 0\right];$$

$$xLy \Leftrightarrow \left[t_{i_1}(x,y) > 0\right], \text{ або } \left[t_{i_1}(x,y) = 0, t_{i_2}(x,y) > 0\right] \ldots \text{ і } \left(\exists j_0 \in \{1,\ldots,m\}\right)\ \left[t_{j_0}(x,y) > 0\right].$$

Останній запис означає, що відношення P і L задаються деякими правилами, що однозначно визначаються знаками різниць одноіменних координат. Можна сказати, що ці відношення визначаються вектором $a(x,y) = \left\langle a_1(x,y),\ldots,a_m(x,y)\right\rangle$, в тому розумінні, що якщо $a\left(x^1,y^1\right) = a\left(x^2,y^2\right)$ для довільних пар $\left\langle x^1,y^1\right\rangle$ і $\left\langle x^2,y^2\right\rangle$, то $x^1Ry^1 \Leftrightarrow x^2Ry^2$.

Відношення R називається *координатним*, якщо для будь-яких $\left\langle x^1,y^1\right\rangle$, $\left\langle x^2,y^2\right\rangle$ з $a\left(x^1,y^1\right) = a\left(x^2,y^2\right)$ випливає, що $x^1Ry^1 \Leftrightarrow x^2Ry^2$. Множину всіх координатних відношень позначатимо K, множину всіх координатних відношень на E_m – через K_m.

Зауваження. Якщо $a\left(x^1,y^1\right) \neq a\left(x^2,y^2\right)$, то це не означає, що з x^1Ry^1 обов'язково випливає $x^2\overline{R}y^2$.

Всі пари $\langle x,y\rangle$, у яких $a(x,y)$ рівні, знаходяться в одному і тому ж координатному відношенні. Це дозволяє задати будь-яке координатне відношення деякою функцією $y(a_1,\ldots,a_m)$ такою, що $xRy \Rightarrow y\left(a(x,y)\right) = 1$,

$x\bar{R}y \Rightarrow y\left(a\left(x,y\right)\right)=0$, і навпаки, будь-якій функції y від m трьохзначних змінних співставимо $R \in \mathrm{K}_m$: $y\left(a\left(x,y\right)\right)=1 \Rightarrow xRy$, $y\left(a\left(x,y\right)\right)=0 \Rightarrow x\bar{R}y$.

Функція $y\left(a\right)$ не приймає інших значень, крім 0 і 1; координати аргумента a_i приймають значення з $\{0,1,-1\}$. Введена конструкція дозволяє переходити від відношень R до функцій $y\left(a\right)$ і навпаки.

Для аналізу і практичного використання зручніше задавати відношення не однією, а сімейством функцій від двузначних змінних, тобто булевою функцією. Скористаємось наступною конструкцією.

Нехай $I=\{i_1,...,i_l\}$. Позначимо $b_I=\left\langle b_{i_1},...,b_{i_l}\right\rangle$. Закодуємо функцію $y\left(a_1,...,a_m\right)$ сімейством булевих функцій за формулами: $f_I\left(b_I\right)=y\left(a_1,...,a_m\right)$, де $I=\{i \mid a_i \neq 0\}$; $b_i=\left(a_i+1\right)/2$ $\left(i \in I\right)$.

Оскільки $a_i \in \{0,1,-1\}$ і функція ψ визначена на всіх 3^m наборах довжини m, кожен з яких складається тільки з елементів множини $\{0,1,-1\}$, то $I \in \{J\}$, де $\{J\}$ – множина всіх можливих підмножин множини $J=\{1,...,m\}$, включаючи порожню множину $\varnothing$. Рівність $I=\varnothing$ відповідає випадку, коли $a_i=0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, а $I=J$ відповідає випадку, коли $a_i \neq 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Перевіримо, які значення може приймати змінна $b_i=\left(a_i+1\right)/2$. Вона визначена тільки для $i \in I$, тобто $a_i \neq 0$. Звідси випливає, що
$$b_i=\begin{cases}1, \text{ якщо } a_i=1,\\ 0, \text{ якщо } a_i=-1.\end{cases}$$

Таким чином, для будь-якої функції $y\left(a_1,...,a_m\right)$ однозначно визначається сімейство булевих функцій $\{f_I\left(b_I\right)\}$ $\left(I \in \{J\}\right)$. З іншого боку, сімейство булевих функцій $\{f_I\left(b_I\right)\}$ $\left(I \in \{J\}\right)$ однозначно визначає деяку функцією $y\left(a_1,...,a_m\right)=f_I\left(b_I\right)$, де $a_i=\begin{cases}0, \text{ якщо } i \notin I,\\ 2b_i-1, \text{ якщо } i \in I.\end{cases}$

Дійсно, a_i може приймати три значення $a_i = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \notin I, \\ 1, \text{ якщо } i \in I \text{ і } b_i = 1, \\ -1, \text{ якщо } i \in I \text{ і } b_i = 0. \end{cases}$

Таким чином, встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною всіх функцій $y\,(a_1,...,a_m)$ і множиною всіх сімейств булевих функцій $\{f_I(b_I)\}$ $(I \in \{J\})$. Раніше було встановлено взаємно однозначну відповідність між всіма координатними відношеннями і всіма функціями $y\,(a_1,...,a_m)$. Тепер встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною K_m всіх координатних відношень R на E_m і сімейством булевих функцій при $J = \{1,...,m\}$. Ця відповідність задається наступним чином:

$$xRy \Leftrightarrow f_I(b_I) = 1, \text{ де } I = \left\{ i_s : x_{i_s} \neq y_{i_s} \right\},\ b_{i_s} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } x_{i_s} > y_{i_s}, \\ 0, \textit{ якщо } x_{i_s} < y_{i_s}. \end{cases}$$

Сімейство булевих функцій $\{f_I(b_I)\}$ $(I \in \{J\})$ таке, що $xRy \Leftrightarrow f_I(b_I) = 1$, де $I = \{i \mid x_i \neq y_i\}$, називається *логічною формою відношення R* (ЛФВ(R)), а $f_J(b_J)$, де $J = \{1,...,m\}$, називається *головним членом логічної форми відношення R* (ГЧ ЛФВ(R)).

Отже, будь-яке $R \in \mathrm{K}$ однозначно задається логічною формою відношення, тобто властивості функцій ЛФВ(R) повністю визначають властивості відношення R. З іншого боку, будь-яке сімейство логічних функцій породжує деяке координатне відношення на E_m, тобто існує взаємно однозначна відповідність між ЛФВ і координатними бінарними відношеннями на E_m. Тому дослідження властивостей ЛФВ(R) можна скористатись добре розвинутим апаратом булевої алгебри.

1.2.8. Декомпозиція функцій вибору

Під *декомпозицією* функції вибору будемо розуміти її еквівалентне представлення (у розумінні результатів вибору на всіх $X \subseteq \Omega$) за допомогою певної сукупності інших функцій вибору, *композицією* яких є вихідна функція вибору. Подібною конструкцією для звичайних функцій дійсної змінної є їх розклади у степеневий ряд, в ряд Фур'є і ін.

Будемо називати *загальними декомпозиціями* такі конструкції, які застосовні до будь-яких функцій вибору, а *частинними декомпозиціями* – такі, які застосовні до функцій вибору окремого класу.

Будемо говорити, що *відношення* R *на* Ω *реалізується координатним відношенням* R^* *на* E_m, якщо знайдеться $\Omega^* \subset E_m$, $\left|\Omega^*\right| = \left|\Omega\right|$, такі, що звуження R^* на Ω^* ізоморфне з R. Відповідний ізоморфізм називається *реалізацією.*

Загальні декомпозиції

Декомпозиція 1. Нехай $R_1,...,R_k$ – бінарні відношення на Ω; $y\ (g_1,...,g_k)$ – булева функція. Визначимо функцію вибору $C = C(R_1,...,R_k;y\ )$ на Ω: $x \in C(X) \Leftrightarrow y\ (g_1,...,g_k) = 1$, де $g_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in C^{R_i}(X), \\ 0, & \text{якщо} \quad x \notin C^{R_i}(X). \end{cases}$ Таку функцію вибору $C = C(R_1,...,R_k;y\ )$ називають ψ-*композицією* нормальних функцій вибору, породжених бінарними відношеннями $R_1,...,R_k$. Довільна функція вибору, якою складною вона не була б і яким би класам не належала, завжди допускає декомпозицію на функції, породжені бінарними відношеннями.

Декомпозиція 2. Функцію вибору C, що визначається співвідношенням: $C(X) = \begin{cases} x_i, & \textit{якщо} \quad x_i, x_j \in X, \\ \varnothing, & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$ називається *функцією дозволу* і позначають через $C_{i,j}^{+}$. Функцію C: $C(X) = \begin{cases} x_i, & \textit{якщо} \quad x_i \in X,\ x_j \notin X, \\ \varnothing, & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$ називають *функцією заборони* і позначають через $C_{i,j}^{-}$. Довільна функція вибору представляється у вигляді об'єднання перетинів функцій дозволів і заборон.

Частинні декомпозиції

Декомпозиція 3. Введемо наступні поняття. Булева функція $y_M(g_1,...,g_k) = \vee g_{p_1}..g_{p_d}$, де дизюнкція береться за всіма наборами довжини $d = [k/2]+1$, називається *мажоритарною* або *функцією голосування*. Назва пояснюється тим, що $y_M = 1$ тоді і тільки тоді, коли більше половини змінних дорівнюють 1 (правило більшості). Функція вибору виду $C(R_1,...,R_k;y_M)$ називається *мажоритарно-нормальною*. Клас всіх таких функцій позначимо через МНФ. Клас МНФ складають всі ті функції, які отримуються правилом більшості з нормальних. Елемент *x* вибирається з *X* тоді і тільки тоді, коли він вибирається більше ніж половиною з функцій вибору, породжених бінарними відношеннями $R_1,...,R_k$. Правило композиції для функцій класу МНФ таке ж як і в попередньому випадку. Відмінність полягає лише в тому, що замість будь-яких булевих функцій розглядається одна фіксована функція: мажоритарна. Клас МНФ співпадає з класом Н.

Декомпозиція 4. Нехай знову $R_1,...,R_k$ – бінарні відношення на Ω. Покладемо $y_s(g_1,...,g_k) = g_1 \vee ... \vee g_k$. Функцію виду $C(R_1,...,R_k;y_s)$ називають *сумарно-нормальною* функцією (СНФ). Клас СНФ співпадає з класом Н.

Декомпозиція 5. Будемо називати *скінченно-нормальною* функцію, яка представляється добутком скінченного числа нормальних функцій вибору $C = C^{R_k}\left(C^{R_{k-1}}\left(...\left(C^{R_2}\left(C^{R_1}\right)\right)...\right)\right)$. Очевидно, що $C(R_1,...,R_k;y_s) = \bigcup_{i=1}^{k} C^{R_i}$. Таким чином приходимо до поняття декомпозиції функції вибору у вигляді об'єднання нормальних. Розглянемо не довільні нормальні, а скалярні функції вибору. Бінарні відношення, що породжують скалярні функції, задаються лінійними графами, тобто представляють собою лінійні порядки. Одним з видів розкладу є сукупно екстремальні функції $C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$, де C_i – скалярні функції вибору.

Декомпозиція 6. Нехай $\langle R_1,\Omega\rangle,...,\langle R_m,\Omega\rangle$ – довільні бінарні відношення на одній і тій же множині Ω; $f\left(b_1,...,b_m\right)$ – довільна булева функція. Назвемо *f-сумою відношень* $R_1,...,R_m$ відношення *R*, що задається формулою:

$$xRy \Leftrightarrow f\left(b_1(x,y),...,b_m(x,y)\right)=1, \text{ де } b_i(x,y)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad xR_iy,\\ 0, & \text{якщо} \quad x\overline{R}_iy.\end{cases}$$

Нехай $C_1,...,C_m$ – скалярні функції вибору, кожна з яких породжується відношенням лінійного порядку $R_1,...,R_m$ відповідно, і $f\left(b_1,...,b_m\right)$ – булева функція. Будемо називати *f-сумою функцій* $C_1,...,C_m$ нормальну функцію вибору, породжену *f*-сумою відношень $R_1,...,R_m$. Будь-яка нормальна антирефлексивна функція вибору представляється у вигляді певної комбінації функцій, породжених лінійними порядками, тобто у вигляді комбінацій скалярних функцій вибору.

Таким чином, кожна функція вибору є ψ-композицією функцій вибору, що породжені бінарними відношеннями. Кожне бінарне відношення реалізується як координатне відношення на E_m. Тобто, у певному розумінні вивчення будь-якої функції вибору зводиться до вивчення координатних відношень на E_m.

1.2.9. Тест для самоконтролю

I. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. Функція вибору $C(X)=\left\{x\in X \middle| \forall y\in X\ \ y\,\overline{R}\,x\right\}$ називається:

а) блокуванням	в) зупинкою
б) перевагою	г) кращою

2. Функцією вибору, породженою відношенням R, називають функцію:

а) C^R	в) C^{R^d}	д) $C^{\overline{R}}$	є) $C^{R^{-1}}$
б) C_R	г) C_{R^d}	е) $C_{\overline{R}}$	ж) $C_{R^{-1}}$

3. Нормальною функцією вибору називають функцію:

а) C^R в) C^{R^d} д) $C^{\overline{R}}$ є) $C^{R^{-1}}$

б) C_R г) C_{R^d} е) $C_{\overline{R}}$ ж) $C_{R^{-1}}$

4. Логічною формою функції вибору С (ЛФФВ(С)) називається сімейство функцій $\langle f_1,...,f_n \rangle$ від $n-1$ змінних, де $f_1(b)=f_1(b_2,...,b_n)$, $f_i(b)=$ $=f_i(b_1,...,b_{i-1},b_{i+1},...,b_n)$, $i=\overline{2,n-1}$, $f_n(b)=f_n(b_1,...,b_{n-1})$, побудоване за допомогою формули:

а) $b_i(X)\wedge f_i(b(X))=1 \Rightarrow x_i \in C(X)$

б) $b_i(X)\vee f_i(b(X))=1 \Leftrightarrow x_i \in C(X)$

в) $b_i(X)\wedge f_i(b(X))=1 \Leftrightarrow x_i \in C(X)$

5. Якщо $C=C_1 \cup C_2$, тоді для довільного $i=\overline{1,N}$:

а) $f_i^C=\overline{f}_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$ в) $f_i^C=\overline{f}_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$ д) $f_i^C=f_i^{C_1} \wedge \overline{f}_i^{C_2}$

б) $f_i^C=f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$ г) $f_i^C=f_i^{C_1} \vee \overline{f}_i^{C_2}$ е) $f_i^C=f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$

6. Логічною формою відношення R (ЛФВ(R)) називається сімейство булевих функцій $\{f_I(b_I)\}$, $I\in\{J\}$ таке, що:

а) $xRy \Leftrightarrow f_I(b_I)=0$ в) $xRy \Rightarrow f_I(b_I)=0$

б) $xRy \Leftrightarrow f_I(b_I)=1$ г) $xRy \Rightarrow f_I(b_I)=1$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Функції вибору C^R і C_R пов'язані співвідношеннями:

а) $C^R=C_{R^d}$ в) $C^R=C_{R^{-1}}$ д) $C_R=C^{\overline{R}}$

б) $C^R=C_{\overline{R}}$ г) $C_R=C^{R^d}$ е) $C_R=C^{R^{-1}}$

8. Основними операціями над функціями вибору є:

а) вкладення д) доповнення

б) обернення е) двоїстість

в) перерізом є) композиція

г) об'єднання ж) звуження

9. Функція вибору нормальна тоді і тільки тоді, коли вона належить перетину класів:

а) СП	в) З	д) СМ	є) М
б) Н	г) КС	е) МП	ж) П

10. Функція вибору C є паретівською тоді і тільки тоді, коли вона породжена бінарним відношенням, яке володіє властивостями:

а) рефлективності	г) асиметричності
б) антирефлексивності	д) антисиметричності
в) симетричності	е) транзитивності

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: Функцією вибору C називають відображення ____________

____

12. Продовжіть: Під декомпозицією функції вибору будемо розуміти ______

____

1.2.10. Завдання для самостійного виконання

1. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і задана функція вибору $C(x_i)=x_i$; $C(x_i,x_j)=x_k$, де $k=\max\{i,j\}$; $C(x_i,x_j,x_k)=\{x_i,x_j,x_k\}\setminus x_r$, де $r=\min n\{i,j,k\}$; $C(\Omega)=x_4$. Побудувати для неї логічну форму.

2. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$; $f_1(g_1,g_2,g_3)=\bar{g}_1$, $f_2(g_1,g_2,g_3)=\bar{g}_1\bar{g}_2\bar{g}_3$, $f_3(g_1,g_2,g_3)\equiv 1$, $f_4(g_1,g_2,g_3)=\bar{g}_2\bar{g}_3$. Побудувати функцію вибору C за її *ЛФФВ*$(C)=\langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle$.

3. Знайти перетин і об'єднання функцій вибору із задач 1 і 2.

4. Знайти функції вибору, які будуть доповнюючими до функцій із задач 1 і 2.

5. Знайти добуток функцій вибору із задач 1 і 2 та логічну форму отриманої функції.

6. Дослідити, якими властивостями (умови *наслідування, незалежності від відкинутих альтернатив, згоди, Плотта, суматорності, мультиплікаторності, монотонності*) володіють функції вибору із задач 1 і 2.

7. Нехай $R = L$. Записати логічну форму відношення $L(E_3)$, головний член логічної форми відношення $L(E_3)$, логічну форму відношення $L(E_m)$, головний член логічної форми відношення $L(E_m)$.

Відповідь. ЛФВ$(L(E_3))$: $f_i(b_i) = b_i$ $(i = \overline{1,3})$, $f_{i,j}(b_i, b_j) = b_r$, де $r = \min(i, j)$;

ГЧ ЛФВ$(L(E_3))$: $f_{1,2,3}(b_1, b_2, b_3) = b_1$; ЛФВ$(L(E_m))$: $f_I(b_I) = b_r$, де $r = \min\limits_{i \in I} i$;

ГЧ ЛФВ $(L(E_m))$: $f_J(b_J) = b_1$.

1.3. Методи обробки експертної інформації та розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації

1.3.1. Задача оцінювання

Як уже було сказано, головну роль при прийнятті рішення відіграє ОПР. Однак існують інші суб'єкти, які відіграють не менш важливу роль при прийнятті рішень. Наприклад, слід виділити окремо *власника проблеми* – особу, яка несе відповідальність за прийняття рішення. Часто власник проблеми є і ОПР. Але бувають ситуації, коли власник проблеми є лише одним із декількох людей, які беруть участь в її вирішенні, або й зовсім не бере участі у прийнятті рішення. Наприклад, чимало задач діяльності підприємства вирішують заступники або спеціалізовані відділи, однак за результи цієї діяльності відповідає безпосередньо керівник.

У процесі прийняття рішення можна виділити також *експерта* – незалежну особу, яка є спеціалістом в деякій області та може дати рекомендації або експертну оцінку ОПР по наявній проблемі і ця інформація може серйозно вплинути на рішення Так, експерти можуть допомогти бізнесмену в оцінці економічної доцільності і/або ефективності випуску нової продукції.

Крім того, к прийнятті рішення немалу роль відіграє *ініціативна група* – безпосереднє оточення ОПР, яке зацікавлене в результаті, і яка часом значною мірою вливає на ЛПР.

Для побудови математичних моделей прийняття рішень вводять два основних поняття теорії прийняття рішень: альтернатива і критерій.

Альтернативою або *стратегією* називається варіант конкретних правил дій для ОПР при прийняті рішення. Сам процес прийняття рішення полягає у виборі ЛПР оптимальної альтернативи, найбільш вигідної для неї. Наприклад, при взятті кредиту директором підприємства його альтернативами служать банки, які готові надати кредит. При захисті підсудного альтернативами адвоката служать стратегії поведінки, які вибираються ним для захисту в суді. Альтернатив може бути кілька, всі їх можна перелічити і чітко визначити, наприклад, який вибрати банк для кредиту. Такі альтернативи називаються *дискретними*. Однак, кількість альтернатив може бути і нескінченним, всіх їх перелічити неможливо, вони можуть змінюватися неперервно, наприклад, скільки грошей взяти в кредит із банку. Такі альтернативи називаються *неперервними*.

Критеріями оцінки альтернатив (або просто *критеріями*) називають показники привабливості (рідше непривабливості) альтернатив для учасників процесу вибору рішення, зокрема, для ОПР. Саме оцінка критеріїв служить базою для вибору найкращої альтернативи. Наприклад, при виборі банку керівник підприємства використовує такі критериї, як процентна ставка, надійність банку, умови надання кредиту тощо.

Альтернативи, що розглядаються в процесі прийняття рішень, можуть мати вигляд елементів множини Ω або точок критеріального простору E_m. Крім того, елементи Ω можуть бути впорядковані за деяким аспектом, який є суттєвим для прийняття рішень.

У практичних задачах прийняття рішень альтернативи не є математичними об’єктами, а частіше представляють собою конкретні фізичні системи.

Тому отримання опису альтернатив вимагає розробки методів вирішення наступних задач: побудови множин можливих і допустимих альтернатив, формування наборів аспектів, суттєвих для оцінки альтернатив, критеріального простору, впорядкування альтернатив за аспектами, отримання оцінок за критеріями або відображення Ω в критеріальний простір. Всі ці задачі є модифікаціями загальної задачі оцінювання. Методи розв'язання задач оцінювання ґрунтуються на використанні експертних процедур. Суть задачі оцінювання полягає у співставленні системі, що розглядається (альтернативі, критерію) вектора з E_m.

Розглянемо приклади:

1. Нехай $x \in \Omega$ – альтернатива в задачі прийняття рішень. Є m критеріїв. Потрібно альтернативі $x \in \Omega$ співставити вектор $\left\langle f_1(x),..., f_m(x) \right\rangle \in E_m$.

2. Нехай $k_1,...,k_m$ – критерії, що враховуються при виборі. При побудові координатного відношення узагальненої лексикографії їх необхідно впорядкувати за важливістю. У цьому випадку системі $S = \{k_1,...,k_m\}$ співставляється впорядкований набір різних натуральних чисел від одиниці до m: $i_1,...,i_m$, де i_k – номер k-го критерію при впорядкуванні за важливістю у порядку спадання.

3. Нехай множина Q розбита на l підмножин $Q_1,...,Q_l$. Для елемента $x \in Q$ необхідно вказати, до якої з підмножин Q_i $\left(i = \overline{1,l}\right)$ він відноситься. У цьому випадку елементу x співставляється одне з чисел $1,2,...,l$ в залежності від номера підмножини, що його містить.

4. Нехай x – відрізок, довжину якого потрібно виміряти. У цьому випадку відрізку співставляється дійсне число $f(x)$ – його довжина.

Назвемо простір E_m *m-мірною шкалою* (просто шкалою при $m = 1$), операцію співставлення системі деякого вектора – *оцінюванням*, а знаходження вказаного вектора – *задачею оцінювання.*

Найпростішою формою задачі оцінювання є звичайна задача вимірювання (4 приклад), де оцінювання є порівнянням з еталоном, а розв'язок задачі знаходиться підрахунком числа еталонних одиниць у вимірюваному об'єкті. Більш складною формою оцінювання є випадок, коли еталон відсутній і операцію співставлення системі вектора у явному вигляді не вдається вказати (2 приклад – задача ранжування, 3 приклад – задача класифікації).

Можна виділити наступні етапи розв'язання задачі оцінювання.

1. Визначення множини допустимих оцінок (МДО). На цьому етапі визначається підмножина множини $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, в якому шукається оцінка системи.

2. Визначення найбільш точної оцінки. На цьому етапі з МДО вибирається та оцінка, яка найбільш точно виражає властивості системи, що оцінюється. Це дозволяє представити задачу оцінювання у вигляді задачі прийняття рішень, в якій Ω є МДО, а *ОП* – принцип оптимальності, що виражає уявлення про найбільш точну оцінку. Він задається функцією вибору

$$C_{on}(X) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad a \in X \subseteq \Omega, \\ \varnothing, & \text{якщо} \quad a \notin X \subseteq \Omega, \end{cases}$$

де *а* – оцінка системи, яка є розв'язком задачі $\langle \Omega, ОП \rangle$.

У відповідності з вказаними етапами розв'язок задачі оцінювання зводиться до послідовного розв'язання двох задач вибору: $\langle E, ОП_1 \rangle$, $\langle \Omega, ОП \rangle$, де $ОП_1$ – принцип оптимальності, що задає допустимість оцінки; *ОП* – принцип оптимальності, що задає точність оцінки з Ω. Розв'язком 1-ї задачі вибору є $\Omega = C_{ОП_1}(E)$; розв'язком 2-ї задачі вибору є шукана оцінка $a = C_{ОП}(\Omega)$. Принципи оптимальності $ОП_1$ і *ОП* залежать як від самої системи, що оцінюється, так і від особи, яка оцінює.

1.3.2. Загальна схема експертизи

Задачі оцінювання виникають на різних етапах прийняття рішень. Вони можуть бути розв'язані безпосередньо ОПР або за допомогою консультантів або експертів, коли оцінювання зводиться до вимірювання, до отримання даних з довідників і іншими порівняно простими операціями.

У загальному випадку у зв'язку зі складністю систем, що оцінюються та складністю отримання інформації для розв'язання задачі оцінювання запрошуються люди, що володіють спеціальними знаннями і досвідом роботи з даною або близькою системою. Їх називають експертами, а розв'язання задачі оцінювання – експертизою.

При розв'язанні задачі оцінювання експерти приймають участь в розв'язанні 2-ї задачі вибору $\langle \Omega, ОП \rangle$. Але тут потрібно зауважити, що експерт, який, як правило, не володіє повною інформацією про всі властивості системи, розв'язує не вихідну задачу вибору, а, взагалі кажучи, відмінну від неї задачу вибору $\langle \Omega_e, ОП_e \rangle$, де Ω_e – МДО для експертів, $ОП_e$ – принцип оптимальності експерта.

Аналіз існуючих експертиз показує, що в процесі їх побудови можна виділити наступну послідовність дій:

1. Дослідник знаходить множину допустимих оцінок Ω, в яких міститься оцінка.

2. Дослідник визначає множину допустимих оцінок Ω_e, з яких здійснюють вибір експерти.

3. Кожен експерт вибирає свою оцінку $a_i = C_i(\Omega_e) \in \Omega_e$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$, тобто вирішує задачу вибору найкращої оцінки з Ω_e. При цьому експерти можуть взаємодіяти між собою.

4. По завчасно розробленому алгоритму (формулі) дослідник здійснює обробку отриманої від експертів інформації і знаходить результуючу оцінку з Ω, що є розв'язком вихідної задачі оцінювання.

5. Якщо отриманий розв'язок не задовольняє дослідника, він може надати експертам додаткову інформацію, тобто організувати зворотній зв'язок, після чого вони знову вирішують відповідні задачі вибору.

Назвемо *схемою експертизи* п'ятірку параметрів: Ω – вихідну МДО, Ω_e – МДО для експертів, L – взаємодію між експертами, Q – зворотній зв'язок, φ – обробку (відображення $\Omega_e^N \to \Omega$). Під *підготовкою експертизи* будемо розуміти попередню розробку схеми експертизи і підбір експертів, а під *реалізацією експертизи* – отримання від експертів інформації і її обробку.

1.3.3. Підготовка експертизи

Підготовка експертизи фактично полягає в конкретизації виділених параметрів:

1. Множина допустимих оцінок

МДО визначається задачею оцінювання, що розв'язується. Розрізняють наступні типи МДО:

1) $\Omega = \{0,1\}$. Відповідна *задача попарного порівняння* полягає у виявленні кращого з двох об'єктів a і b. При цьому $C(\Omega) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } a \textit{ краще } b, \\ 0, & \textit{в іншому випадку}. \end{cases}$

2) $\Omega = \{\langle 1,2,...,n\rangle, \langle 1,3,...,n,2\rangle, ..., \langle n,n-1,...,1\rangle\}$, тобто складається з множини перестановок довжини n. Відповідна *задача ранжування* полягає у впорядкуванні об'єктів, що утворюють систему, за спаданням або зростанням значення деякої ознаки. При цьому $C(\Omega) = \langle i_1, i_2, ..., i_n\rangle$, де i_j – номер j-го об'єкта при вказаному впорядкуванні.

3) $\Omega = \{1,2,...,l\}$. Відповідна *задача класифікації* полягає у віднесенні заданого елемента $x \in S$ до одного з l підмножин $S_1,...,S_l$. При цьому $C(\Omega) = i, \quad \textit{якщо } x \in S_i$.

4) $\Omega = E_m$. Відповідна *задача числової оцінки* полягає у співставленні системі одного або декількох чисел. При цьому $C(\Omega) = a$, *якщо оцінкою системи є вектор* $a \in E_m$.

2. Множина допустимих оцінок для експертів

Для конкретизації Ω_e необхідно описати вид його представлення експерту, який залежить від *форми опитування експерта*.

Опитування типу інтерв'ю передбачає бесіду дослідника з експертом, в ході якої дослідник ставить запитання у відповідності до попередньо розробленої програми, що фактично визначає Ω_e. Важливу роль при цьому відіграє встановлення взаєморозуміння між дослідником і експертом.

Найбільш часто застосовується опитування у формі *анкети*, що представляє собою набір запитань, на які експерту пропонується дати відповідь.. При цьому запитання повинні бути сформульовані так, щоб не допускати неоднозначного тлумачення. Виходячи з досвіду проведення анкетування слід надавати перевагу якісним запитанням (краще-гірше) ніж кількісним.

Аналітична форма опитування передбачає тривалу самостійну роботу експерта, направлену на аналіз характерних властивостей і тенденцій системи, що досліджується. Таку форму називають *методом доповідної записки*. Ця форма опитування погано формалізується і є трудомісткою для експерта, але дозволяє найбільш точно з'ясувати його думку. Часто використовується як перший етап.

3. Взаємодія експертів

Виділяють три види взаємодії експертів:

1) експерти можуть вільно обмінюватись інформацією один з одним;

2) обмін інформацією між експертами регламентований;

3) експерти ізольовані один від одного.

У *схемі типу круглого стола* взаємодія між експертами не регламентується. Вся експертна група збирається для визначення спільної думки. При цьому експерти можуть збагачуватись ідеями один одного, але вимагає від них уміння висловлення своєї думки, що не залежить від думки більшості, здатності відмовитись від своєї думки, якщо вона виявиться невірною.

Деяка регламентація спілкування експертів дозволяє уникнути цих недоліків. відповідна модифікація реалізується у *методі мозкової атаки*, яка полягає в тому, що на протязі певного проміжку часу будь-яка висловлена думка не підлягає обговоренню і не може бути відкинутою.

У випадку ізольованості експертів, кожен з них висловлює свою думку незалежно від інших. При цьому використовують статистичні методи обробки експертної інформації.

4. Зворотній зв'язок в експертизі

Ідея *зворотнього зв'язку в експертизі* полягає в наступному. Експерти дають оцінки, які обробляються. Після цього кожному з них представляють результуючу оцінку разом з іншою інформацією. На основі цих даних експерти уточнюють свої оцінки, після чого процедура повторюється знову до тих пір, поки не буде отримана така узгодженість оцінок, яка задовольняє дослідника.

До числа найбільш відомих процедур із зворотнім зв'язком відноситься *метод Делфі*. Експертам пропонується відповісти на ряд запитань і свої відповіді аргументувати. Дослідник вивчає відповіді експертів і визначає їх узгодженість. Якщо думки експертів недостатньо узгоджені, то він повідомляє кожному з них додаткові відомості про систему, а також відповіді на поставлені запитання і аргументацію інших членів експертної групи, після чого експерти знову відповідають на поставлені запитання. Такий метод є досить трудомістким.

5. Підбір експертів

У першу чергу необхідно визначити кількісний склад експертної групи. Число експертів повинно бути достатньо великим для того, щоб вони у сукупності могли врахувати суттєві властивості задачі, але при надто великій кількості експертів їх думки стають неузгодженими, виникають труднощі в організації експертизи.

З метою підбору експертів, визначають коло задач, що розв'язується і складають список осіб, компетентних в області, що розглядається та в близьких до неї. Поряд з компетентністю, експерт повинен володіти ще й такими якостями: креативністю – здатністю розв'язувати задачі, метод розв'язання яких повністю або частково невідомий; евристичністю – здатністю виявляти неочевидні проблеми; інтуїцією – вгадувати розв'язок без його обґрунтування; предикатністю – здатністю передбачати або відчувати майбутній розв'язок; незалежністю – здатністю протистояти думкам більшості; всебічністю – здатністю бачити проблему з різних точок зору. Вимоги до експертів залежать також і від методу організації експертизи. Для відбору експертів з складеного списку, як правило, використовують їх тестування. Важливо також врахувати зацікавленість експертів в результатах експертизи. Найкращим випадком вважається той, коли експерт байдужий до результатів експертизи.

У ряді випадків при підборі експертів можуть використовуватись деякі числові оцінки, що характеризують їх якості, ступінь їх компетентності – *вага експертів* a_i.

1.3.4. Методи обробки експертної інформації

Суть обробки експертної інформації полягає у знаходженні результуючої оцінки системи за оцінками, що надані експертами.

Результати оцінок кожного з експертів можна розглядати як реалізації деякої випадкової величини, що приймає значення з Ω_e, а, отже, можна застосувати до них методи математичної статистики. Статистичні методи дозволяють визначити узгодженість думок експертів, значимість отриманих оцінок і т. д. Ступінь узгодженості вказує на якість результуючої оцінки.

1. Числові оцінки

Задача полягає у співставленні системі одного числа. Для її розв'язання використовується експертиза Е1: $\Omega = E_1$; $\Omega_e = E_1$; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній; $f\left(x_1,...,x_n\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$.

Результуюча оцінка шукається за формулою середньозваженого значення, де a_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – вага експертів. При відсутності інформації про компетентність експертів можна покласти $a_i = 1$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Ступінню узгодженості думок експертів в експертизі Е1 служить дисперсія s^2:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{x} - x_i\right)^2 \cdot a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

де x_i – оцінка i-го екперта, $\overline{x}$ – результуюча оцінка.

Експертиза Е1 може бути певним чином модифікована, що підвищує точність оцінювання. Експертиза Е2 характеризується параметрами: $\Omega_e = E_3$, $f\left(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, ..., x_1^n, x_2^n, x_3^n\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_1^i g_1 + x_2^i g_2 + x_3^i g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \cdot a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$. Інші параметри такі ж, як і в експертизі Е1. Степінь узгодженості між оцінками визначається за формулою:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(s_i^2 \cdot a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(a - a_i\right)^2 \cdot a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

де $a_i = x_1^i g_1 + x_2^i g_2 + x_3^i g_3$ – середня оцінка i-го експерта, $s_i^2 = \dfrac{\left(a_3^i - a_1^i\right)^2}{g_4}$; g_4 – степінь невпевненості експерта у своїй відповіді, a_1^i, a_2^i, a_3^i – інтерпретується як оптимістична, найбільш ймовірна і песимістична оцінки i-го експерта, коефіцієнти g_1, g_2, g_3, g_4 визначаються емпірічно. За однією методикою $g_1 = 1, g_2 = 4, g_3 = 1, g_4 = 36$, за іншою – $g_1 = 3, g_2 = 0, g_3 = 2, g_4 = 25$.

В експертизах Е1 і Е2 можна визначити статистичну значимість отриманих результатів. Задавши ймовірність помилки $P_{пом}$, можна вказати інтервал, в якому величина, що оцінюється попадає з ймовірністю $1 - P_{пом}$: $\bar{a} - ts\sqrt{n} \le a \le \bar{a} + ts\sqrt{n}$, де t має розподіл Стюдента з $n-1$ ступенем свободи.

Приклад 1.8. Десять експертів з однаковою вагою $a_i = 1$ $\left(i = \overline{1,10}\right)$ оцінюють величину *T*. Від них отримані наступні оцінки: $T_1 = 33$; $T_2 = 35$; $T_3 = 32,2$; $T_4 = 34$; $T_5 = 37,3$; $T_6 = 34$; $T_7 = 36,8$; $T_8 = 40$; $T_9 = 36,1$; $T_{10} = 34$. Знайти результуючу оцінку, ступінь узгодженості думок експертів, статистичну значимість одержаних результатів, якщо ймовірність помилки не перевищує $P_{пм} = 0,05$.

Розв'язання. Знаходимо значення $\bar{T}$ та s^2 за формулами:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (T_i \cdot a_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 35,24, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\bar{T} - T_i\right)^2 \cdot a_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 4,9, \quad s = 2,2136.$$

Використовуючи значення ймовірності похибки $P_{пм} = 0,05$, за таблицями розподілу Стюдента визначаємо величину *t*: число степенів свободи дорівнює $n - 1 = 9$; *t*=2,262; $\Delta = t \cdot s \cdot \sqrt{n} = 15,022$. Таким чином, з ймовірністю 0,95 величина *T* знаходиться в інтервалі $[20,218; 50,262]$.

2. Ранжування

У випадку *строгого ранжування* задача полягає у співставленні системі, що оцінюється, однієї перестановки. Визначимо експертизу ЕЗ: Ω – множина всіх перестановок; $\Omega_e = \Omega$; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній. Відображення φ визначається наступним чином. Результати опитування експертів зводяться у табл. 1.19. В i-тому рядку місця (ранги), надані i-м експертом об'єктам, що проходять ранжування. В $(N+1)$-му рядку стоять суми рангів, отриманих об'єктами від експертів. Усі n об'єктів впорядковуються у відповідності з величиною $r_s = \sum_{j=1}^{N} r_{s,j}$ у порядку зростання.

Табл. 1.19. Результати експертизи

Експерти	Об'єкти			
	1	2	. . .	n
1	r_{11}	r_{12}	. . .	r_{1N}
2	r_{21}	r_{22}	. . .	r_{2N}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
N	r_{N1}	r_{N2}	. . .	r_{Nn}. . .
Σ рангів	r_1	r_2	. . .	r_n

Сума рангів, що надають експерти, визначається за формулою:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} r_{i,j} = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\right) = \frac{N \cdot n \cdot (n+1)}{2}.$$

За середній ранг приймають величину: $r_{i\,cp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{n} = \frac{N \cdot (n+1)}{2}$, а за степінь узгодженості думок – суму квадратів відхилень r_i від середнього значення $r_{i\,cp}$.

Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгого ранжування, тобто відсутності рівних рангів у ранжуванні кожного експерта, називається величина

$$W = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[r_i - \frac{1}{2} \cdot N \cdot (n+1)\right]^2}{N^2 \cdot \left(n^3 - n\right)},$$

де n – число об'єктів, N – число експертів.

У випадку нестрогого ранжування, як і випадку строгого, задача полягає у співставленні системі, що оцінюється, однієї перестановки. При цьому деякі об'єкти можуть бути рівноцінними і мати однакові ранги. Експертиза Е4 відрізняється від експертизи Е3 тільки множиною Ω.

Коефіцієнт конкордації для нестрогого ранжування визначається формулою:

$$W = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[r_i - \frac{1}{2} \cdot N \cdot (n+1) \right]^2}{N^2 \cdot \left(n^3 - n\right) - N \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k_i} \left(t_{i,j}^3 - t_{i,j} \right)},$$

де k_i – число груп рівних рангів, введених i-им експертом; t_{ij} – кількість дробових рангів у j-й групі, введеної i-им експертом.

Якщо компетентність експертів різна і оцінюється додатніми нормованими величинами a_j $\left(\sum_{j=1}^{N} a_j = 1 \right)$ (вагою експертів), то у цьому випадку суму рангів розраховують за формулою:

$$r_i = \sum_{j=1}^{N} \left(r_{i,j} \cdot a_j \right),$$

а решта формул залишаються без змін.

Метод парних порівнянь для нестрогого ранжування. Експериментально встановлено, що найбільшу складність для експерта представляє побудова ранжування на основі одночасного врахування декількох різних ознак, по яким оцінюються об'єкти. Визначимо експертизу Е5 для розв'язання задачі нестрогого ранжування: Ω – така ж, що і в експертизі Е4; Ω_e – множина всіх матриць $A = \left(a_{i,j}\right)$, де $a_{i,j} \in \{0,1\}$, $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$ $(i \neq j)$, $a_{i,i} = 0$ $(i = \overline{1,n})$; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній. Відображення φ визначається наступним чином. Обчислюють матрицю $A = \left(a_{q,t}\right) = \sum_{j=1}^{N} A^j$, де $A^j = \left(a_{q,t}^j\right)$ – оцінка j-го експерта. Знаходять $a_s = \sum_{i=1}^{n} a_{i,s}$ $\left(s = \overline{1,n}\right)$. Об'єкти впорядковуються у відповідності з величинами a_s. Об'єкт з мінімальним a_s отримує ранг 1 і т. д.

Кожен експерт порівнює кожен об'єкт з кожним. Результат порівнянь j-го експерта представляється матрицею розміру $n \times n$, в якій $a_{i,k}^{j} = 1$ тоді і тільки тоді, коли за думкою експерта i-ий об'єкт має перевагу над k-им. Матриця A^j, яка представлена j-им експертом, є матрицею деякого бінарного відношення, що називається *відношенням переваги експерта*. Таке бінарне відношення є антирефлексивним, антисиметричним, і, взагалі кажучи, не є ациклічним. А оскільки на відношення не накладена вимога ациклічності, то відповідний граф може мати цикли. Кажуть, що переваги можуть бути *виражені рангами*, якщо всі об'єкти впорядковуються так, що $a_{ik} = 1$ тоді і тільки тоді, коли ранг i-го об'єкту більший за ранг k-го.

Твердження 1.34. *Небхідною і достатньою умовою того, що переваги виражаються рангами, є ациклічність відношення переваги експерта.*

Коефіцієнтом сумісності думок експерта називається величина:

$$n = \begin{cases} 1 - 24d \big/ \left(n^3 - n\right), \text{ якщо } n \text{ непарне,} \\ 1 - 24d \big/ \left(n^3 - 4n\right), \text{ якщо } n \text{ парне;} \end{cases}$$

де d – число циклів довжини 3. Цю величину можна використовувати в якості оцінки компетентності експерта при експертизах типу Е5.

Рангова кореляція. Нехай $\langle i_1,...,i_n \rangle$, $\langle j_1,..., j_n \rangle$ – два нестрогих ранжування. Покладемо $a_{st} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i_s = i_t, \\ 1, \text{ якщо } i_s < i_t, \\ -1, \text{ якщо } i_s > i_t; \end{cases}$ аналогічно визначимо величини b_{st} для 2-го ранжування.

Коефіцієнтом рангової кореляції Кендела називається величина:

$$t = \frac{\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{st} b_{st}}{n(n-1)/2}.$$

Якщо зафіксувати одне ранжування і розглядати всі $n!$ інших строгих ранжувань, то можна знайти частоту всіх можливих значень S (через S позначено чисельник). Якщо величина S, яка спостерігається, приймає значення S_0 таке, що випадкова поява величини S_0 малоймовірне, то гіпотеза про незалежність ранжувань відкидається. Якщо $P\{|S| \geq S_0\} < p_0$, то отриманий коефіцієнт t вважається значущим. Величину p_0 задають як рівень значущості.

Приклад 1.9. Проведена експертиза з оцінки технологічного процесу виплавлення сталі в конверторі. Заданий список із шести показників, що впливають на процес. Десять експертів здійснили ранжування показників за важливістю. Результати їх роботи приведені в табл. 1.20. Розрахувати коефіцієнт конкордації та визначити статистичну значимість ранжування.

Табл. 1.20. Результати експертів ранжування показників

Показники	Номери експертів									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Шум	6	1	6	6	6	6	4	5	6	6
Колір футеровки	4	5	4	5	5	3	5	6	4	5
Колір полум’я	2	2	2	3	3	2	1	1	1	2
Колір диму	1	4	3	2	2	4	3	3	3	3
Якість диму	3	3	1	1	1	1	2	2	2	1
Іскри	5	6	5	4	4	5	6	4	5	4

Розв’язання. Знаходимо суми рангів:

$r_1 = 52$, $r_2 = 46$, $r_3 = 19$, $r_4 = 28$, $r_5 = 17$, $r_6 = 48$.

Знаходимо $r_{i\,cp}$ за формулою:

$$r_{i\,cp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{n} = \frac{N \cdot (n+1)}{2} = 35.$$

Використовуючи знайдені значення, знаходимо коефіцієнт конкордації за формулою:

$$W = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[r_i - \frac{1}{2} \cdot N \cdot (n+1) \right]^2}{N^2 \cdot \left(n^3 - n \right)} = 0,69 .$$

3. Алгебраїчний метод

Суть алгебраїчних методів обробки експертної інформації полягає у введенні деякої відстані між оцінками. Задача полягає у співставлені системі нестрогого ранжування. Для цього використовується експертиза Е6: Ω – множина всіх нестрогих ранжувань n об'єктів; $\Omega_e = \Omega$; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній. Відображення φ визначається наступним чином. Результуюча оцінка A_0 знаходиться за формулою:

$$A_0 = Arg \min_{A \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} d\left(A, A^i\right),$$

де d – відстань між ранжуваннями.

Ранжування (тобто елементи Ω) будемо задавати матрицями $A = \left(a_{i,j}\right)$, в яких $a_{i,j} = 1$ тоді і тільки тоді, коли i-ий об'єкт передує j-му; якщо об'єкти i та j рівноцінні, то $a_{i,j} = 0$; крім того, $a_{i,i} = 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$; $a_{i,j} = 1 \Rightarrow a_{j,i} = -1$. Будемо говорити, що ранжування C знаходиться *між ранжуваннями A і B*, якщо $a_{i,j} \le c_{i,j} \le b_{i,j}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$ або $a_{i,j} \ge c_{i,j} \ge b_{i,j}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Відстань d між ранжуваннями вводиться аксіоматично:

1) $d(A,B) \ge 0$, причому $d(A,B) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = B$.

2) $d(A,B) = d(B,A)$.

3) $d(A,B) + d(B,C) \ge d(A,C)$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли B знаходиться між A і C.

4) Відстань d інваріантна щодо позначень.

5) Якщо два ранжування відрізняються один від одного тільки на частині об'єктів, то відстань між вихідними ранжуваннями дорівнює відстані між ранжуваннями тільки цих об'єктів.

6) Мінімальна додатна відстань між ранжуваннями дорівнює одиниці.

Аксіоми 1)-6) однозначно визначають відстань $d(A,B)$ при будь-яких ранжуваннях $n \geq 2$, яка визначається формулою:

$$d(A,B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{i,j} - b_{i,j} \right|.$$

Ранжування A_0 називається *медіаною Кемені-Снелла* ранжувань $A^1,...,A^N$. Поряд з медіаною Кемені-Снелла в якості групової думки використовують ранжування:

$$A_0 = \underset{A \in \Omega}{Arg \min} \sum_{i=1}^{N} d^2\left(A, A^i\right),$$

яку називають *середнім значенням*.

Приклад 1.10. Трьома експертами впорядковані три об'єкти і отримано ранжування у вигляді $A = \langle x, y, z \rangle$, $B = \langle x, y, z \rangle$, $C = \langle y, x, z \rangle$, яким відповідають матриці:

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити відстані між ранжуваннями та знайти середнє значення.

Розв'язання. Користуючись виразом $d(A,B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij} - b_{ij} \right|$, обчислемо відстані: $d(A,B) = 0$, оскільки $a_{ij} = b_{ij}$ $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$, $d(A,C) = d(B,C) = 2$.

Якщо взяти в якості медіани ранжування *A* або *B*, то сума відстаней від неї до всіх ранжувань дорівнює 2. Якщо взяти будь-яке інше ранжування, то сума відстаней від неї до всіх інших виявиться більше. Наприклад, для ранжування $D = \langle x, z, y \rangle$ матриця має вигляд:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

відстані $d(A,D)=d(B,D)=2,\ d(C,D)=4$. Сума відстаней від D до вихідних ранжувань A, B, C дорівнює 8.

1.3.5. Методи шкалування

Методи шкалування в найпростішому випадку використовуються в експертизах наступного типу. Експерти оцінюють попарні відмінності між об'єктами, вказуючи відповідні числа. Задача полягає у співставленні кожному об'єкту точки простору E_r, а всій системі, що складається з n об'єктів, n точок простору E_r так, щоб відстані в E_r між ними були достатньо близькі до вказаних експертами чисел. Розв'язком задачі оцінювання в цьому випадку є вектор довжини nr. Для його отримання використовується експертиза E7: $\Omega = E = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} E_r$; $\Omega_e = E_{c_n^2}$; L – довільне; Q – довільне. Відображення f має вид: $f = qy$, де ψ – довільна композиція функцій вибору $C_1,...,C_N$. Тут в якості множини допустимих оцінок Ω взято $E = \bigcup\limits_{r=1} E_r$, оскільки в багатьох методах розмірність r наперед не вказується; $\Omega_e = E_k$, де $k = C_n^2$, оскільки експерти задають матрицю попарних відмінностей n об'єктів. Різним методам відображення q відповідають різні методи шкалування. Відображення q задається не формулами, а у вигляді алгоритмів, що співставляють матриці відмінностей D точку з E. У всіх випадках *задача багатомірного метричного шкалування* полягає в наступному. Задана симетрична матриця відмінностей $D=(D_{ij})$ між n об'єктами $A_1,...,A_n$. Потрібно знайти координати точок $a^i \in E_r$, що співставляються об'єктам A_i так, щоб матриця $X=(x_{ij})$ відстаней між цими точками в E_r була якомога ближча до вихідної матриці відмінностей D у розумінні деякого наперед обраного критерію. Якщо критерій перетворюється в нуль, то кажуть, що задача має точний розв'язок.

1. Метод простої ординації

Нехай $a^1,...,a^n$ – точки в просторі E_n, що відповідають об'єктам $A_1,...,A_n$. В якості A_1 і A_2 виберемо об'єкти, відстань D_{ij} між якими у вихідній матриці D максимальна. Співставимо їм точки a^1 і a^2 за правилом $a_1^1=0,\ a_1^2=D_{ij},\ a_i^1=a_i^2=0\ \left(i=\overline{2,n}\right)$. Отримані точки містяться в підпросторі E_1, що утворений першою віссю E_n. Нехай E_r – r-мірний простір, утворений осями з номерами $1,...,r$, в якому вже знайдені точки $a^1,a^2,...,a^{r+1}$. У цих точках в E_n всі координати, починаючи з $(r+1)$-ї, дорівнюють нулю. Для знаходження проекцій інших точок $a^{r+2},...,a^n$ в E_r, зафіксуємо $k>r+1$. Нехай проекція a^k в E_r має координати $a_1^k,...,a_r^k$, які поки що невідомі. Позначимо через h_k відстань a^k і підпростором E_r. Тоді умова рівності відстані між точками a^j і a^k і відстані D_{jk} між відповідними об'єктами має вигляд: $D_{jk}^2=h_k^2+\sum\limits_{i=1}^{r}\left(a_i^j-a_i^k\right)^2\ \left(j=\overline{1,r+1}\right)$, звідки: $h_k^2=D_{jk}^2-\sum\limits_{i=1}^{r}\left(a_i^j-a_i^k\right)^2\ \left(j=\overline{1,r+1}\right)$. Ліва частина не залежить від j. Прирівнюючи праві частини при j і при $j+1$, отримаємо систему r рівнянь відносно r невідомих $a_1^k,...,a_r^k$: $D_{jk}^2-\sum\limits_{i=1}^{r}\left(a_i^j-a_i^k\right)^2=D_{j+1k}^2-\sum\limits_{i=1}^{r}\left(a_i^{j+1}-a_i^k\right)^2\ \left(j=\overline{1,r}\right)$. Після перетворень матимемо: $\sum\limits_{i=1}^{r}a_i^k\left[2\left(a_i^j-a_i^{j+1}\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{r}\left[\left(a_i^j\right)^2-\left(a_i^{j+1}\right)^2\right]+D_{j+1k}^2-D_{jk}^2\ \left(j=\overline{1,r}\right)$. Розв'язавши її при $k=\overline{r+2,n}$, знайдемо проекцію точки a^k в E_r і знайдемо h_k при $k=\overline{r+2,n}$. Покладемо $a_{r+1}^k=h_k$. Виберемо об'єкт A_j такий, що $h_j=\max\limits_{k=\{r+2,...,n\}}h_k$. Співставимо йому у просторі E_n точку $a^j=\left\langle a_1^j,...,a_r^j,h_j,0,...,0\right\rangle$. Перенумеруємо об'єкти $A_{r+2},...,A_n$ так, щоб вибраний об'єкт мав номер $r+2$. Таким чином, отримаємо координати точки a^{r+2} і проекції точок $a^{r+3},...,a^n$ у просторі E_{r+1}.

Покладемо $r = r + 1$ і підрахуємо суму $S_1 = \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \sum_{k=1}^{r} \left(a_k^i - a_k^j \right)^2$ попарних відстаней між проекціями точок $a^1, \ldots, a^n$ в E_r. Введемо критерій $1 - S_1 / S$, де $S = \sum_{i<j} D_{ij}^2$. Якщо значення критерію менше наперед заданої величини ε, то обчислення координат точок припиняють і образами об'єктів $A_1, \ldots, A_n$ вважають проекції точок $a^1, \ldots, a^n$ в E_r. У результаті побудовано відображення q: $\Omega_e \to \Omega$.

2. Метод трійок

Покладемо $b_{jk}^i = \left(D_{ij}^2 + D_{ik}^2 - D_{jk}^2 \right) / 2 \quad \left(i, j, k = \overline{1, n} \right)$. Введена таким чином величина b_{jk}^i є добутком векторів з точки a^i в a^j і a^k, де точки $a^1, \ldots, a^n$ – образи об'єктів $A_1, \ldots, A_n$, а матриця $B^i = \left(b_{jk}^i \right)$ є матрицею попарних скалярних добутків векторів, проведених з точки a^i в точки a^j і a^k. Властивості матриць B^i визначають існування точного розв'язку задачі метричного шкалування і мінімальну розмірність простору E_r, при якій існує точний розв'язок.

Теорема 1.6.

1. Якщо матриця $B^i \left(i \in \{1, \ldots, n\} \right)$ є додатно напіввизначеною, то задача метричного шкалування має точний розв'язок.

2. Мінімальна розмірність $r = \min_i r_i$, де r_i – ранг матриці B^i.

3. В якості образів об'єктів $A^s \left(s = \overline{1, n}; s \neq i \right)$ в просторі E_r можна взяти точки $a^s = \left\langle a_1^s, \ldots, a_r^s \right\rangle \left(s = \overline{1, n} \right)$ такі, що $B^i = X \cdot X^T$, $X = \left(x_{pq} \right)$, де $x_{pq} = a_q^p \quad \left(p = \overline{1, n};\ p \neq i;\ q = \overline{1, r} \right)$ і $a_l^i = 0 \quad \left(l = \overline{1, r} \right)$. (Знак T означає транспонування).

Частина 3 теореми дозволяє побудувати алгоритм, що задає відображення q: $\Omega_e \to \Omega$.

3. Нелінійні методи

Нелінійні методи використовуються для матриць D, для яких не вдається побудувати лінійне відображення q в просторі достатньо малої розмірності із збереженням потрібної точності. В основі таких методів покладені ітеративні процедури. Вибирають точки $a^1,...,a^n \in E_r$. На кожній ітерації зміщують точки $a^1,...,a^n$ так, щоб наблизити матрицю відстаней між ними до вихідної матриці відмінностей D у розумінні заданого критерію. Зокрема, використовують критерії виду:

$$S_{p,q} = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^{s}\left(D_{ij} - x_{ij}\right)^2; \quad s = \begin{cases} p, & \text{якщо } x_{ij} < D_{ij}, \\ q, & \text{якщо } x_{ij} \geq D_{ij}, \end{cases}$$

де p і q – довільні дійсні числа. Покладемо $q = -p$ і позначимо $S_p = S_{p,-p}$. При мінімізації критерію S_{-1} точність наближення елементів D_{ij} матриці D залежить від їх відносної величини: менші D_{ij} відображаються точніше. При мінімізації критерію S_1 точніше відображаються більші значення. З врахуванням цього спочатку використовують критерій S_{-1}, а потім – критерій S_1.

4. Неметричне багатомірне шкалування

Розглянемо матрицю відмінностей D. Впорядкуємо за зростанням n^2 чисел, що є елементами матриці D, і позначимо отриманий порядок через $r(A)$. Відобразимо об'єкти A_i в просторі E_r і впорядкуємо за зростанням n^2 чисел, що є елементами матриці відстаней між точками a^i $(i = 1,...,n)$; отриманий порядок позначимо через $r(a)$.

Задача *неметричного багатомірного шкалування* полягає в тому, щоб побудувати відображення q у просторі мінімальної розмірності так, щоб $r(a) = r(A)$. Для цього роблять наступні операції:

1) Визначають ранжування $r(A)$ і нормують елементи матриці D так, що мінімальний дорівнює нулю, а максимальний – одиниці.

2) Розміщують n точок в n вершинах правильного (n–1)-мірного симплекса, центр якого знаходиться у початку координат, а ребра мають довжи-

ну 1. Координати *n* точок $a^1,...,a^n$ в $(n-1)$-мірному просторі обчислюють за формулами:

$$a^i_{2q-1} = \cos\left[2q(i-1)p/n\right]\big/\sqrt{n}\ , \quad a^i_{2q} = \sin\left[2q(i-1)p/n\right]\big/\sqrt{n}\ ,$$

де $q = \overline{1,\left[(n-1)/2\right]}$. Для парного *n* проекція на (*n*–1)-у вісь $a^i_{n-1} = (-1)^{i-1}\big/\sqrt{2n}$.

3) Для побудови точок обчислюють ранжування $r(a)$ і порівнюють її з $r(A)$. Якщо $r(a) = r(A)$, то обчислення припиняють. В протилежному випадку нормують матрицю відстаней *X* між точками a^i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ так само, як матрицю *D*. Елементи пронормованих матриць позначають через $\tilde{D}_{ij}$ і $\tilde{x}_{ij}$ відповідно.

4) Знаходять нові значення координат точок a^i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ за формулами:

$$\hat{a}^i_k = a^i_k + \Delta a^i_k \ \left(k = \overline{1,n-1}\right),$$

де $\Delta a^i_k = \sum\limits_{j\neq 1} P^k_{ij} + R^k_{ij}$, $P^k_{ij} = \dfrac{a\left[\tilde{D}_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right]\left(a^j_k - a^i_k\right)}{x_{ij}}$, $R^k_{ij} = \dfrac{b\left[\tilde{D}_{ij} - \bar{D}_{cp}\right]\left(a^k_j - a^k_i\right)}{D_{ij}}$,

$$\bar{D}_{cp} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{D}_{ij}\big/n^2\ ,\ a = 0{,}2\ ,\ b = 0{,}05\ .$$

5) Приймають $a^i = \hat{a}^i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, обчислюють ранжування $r(a)$ і повторюють приведені операції.

5. Одномірне шкалування

Введемо експертизу Е8: $\Omega = E_n$; Ω_e – така ж, як у Е5; *L* – експерти ізольовані; *Q* – зворотній зв’язок відсутній. Для побудови відображення φ здійснюють наступні операції:

1) обчислюють матрицю $P = \sum\limits_{j=1}^{N} A^j\big/N$, де A^j – ранжування, надане *j*-им експертом. Елемент p_{ij} матриці *P* інтерперетують як ймовірність переваги *i*-го об’єкта *j*-му;

2) знаходять Z_{ij} за формулою:

$$G\left(Z_{ij}\right) = p_{ij} = \int_{-\infty}^{Z_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-t^2/2} dt \qquad (1.7)$$

з використанням таблиць нормального розподілу, виходячи з відомих p_{ij} (величини Z_{ij} вимірюються в одиницях стандартного відхилення);

3) утворюють матрицю $Z = \left(Z_{ij}\right)$. Підраховують суму оцінок $Z_i = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}$ і середнє значення $\overline{Z}_i = Z_i / n$. Величину $\overline{Z}_i$ приймають за шукану оцінку об'єкта A_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

4) визначають величини $\overline{P}_i = G\left(\overline{Z}_i\right)$ за формулою (1.7), які нормують за формулою $P_i^* = \overline{P}_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \overline{P}_j$. P_i^* – називають *показниками відносної важливості об'єктів*;

5) здійснюють перевірку на несуперечливість. Для цього за формулою (1.7) знаходять $\overline{p}_{ij} = G\left(\overline{Z}_i - \overline{Z}_j\right)$ і обчислюють різниці Δ_{ij} між отриманими значеннями $\overline{p}_{ij}$ і вихідними p_{ij}. Визначають середнє відхилення $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \left|\Delta_{ij}\right| \Big/ n\left(n-1\right)$. Якщо воно мале, то це свідчить про несуперечливість отриманих експертних ранжувань.

Приклад 1.11. Десять спеціалістів здійснили оцінку відносної важливості чотирьох параметрів літака. Результати їх роботи наведені в табл. 1.21. Користуючись алгоритмом одномірного шкалування визначити показник відносної важливості параметрів та здійснити перевірку на несуперечливість.

Табл. 1.21. Результати експертизи

Парамет-ри	Експерти										Сума рангів	Середній ранг
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
S	3	1	3	1	3	3	3	3	2	2	24	2,4
R	2	2	1	2	1	1	2	4	4	1	20	2,0
C	1	3	2	3	2	2	4	1	1	3	22	2,2
P	4	4	4	4	4	4	1	2	3	4	34	3,4

Розв'язання. Сформуємо матрицю *A* розміру 4×4, в якій вказано число випадків, коли один параметр важливіший іншого (табл. 1.22).

Табл. 1.22. Оцінка важливості параметрів

	S	*R*	*C*	*P*
S	–	4	4	8
R	6	–	7	7
C	6	3	–	9
P	2	3	1	–

Розділивши елементи матриці *A* на 10, отримаємо матрицю *P*. З її елементами здійснимо необхідні відповідно до методу одномірного шкалування операції. Матриця *Z*, величини Z_i і оцінки $\overline{Z}_i$ наведені у табл. 1.23.

Табл. 1.23. Обчяислені матриця *Z*, величини Z_i і оцінки $\overline{Z}_i$

Параметр *i*	Параметр *j*					
	S	*R*	*C*	*P*	Z_i	$\overline{Z}_i$
S	0	–0,25334	–0,25334	0,84161	0,33493	0,08373
R	0,25334	0	0,52441	0,52441	1,30216	0,35554
C	0,25334	–0,52441	0	1,28155	1,01048	0,25262
P	0,84161	–0,52441	–1,28155	0	–2,64757	–0,66189

Величини, необхідні для розрахунку відносної важливості параметрів, наведені в табл. 1.24.

Табл. 1.24

Параметр i	$\overline{Z}_i$	$\overline{P}_i = G(\overline{Z}_i)$	Нормована відносна важливість P_i^*
S	0,08373	0,53336	0,2647
R	0,32554	0,62761	0,3115
C	0,25262	0,59972	0,2977
P	–0,66189	0,25403	0,1261

Здійснимо перевірку на несуперчливість. Необхідні дані зібрані в табл. 1.25. Середнє відхилення в даному випадку дорівнює 0,45482/6=0,0758. Найбільше за абсолютною величиною відхилення p_{ij} від $\overline{p}_{ij}$ дорівнює 0,17094; це свідчить про несуперечливість ранжувань.

Табл. 1.25

$\overline{Z}_i - \overline{Z}_j$	$\overline{p}_{ij}$ розрахункове	p_{ij} вихідне	відхилення Δ_{ij}
$\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2 = 0,08373 - 0,32554 = -0,24181$	0,40447	0,400	0,0047
$\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3 = 0,08373 - 0,25262 = -0,16889$	0,43297	0,400	0,032295
$\overline{Z}_1 - \overline{Z}_4 = 0,08373 - (-0,6189) = 0,74562$	0,77205	0,800	–0,02795
$\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3 = 0,32554 - 0,25262 = 0,07292$	0,52906	0,700	–0,17094
$\overline{Z}_2 - \overline{Z}_4 = 0,32554 - (-0,66189) = 0,98743$	0,83828	0,700	0,13828
$\overline{Z}_3 - \overline{Z}_4 = 0,25262 - (-0,66189) = 0,91451$	0,81977	0,900	–0,08023

1.3.6. Постановка задач багатокритеріальної оптимізації

У задачах оптимізації практично використовують функції вибору з обмеженого набору. До їх числа з тих, що раніше розглядались потрібно віднести паретівську, сукупно екстремальну, скалярну, а також нормальні функції вибору, породжені мажорантними, лексикографічними відношеннями.

Розглянемо задачу багатокритеріальної оптимізації у такій постановці: $y_i = f_i(x) \to \max$, $i = \overline{1,m}$; $x \in X \subseteq E_n$, де X – множина допустимих розв'язків (альтернатив), f_i – цільові функції. Вектор $y(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$ будемо називати оцінкою допустимого розв'язку (альтернативи) x. Множину оцінок, яка відповідає всім альтернативам будемо позначати через $Y = \{y \in E_m | y = y(x), x \in X\}$ і називатимемо множиною допустимих оцінок. Простір n-вимірних векторів $x \in E_n$ будемо називати простором розв'язків (альтернатив, планів, параметрів), простір m-вимірних векторів $y \in E_m$ називатимемо простором критеріїв (оцінок).

Проблема розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації полягає у заданні деякого правила вибору на множині ефективних альтернатив (оцінок).

Один шлях розв'язку з використанням правила вибору полягає в тому, що спочатку визначають множину ефективних альтернатив (оцінок), після чого з цієї отриманої множини вибирається елемент, який відповідає правилу вибору.

Другий шлях не вимагає попереднього визначення всієї множини ефективних альтернатив (оцінок). Він полягає у визначенні спочатку множини елементів, що задовольняють правило вибору, а потім у виділенні з них ефективного елемента (елементів).

Перший спосіб застосовується лише у простих випадках, оскільки побудова множини ефективних альтернатив є досить складною задачею. Другий спосіб є основним, але він вимагає, щоб перетин множини ефективних альтернатив і множини, яка виділена на підставі правила вибору, була не порожньою.

Розглянемо алгоритми розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації, які найчастіше використовуються.

1.3.7. Метод ідеальної точки

Визначимо функцію вибору C_I на множині Y наступним чином. Покладемо $a_i = \max\limits_{y_i \in Y_i} y_i$, $i = \overline{1,m}$. Таким чином, a_i є максимально можливим значенням по i-му критерію. Точка $y \in Y$, така, що $y_i = a_i$, є розв'язком звичайної однокритеріальної задача оптимізації. Припускається, що Y – замкнута обмежена множина в E_m, тому розв'язки задачі існують.

Покладемо $a = \langle a_1, ..., a_m \rangle$. Точка a називається *ідеальною*. Суть назви пов'язана з тим, що такі точки оптимальні відразу за всіма критеріями: отримати більше значення ні по одному критерію неможливо. Очевидно, що для всіх $y \in Y$ справедливо $a\ P\ y$. Як правило, ідеальна точка a не належить Y. Правило вибору у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка буде найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Задамо для всіх точок $y \in Y$ функцію, що є відстанню між точками y і a:

$$r(y,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - a_i)^2}$$

Введені поняття дозволяють задати функцію вибору C_I формулою:

$$C_I(Y) = \arg\min_{Y} r\left(y, a(Y)\right),$$

де $a(Y)$ – точка, ідеальна для множини Y.

Розв'язок загальної задачі оптимізації, в якій принцип оптимальності виражається функцією C_I, зводиться до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації:

$$r(y,a) \to \min_{Y}.$$

Твердження 1.35. *Нехай Y опукла. Тоді $C_I(Y)$ складається з однієї точки.*

Для довільних множин $C_I(Y)$ може складатись з декількох точок. Функція вибору C_I володіє наступною властивістю:

Теорема 1.7. *Для будь-якої* $Y \subseteq E_m$ *має місце включення* $C_I(Y) \subseteq \Omega^P$.

Функції вибору C на E_m, для яких виконується включення $C \subseteq C^P$, по аналогії з бінарними відношеннями називають *раціональними*. Функція C_I є раціональною.

Метод ідеальної точки використовують і при інших функціях відстані. Нехай $a, b \in E_m$. Покладемо:

$$r_s(a,b) = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i|^s}.$$

При $s = 2$ отримаємо звичайну евклідову відстань. При $s = 1$ маємо:

$$r_1(a,b) = \sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i|.$$

При $s = \infty$ отримаємо *рівномірну метрику*:

$$r_\infty(a,b) = \max_i |a_i - b_i|.$$

Твердження 1.36. *Нехай* $Y \subseteq E_m$. *Тоді для будь-якого* $s \in [1, \infty)$ *виконується* $C_I^s(Y) \subseteq \Omega^P$.

Приклад 1.12. Нехай $\Omega = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, $x^1 = \langle 4,0 \rangle$, $x^2 = \langle 3,1 \rangle$, $x^3 = \langle 2,2 \rangle$, $x^4 = \langle 1,3 \rangle$, $x^5 = \langle 0,4 \rangle$. Методом ідеальної точки знайти розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації.

Розв'язання. Розв'язок загальної задачі оптимізації, в якій принцип оптимальності виражається функцією вибору $C_{\text{опт}} = C_I(X) = \arg\min\limits_X r(x, a(X))$, зводиться до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації $r(x,a) \to \min\limits_\Omega$. Ідеальною точкою буде $a(\Omega) = \langle 4,4 \rangle$ і $C_I(\Omega) = \{x^3\}$. Геометрична інтерпретація даного прикладу показана на рис. 1.9. Тут $r(x^1,a) = 4$, $r(x^2,a) = \sqrt{10}$, $r(x^3,a) = 2\sqrt{2}$, $r(x^4,a) = \sqrt{10}$, $r(x^5,a) = 4$, Коло з центром в

$(4,4)$ радіуса $2\sqrt{2}$ проходить через точку $(2,2)$, найближчу до $(4,4)$. Таким чином, точка $x^3 = (2,2)$ є розв'язком вихідної задачі.

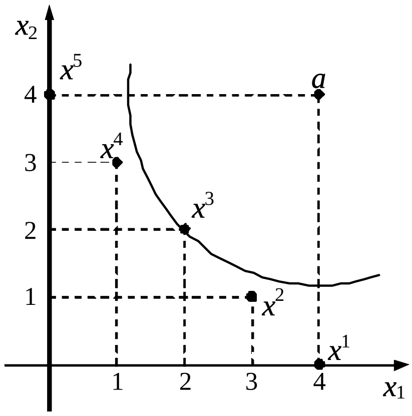

Рис. 1.9

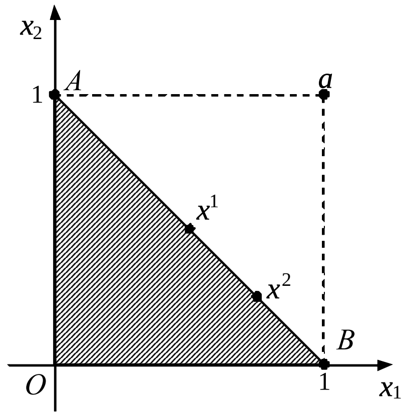

Рис. 1.10

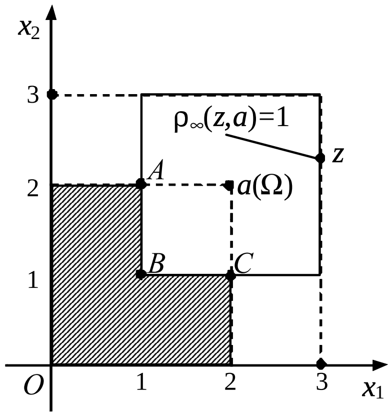

Рис. 1.11

Приклад 1.13. Нехай Ω співпадає з трикутником *OAB* (рис. 1.10), $|OA| = |OB| = 1$. Знайти розв'язок задачі оптимізації при метриках $r_1(x, a(\Omega))$ та $r_2(x, a(\Omega))$. Зробити висновок про вплив метрики на значення функції вибору.

Розв'язання. Вибір метрики r_1 приводить до того, що множина $C_I^1(\Omega)$ для опуклої множини Ω складається з цілого відрізка $[A, B]$. Отримайте самостійно розв'язок задачі оптимізації при метриці $r_2(x, a(\Omega))$ та зробіть висновок про вплив метрики на значення функції вибору.

Приклад 1.14. Нехай Ω має вигляд, показаний на рис. 1.11. Знайти $C_I^1(\Omega)$, $C_I^2(\Omega)$, $C_I^\infty(\Omega)$.

Розв'язання. Отримайте самостійно розв'язок задачі оптимізації. У вас має вийти $C_I^\infty(\Omega) = [A, B] \cup [B, C]$.

1.3.8. Вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв

Тут правило вибору враховує взаємні співвідношення (типу більше й менше) між оцінками альтернатив і не враховує величини різниць оцінок за критеріями.

Розглянемо альтернативи x, y і визначимо число критеріїв, за якими y має більші оцінки, ніж x. Можна знайти y^*, для якого це число максимальне, і задати числову функцію на множині альтернатив, яка приймає значення, що відповідають знайденим максимальним числам. За допомогою такої функції можна побудувати функцію вибору C^K, яка враховує число домінуючих критеріїв. Нехай $q(x,y)$ – число критеріїв, за якими варіант y переважає варіант x. Покладемо

$$Q_Y(x) = \max_{y\in Y} q(x,y).$$

Величина $Q_Y(x)$ називається *домінуючим показником варіанту x при пред'явлені Y*. Значення функції вибору визначаються за фомулою:

$$C^K(Y) = \left\{ y\in Y \middle| \; Q_Y(y) = \min_{y\in Y} Q_Y(x) \right\}.$$

Величину $Q_Y = \min_{y\in Y} Q_Y(x)$ називають *домінуючим показником множини Y*.

Справедливе наступне твердження.

Твердження 1.37. *Для $m=3$ або $C^K(Y)$ складається з єдиного елемента, що переважає всі інші хоча б за двома координатами, або (при відсутності такого елемента) $C^K(Y) = Y^P$.*

Функція вибору C^K "звужує" множину Парето Y^P.

Твердження 1.38. $C^K(Y) \subseteq Y^P$.

Важливою властивістю функції C^K є те, що вибір за нею не залежить від елементів Y, що не входять у множину Парето. Таким чином, вибір $C^K(Y)$ при різних Y однаковий, якщо множини Парето в них однакові.

Твердження 1.39. $C^K(Y) = C^K\left(Y^P\right)$.

Задача оптимізації, де принцип оптимальності виражається функцією C^K, може бути розв'язана за допомогою наступного алгоритму, що ґрунтується на твердженні 1.39.

Алгоритм 1. Побудова $C^K(Y)$.

1. Виділити з Y множину Y^P.

2. Занумерувати елементи множини Y^P: $x^1,...,x^r$.

3. Покласти $X = \varnothing$.

4. Покласти $Q = m$.

5. Покласти $i = 0$.

6. Покласти $i = i + 1$.

7. Порівняти i з r. Якщо $i > r$, перейти до кроку 19, в іншому випадку – до 8.

8. Покласти $Q_i == Q$.

9. Покласти $j = 0$.

10. Покласти $j = j + 1$.

11. Знайти число q координат, за якими x^j більше, ніж x^i.

12. Порівняти Q і q. Якщо $q > Q$, перейти до кроку 6, в іншому випадку – до кроку 13.

13. Покласти $Q_i = \max(q, Q_i)$.

14. Порівняти j з r. Якщо $j \neq r$, перейти до кроку 10, в іншому випадку – до кроку 15.

15. Порівняти Q_i і Q. Якщо $Q_i < Q$, перейти до кроку 16, в іншому випадку – до кроку 18.

16. Покласти $Q = Q_i$.

17. Покласти $X = \{x^i\}$ і перейти до кроку 6.

18. Покласти $X = X \cup \{x^i\}$ і перейти до кроку 6.

19. Покласти $C^K(Y) = X$.

Нехай $Y \subseteq E_m$. Занумеруємо варіанти з Y: $\{x^1,...,x^N\}$ і співставимо множині Y матрицю A_Y розміром $N \times N$ з елементами a_{ij} наступним чином: $a_{ij} = q\left(x^i, x^j\right) \quad \left(i, j = \overline{1, N}\right)$.

Проілюструємо вибір C^K на Y, використовуючи матрицю A_Y. Для кожного *i* покладемо: $a_i = \max\limits_j a_{ij}$. Тоді:

$$C^K(Y) = \left\{ x^i \in Y \,\middle|\, i \in Arg \min_s a_s \right\}.$$

Таким чином, вибираються ті рядки матриці A_Y, максимальні значення елементів яких мінімальні. Таким чином, функція вибору C^K може бути використана в якості вираження принципу оптимальності при відсутності інформації про порівняльну важливість критеріїв. Вона враховує тільки взаємні співвідношення (типу більше-менше) між оцінками альтернатив з Y і не враховує абсолютні величини різниць оцінок за критеріями.

Приклад 1.15. Нехай $\Omega = \{x^1, ..., x^5\}$, $x^1 = \langle 1, 1, 5 \rangle$, $x^2 = \langle 3, 2, 4 \rangle$, $x^3 = \langle 4, 3, 2 \rangle$, $x^4 = \langle 7, 0, 1 \rangle$, $x^5 = \langle 2, 8, 0 \rangle$. Знайти $C^K(\Omega)$ та $C^P(\Omega)$.

Розв'язання. Підрахуємо $Q_\Omega(x^i)$ $(i = \overline{1,5})$. Для цього сформуємо матрицю *A* розміром 5×5 з елементами $a_{i,j} = q(x^i, x^j)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно формули:

$$Q_\Omega(x) = \max_{y \in \Omega} q(x, y)$$

маємо:

$$Q_\Omega(x^i) = 2 \ (i \neq 3),$$

$$Q_\Omega(x^3) = 1.$$

В силу виразу:

$$C^K(\Omega) = \{x \in \Omega \mid Q_\Omega(x) = \min_{z \in \Omega} Q_\Omega(z)\}$$

отримаємо:

$$C^K(\Omega)=\{x^3\}.$$

Разом з цим $C^P(\Omega)=\Omega$. Вибір $C^K(\Omega)$ вужчий вибору за відношенням Парето.

Приклад 1.16. Нехай $X_1=\{x^1,...,x^4\}$: $x^1=\langle 1;2;3;4\rangle$, $x^2=\langle 10;1;2;3\rangle$, $x^3=\langle 9;10;1{,}5;2{,}5\rangle$, $x^4=\langle 8{,}5;9{,}5;10;1{,}5\rangle$; $X_2=\{y^1,y^2\}$: $y^1=\langle 1;2;3;4\rangle$, $y^2=\langle 100;100;2{,}9;3{,}9\rangle$. Знайти $C^K(X_1)$, $C^K(X_2)$, $C^K(X_1\cup X_2)$.

Розв'язання. Знайдемо для початку $C^K(X_1)$. Підрахуємо $Q_{X_1}(x^i)$ $(i=\overline{1,4})$. Для цього сформуємо матрицю *A* розміром 4×4 з елементами $a_{i,j}=q(x^i,x^j)$:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\\1&2&3&0\end{pmatrix}.$$

Згідно формули:

$$Q_{X_1}(x)=\max_{y\in X_1}q(x,y)$$

маємо:

$$Q_{X_1}(x^i)=3\ \left(i=\overline{1,4}\right).$$

В силу виразу:

$$C^K(X_1)=\{x\in X_1\mid Q_{X_1}(x)=\min_{z\in X_1}Q_{X_1}(z)\}$$

отримаємо:

$$C^K(X_1)=X_1.$$

Знайдемо $C^K(X_2)$. Підрахуємо $Q_{X_2}(y^i)$ $(i=\overline{1,2})$. Для цього сформуємо матрицю *A* розміром 2×2 з елементами $a_{i,j}=q(y^i,y^j)$:

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}.$$

Згідно формули:

$$Q_{X_2}(x) = \max_{y \in X_2} q(x, y)$$

маємо:

$$Q_{X_2}(y^i) = 2 \ \left(i = \overline{1,2}\right).$$

В силу виразу:

$$C^K(X_2) = \{x \in X_2 \mid Q_{X_2}(x) = \min_{z \in X_2} Q_{X_2}(z)\}$$

отримаємо:

$$C^K(X_2) = X_2.$$

Знайдемо $C^K(X_1 \cup X_2)$. Так як $X_1 \cup X_2 = \left\{x^1, x^2, x^3, x^4, y^2\right\}$, то підраховуємо лише $Q_{X_1 \cup X_2}(x^1, x^2, x^3, x^4, y^2)$. Для цього сформуємо матрицю *A* розміром 5×5:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно формули:

$$Q_{X_1 \cup X_2}(x) = \max_{y \in X_1 \cup X_2} q(x, y)$$

маємо:

$$Q_{X_1 \cup X_2}(x^1) = Q_{X_1 \cup X_2}(x^4) = 3,$$

$$Q_{X_1 \cup X_2}(x^2) = Q_{X_1 \cup X_2}(x^3) = 4,$$

$$Q_{X_1 \cup X_2}(y^2) = 2.$$

В силу виразу:

$$C^K(X_1 \cup X_2) = \{x \in X_1 \cup X_2 \mid Q_{X_1 \cup X_2}(x) = \min_{z \in X_1 \cup X_2} Q_{X_1 \cup X_2}(z)\}$$

отримаємо:

$$C^K(X_1 \cup X_2) = \{y^2\}.$$

1.3.9. Метод послідовних поступок

Особливістю методу є те, що цільові функції багатокритеріальної задачі мають бути попередньо впорядковані за зменшенням важливості відповідних критеріїв оптимальності, після чого вибір розв'язку задачі виконується шляхом виконання багатокритеріальної процедури, у процесі виконання якої на черговому i-му кроці відшуковується максимальне значення i-ї за важливістю цільової функції $y_i = f_i(x)$ на множині альтернатив, які задовольняють вимоги ОПР щодо більш важливих критеріїв. Потім ОПР визначає значення поступки Δf_i, яка показує величину ефекту за i-м критерієм, якою можна поступитися з метою поліпшення показників за менш важливими критеріями.

Діалогова процедура послідовних поступок складається з одного попереднього і $p-1$ основних кроків.

0-й крок. Критерії впорядковуються за зменшенням важливості (будемо вважати, що $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_p$).

1-й крок. Розв'язується однокритеріальна задача $y_1 = f_1(x) \to \max$, $x \in X \equiv G_1$ та визначається оптимальне значення y_1^* і оптимальний розв'язок $x^1 \in E(G_1)$. Далі обчислюється оцінка $y\left(x^1\right) = \left(f_1\left(x^1\right), \ldots, f_p\left(x^1\right)\right)$. У випадку, коли ОПР не задовольняє отримана оцінка, він визначає величину поступки Δf_1 за першим критерієм, на яку може погодитися з метою поліпшення показників за іншими критеріями.

i-й крок. Визначається множина $G_i = \left\{x \in G_{i-1} \middle| \; f_{i-1}(x) \geq f_{i-1}\left(x^{i-1}\right) - \Delta f_{i-1}\right\}$, шляхом розв'язку задачі $y_i = \underset{x \in G_i}{f_i(x)} \to \max$, визначається найкраще значення чергової за важливістю i-ї цільової функції y_i^*. На множині оптимальних планів цієї задачі вибирається деяка ефективна альтернатива x^i і обчислюється оцінка $y\left(x^i\right) = \left(f_1\left(x^i\right), \ldots, f_i\left(x^i\right), \ldots, f_p\left(x^i\right)\right)$.

Якщо ОПР не задовольняють значення цільових функцій $f_{i+1}, \ldots, f_p$ (у протилежному випадку альтернатива x^i вибирається як розв'язок багатокритеріальної задачі), то визначається значення поступки, на яку згоден ОПР за i-м критерієм для поліпшення показників за менш важливим критерієм.

1.3.10. Метод послідовного вводу обмежень

Метод складається з послідовності кроків, на кожному з яких визначається максимально можливе значення усіх цільових функцій, які досягаються на відповідних виявлених перевагами ОПР підмножинах альтернатив, розраховуються "ваги" критеріїв, знаходиться альтернатива, яка максимізує зважену суму цільових функцій. Потім ОПР, якшо знайдена альтернатива не відповідає його перевагам, виділяє критерій з найменш задовільним, на його думку, значенням цільової функції і вказує рівень, при якому значення показника за цим критерієм можливо було б вважати задовільним.

i-й крок. Розраховуються оптимальні значення $f_k^{*(i)} = \max\limits_{x \in D_1} f_k(x);\ k = \overline{1,p};$ $D_1 \equiv X$; за кожним критерієм окремо і формується вектор $z^i = \left(f_1^{*(i)}, \ldots, f_p^{*(i)}\right)$. Далі визначаються значення вагових коефіцієнтів $a_1^i, \ldots, a_p^i$ за одним із способів, викладених нижче.

1. Складається матриця $s = \left(s_{k,l}\right)_{k,l=\overline{1,p}}$, кожна пара симетричних елементів якої $\left(s_{k,l}, s_{l,k}\right)$ характеризує відносну важливість k-го критерію порівнюючи з l-м. Значення пари елементів вибирається так: $(8,1)$ – при значній перевазі важливості k-го критерію порівнюючи з l-м; $(4,1)$ – при значно більшій перевазі; $(2,1)$ – при великій перевазі; $(1,1)$ – при рівноцінності критеріїв. Тепер $a_k = \dfrac{\sum\limits_{l}^{p} s_{k,l}}{\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{p} s_{k,l}},\ k = \overline{1,p}$.

2. Нехай $x^{i,l}$ – альтернатива, яка максимізує *l*-ту цільову функцію на множині D_i; $f_k^{i(\max)}$, $f_k^{i(\min)}$ – відповідно найкраще і найгірше значення *k*-ї цільової функції на цій множині. Далі обчислюються величини $d_k^i = \max\limits_{l=\overline{1,p}} \dfrac{f_k^{i(\max)} - f_k\left(x^{i,l}\right)}{f_k^{i(\max)} - f_k^{i(\min)}}$, $k=\overline{1,p}$, на підставі яких вагові коефіцієнти визначаються за формулою: $a_k^i = \dfrac{d_k^i}{\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^i}$, $k=\overline{1,p}$.

3. Цей спосіб відрізняється від попереднього тим, що тут розраховуються середні відносні відхилення $d_k^{i(-p)} = \dfrac{1}{p-1}\sum\limits_{l=1,l\neq k}^{p} \dfrac{f_k^{i(\max)} - f_k\left(x^{i,l}\right)}{f_k^{i(\max)} - f_k^{i(\min)}}$, $k=\overline{1,p}$, після чого вагові коефіцієнти визначаються аналогічно: $a_k^i = \dfrac{d_k^{i(cp)}}{\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^{i(cp)}}$, $k=\overline{1,p}$.

Продовжимо викладення методики послідовного вводу обмежень. У результаті розв’язку однокритеріальної задачі $F_a(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k^i f_k(x) \to \max$, $x \in D_i$ визначається альтернатива x^i та її оцінка $y^i = y\left(x^i\right)$. Далі аналізується оцінка y^i шляхом її зіставлення з “ідеальною” оцінкою z^i. Якщо оцінка y^i відповідає перевагам ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива x^i береться як розв’язок. Інакше вказується номер цільової функції $k(i)$, значення якої, на думку ОПР, найменш задоволено; визначається на яку величину треба поліпшити цю цільову функцію, тобто визначається рівень $x_{k(i)}$, при якому значення показника за відповідним критерієм можна було б вважати задовільним. Тепер формується нова підмножина альтернатив $D_{i+1} = \left\{x \in D_i :\ f_{k(i)}(x) \geq x_{k(i)}\right\}$ і робиться перехід на $(i+1)$-й крок.

1.3.11. Метод бажаної точки

Діалогова процедура методу є багатокроковим процесом, в якому на кожному кроці визначаються бажані значення цільових функцій на множині альтернатив, розраховується відповідний вектор вагових коефіцієнтів і здійснюється вибір ефективної альтернативи, для якої зважені відносні відхилення від найкращих значень дорівнюють один одному і мінімальні.

0-й крок. Розраховуються значення цільових функцій:

$$f_k^* = \max_{x \in X} f_k(x),\ h_k^* = \min_{x \in X} f_k(x),\ k = \overline{1, p}$$

і виконується монотонне перетворення цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_k(x) = \frac{f_k^* - f_k(x)}{f_k^* - h_k^*},\ k = \overline{1, p}.$$

i-й крок. ОПР аналізує діапазони зміни значень кожної з цільових функцій на множині альтернатив, отриманий на попередньому кроці розв'язок і вказує бажані значення цільових функцій x_k^i, $h_k^* \le x_k^i \le f_k^*$, $k = \overline{1, p}$.

Виконується перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_k^i = \frac{f_k^* - x_k^i}{f_k^* - h_k^*},\ k = \overline{1, p}.$$

Розраховуються вагові коефіцієнти цільових функцій:

$$r_k^i = \left(\prod_{j=1,\, j \ne k}^{p} w_j^i \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{p} \prod_{l=1, l \ne j}^{p} w_l^i \right),\ k = \overline{1, p}.$$

Розв'язується однокритеріальна задача:

$$t \to \min,\ x \in X,\ r_k^i w_k(x) \le t,\ k = \overline{1, p},$$

у результаті знаходиться ефективна альтернатива x^i. Розраховуються значення цільових функцій:

$$f_k^i = f_k\left(x^i\right),\ k = \overline{1, p}.$$

Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо до наступного кроку.

1.3.12. Тест для самоконтролю

I. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. Результуюча оцінка $\overline{x}$ у методі числових оцінок шукається за формулою:

а) $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot a_i\right)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

в) $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot a_i\right)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

б) $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\cdot a_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

г) $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot a_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

2. Ступінь узгодженості думок експертів s^2 у методі числових оцінок шукається за формулою:

а) $s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{x}-x_i\right)^2\cdot a_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

в) $s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{x}-x_i\right)\cdot a_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

б) $s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{x}-x_i\right)\cdot a_i\right)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$

г) $s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{x}-x_i\right)^2\cdot a_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

3. Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгого ранжування називається величина:

а) $W=\dfrac{12\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}\cdot N\cdot\left(n+1\right)\right]^2}{N^2\cdot\left(n^3-n\right)}$

в) $W=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}\cdot N\cdot\left(n+1\right)\right]^2}{N^2\cdot\left(n^3-n\right)}$

б) $W=\dfrac{2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}\cdot N\cdot\left(n+1\right)\right]^2}{N^2\cdot\left(n^3-n\right)}$

г) $W=\dfrac{6\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}\cdot N\cdot\left(n+1\right)\right]^2}{N^2\cdot\left(n^3-n\right)}$

4. Результуюча оцінка A_0 у алгебраїчному методі знаходиться за формулою:

а) $A_0=Arg\max\limits_{A\in\Omega}\sum_{i=1}^{N}d\left(A,A^i\right)$

в) $A_0=Arg\max\limits_{A\notin\Omega}\sum_{i=1}^{N}d\left(A,A^i\right)$

б) $A_0=Arg\min\limits_{A\in\Omega}\sum_{i=1}^{N}d\left(A,A^i\right)$

г) $A_0=Arg\min\limits_{A\notin\Omega}\sum_{i=1}^{N}d\left(A,A^i\right)$

5. Функція вибору C_I у методі ідеальної точки визначається за формулою:

а) $C_I(Y) = \arg\min_{Y} r\left(y, a(Y)\right)$ в) $C_I(Y) = \arg\max_{Y} r\left(y, a(Y)\right)$

б) $C_I(Y) = \arg\min_{Y} r^2\left(y, a(Y)\right)$ г) $C_I(Y) = \arg\max_{Y} r^2\left(y, a(Y)\right)$

6. Функція вибору C_I у методі вибору з урахуванням кількості домінуючих критеріїв визначається за формулою:

а) $C^K(Y) = \left\{ y \in Y \middle| \, Q_Y(y) = \min_{y \in Y} Q_Y(x) \right\}$ в) $C^K(Y) = \left\{ y \in Y \middle| \, Q_Y(y) = \max_{y \in Y} Q_Y(x) \right\}$

б) $C^K(Y) = \left\{ y \in Y \middle| \, Q_Y(y) = \min_{y \notin Y} Q_Y(x) \right\}$ г) $C^K(Y) = \left\{ y \in Y \middle| \, Q_Y(y) = \min_{y \notin Y} Q_Y(x) \right\}$

ІІ. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Загальна схема експертизи включає в себе параметри:

а) вихідну множину допустимих оцінок

б) множину допустимих оцінок для експертів

в) взаємодію між експертами

г) зворотній зв’язок в експертизі

д) функцію обробки

8. Під підготовкою експертизи розуміють:

а) попередню розробку схеми експертизи

б) підбір експертів

в) отримання від експертів інформації

г) обробку отриманої від експертів інформації

9. Під реалізацією експертизи розуміють:

а) попередню розробку схеми експертизи

б) підбір експертів

в) отримання від експертів інформації

г) обробку отриманої від експертів інформації

10. Метод ідеальної точки використовують при функціях відстані:

а) $r(y, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - a_i)^2}$ в) $r_s(a, b) = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)^s}$

б) $r_1(a, b) = \sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i|$ г) $r_\infty(a, b) = \max_{i} |a_i - b_i|$

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: Задача строгого ранжування відрізняється від нестрогого тим, що ____

____

2. Продовжіть: Ідеальна точка у методі ідеальної точки знаходиться ________

____

1.3.13. Завдання для самостійного виконання

1. (*Числові оцінки*). Десять експертів з однаковою вагою $a_i = 1$ $\left(i = \overline{1,10}\right)$ оцінюють величину *T*. Від них отримані наступні оцінки: $T_1 = 34$; $T_2 = 35$; $T_3 = 32$; $T_4 = 34$; $T_5 = 38$; $T_6 = 33$; $T_7 = 37$; $T_8 = 40$; $T_9 = 36$; $T_{10} = 35$. Знайти результуючу оцінку, ступінь узгодженості думок експертів, статистичну значимість одержаних результатів, якщо ймовірність помилки не перевищує $P_{пм} = 0,07$.

2. (*Строге ранжування*). Проведена експертиза з оцінки технологічного процесу виплавлення сталі в конверторі. Заданий список із шести показників, що впливають на процес. Десять експертів здійснили ранжування показників за важливістю. Результати їх роботи наведені в табл. 1.26.

Табл. 1.26. Результати експертизи

Показники	Номери експертів									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Шум	6	1	6	5	6	6	4	5	6	6
Колір футеровки	4	5	4	3	5	3	5	6	4	5
Колір полум’я	2	2	2	4	3	2	1	1	1	2
Колір диму	1	4	3	2	2	4	3	3	3	3
Якість диму	3	3	1	1	1	1	2	2	2	1
Іскри	5	6	5	6	4	5	6	4	5	4

Розрахувати коефіцієнт конкордації та визначити статистичну значимість ранжування.

3. (*Алгебраїчний метод*). Трьома експертами впорядковані три об'єкти і отримано ранжування у вигляді $A=\langle x,y,z\rangle$, $B=\langle x,y,z\rangle$, $C=\langle x,y,z\rangle$, яким відповідають матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити відстані між ранжуваннями та знайти середнє значення.

4. (*Одномірне шкалування*). Десять спеціалістів здійснили оцінку відносної важливості чотирьох параметрів літака. Результати їх роботи наведені в табл. 1.27.

Табл. 1.27. Результати експертизи

Параметри	Експерти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	3	2	3	4	1	3	3	3	2	1
R	2	1	1	1	3	1	2	4	4	2
C	1	3	2	2	2	2	4	1	1	3
P	4	4	4	3	4	4	1	2	3	4

Визначити показник відносної важливості параметрів та здійснити перевірку на несуперечливість.

5. Нехай Ω має вигляд, показаний на рис. 1.11. Знайти $C_I^1(\Omega)$, $C_I^2(\Omega)$, $C_I^\infty(\Omega)$.

6. Нехай $X_1=\{x^1,...,x^4\}$: $x^1=\langle 1;2;3;4\rangle$, $x^2=\langle 10;1;2;3\rangle$, $x^3=\langle 9;10;1;2\rangle$, $x^4=\langle 8;9;10;1\rangle$; $X_2=\{y^1,y^2\}$: $y^1=x^1=\langle 1;2;3;4\rangle$, $y^2=\langle 15;12;6;7\rangle$. Знайти $C^K(X_1)$, $C^K(X_2)$, $C^K(X_1\cup X_2)$.

1.4. Прийняття рішень в умовах визначеності

1.4.1. Загальне поняття і властивості функції корисності

Поняття *функції корисності* виникло в теорії споживчого попиту при порівнянні різних наборів товарів. Значення функції корисності на певному наборі товарів виражає цінність або корисність даного набору для споживача. У задачах вибору значення функції корисності виражає корисність альтернатив. Областю визначення функції корисності U є E_m^+. Областю значень – E_1^+. Якщо функція корисності відома, то можна порівняти будь-які дві альтернативи з допомогою відношення R_U, заданого формулою:

$$x\,R_U\;y \Leftrightarrow U(x) > U(y).$$

Будемо вважати, що всі функції корисності володіють наступними двома властивостями, які виділяють їх з всіх функцій на E_m^+:

а) функції корисності монотонно зростають за всіма змінними: для будь-яких $x = \langle x_1,...,x_m \rangle,\, y = \langle y_1,...,y_m \rangle \in E_m^+,\, x \neq y,\, x_j \geq y_j \; \left(j = \overline{1,m}\right) \Rightarrow U(x) > U(y)$,

б) існують дві перші похідні функції корисності U: $u_r = \partial U(x) / \partial x_r$, $u_{rs} = \partial^2 U(x) / \partial x_r \partial x_s \;\; \left(r, s = \overline{1,m}\right)$.

Гіперповерхня рівня функції $U(x_1,...,x_m)$ визначається як множина точок $x = \langle x_1,...,x_m \rangle \in E_m^+$, для яких $U(x) = const$. Гіперповерхні рівня функції корисності називаються *кривими байдужості*, а сімейство всіх кривих байдужості – *картою байдужості*. Термін “крива байдужості” пов’язаний з тим, що корисність будь-яких двох альтернатив x і y, що лежать на одній кривій, однакова: $U(x) = U(y)$.

Введемо на множині U всіх функцій корисності відношення R^*: $U_1 R^* U_2$, якщо існує зростаюча функція $f(\cdot)$ така, що для всіх $x \in E_m^+$ виконується: $U_1(x) = f(U_2(x))$.

Для відношення R^* будемо використовувати символ ~.

Твердження 1.40. *Нехай* $U_1 \sim U_2$. *Тоді для будь-якої множини* $\Omega \subseteq E_m^+$*:*

$$Arg\max_{\Omega} U_1 = Arg\max_{\Omega} U_2.$$

Твердження 1.40 означає, що розв'язки задач оптимізації:

$$U(x) \to \max_{\Omega}$$

для всіх функцій з одного класу еквівалентності співпадають.

Твердження 1.41. *Нехай* $U_1 \sim U_2$. *Тоді* $R_{U_1} = R_{U_2}$.

Різні функції корисності можуть породжувати одне й те ж відношення R_U, яке однозначно визначає розв'язок задачі оптимізації. Тому надалі будемо використовувати тільки такі властивості *U*, які є спільними для всіх функцій, що породжують одне і те ж відношення R_U.

Твердження 1.42. *Нехай* $U_1 \sim U_2$. *Тоді* $\dfrac{u_r^1}{u_s^1} = \dfrac{u_r^2}{u_s^2}$.

Величина $\dfrac{u_r(x)}{u_s(x)}$ називається *граничною нормою заміни між r-м і s-м критеріями в точці* $x \in E_m^+$. Гранична норма заміни між будь-якими двома критеріями в силу твердження 1.42 є функцією на E_m^+, що однозначно визначається класом еквівалентності $[U]$, що містить *U*.

Нехай $\dfrac{u_i\left(x^2\right)}{u_j\left(x^2\right)} \le \dfrac{u_i\left(x^1\right)}{u_j\left(x^1\right)}$ для будь-яких двох альтернатив $x^1 = \left\langle x_1^1, \dots, x_i^1, \dots, x_j^1, \dots, x_m^1 \right\rangle$ і $x^2 = \left\langle x_1^2, \dots, x_i^2, \dots, x_j^2, \dots, x_m^2 \right\rangle$ таких, що $\dfrac{u_j^1}{u_i^1} > \dfrac{u_j^2}{u_i^2}$. У цьому випадку кажуть, що для функції корисності *U* виконується *закон зменшення граничних норм заміни*.

Покладемо $X_M = \left\{ x \in E_m^+ \middle| U(x) \ge M \right\}$. Кажуть, що гіперповерхні рівня *опуклі до початку координат*, якщо множини X_M опуклі при всіх *M*.

Загальні властивості функції корисності одного класу визначаються їх картами байдужості. Функцію корисності, для якої гіперповерхні рівня опуклі до початку координат, будемо називати *К-опуклою*. Вид карти байдужості *К*-опуклої функції при $m=2$ наведений на рис. 1.12.

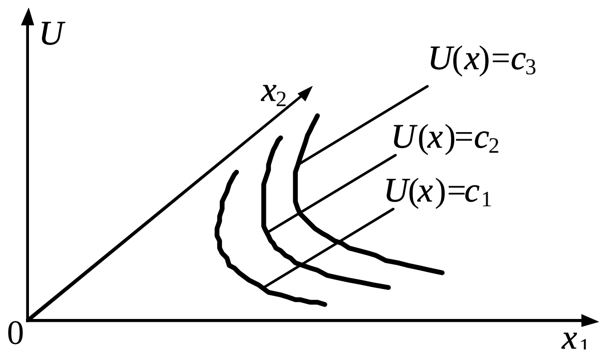

Рис. 1.12. Карта байдужості К-опуклої функції при $m=2$

Функцію корисності, для якої всі граничні норми заміни монотонні по кожній змінній, будемо називати *К-гетеротонними*. Знаки монотонності можуть залежати як від номера змінної $i\in\{1,...,m\}$, так і від точки $x=\langle x_1,...,x_m\rangle$. Функцію корисності будемо називати *К-лінійною*, якщо її гіперповерхні представляють собою гіперплощини.

Наведемо економічну інтерпретацію функцій корисності. Спів ставимо осям координат споживчі товари. Точку $x=\langle x_1,...,x_m\rangle\in E_m^+$ розглянемо як варіант споживання, в якому x_i – кількість *i*-го товару, що споживається. Функція $U(x)$ виражає рівень задоволеності споживача набором *x*. Нехай $p=\langle p_1,...,p_m\rangle$ – вектор цін на товари, що увійшли в набір. Нехай споживач може використати на купівлю товарів суму *M*. Будемо припускати, що споживач при купівлі товарів намагається максимізувати свою функцію $U(x)$ на множині всіх можливих варіантів *x*, тобто вирішує задачу максимізації функції $U(x)\to\max\limits_G$, на множині всіх можливих *x*, які задовольняють *бюджетне обмеження* $G=\left\{x\in E_m^+ \middle| (p,x)\le M\right\}$. На рис. 1.13 зображені карти байдужості, і три бюджетних обмеження, що зада-

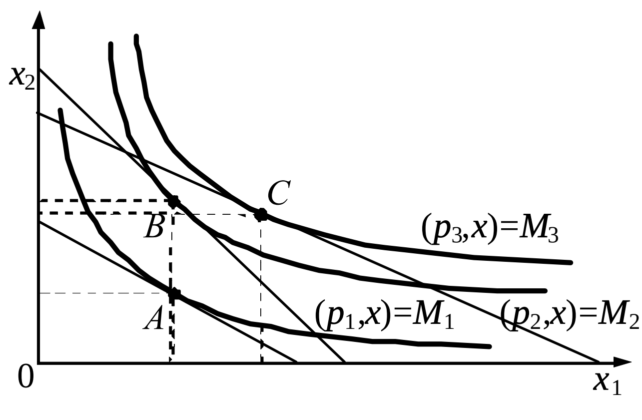

Рис. 1.13. Карти байдужості з трьома бюджетними обмеженнями

ються векторами цін і засобами. Оптимальні значення знаходяться в точках *A*, *B*, *C*.

Норма заміни між r-им і s-им критеріями дорівнює числу одиниць товару x_s, втрата яких може бути компенсована одиницею товару x_r. Ця величина називається *локальною ціною* r*-го товару в одиницях* s*-го товару*. В задачах вибору з використанням функцій корисності вважають, що відома порівняльна корисність будь-яких двох альтернатив x, y, що відрізняються не більше ніж за двома координатами. Це означає, що відомо, яке з трьох співвідношень:

$$U(x) > U(y),\ U(x) < U(y),\ U(x) = U(y) \tag{1.8}$$

виконується для альтернатив x, y.

1.4.2. Алгоритми оптимізації функцій корисності

Розглянемо допоміжну *задачу компенсації*. Нехай дані альтернативи $x = \langle x_1, ..., x_m \rangle$, індекси $j_1,\ j_2 \in \{1, ..., m\}$ і число $\Delta_1 > 0$. Знайдемо із заданою точністю ε число $\Delta_2 > 0$ таке, що $U(x) = U(x(\Delta_2))$, де $x(\Delta_2) = \langle x_1, ..., x_{j_1} - \Delta_1, ..., x_{j_2} + \Delta_2, ..., x_m \rangle$.

Розв'язок задачі компенсації позначимо через $\Delta_2(x, j_1, j_2, \Delta_1)$.

Алгоритм 1. Розв'язання задачі компенсації.

1. Покласти $\Delta = \Delta_1$.

2. Покласти $\Delta_2 = \Delta$.

3. Якщо $U(x) = U(x(\Delta_2))$, перейти до кроку 8; якщо $U(x) > U(x(\Delta_2))$ – до кроку 4; якщо $U(x) < U(x(\Delta_2))$ – до кроку 5.

4. Покласти $\Delta_2 = \Delta_2 + \Delta$ і перейти до кроку 3.

5. Покласти $\Delta = \Delta/2$.

6. Якщо $\Delta < e$, то перейти до кроку 8, в іншому випадку – до кроку 7.

7. Покласти $\Delta_2 = \Delta_2 - \Delta$ і перейти до кроку 3.

8. Покласти $\Delta_2(x, j_1, j_2, \Delta_1) = \Delta_2$.

Алгоритм 2. Знаходження $C(x,y)$ (x,y – довільні альтернативи з E_m^+).

1. Знайти R – число координат, за якими x відрізняється від y.

2. Якщо $R>2$, перейти до кроку 3, в іншому випадку – до кроку 10.

3. Якщо $x\ R\ y$, то перейти до кроку 8; якщо $y\ R\ x$ – до кроку 9; в інших випадках перейти до кроку 4.

4. Знайти j_1, j_2 такі, що $x_{j_1} > y_{j_1}$, $x_{j_2} < y_{j_2}$.

5. Покласти $\Delta_1 = x_{j_1} - y_{j_1}$.

6. Знайти алгоритмом 1 $\Delta_2(x, j_1, j_2, \Delta_1)$.

7. Покласти $x = x(\Delta_2)$ і перейти до кроку 1.

8. Покласти $C(x,y) = x$ і перейти до кроку 11.

9. Покласти $C(x,y) = y$ і перейти до кроку 11.

10. Знайти $C(x,y)$ з умови (1.8).

11. Кінець алгоритму.

Алгоритм 2 базується на заміні точки x точкою $x(\Delta_2)$, що відрізняється від y за меншим, ніж x, числом координат.

Алгоритм 3. Розв'язання задачі оптимізації функції корисності $\left(U(x) \to \max\limits_{\Omega}\right)$.

1. Задати бінарне відношення R_U на Ω, використовуючи для кожної пари $\langle x,y \rangle \in \Omega^2$ за алгоритмом 2.

2. Виділити множину Ω^{R_U} недомінуючих по R_U альтернатив.

Для реалізації алгоритму 3 необхідно порівняти всі пари з Ω^2. Однак при накладанні додаткових вимог на функцію U можна отримати більш ефективні градієнтні алгоритми.

Позначимо *градієнт* функції U в точці x через ∇_x:

$$\nabla_x = \left\langle \frac{\partial U(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U(x)}{\partial x_m} \right\rangle.$$

Напрямок вектора $\tilde{\nabla}_x$ не зміниться, якщо всі його компоненти розділити на одне і те ж додатне число, наприклад на $\partial U/\partial x_1$. Маємо

$$\nabla_x = \frac{\tilde{\nabla}_x}{\partial U(x)/\partial x_1} \left\langle 1, \frac{\partial U(x)/\partial x_2}{\partial U(x)/\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U(x)/\partial x_m}{\partial U(x)/\partial x_1} \right\rangle.$$

Зафіксуємо точку $x = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ і покладемо $\tilde{x} = \langle x_1, \ldots, x_r - \Delta_r, \ldots, x_s + \Delta_s, \ldots, x_m \rangle$. Тоді $\Delta U = U(\tilde{x}) - U(x) \approx -\frac{\partial U}{\partial x_r}\Delta_r + \frac{\partial U}{\partial x_s}\Delta_s$, звідки при $\Delta U = 0$ отримаємо $u_r/u_s \approx \Delta_s/\Delta_r$, яку і використовують для побудови наближення вектора ∇_x.

Алгоритм 4. Визначення вектора ∇_x.

1. Задати Δ_1 і покласти $j_1 = 1,\ \nabla_x^1 = 1$.

2. Покласти $i = 1$.

3. Покласти $i = i + 1$.

4. Покласти $j_2 = i$.

5. За алгоритмом 1 знайти $\Delta_2(x, j_1, j_2, \Delta_1)$.

6. Покласти $\nabla_x^i = \Delta_1/\Delta_2(x, j_1, j_2, \Delta_1)$.

7. Якщо $i \neq m$, перейти до кроку 3. В іншому випадку – кінець алгоритму.

Твердження 1.43. *Нехай U – K-випукла функція,* $x^1, x^2 \in E_m^+$, $U(x^2) \geq U(x^1)$. *Тоді* $(\nabla_{x^1}, x^1) \leq (\nabla_{x^1}, x^2)$.

Будемо називати функцію U *строго K-опуклою,* якщо множина $X_M = \{ x \in E_m^+ \mid U(x) \geq M \}$ строго опуклі при всіх *M*. *Строга опуклість* множини означає, що будь-яка опорна гіперплощина перетинається з нею тільки в одній точці.

Твердження 1.44. *Нехай* $(\nabla_{x^*}, x^*) = \max\limits_{\Omega} (\nabla_{x^*}, x)$. *Тоді* $x^* \in Arg\max\limits_{\Omega} U$.

Наведемо алгоритм, що дозволяє знайти множину Y, що містить розв'язок задачі оптимізації функції корисності.

Алгоритм 5. Звуження ВМА.

1. Покласти $X = \Omega$.

2. Занумерувати елементи X і позначити через n потужність X.

3. Покласти $i = 0$.

4. Покласти $i = i + 1$.

5. Побудувати вектор ∇_{x^i} за алгоритмом 4.

6. Покласти $Y = \left\{ x \in X \,\middle|\, \left(x, \nabla_{x^i} \right) > \left(x^i, \nabla_{x^i} \right) \right\} \cup \left\{ x^i \right\}$.

7. Порівняти Y і X. Якщо $Y = X$, перейти до кроку 9, в іншому випадку – до кроку 8.

8. Покласти $X = Y$ і перейти до кроку 2.

9. Порівняти i з n. Якщо $i=n$, перейти до кроку 10, в іншому випадку – до кроку 4.

10. Кінець алгоритму. Розв’язком є Y.

Алгоритм 5 дозволяє при пошуку розв’язку задачі оптимізації функції корисності замінити ВМА на множину Y, тобто зменшити число альтернатив. Для знаходження точного розв’язку необхідно скористатись алгоритмом 3 на множині Y. При цьому число попарних порівнянь відповідно зменшується.

1.4.3. Розв’язання задач прийняття рішень в умовах визначеності

Розглянемо спочатку простішу ситуацію, коли оцінки привабливості альтернатив по кожному критерію якісні та отримані експертні оцінки критеріїв по певній заданій шкалі (наприклад, десятибальній). Нехай маємо n альтернатив і k критеріїв. Позначимо через $U_{i,j}$ оцінку i-тої альтернативи по j-му критерію. Очевидно, що критерії мають різну важливість. Назвемо степінь важливості кожного критерію його вагою. Нехай вага j-го критерію рівна W_j. Вага критерію вимірюється по довільній пропорційній шкалі (наприклад, від 0 до 1 або по десятибальній чи довільній іншій шкалі). Вагу критеріїв визначають або експерти, або безпосередньо ОПР.

Отже, якщо відомі оцінки альтернатив, ваги критеріїв і якщо розв’язується задача на максимізацію, то для прийняття оптимального рішення потрібно обрахувати функцію корисності кожної альтернативи F_i по формулах:

$$F_i = \sum_{j=1}^{k}\left(U_{i,j} \cdot W_j\right), i = \overline{1,n} \tag{1.9}$$

і приймається та альтернатива, для якої функція корисності максимальна.

Якщо розв'язується задача мінімізації, то вибирається альтернатива з найменьшою функцією корисності.

Приклад 1.17. Директор підприємства бажає заключити договір з однією із ремонтно-сервісних компаній на обслуговування автоматизованої збиральної лінії. Йому пропонують свої послуги чотири компанії, які умовно позначимо A, B, C і D. Для вибору сторони по договору директор виділяє декілька критеріїв. В першу чергу важлива вартість обслуговування, гарантійні зобов'язання та інші поточні витрати, які в сукупності назвемо "Фінансові умови". Директор вважає їх вагу найбільшою і по одиничній шкалі оцінює в $W_1 = 0,8$. Також не менш важливою є експертна оцінка надійності компанії, їх репутація. Цей критерій має оцінку ваги $W_2 = 0,5$. Крім того, неможна не врахувати такі критерії як швидкість реагування, як поставлена система обслуговування лінії, як швидко усувають несправності. Вага цього критерію $W_3 = 0,3$. Оцінки альтернатив по кожному критерію наведені в табл. 1.28. Яку компанію йому обрати?

Табл. 1.28. Оцінки альтернатив по визначених критеріях

Альтернативи	Оцінки критеріїв (10-бальна шкала)		
	Фінансові умови	Репутація	Швидкість реагування
Компанія A	4	7	9
Компанія B	8	3	8
Компанія C	6	8	4
Компанія D	7	2	9

Розв'язання. Обчислимо функції корисності для кожної альтернативи:

$F_A = 4 \cdot 0,8 + 7 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 = 9,4;$

$F_B = 8 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}3 = 10{,}3;$

$F_C = 6 \cdot 0{,}8 + 8 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 = 10{,}0;$

$F_D = 7 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}3 = 9{,}3.$

Видно, що для другої альтернативи функція корисності максимальна, тому раціональніше всього приняти її і заключити договір з компанією B.

Як видно з прикладу, всі показники привабливості критеріїв якісні і тому для кількісної оцінки використані їх експертні оцінки по десятибальній шкалі, тобто оцінки мають однакову розмірність (вони безрозмірні). Друга ситуація виникає, коли оцінки різних критеріїв мають різну розмірність, частина з них є натуральними (наприклад, один критерій оцінюється в гривнях, другий – в хвилинах, третій – в експертних балах і т. д.). Для їх порівняння і включення в функції корисності на рівних умовах (точніше пропорціональних вагах) існує ряд методов, які мають загальну назву методів нормалізації. Під ***нормалізацією критеріїв*** розуміють таку послідовність процедур, за допомогою яких всі критерії приводять до єдиного безрозмірного масштабу величин. Розглянемо один із найбільш часто використовуваних на практиці методів нормалізації.

Припустимо, що є n альтернатив і k критеріїв. Позначимо через $U_{i,j}$ оцінку i-тої альтернативи по j-му критерію. Нехай оцінки альтернатив по критеріям мають різні розмірності. Введемо позначення: $\hat{U}_j = \max\limits_i U_{i,j}$ – максимальне значення j-го критерію по кожній альтернативі, а $\check{U}_j = \min\limits_i U_{i,j}$ – мінімальне значення j-го критерію по альтернативам. Тоді введемо нормалізовані оцінки альтернатив по критериях.

У випадку максимізації критеріїв із кожного елемента стовпця матриці $U_{i,j}$ віднімають мінімальний елемент цього стовця і результат ділиться на різницю між максимальним і мінимальним елементами цього стовпця: $u_{i,j} = \dfrac{U_{i,j} - \check{U}_j}{\hat{U}_j - \check{U}_j}$. У випадку мінімізації критеріїв нормалізовані оцінки рівні: $u_{i,j} = \dfrac{\hat{U}_j - U_{i,j}}{\hat{U}_j - \check{U}_j}$, тобто із максимального елемента кожного стовпця матриці

$U_{i,j}$ віднімають кожен елемент цього стовпця і результат ділиться на різницю між максимальним і мінімальним елементами стовпця.

У результаті нормалізації, не залежно, ведеться максимізація чи мінімізація критерію, альтернатива, яка має найкращий для ОПР показник привабливості по будь-якому критерію отримує оцінку 1, найменш привабливий має оцінку 0, а решта альтернатив мають проміжні оцінки від 0 до 1 пропорціонально їх привабливості між показниками найкращої і найгіршої альтернатив. Функції корисності кожної альтернативи F_i обчислюються за формулами (1.9), але з нормалізованими показниками привабливості:

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} \left(u_{i,j} \cdot W_j \right), i = \overline{1,n},$$

де W_j – ваги критеріїв. Приймається та альтернатива, для якої функція корисності максимальна.

Приклад 1.18. Сотова компанія, відкриваючи своє представництво в місті, вибирає приміщення, яке збирається зняти в оренду для свого офісу. Є декілька альтернатив: *центр міста* A, *паркова зона* B, *індустріальний район* C, *район базару* D. Розглядаються наступні критерії: *орендна платня* (грн/год), *площа приміщення* (кв. м), *доступність для клієнтів* (бал із 10), *стан приміщення* (бал із 10). Оцінки альтернатив по критеріях, а також ваги критеріїв (по 10-бальній системі) наведені в табл. 1.29.

Табл. 1.29. Оцінки альтернатив по критеріях і ваги критеріїв

Альтернативи	Критерії (матриця $U_{i,j}$)			
	Оренда	Площа	Доступність	Стан
центр міста A	130	95	9	7
паркова зона B	65	110	5	4
індустріальний район C	80	90	6	6
район базару D	100	100	8	5
Ваги	8	6	9	5

Розв'язання. Проводемо нормалізацію показників альтернатив по критеріях. Для першого критерію (оренда), який мінімізується, максимальний елемент рівний 130, мінімальний – 65. Цей критерій мінімізується, тому від максимального елемента першого стовпця матриці $U_{i,j}$ віднімаємо кожний елемент цього стовпця і ділимо на різницю максимального і мінімального елементів: 130–65=65. Для другого елемента (площа), який максимізується, від кожного елемента другого стовпця віднімаємо мінімальний елемент цього стовпця, рівний 90 і ділимо на різницю максимального і мінімального елементів: 110–90=20. Аналогічно обчислюючи нормалізовані показники третього і четвертого критеріїв, отримуємо матрицю нормалізованих показників, що наведена у табл. 1.30.

Табл. 1.30. Оцінки альтернатив по нормалізованих критеріях і ваги критеріїв

Альтернативи	Нормалізовані критерії (матриця $u_{i,j}$)			
	Оренда	Площа	Доступність	Стан
центр міста A	0	0,25	1	1
паркова зона B	1	1	0	0
індустріальний район C	0,77	0	0,25	0,67
район базару D	0,46	0,5	0,75	0,33
Ваги	8	6	9	5

У результаті, обчислені із врахуванням ваг, функції корисності рівні:

$F_A = 0\cdot 8 + 0,25\cdot 6 + 1\cdot 9 + 1\cdot 5 = 15,5;$

$F_B = 1\cdot 8 + 1\cdot 6 + 0\cdot 9 + 0\cdot 5 = 14;$

$F_C = 0,77\cdot 8 + 0\cdot 6 + 0,25\cdot 9 + 0,67\cdot 5 = 11,76;$

$F_D = 0,46\cdot 8 + 0,5\cdot 6 + 0,75\cdot 9 + 0,33\cdot 5 = 15,44.$

Видно, що альтернатива A (центр міста) найкраща, так як її функція корисності максимальна.

1.4.4. Експертне оцінювання методом аналітичної ієрархії

При розв’язанні задач прийняття рішень в умовах визначеності виникає питання: як на практиці отримати оцінки привабливості критеріїв при якісних альтернативах, як вибрати ваги важливостей критеріїв. Як було сказано раніше, ці оцінки робить експерт (спеціаліст по досліджуваному питанню) або ОПР. Практичних методів, згідно яким розставляються експертні оцінки, достатньо багато. Простішим (і достатньо популярним) є метод ***журі***, згідно якому експерт просто-напросто, у відповідності до своїх знань, досвіду та інтуіції, розставляє бали для кожної альтернативи по заданому критерію за визначеною шкалою.

Однак на практиці не завжди можна точно і пропорціонально оцінити показники привабливості альтернатив, особливо при великій їх кількості. Набагато легше буває попарно порівняти всі наявні альтернативи по кожному критерію і оцінити, наскільки одна конкретна альтернатива привабливіша іншої. Такий метод експертної оцінки отримав назву ***метода аналітичної ієрархії***. Розглянемо його для випадку n альтернатив, які позначимо A_1, A_2, …, A_n, і m критеріїв, які позначимо K_1, K_2, …, K_m. Візьмемо перший критерій K_1 і попарно порівняємо всі альтернативи одна з іншою по цьому критерію. У результаті отримаємо матрицю порівнянь $V_{i,j}^{(1)}$, кожний елемент якої, у випадку, якщо альтернатива A_i краща ніж альтернатива A_j, рівний h. Якщо ж альтернатива A_i не краща ніж альтернатива A_j, то відповідний елемент матриці $V_{i,j}^{(1)}$ рівний $\frac{1}{h}$. Також обчислюються матриці порівнянь $V_{i,j}^{(k)}$, $k=\overline{1,m}$ для інших критеріїв. Введемо, наприклад, таку шкалу порівнянь (табл. 1.31).

При бажанні можна використовувати парні цілі числа, що відображають проміжні рівні надання переваги. Потрібно відмітити, що експерт або ОПР може використовувати інші шкали важливості парних порівнянь.

Табл. 1.31. Шкала відносної важливості парного порівняння альтернатив

Рівень важливості	Ступінь надання переваги h
Рівна важливість	1
Помірна перевага	3
Суттєва перевага	5
Значна перевага	7
Достатньо значна перевага	9

Аналогічно, попарно порівнюючи важливості критеріїв, складається матриця порівнянь критеріїв, за якою визначаються їх ваги.

На наступному етапі обчислюються власні вектори альтернатив по всіх критеріях. Для кожної i-тої альтернативи по k-му критерію обчислюємо елемент вектора $U_i^{(k)}$, який рівний середньому геометричному показнику матриці порівнянь для цієї альтернативи (рядки матриці):

$$U_i^{(k)} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} V_{i,j}^{(k)}} = \sqrt[n]{V_{i,1}^{(k)} \cdot V_{i,2}^{(k)} \cdot \ldots \cdot V_{i,n}^{(k)}}.$$

Такий самий власний вектор обчислюється і для матриці порівнянь критеріїв.

Далі у результаті нормалізації власних векторів обчислюються ваги альтернатив по кожному критерію і ваги самих критеріїв. Вага i-тої альтернативи по k-му критерію $W_i^{(k)}$ рівен відношенню відповідного елемента власного вектора до суми всіх елементів власного вектора цього критерію:

$$W_i^{(k)} = \frac{U_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} U_i^{(k)}} = \frac{U_i^{(k)}}{U_1^{(k)} + U_2^{(k)} + \ldots + U_n^{(k)}}.$$

Також обчислюються і ваги критеріїв, які позначимо $W_{крит}^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$.

Тепер, маючи оцінки корисності альтернатив по всім критеріям і ваги критеріїв можна обрахувати функції корисності по кожній альтернативі та порівнявши їх вибрати найкращу альтернативу з максимальною функцією. Функція корисності i-тої альтернативи обчислюється за формулою:

$$F_i = \sum_{k=1}^{m} \left(W_i^{(k)} \cdot W_{крит}^{(k)} \right) = W_i^{(1)} \cdot W_{крит}^{(1)} + W_i^{(2)} \cdot W_{крит}^{(2)} + \ldots + W_i^{(m)} \cdot W_{крит}^{(m)}.$$

Приклад 1.19. Підприємець, що займається продажем професійного обладнання для перукарень і косметичних салонів вирішив відкрити нову торгову точку і побудувати магазин в одному із районів міста. Йому під будівництво запропоновано чотири земельні ділянки: A, B, C і D. При виборі місця будівництва підприємець виділяє три критерії:

– *доступність магазину для клієнтів* (месцерозташування) – K_1;

– *вартість будівництва*, доступність комунікацій – K_2;

– *можливість подальшого розширення* (планується з часом прибудувати приміщення для додаткових відділів) – K_3.

Підприємець, виступаючи експертом по першому критерію доступності і месцерозташування магазину, порівняв альтернативи і вирішив, що A у порівнянні з B має помірну перевагу (бал 3), A у порівнянні з C має значну перевагу (бал 7) і A у порівнянні з D – має суттєву перевагу (бал 5). Ці бали записуємо у перший рядок таблиці. Порівнюючи альтернативи B і C, експерт вирішив, що B має перевагу більшу, ніж помірна і меншу, ніж суттєва, тому у таблицю на відповідну позицію було вирішено занести бал 4. Альтернатива B у порівнянні з D має помірну перевагу, а C і D мають рівні важливості. У результаті отримаємо табл. 1.32.

Табл. 1.32. Критерій "Доступність магазину для клієнтів"

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	3	7	5
B	$\frac{1}{3}$	1	4	3
C	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	1	1
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1

По аналогії, експерти по двом іншим критеріям порівняли попарно всі альтернативи і отримали наступні результати, наведені у табл. 1.33–1.34.

Табл. 1.33. Критерій "Вартість будівництва"

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
C	7	3	1	3
D	3	7	$\frac{1}{3}$	1

Табл. 1.34. Критерій "Можливість розширення"

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
B	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
C	3	3	1	$\frac{1}{2}$
D	7	5	2	1

Наступний етап полягає у порівнянні самих важливих критеріїв. Підприємець вважає самим важливим перший критерій, він має помірну перевагу над другим і суттєву над третім. Другий критерій має помірну перевагу над третім. У результаті отримаємо матрицю, наведену у табл. 1.35.

Третій етап полягає в обчисленні власних векторів і ваг альтернатив по кожному критерію. Для першого критерію "Доступність магазину для клієнтів" власний вектор альтернативи A рівний $\sqrt[4]{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5} = 3,201$. Для другої, третьої і четвертой альтернатив власні вектори рівні відповідно: $\sqrt[4]{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 4\cdot 3}=1,414$, $\sqrt[4]{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1}=0,435$ і $\sqrt[4]{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1}=0,508$.

Табл. 1.35. Порівняння самих важливих критеріїв

Критерій	K_1	K_2	K_3
K_1	1	3	5
K_2	$\frac{1}{3}$	1	3
K_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

Обчислимо тепер ваги альтернатив. Знайдемо суму елементів власного вектора: 3,201+1,414+0,435+0,508=5,558. Поділимо кожний елемент власного вектора на цю суму, отримаємо нормалізовані ваги кажної альтернативи, а саме, для альтернативи A: 3,201/5,559=0,576, для інших альтернатив, аналогічно, 0,254, 0,078, 0,092. Потрібно відмітити, що в сумі ваги повинні давати одиницю. У результаті отримано табл. 1.36.

Табл. 1.36. Критерій “Доступність магазина для клієнтів”

Альтернативи	A	B	C	D	Власний вектор	Вага
A	1	3	7	5	3,201	0,576
B	$\frac{1}{3}$	1	4	3	1,414	0,254
C	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	1	1	0,435	0,078
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0,508	0,092
				Сума	5,558	

Аналогічно табл. 1.36 отримуємо табл. 1.37–1.38 і для випадку парного порівняння альтернатив по іншим критеріям.

Табл. 1.37. Критерій "Вартість будівництва"

Альтернативи	A	B	C	D	Власний вектор	Вага
A	1	5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	0,699	0,128
B	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	0,312	0,057
C	7	3	1	3	2,817	0,517
D	3	7	$\frac{1}{3}$	1	1,627	0,298
				Сума	5,455	

Табл. 1.38. Критерій "Можливість розширення"

Альтернативи	A	B	C	D	Власний вектор	Вага
A	1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	0,615	0,111
B	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0,386	0,070
C	3	3	1	$\frac{1}{2}$	1,656	0,298
D	7	5	2	1	2,893	0,521
				Сума	5,550	

Таким же чином обчислюємо власні вектори і ваги критеріїв. Єдина відмінність при обчисленні власних векторів полягає в тому, що число критеріїв рівне трьом (а число альтернатив – чотири), тому із добутків парних оцінок порівнянь потрібно брати корінь третього степеня. Наприклад, для критерію K_1: $\sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 5} = 2,466$. Результати наведені у табл. 1.39.

Табл. 1.39. Порівняння самих важливих критеріїв

Критерій	K_1	K_2	K_3	Власний вектор	Вага
K_1	1	3	5	2,466	0,637
K_2	$\frac{1}{3}$	1	3	1	0,258
K_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	0,405	0,105
			Сума	3,871	

Обчислюємо функції корисності для кожної альтернативи:

$F_1 = 0,576 \cdot 0,637 + 0,128 \cdot 0,258 + 0,111 \cdot 0,105 = 0,423;$

$F_2 = 0,254 \cdot 0,637 + 0,057 \cdot 0,258 + 0,07 \cdot 0,105 = 0,184;$

$F_3 = 0,078 \cdot 0,637 + 0,517 \cdot 0,258 + 0,298 \cdot 0,105 = 0,211;$

$F_4 = 0,092 \cdot 0,637 + 0,298 \cdot 0,258 + 0,521 \cdot 0,105 = 0,182.$

Видно, що максимальна функція корисності відповідає першій альтернативі A, значить, цю ділянку і потрібно вибрати для будівництва.

1.4.5. Тест для самоконтролю

I. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності степінь важливості кожного критерію називається його:

а) значимістю в) вагою

б) вагомістю г) масою

2. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності вагу критеріїв визначають:

а) лише експерти в) експерти і ОПР

б) лише ОПР г) експерти або ОПР

3. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності вага критерію вимірюється по:

а) десятибальній шкалі в) довільній пропорційній шкалі

б) шкалі від 0 до 1 г) експертних балах

4. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності, якщо відомі оцінки альтернатив, ваги критеріїв і якщо розв'язується задача на максимізацію, то приймається та альтернатива, для якої функція корисності:

а) максимальна б) мінімальна

5. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності, якщо відомі оцінки альтернатив, ваги критеріїв і якщо розв'язується задача на мінімізацію, то приймається та альтернатива, для якої функція корисності:

а) максимальна б) мінімальна

6. У задачах прийняття рішень в умовах визначеності, якщо відомі оцінки альтернатив $U_{i,j}$, ваги критеріїв W_j і якщо розв'язується задача на максимізацію чи мінімізацію, то для прийняття оптимального рішення потрібно обрахувати функцію корисності кожної альтернативи F_i по формулах:

а) $F_i = \sum_{j=1}^{k} \left(U_{i,j} \cdot W_j \right), i = \overline{1,n}$

в) $F_i = \sum_{j=1}^{k} \left(U_{i,j} \cdot W_j \right)^2, i = \overline{1,n}$

б) $F_i = \sum_{j=1}^{k} \left(U_{i,j}^2 \cdot W_j \right), i = \overline{1,n}$

г) $F_i = \sum_{j=1}^{k} \left(U_{i,j} \cdot W_j^2 \right), i = \overline{1,n}$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Областями визначення і значень функції корисності відповідно є:

а) E_1 в) E_1^+ д) E_1^-

б) E_1^+ г) E_m^+ е) E_m^-

8. Функції корисності володіють наступними властивостями:

а) зростають за всіма змінними

б) монотонно зростають за всіма змінними

в) спадають за всіма змінними

г) монотонно спадають за всіма змінними

д) існує перші похідні

е) існують перші і другі похідні

9. Нормалізовані оцінки критеріїв у випадку мінімізації і максимізації відповідно рівні:

а) $u_{i,j} = \dfrac{U_{i,j} - \max\limits_i U_{i,j}}{\max\limits_i U_{i,j} - \min\limits_i U_{i,j}}$

в) $u_{i,j} = \dfrac{\max\limits_i U_{i,j} - U_{i,j}}{\max\limits_i U_{i,j} - \min\limits_i U_{i,j}}$

б) $u_{i,j} = \dfrac{U_{i,j} - \min\limits_i U_{i,j}}{\max\limits_i U_{i,j} - \min\limits_i U_{i,j}}$

г) $u_{i,j} = \dfrac{\min\limits_i U_{i,j} - U_{i,j}}{\max\limits_i U_{i,j} - \min\limits_i U_{i,j}}$

10. У методі аналітичної ієрархії у шкалі відносної важливості парного порівняння альтернатив співставте рівням важливості їх ступені надання переваги:

а) Рівна важливість _____ а) 9

б) Значна перевага _____ б) 7

в) Достатньо значна перевага _____ в) 5

г) Суттєва перевага _____ г) 3

д) Помірна перевага _____ д) 1

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: Значення функції корисності виражає ____________________

____

12. Продовжіть: Під нормалізацією критеріїв розуміють___________________

____

1.4.6. Завдання для самостійного виконання

1. Директор підприємства бажає заключити договір з однією із ремонтно-сервісних компаній на обслуговування автоматизованої збиральної лінії. Йому пропонують свої послуги чотири компанії, які умовно позначимо A, B, C і D. Для вибору сторони по договору директор виділяє декілька критеріїв. В першу чергу важлива вартість обслуговування, гарантійні зобов'язання та інші поточні витрати, які в сукупності назвемо "Фінансові умови". Директор вважає їх вагу найбільшою і по одиничній шкалі оцінює в $W_1 = 0{,}9$. Також не менш важливою є експертна оцінка надійності компанії, їх репутація. Цей критерій має оцінку ваги $W_2 = 0{,}6$. Крім того, неможна не врахувати такі критерії як швидкість реагування, як поставлена система обслуговування лінії, як швидко усувають несправності. Вага цього критерію $W_3 = 0{,}3$. Оцінки альтернатив по кожному критерію наведені в табл. 1.40. Яку компанію йому обрати?

2. Сотова компанія, відкриваючи своє представництво в місті, вибирає приміщення, яке збирається зняти в оренду для свого офісу. Є декілька альтернатив: *центр міста* A, *паркова зона* B, *індустріальний район* C, *район базару* D. Розглядаються наступні критерії: *орендна платня* (грн/год), *площа приміщення* (кв. м), *доступність для клієнтів* (бал із 10), *стан приміщення* (бал із 10). Оцінки альтернатив по критеріях, а також ваги критеріїв (по 10-бальній системі) наведені в табл. 1.41.

Табл. 1.40. Оцінки альтернатив по визначених критеріях

Альтернативи	Оцінки критеріїв (10-бальна шкала)		
	Фінансові умови	Репутація	Швидкість реагування
Компанія A	5	6	8
Компанія B	8	4	7
Компанія C	6	7	6
Компанія D	7	5	9

Табл. 1.41. Оцінки альтернатив по критеріях і ваги критеріїв

Альтернативи	Критерії (матриця $U_{i,j}$)			
	Оренда	Площа	Доступність	Стан
центр міста **A**	150	70	9	7
паркова зона **B**	50	130	6	4
індустріальний район **C**	75	100	7	6
район базару **D**	100	80	8	5
Ваги	8	6	9	5

3. Підприємець, що займається продажем професійного обладнання для перукарень і косметичних салонів вирішив відкрити нову торгову точку і побудувати магазин в одному із районів міста. Йому під будівництво запропоновано чотири земельні ділянки: A, B, C і D. Яку ділянку вибрати, якщо при виборі місця будівництва підприємець виділяє три критерії (див. табл. 1.42–1.44):

– *доступність магазину для клієнтів* (місцерозташування) – K_1;

– *вартість будівництва*, доступність комунікацій – K_2;

– *можливість подальшого розширення* (планується з часом прибудувати приміщення для додаткових відділів) – K_3.

Табл. 1.42. Критерій “Доступність магазину для клієнтів”

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	7	5	3
B	$\frac{1}{7}$	1	5	3
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1

Табл. 1.43. Критерій “Вартість будівництва”

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
B	5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
C	7	3	1	3
D	3	7	$\frac{1}{3}$	1

Табл. 1.44. Критерій “Можливість розширення”

Альтернативи	A	B	C	D
A	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
B	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
C	3	3	1	$\frac{1}{2}$
D	7	5	2	1

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ, КОНФЛІКТУ ТА НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

2.1. Прийняття рішень в умовах ризику

2.1.1. Основні положення та методи теорії ймовірності

Випадкова величина – змінна, що в результаті іспитів залежно від випадку набуває одне з можливої множини своїх значень (яке саме, заздалегідь не відомо). Її прикладами може бути кількість опадів у наступному році, точність влучення в мішень, результат випадання значення на кубику тощо.

Дискретна випадкова величина – випадкова величина, можливі значення якої є окремі ізольовані числа (такі, що між двома сусідніми можливими значеннями немає інших можливих значень), які ця величина приймає з визначеними ймовірностями.

Іншими словами, усі можливі значення випадкової величини можна перенумерувати. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевим чи нескінченним (в останньому випадку множину усіх можливих значень називають розрахунковою).

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке співвідношення, що встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Для дискретної випадкової величини закон розподілу може бути заданий у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

Розглянемо закон розподілу випадкової величини на наступному прикладі.

Приклад 2.1. Ймовірності того, що студент складе семестровий іспит під час сесії з дисциплін A і B відповідно дорівнюють 0,7 і 0,9. Скласти закон розподілу числа семестрових іспитів, що здасть студент.

Розв'язання. Розглянемо можливі значення випадкової величини X – кількості складених іспитів: 0, 1, 2.

Припустимо, що A_i – подія, яка полягає в тому, що студент складе i-ий іспит $(i = 1, 2)$. Тоді ймовірності того, що студент складе у сесію 0, 1 чи 2 іспити, будуть відповідно дорівнювати (вважаємо події A_1 і A_2 незалежними):

$$P(X=0) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = (1-0,7) \cdot (1-0,9) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03;$$

$$P(X=1) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,34;$$

$$P(X=2) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Наведені розрахунки зведемо у таблицю (див. табл. 2.1).

Табл. 2.1. Ряд випадкової величини

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Математичне сподівання дискретної випадкової величини $M(X)$ – сума добутків усіх її значень на відповідні їм ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Приклад 2.2. Відомі закони розподілу випадкових величин X і Y – числа балів (див. табл. 2.2), що вибиваються 1-м та 2-м стрільцями.

Табл. 2.2. Закони розподілу випадкових величин

X										
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20
Y											
y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Розв'язання.

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}04 + \ldots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36;$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \ldots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36.$$

Дисперсія $D(X)$ *дискретної випадкової величини* X – математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Середньоквадратичне відхилення **(***стандартне відхилення або стандарт***)** *випадкової величини* X – арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$s_X = \sqrt{D(X)}.$$

Приклад 2.3. Знайти значення дисперсії та середньоквадратичного відхилення числа вибитих балів для кожного стрільця у попередній задачі (приклад 2.2).

Розв'язання. З прикладу 2.2 $M(X) = 5{,}36$ та $M(Y) = 5{,}36$. Знайдемо значення дисперсії:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}16;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17.$$

Знайдемо значення середньоквадратичного відхилення:

$s_X = \sqrt{13{,}16} = 3{,}62$, $s_Y = \sqrt{4{,}17} = 2{,}04$.

Функція розподілу випадкової величини X – функція $F(X)$, що виражає для кожного x ймовірність того, що випадкова величина Х набуде значення, менше x:

$$F(X) = P(X < x).$$

Функцію $F(X)$ іноді називають *інтегральним законом розподілу* або *інтегральною функцією розподілу*.

Розглянемо загальні властивості функції розподілу.

Функція розподілу випадкової величини є невід'ємна функція, значення якої належать відрізку [0,1]:

$$0 \le F(X) \le 1.$$

Функція розподілу є не спадна функція по всій числовій осі.

На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює 0, на плюс нескінченності – 1.

Ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $[x_1, x_2)$ дорівнює збільшенню її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) - F(x_2).$$

Приклад 2.4. Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ x \le 0; \\ \dfrac{x}{2}, \ \textit{якщо} \ 0 < x \le 2; \\ 1, \ \textit{якщо} \ x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1, 3).

Розв'язання.

$$P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу неперервна у будь-якій точці і диференційована всюди, крім, можливо, окремих точок.

Щільністю ймовірності (щільністю розподілу або просто щільністю) $j(x)$ неперервної випадкової величини X називають, похідну її функції розподілу:

$$j(x) = F'(x).$$

Приклад 2.5. За даними приклада 2.4 знайти щільність ймовірності неперервної випадкової величини X.

Розв'язання.

$$j(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ x \le 0 \ \textit{та} \ x > 2; \\ \frac{1}{2}, \ \textit{якщо} \ 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Розглянемо властивості щільності ймовірності неперервної випадкової величини:

Щільність ймовірності – невід'ємна функція, тобто $j(x) \ge 0$.

Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини в проміжок $[a,b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b, тобто

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b j(x)dx.$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини може бути виражена через щільність Ймовірності за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} j(x)dx.$$

Інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j(x)dx = 1.$$

Зауважимо, що математичне сподівання неперервної випадкової величини знаходиться за формулою:

$$a = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \cdot j(x)\right) dx,$$

а дисперсія неперервної випадкової величини за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((x-a)^2 \cdot j(x) \right) dx .$$

Приклад 2.6. Функція $j(x)$ задана у вигляді:

$$j(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ x \le 1; \\ \dfrac{A}{x^4}, \ \textit{якщо} \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти:

а) значення сталої A, за якої функція буде щільністю ймовірності деякої випадкової величини X;

б) вигляд функції розподілу $F(x)$;

в) обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення на відрізку [2, 3];

г) знайти математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання.

а) Для того, щоб $j(x)$ була щільністю ймовірності випадкової величини X, вона повинна бути невід'ємною, тобто $j(x) \ge 0$, або в нашому випадку $\dfrac{A}{x^4} \ge 0$, звідки $A \ge 0$, і вона повинна задовольняти властивості $\int_{-\infty}^{+\infty} j(x) dx = 1$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j(x) dx = \int_{-\infty}^{1} 0 dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{A}{x^4} dx = 0 + \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{A}{x^4} dx = \frac{A}{3} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(\left. \frac{-1}{x^3} \right|_1^b \right) =$$

$$= \frac{A}{3} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b^3} \right) = \frac{A}{3} = 1,$$

звідки, $A = 3$.

б) Якщо $x \le 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} j\,(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

якщо $x > 1$, то

$$F(x) = 0 + \int_{1}^{x} j\,(x)dx = \frac{-1}{x^3}\Bigg|_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; \textit{якщо} \; x \le 1; \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, \; \textit{якщо} \; x > 1. \end{cases}$$

в) Розв'язання цієї частини прикладу можна знайти за двома варіантами:

Перший – за формулою $P(a \le x \le b) = \int_a^b j\,(x)dx$:

$$P(2 \le X \le 3) = \int_2^3 \frac{3}{x^4}dx = \frac{1}{x^3}\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} = \frac{19}{216}.$$

Другий – за формулою $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) - F(x_2)$:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(3) - F(2) = \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{19}{216}.$$

г) $a = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \cdot j\,(x)\right)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{+\infty}\left(x \cdot \dfrac{3}{x^4}\right)dx = 0 + 3 \cdot \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3} =$

$$= 3 \cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2 \cdot x^2}\Bigg|_1^b\right) = \frac{3}{2} \cdot \lim_{b\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Модою $Mo(X)$ випадкової величини X називається її найбільш ймовірне значення для якого ймовірність, або щільність ймовірності, сягає максимуму.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називається таке її значення, для якого:

$$P\left(X < Me(X)\right) = P\left(X > Me(X)\right) = \frac{1}{2}.$$

Тобто ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, менше медіани або більше її, одна й та сама.

Приклад 2.7. Знайти моду і медіану випадкової величини X зі щільністю $j(x) = 3 \cdot x^2$ при $x \in [0,1]$.

Розв'язання. Побудуємо графік щільності ймовірності (рис. 2.1).

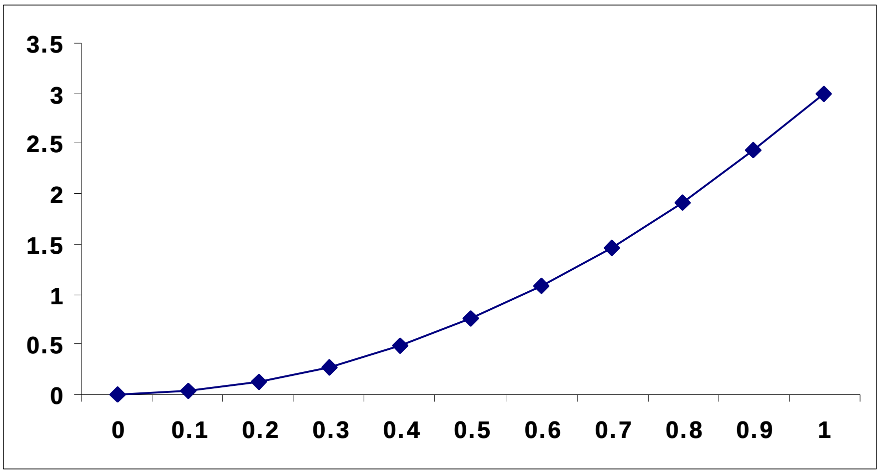

Рис. 2.1. Графік щільності ймовірності $j(x) = 3 \cdot x^2$

З графіка видно, що щільність ймовірності $j(x)$ є максимальною при $x = Mo(X) = 1$.

Медіану $Me(X) = b$ знайдемо з умови $\int_{-\infty}^{b} j(x)dx = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо дане рівняння, підставивши $j(x) = 3x^2$:

$$\int_{-\infty}^{b} j(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{-\infty}^{b} \left(3 \cdot x^2\right)dx = x^3 \Big|_0^b = b^3 = \frac{1}{2}.$$

Отже, $b = Me(X) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}79$.

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-го ступеня відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$m_k = M\left[X - M(X)\right]^k.$$

Формули для розрахунку початкового та центрального моментів дискретних та безперервних випадкових величин зведемо у табл. 2.3.

Табл. 2.3. Формули початкових та центральних моментів

Момент	Випадкова величина	
	Дискретна	Безперервна
Початковий	$n_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k \cdot p_i \right)$	$n_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k \cdot j\,(x) \right) dx$
Центральний	$m_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i - a \right)^k \cdot p_i \right)$	$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(x - a \right)^k \cdot j\,(x) \right) dx$

Неважко помітити, що при $k = 1$ перший початковий момент випадкової величини X є її математичним сподіванням, тобто $n_1 = M\left(X \right) = a$, при $k = 2$ другий центральний момент – дисперсія, тобто $m_2 = D\left(X \right)$.

2.1.2. Поняття ризику, його основні елементи й ознаки. Класифікація ризиків. Методи мінімізації ризиків

Наведемо кілька визначень ризику, якими користуються в економічній літературі.

Ризик – це ймовірність виникнення збитків або недоодержання доходів порівняно з прогнозованим варіантом.

Під "ризиком" прийнято розуміти ймовірність (загрозу) утрати підприємством частини своїх ресурсів, недоодержання доходів або появи додаткових витрат у результаті здійснення визначеної виробничої і фінансової діяльності.

У наведених означеннях виділяється така характерна риса ризику, як небезпека, можливість невдачі.

Однак наведені визначення не охоплюють усього змісту поняття "ризик".

Для більш повної характеристики визначення “ризик” доцільно виявити поняття “ситуація ризику”, оскільки воно безпосередньо пов’язане зі змістом терміна “ризик”.

Поняття “ситуація” можна визначити як сукупність різних обставин та умов, що створюють визначену обстановку для того або іншого виду діяльності.

При цьому обстановка може сприяти або перешкоджати здійсненню даної дії.

Функціонуванню й розвитку багатьох економічних процесів властиві елементи невизначеності. Це обумовлює виникнення ситуацій, що не мають однозначного результату (рішення).

Якщо існує можливість кількісно та якісно визначити ступінь ймовірності появи того або іншого варіанта, то це й буде ситуація ризику.

Звідси випливає, що ризикована ситуація пов’язана зі статистичними процесами і її супроводжують три умови:

– наявність невизначеності;

– необхідність вибору альтернативи (при цьому варто мати на увазі, що відмова від вибору також є різновидом вибору);

– можливість оцінити ймовірність здійснення обираних альтернатив.

Зазначимо, що ситуація ризику якісно відрізняється від ситуації невизначеності. Ситуація невизначеності характеризується тим, що ймовірність настання результатів рішень або подій у принципі не встановлювана.

Прагнучи “зняти” ризиковану ситуацію, суб’єкт робить вибір і реалізує його.

Цей процес знаходить своє вираження в понятті “ризик”. Останній існує як на стадії ***вибору рішення*** (плану дій), так і на стадії його ***реалізації.***

Ризик — це дія (вчинок), яка виконується в умовах вибору (у ситуації вибору, сподіваючись на щасливий результат), коли у випадку невдачі існує можливість (ступінь небезпеки) опинитися в гіршому положенні, ніж до вибору (у випадку нездійснення цієї дії).

У цьому визначенні поряд з небезпекою, можливістю невдачі, наявна така ознака, як альтернативність.

У явищі "ризик" виділимо наступні основні елементи, взаємозв'язок яких і складає його сутність:

– можливість відхилення від бажаної мети, заради якої здійснювалася обрана альтернатива;

– ймовірність досягнення бажаного результату;

– відсутність впевненості в досягненні поставленої мети;

– можливість матеріальних, моральних та інших втрат, пов'язаних зі здійсненням обраної в умовах невизначеності альтернативи.

Важливим елементом ризику є наявність імовірності відхилення від обраної мети. При цьому можливі відхилення як негативного, так і позитивного характеру.

Таким чином, основними причинами невизначеності і, отже, джерелами ризику є:

1. Спонтанність природних процесів і явищ, стихійні лиха.

2. Випадковість.

3. *Наявність протиборчих тенденцій, зіткнення суперечливих інтересів.* Проявів цього джерела ризику існує досить багато — від міжнаціональних конфліктів до конкуренції і звичайної розбіжності інтересів.

4. *Неповнота, недостатність інформації* про об'єкт, процес, явище, стосовно якого приймається рішення, обмеженість можливостей людини у зборі й переробці інформації, постійна змінюваність цієї інформації.

Найбільш важливими елементами, покладеними в основу класифікації ризиків, є такі:

1. За сферою виникнення:

– *внутрішні* і *зовнішні* ризики.

Зовнішні фактори, що впливають на рівень ризику:

– *фактори прямого впливу* (зміни законодавства, податкова система; корупція, рекет; конкуренція тощо);

– *фактори непрямого впливу* (політична обстановка, міжнародні події, економічне становище, стихійні лиха тощо).

Внутрішні фактори, що впливають на рівень ризику:

– стратегія фірми;

– принципи діяльності фірми;

– ресурси та їх використання;

– якість і рівень використання маркетингу.

До внутрішніх факторів також відносять: недосвідченість керівника, фінансові прорахунки, погану організацію праці, витік конфіденційної інформації, недостатні знання в галузі маркетингу і менеджменту, нераціональне використання ресурсів підприємства, низька мотивація праці тощо.

2. За рівнем ухвалення рішення: *макроекономічний* ризик (глобальний) і *ризик на рівні окремої фірми* (локальний).

3. За тривалістю: *короткочасні* і *постійні* ризики.

4. За ступенем ризику: *припустимий, критичний і катастрофічний* ризик.

5. За ступенем правомірності: *виправданий* і *невиправданий* ризики.

6. Ризики, які *страхуються* або *не страхуються.*

7. За часом виникнення: *ретроспективні, поточні і перспективні ризики.*

8. За основними факторами виникнення: *політичні ризики, економічні ризики.*

Економічні ризики – це ризики, обумовлені несприятливими змінами в економіці підприємства або економіці країни.

Найбільш розповсюдженими видами економічного ризику є зміна кон'юнктури ринку, незбалансована ліквідність (неможливість вчасно виконувати платіжні зобов'язання), зміна рівня керування й ін.

9. За характером наслідків: *чисті й спекулятивні ризики*.

Чисті ризики (у літературі їх іноді називають простими або статичними) характеризуються тим, що вони практично завжди несуть у собі втрати для підприємницької діяльності.

Причинами чистих ризиків можуть бути стихійні лиха, нещасні випадки, злочинні дії, недієздатність організації і багато чого іншого.

Спекулятивні ризики (у літературі їх іноді називають *динамічними* або *комерційними)* характеризуються тим, що вони можуть нести в собі як втрати, так і додатковий прибуток для підприємця стосовно очікуваного результату. Причинами спекулятивних ризиків можуть бути зміна кон'юнктури ринку, зміна курсів валют, зміна податкового законодавства й ін.

10. За сферою підприємницької діяльності: *виробничий, комерційний, фінансовий ризик, а також ризик страхування*.

Виробничий ризик пов'язаний з невиконанням підприємством своїх планів і зобов'язань з виробництва продукції і послуг внаслідок несприятливого впливу зовнішнього середовища, а також неадекватного використання нової техніки і технологій, сировини, робочого часу.

Комерційний ризик – ризик, що виникає в процесі реалізації товарів і послуг, зроблених або закуплених підприємцем.

Причинами комерційного ризику є: зниження обсягу реалізації внаслідок зміни кон'юнктури або інших обставин, підвищення закупівельної ціни товарів, втрати товару в процесі обігу, підвищення витрат обігу та ін.

Фінансовий ризик пов'язаний з можливістю невиконання фірмою своїх фінансових зобов'язань. Основними причинами фінансового ризику є: знецінювання інвестиційно-фінансового портфеля внаслідок зміни валютних курсів, нездійснення платежів тощо.

Отже, *фінансовий ризик* – це ймовірність виникнення несприятливих фінансових наслідків у формі втрати доходу або капіталу в ситуації невизначеності умов здійснення його фінансової діяльності.

Іншими словами, *фінансовий ризик* – це ризик, що виникає при здійсненні фінансових угод або фінансового підприємництва, де в ролі товару виступають або валюта, або цінні папери, або грошові кошти.

До фінансового ризику належать:

– *валютний ризик* – це ймовірність фінансових втрат у результаті зміни курсу валют, що може відбутися в період між укладанням контракту та здійсненням фактичних розрахунків за ним;

– *кредитний ризик* – виникає в процесі ділового спілкування підприємства з його кредиторами (банком; постачальниками і посередниками; акціонерами). Тобто, кредитний ризик зв'язаний з можливістю невиконання фірмою своїх зобов'язань перед інвестором;

– *інвестиційний ризик* – пов'язаний зі специфікою вкладення фірмою коштів у різні проекти, тобто це ризик, пов'язаний із вкладенням засобів у цінні папери.

Страховий ризик – ризик настання передбаченої умовами страхування події, у результаті чого страховик зобов'язаний виплатити страхове відшкодування (страхову суму). Результатом ризику є збитки, викликані неефективною страховою діяльністю як на етапі, що передує укладанню договору страхування, так і на наступних етапах – перестрахування, формування страхових резервів тощо. Основними причинами страхового ризику є: неправильно визначені страхові тарифи, азартна методологія страхувальника тощо.

Крім цих ризиків, існують ще інфляційні, процентні, депозитні, податкові, структурні і криміногенні фінансові ризики.

Підприємства повинні використовувати методи і шляхи мінімізації ризику для того, щоб:

1) уникнути появи ризику;

2) знизити вплив ризику на результати фінансово-виробничої діяльності.

Прийняття ризику може бути:

– *заплановане* (самострахування, тобто створення резервного фонду за рахунок відрахування з прибутку на випадок виникнення непередбаченої ситуації). Цей фонд є мертвим капіталом і не приносить прибутку;

– *незаплановане* (фірмі доводиться покривати втрати від ризику з будь-яких ресурсів, що залишилися після втрат).

Скорочення втрат можна здійснити шляхом:

– *поділу ризиків* (за рахунок поділу активів фірми);

– *об'єднання ризиків* (ризик поділяється між декількома суб'єктами економіки).

Основні методи мінімізації ризику:

1. *Диверсифікація* – це поділ активів фірми з наступним об'єднанням ризиків. Диверсифікованість полягає в розподілі зусиль і капіталовкладень між різноманітними видами діяльності, які є пов'язаними один з одним.

2. *Запобігання ризику* – цей метод полягає в розробці таких заходів, що цілком виключають конкретний вид фінансового ризику.

3. *Лімітування концентрації ризику* – використовується для фінансових операцій, які здійснюються у зоні критичного або катастрофічного ризику.

4. *Хеджування* – це внутрішній механізм нейтралізації фінансових ризиків, заснований на використанні відповідних видів фінансових інструментів (х*еджування* за допомогою ф'ючерсних контрактів, х*еджування* з використанням опціонів).

5. *Розподіл ризиків* – цей метод заснований на частковій передачі ризиків партнерам з окремих фінансових операцій.

6. *Самострахування* – цей метод заснований на резервуванні підприємством частини фінансових ресурсів, яку можна направити на ліквідацію негативних фінансових наслідків (формування резервного фонду, формування цільових резервних фондів тощо).

Прийняте у світовій практиці законодавство про підприємства і підприємницьку діяльність **визначає підприємництво як ініціативну, самостійну діяльність громадян і їхніх об'єднань, спрямовану на одержання прибутку, що здійснюється на свій *ризик* і під свою майнову відповідальність.**

Здійснення підприємництва в його будь-якому вигляді пов'язано з ризиком, що прийнято називати господарським, або підприємницьким.

Під *господарським (підприємницьким)* розуміють ризик, що виникає при будь-яких видах діяльності, пов'язаних з виробництвом продукції, товарів, послуг, їх реалізацією, товарно-грошовими і фінансовими операціями, комерцією, здійсненням соціально-економічних і науково-технічних проектів. У розглянутих видах діяльності доводиться використовувати матеріальні, трудові, фінансові, інформаційні (інтелектуальні) ресурси, отже, ризик пов'язаний із загрозою повної або часткової втрати цих ресурсів.

У ринковій економіці першорядними елементами ризику є непередбачуваність кон'юнктури ринку, попиту, цін і поведінки споживача.

У підсумку підприємницький ризик характеризується як небезпека потенційно можливої, ймовірної втрати ресурсів або недоодержання доходів порівняно з варіантом, розрахованим на раціональне використання ресурсів у даному виді підприємницької діяльності.

Будь-яка підприємницька діяльність неминуче пов'язана з витратами, тоді як збитки трапляються при несприятливому збігу обставин, прорахунках і представляють додаткові витрати понад намічених. Якщо ризик – це небезпека втрати ресурсів або доходу, то його кількісна міра обумовлюється абсолютним або відносним рівнем утрат.

Абсолютною мірою ризику може бути величина можливих втрат у матеріально-речовинному (фізичному) або вартісному (грошовому) вираженні.

Відносною мірою ризику є величина можливих втрат, віднесена до певної бази, у вигляді якої приймають або майновий стан підприємця (вартість основних фондів й оборотних коштів підприємства), або загальні витрати ресурсів на даний вид підприємницької діяльності, або очікуваний дохід (прибуток) від підприємництва.

Надалі базові показники, що використовуються для порівняння, будемо називати розрахунковими, або очікуваними, показниками прибутку, витрат, виторгу. Значення цих показників, як уже відомо, визначаються при розробці бізнес-плану, у процесі техніко-економічного обґрунтування підприємницького проекту, угоди.

Особливі види грошового збитку пов’язані з інфляцією, зміною валютного курсу гривні, додатковим до узаконеного вилученням коштів підприємств у державний (республіканський, місцевий) бюджет.

Поряд з остаточними, безповоротними можуть бути і тимчасові фінансові втрати, обумовлені заморожуванням рахунків, несвоєчасною видачею коштів, відстрочкою виплати боргів.

Втрати часу існують тоді, коли процес підприємницької діяльності йде повільніше, ніж було намічено. Пряма оцінка таких втрат здійснюється в годинах, днях, тижнях, місяцях запізнювання в одержанні наміченого результату. Щоб перевести оцінку втрат часу у вартісний вимір, необхідно встановити, до яких втрат доходу, прибутку від підприємництва здатні призводити випадкові втрати часу.

Спеціальні види втрат виявляються через завдання шкоди здоров’ю і життю людей, навколишньому середовищу, престижу підприємця, а також внаслідок інших несприятливих соціальних і морально-психологічних чинників. Найчастіше спеціальні види втрат важко визначити в кількісному, тим більше у вартісному вираженні.

Під час проведення комплексного аналізу ймовірних втрат для оцінки ризику важливо не тільки встановити всі джерела ризику, але й виявити, які джерела превалюють.

Аналізуючи розглянуті вище види втрат, необхідно розділити ймовірні втрати на визначальні і побічні, виходячи із загальної оцінки їхньої величини.

Під час визначення підприємницького ризику побічні втрати можуть бути виключені з кількісної оцінки рівня ризику.

Припустімо, що в результаті попереднього аналізу вдалося “відфільтрувати” найбільш вагомі за величиною та ймовірністю виникнення види втрат. Далі слід вилучити випадкові складові втрат і відокремити їх від систематично повторюваних.

У принципі треба враховувати тільки випадкові втрати, що не піддаються прямому розрахунку, безпосередньому прогнозуванню і тому не враховані в підприємницькому проекті. Якщо втрати можна заздалегідь передбачати, то вони повинні розглядатися не як втрати, а як неминучі витрати і включатися в розрахункову калькуляцію.

Так, наприклад, якщо передбачається зміна цін, податків у ході здійснення господарської діяльності, підприємець зобов’язаний врахувати цей факт у бізнес-плані.

Отже, перш ніж оцінювати ризик, обумовлений дією виключно випадкових факторів, вкрай бажано відокремити систематичну складову втрат від випадкової. Це необхідно і з позицій математичної коректності, тому що процедури дій з випадковими величинами істотно відрізняються від процедур дій з детермінованими величинами.

Специфічними джерелами втрат і факторами, що впливають на появу випадкових втрат у виробничому, комерційному, фінансовому підприємництві є наступні.

По-перше, це втрати від впливу непередбачених політичних факторів. Такі втрати породжують політичний ризик. Він виявляється у формі несподіваних, обумовлених політичними міркуваннями і подіями змін умов господарської діяльності, що створюють несприятливий для підприємця фон і здатні привести до підвищених витрат ресурсів і втрат прибутку.

Типові джерела такого ризику – збільшення податкових ставок, уведення примусових відрахувань, зміна договірних умов, трансформація форм і відносин власності, відчуження майна і коштів за політичними мотивами.

Величину можливих втрат й обумовлений ними ступінь ризику в цьому випадку дуже важко передбачати.

Досить близькі за непередбачуваністю втрати, зумовлені стихійними лихами, а також злодійством і рекетом.

Досить специфічними є можливі втрати, викликані недосконалістю методології і некомпетентністю осіб, що формують бізнес-план і здійснюють розрахунок прибутку і доходу. Якщо в результаті дії цих факторів величини очікуваних значень прибутку і доходу від підприємницького проекту будуть завищені, а реально отримані результати виявляться нижчими, то різниця між ними сприймається як втрати.

Особливе місце посідають втрати підприємця, обумовлені несумлінністю або неспроможністю компаньйонів. Ризик виявитися обманутим в угоді або зіштовхнутися з неплатоспроможністю боржника, безповоротністю боргу, на жаль, досить реальний. Підкреслимо знову: цілком уникнути ризику практично неможливо, але, знаючи, що породжує втрати, підприємець здатний знизити їхню погрозу, зменшуючи дію несприятливого фактора.

2.1.3. Постановка модельних задач прийняття рішень в умовах ризику

У задачах прийняття рішень в умовах визначеності вважалося, що ОПР володіє повною інформацією по наявній проблемі (своїми оцінками чи експертизами). На відміну від них, у задачах прийняття рішень в умовах ризику ОПР не знає, як зміниться ситуація при виборі тої чи іншої альтернативи при прийняті деякого рішення, але є об’єктивні ймовіності розвитку можливих ситуацій.

Математичну модель задачі прийняття рішення в умовах ризику можна сформулювати наступним чином:

Нехай задано деякі дискретні множини альтернатив $X = \{x_1, ..., x_m\}$ і станів середовища $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ та матриця розмірністю $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

де $a_{i,j}$ – числові оцінки, які характеризують наслідки прийняття i-ї альтернативи x_i при j-му стані середовища y_j. Крім того, задаються ймовірності p_j, які відповідають станам середовища y_j.

Щоб прийти до одного і, по можливості, найкращого наслідку в разі, коли альтернативи *X* неоднаково проявляють себе у різних станах середовища *Y*, уводять оціночні функції. Кожній альтернативі x_i приписується числова оцінка z_i, яка характеризує всі її наслідки в цілому. Процедуру прийняття рішення можна після цього зробити, як і в умовах визначеності, максимізуючи чи мінімізуючи оціночну функцію (критерій).

На практиці сформульовану модельну задачу буває зручно подати у вигляді моделі гри з “природою”.

2.1.4. Поняття гри з “природою”

Гра – це математична модель процесу функціонування конфліктуючих елементів систем, у якій дії гравців відбуваються за певними правилами, що мають назву “стратегії”. Її поширенню останнім часом сприяв як розвиток комп’ютерної техніки, так і створення аналітичного апарату, що дозволяє знаходити аналітичні рішення для широкого класу завдань. Основний постулат теорії ігор – будь-який суб’єкт системи щонайменше так само розумний, як і оперуюча сторона, і робить усе можливе, щоб досягти своїх цілей. Від реального конфлікту гра (математична модель конфлікту) відрізняється тим, що вона проводиться за певними правилами, які встановлюють порядок і черговість дій суб’єктів системи, їх інформованість, порядок обміну інформацією, формування результату гри.

Необхідність прийняття рішень в умовах невизначеності притаманна відносинам між суб’єктами господарювання. Повна (безнадійна) невизначеність означає відсутність будь-якої інформації про ймовірності реалізації сценарію розвитку майбутнього.

Необхідність прийняття рішень заснована на об’єктивному характері наперед неузгоджених дій суб’єктів господарювання щодо балансування системи відносин і зниження рівня їх ризиків. Наслідком прийняття рішень в умовах невизначеності є підприємницькі ризики, які, як і невизначеність, притаманні ринковому способу господарювання. Тому суб’єкт господарювання не може ухилитися від негативного впливу цих явищ на результати підприємницької діяльності, але він здатний понизити рівень ризику, забезпечити прийняття оптимальних рішень.

На практиці зустрічаються ситуації, в яких один з учасників господарського процесу (гравців) байдужий до виграшу і не бажає використовувати промахи іншого. Ця ситуація виникає у випадку, коли в якості одного з гравців виступає “природа”.

Терміном “природа” домовимося позначати комплекс зовнішніх умов, при яких прийдеться приймати рішення. Термін “природа” характеризує певну об’єктивну дійсність, яку не слід приймати буквально, хоча на практиці можуть зустрічатися ситуації, в яких гравцем дійсно виступає “природа”, тобто обставини, що зв’язані з природними умовами.

Ігри з “природою” застосовують для аналізу економічних ситуацій, оцінки ефективності рішень, що приймаються, та вибору найбільш переважних альтернатив, для яких ризик пов’язаний з сукупністю невизначених факторів. Зокрема, модель ігри з “природою” може бути використана при виборі оптимального інвестиційного проекту. У цьому випадку як стратегії гравця розглядають різні порівнянні інвестиційні проекти, а стани “природи” інтерпретують як сценарії майбутнього, яким відповідають показники ефективності для кожного проекту. В умовах повної невизначеності заздалегідь невідома ймовірність реалізації того або іншого сценарію, а значить і ймовірність отримання економічного ефекту.

В іграх з "природою" гравця називають статистиком. Ігри з "природою" називають статистичними.

Статистик (гравець) A має m можливих стратегій A_1, A_2, ..., A_m. Стратегія гравця – план, відповідно до якого гравець здійснює свій вибір дії в кожній з можливих ситуацій і при будь-якій можливій інформації. У якості можливих ситуацій можуть бути економічні показники стану підприємства, технічні параметри систем, проектуються, різні варіанти розв'язку поставлених задач тощо.

Гравець "природа" $П$ має n можливих стратегій $П_1$, $П_2$,..., $П_n$, причому під стратегією "природи" будемо розуміти повну сукупність зовнішніх умов, в яких статистику (гравцю) A приходиться приймати рішення, тобто обирати свою стратегію. В якості стратегій (станів) можуть бути: рівень попиту на товари, ринкові ціни, умови експлуатації виробничих та технічних систем, дії конкурента тощо.

Особливість ігри з "природою" полягає в тому, що свідомо діє тільки один з гравців – статистик. Гравець "природа" $П$ свідомо проти статистика не діє, а виступає як партнер по грі, що не має конкретної мети й випадковим образом вибирає чергові "ходи". Будемо вважати, що з попереднього досвіду статистику відомі можливі стани "природи", а іноді й ймовірності, з якими "природа" їх реалізує. Ці ймовірності називаються апріорними. Статистик може уточнювати свої знання про стани (стратегії) $П_1$, $П_2$,..., $П_n$ "природи" і про ймовірності q_1, q_2,…, q_n їхньої реалізації шляхом проведення випробувань. У результаті отримують ймовірності, які називаються апостеріорними. Але проведення випробувань потребує витрат часу та матеріальних витрат (зокрема у економіці), тому розглянемо статистичні ігри без проведення випробувань.

Щодо взаємовідносин статистика A з “природою” він може використовувати як чисті стратегії $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$, так і змішані стратегії з ймовірностями p_i $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо статистик має можливість зробити оцінку наслідкам застосування кожної зі своєї чистої стратегії $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ в залежності від кожного стану (стратегії) “природи” $\Pi_1,\ \Pi_2, ...,\ \Pi_n$, тобто йому відомо чисельний результат ігри – доход $a_{i,j}$ для кожної допустимої комбінації $\left(A_i, \Pi_j\right)$, то статистичну гру можна задати платіжною матрицею, яка містить виграші гравця A (табл. 2.4) або у вигляді матриці виграшів (2.1).

Табл. 2.4. Платіжна матриця гри

A \ Π	Π_1	Π_2	$\cdots$	Π_n
A_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
A_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n}$

Якщо гру задано платіжною матрицею, в якій вказано величини програшів гравця *A*, то платіжна матриця гри в цьому випадку називається матрицею програшів.

Приклад 2.8. Для виробництва продукції на підприємстві споживання сировини в залежності від якості складає 100, 120, 130 або 140 одиниць. Якщо для випуску запланованого обсягу продукції сировини буде недостатньо, то запас її можна поповнити, що потребує додаткових витрат у розмірі 5 одиниць за одиницю сировини. Якщо запас сировини перевищить потреби, то додаткові витрати на зберігання залишків складуть 2 одиниці за одиницю сировини. Побудувати матрицю виграшів та матрицю програшів для описаної виробничої ситуації.

Розв'язання. У ситуації, що розглядається, в якості статистика (гравця А) виступає адміністрація підприємства, яка формує план-виписку продукції, тобто стратегії $A_1(100)$, $A_2(120)$, $A_3(130)$ і $A_4(140)$. Другим гравцем – "природа" – будемо вважати фактичну витрату сировини в процесі виробництва, який залежить від якості сировини і складає 100, 120, 130 або 140 одиниць (стани $П_1(100)$, $П_2(120)$, $П_3(130)$, $П_4(140)$). Елементи $a_{i,j}$ матриці гри (матриці виграшів) будуть характеризувати додаткові витрати, що викликані доставкою сировини або її зберіганням.

Так, у ситуації $(A_2, П_3)$ не вистачає 10 одиниць сировини, які слід доставити, що потребує додаткових витрат $10 \cdot 5 = 50$ одиниць. За аналогічних міркувань отримаємо матрицю виграшів, яку представлено у вигляді табл. 2.5.

Табл. 2.5. Матриця виграшів ігри

A \ $П$	$П_1(100)$	$П_2(120)$	$П_3(130)$	$П_4(140)$
$A_1(100)$	0	–100	–150	–200
$A_2(120)$	–40	0	–50	–100
$A_3(130)$	–60	–20	0	–50
$A_4(140)$	–80	–40	–20	0

Якщо у матриці гри відобразити програші гравця A, то отримаємо матрицю програшів у вигляді табл. 2.6.

Табл. 2.6. Матриця програшів ігри

$A \backslash П$	$П_1(100)$	$П_2(120)$	$П_3(130)$	$П_4(140)$
$A_1(100)$	0	100	150	200
$A_2(120)$	40	0	50	100
$A_3(130)$	60	20	0	50
$A_4(140)$	80	40	20	0

З метою виявлення переваги однієї стратегії у порівнянні з іншою при певному стані "природи" від платіжної матриці слід перейти до матриці ризиків.

Ризиком $r_{i,j}$ статистика при застосування чистої стратегії A_i при стані "природи" $П_j$ називається різниця між максимальним виграшем $\max_i a_{i,j}$, який би він мав можливість отримати достовірно, знаючи, що "природою" буде реалізований стан $П_j$, і тим виграшем $a_{i,j}$, який він отримує, використовуючи стратегію A_i, не знаючи, який стан $П_j$ буде реалізовано "природою":

$$r_{i,j} = \max_i a_{i,j} - a_{i,j},$$

де $\max_i a_{i,j}$ – максимально можливий виграш статистика при стані "природи" $П_j$ (максимальний елемент j-го стовпця матриці виграшів).

Якщо елементи платіжної матриці гри містять інформацію про витрати, то ризиком $r_{i,j}$ статистика при застосування чистої стратегії A_i при стані "природи" $П_j$ називається різниця між мінімальними витратами (збитками) $\min_i a_{i,j}$, які би він мав можливість понести достовірно знаючи, що "природою" буде реалізований стан $П_j$, і тими витратами $a_{i,j}$, який він понесе, використовуючи стратегію A_i, не знаючи який стан $П_j$ буде реалізований “природою”:

$$r_{i,j} = a_{i,j} - \min_i a_{i,j}.$$

Величина ризику – це величина плати за відсутність інформації про стан зовнішнього середовища.

Матриця, елементи якої ризики $r_{i,j}$, називається *матрицею ризиків* або *матрицею упущених можливостей*:

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m,1} & r_{m,2} & \dots & r_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці ризиків $r_{i,j}$ свідчать про відносні втрати, які можуть виникнути у разі застосування гравцем-статистиком A стратегії замість оптимальної в умовах стану $П_j$.

Властивості матриці ризиків:

1. Всі елементи матриці ризиків є невід’ємними числами.

2. У кожному стовпчику матриці ризиків є як мінімум один нульовий елемент.

Незалежно від вигляду матриці гри необхідно вибрати стратегію гравця, яка була б найбільш вигідною у порівнянні з іншими.

Для знаходження рішення в умовах ризику слід використовувати рекомендації щодо прийняття рішень, які сформульовані у вигляді певних правил (критеріїв).

Приклад 2.9. Спеціалісти фірми, що виробляє оргтехніку, провели аналіз ринку нових видів техніки та встановили, що можливий випуск техніки видів A_1, A_2, A_3, A_4. Виділено п’ять станів $П_1, П_2, П_3, П_4, П_5$, кожен з яких означає певне поєднання факторів (якість продукції, реклама, затребуваність товару на ринку тощо), що впивають на ефективність рішення. Економічна ефективність випуску партії оргтехніки змінюється залежно від станів “природи” і задана матрицею ефективності:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Побудувати матрицю ризиків за заданою матрицею ефективності (виграшів).

Розв’язання. Спеціалісти фірми, що виробляє оргтехніку, будуть виступати у цій задачі в якості гравця – статистика. Різноманітні стани, які поєднують певні фактори, будуть виступати у якості гравця “природи”. Для кожної i-ї стратегії статистика A знайдемо максимальний виграш $\max\limits_i a_{i,j}$ та побудуємо матрицю ризиків за правилом $r_{i,j}=\max\limits_i a_{i,j}-a_{i,j}$:

$$R=\begin{pmatrix} 8-2 & 7-5 & 8-4 & 9-3 & 8-2 \\ 8-5 & 7-7 & 8-2 & 9-1 & 8-8 \\ 8-8 & 7-3 & 8-7 & 9-9 & 8-4 \\ 8-6 & 7-1 & 8-8 & 9-3 & 8-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.1.5. Обчислення показників ризику

У кожній ситуації, пов’язаній з ризиком, виникають запитання: що означає виправданий (допустимий) ризик, де проходить межа, яка відділяє допустимий ризик від нерозумного. Важливо виявити ступінь ризику, причому слід оцінити ймовірність того, що певна (несприятлива) подія має шанси відбутися, а тоді – як це вплине на ситуацію (рішення).

При досить великому ступені ризику в альтернативних стратегіях менеджери інколи приймають варіант рішення з дещо меншою ефективністю або чистою приведеною вартістю, але з більшими шансами на своєчасну та успішну реалізацію прийнятого варіанта.

Якщо малоймовірно, що відбудуться несприятливі наслідки, то ризик малий. Малий він і в тому випадку, коли ймовірність збитків велика, а самі по собі збитки малі.

Ймовірність настання певної події може бути визначена об'єктивним та суб'єктивним методами.

Об'єктивний метод визначення ймовірності ґрунтується на обчисленні частоти, з якою в минулому відбувалась певна подія.

Суб'єктивний метод спирається на використання суб'єктивних оцінок та критеріїв, які ґрунтуються на різних припущеннях (міркування, досвід, оцінки експертів, думка консультанта, порада консалтингової фірми тощо).

Важливою проблемою є розробка методик кількісної оцінки ступеня ризику в різних сферах економічної діяльності, розвиток відповідного механізму контролювання економічного ризику та керування ним на засадах системного аналізу.

На практиці часто обмежуються спрощеними підходами, оцінюючи ризик спираються один чи кілька головних показників, параметрів, що є найбільш важливими узагальненими характеристиками у даній конкретній ситуації.

У ряді випадків, зокрема страхуванні, величину (ступінь) ризику визначають як ймовірність настання небажаних наслідків. У цьому випадку:

$$W = p_H ,$$

де p_H – ймовірність настання небажаних наслідків, W – величина ризику.

У процесі аналізу збитків відокремлюють чотири зони: безризикову, допустимого ризику, критичного ризику та катастрофічного ризику. Далі потрібно для кожної із запропонованих зон ризику поставити у відповідність кількісні показники, критерій ризику.

У прикладних проблемах економічного ризику для оцінки його величини широко використовується ймовірність перевищення заданого рівня збитків, що обчислюється за формулою:

$$W(x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x).$$

Типовий графік кривої розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків зображений на рис. 2.2 (крива $W(x)$).

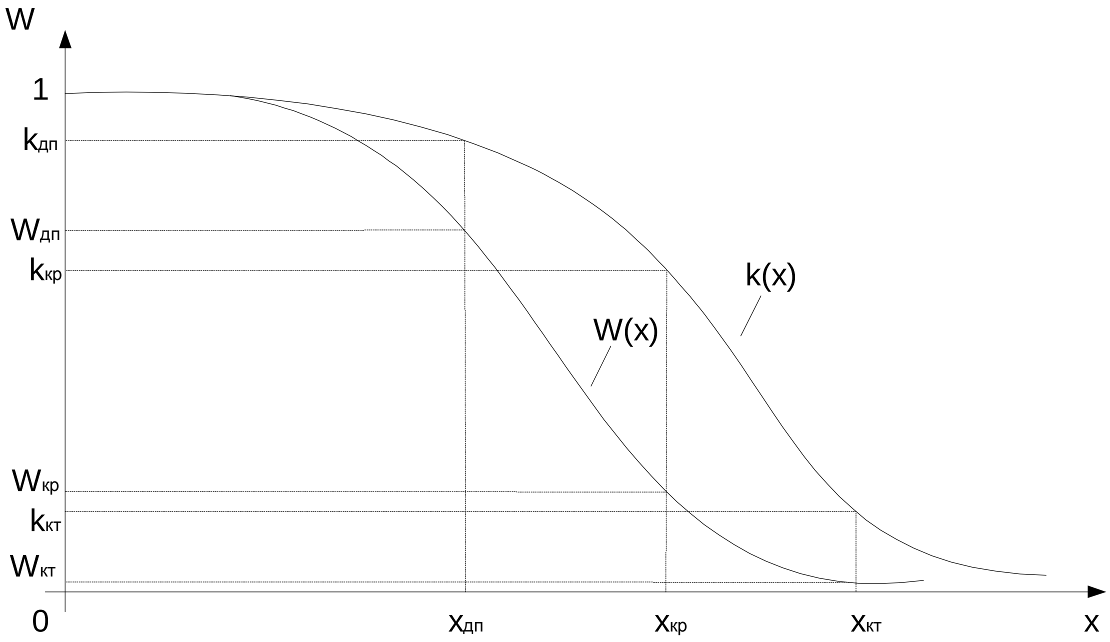

Рис. 2.2. Порівняння очікуваної ймовірності перевищення випадкових збитків з гранично допустимою

Виявляють три наступні найважливіші базові показники ризику.

1. Показник допустимого ризику:

$$W_{дп} = W\left(x_{дп}\right) = P\left(X \geq x_{дп}\right) = 1,$$

тобто $W_{дп}$ – це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий рівень $x_{дп}$.

2. Показник критичного ризику:

$$W_{кр} = W\left(x_{кр}\right) = P\left(X \geq x_{кр}\right) = 1,$$

тобто $W_{кр}$ – це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий критичний рівень $x_{кр}$.

3. Показник катастрофічного ризику:

$$W_{кт} = W\left(x_{кт}\right) = P\left(X \geq x_{кт}\right) = 1,$$

тобто $W_{кт}$ – це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий катастрофічний рівень $x_{кт}$.

Знання цих показників допомагає прийняти рішення стосовно здійснення певної підприємницької діяльності. Але для остаточного прийняття рішення інформації про значення названих показників не достатньо – необхідно ще задати (встановити або прийняти) їх граничні величини, щоб не потрапити в зону неприйнятного ризику. Такі величини називають критеріями відповідно до допустимого, критичного та катастрофічного ризику – $k_{дп}$, $k_{кр}$, $k_{кт}$.

Отже, маючи значення трьох показників ризику та критеріїв граничного ризику, приходимо до таких найбільш загальних умов прийнятності рівня у досліджувальному виді підприємництва:

$$W\left(x_{дп}\right) \le k_{дп},\ W\left(x_{кр}\right) \le k_{кр},\ W\left(x_{кт}\right) \le k_{кт}.$$

Графічне пояснення основних умов прийнятності ризику наведене на рис. 2.2 (крива $k\left(x\right)$).

Приклад 2.10. Під час здійснення багатофазових інвестицій у певного виду підприємницьку діяльність обчислюється величина збитків у вигляді відсотка величини реальних збитків відносно до розрахункової суми виручки. Було встановлено, що обчислена таким чином величина збитків підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами: математичне сподівання $m = 20\%$ та середньоквадратичне відхилення $s = 4\%$. Фірма-інвестор встановила для себе такі критерії ризику: $k_{дп} = 20\%$, $k_{кр} = 5\%$, $k_{кт} = 0{,}1\%$. Як вчинити інвестору, якщо керівництво фірми, що прагне отримати інвестиції, вважає реальним показники ризику: $x_{дп} = 24\%$, $x_{кр} = 28\%$, $x_{кт} = 32\%$?

Розв'язання. Оскільки у випадку нормального розподілу випадкової величини X інтегральна функція розподілу $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{x-m}{s}\right)$, де $\Phi(t)$ – функція Лапласа, то

$$W_{дп} = P(X > x_{дп}) = 1 - P(X < x_{дп}) = 1 - F(x_{дп}) =$$

$$= 1 - 0,5 - \left(\Phi\left(\frac{x_{дп} - m}{s} \right) \right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{24 - 20}{4} \right) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587,$$

тобто

$$W_{дп} = 0,1587 < 0,2 = k_{дп}.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$W_{кр} = P(X > x_{кр}) = 0,5 - \Phi(2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228,$$

тобто

$$W_{кр} = 0,0228 < 0,05 = k_{кр};$$

$$W_{кт} = P(X > x_{кт}) = 0,5 - \Phi(3) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135,$$

тобто

$$W_{кт} = 0,00135 > 0,001 = k_{кт}.$$

Виходячи з того, що $W_{кт} > x_{кт}$, а також враховуючи, що інвестори – люди дуже обережні, робимо висновок, що фірмі-прохачу інвестиція не буде надана.

Вважають, що економічний показник (або його характеристики) має позитивний інгредієнт ($F = F^{+}$), якщо під час прийняття рішення орієнтуються на його максимальне значення.

Вважають, що економічний показник (або його характеристики) має негативний інгредієнт ($F = F^{-}$), якщо під час прийняття рішення орієнтуються на його мінімальне значення.

В абсолютному вираженні міра (ступінь) ризику очікуваної невдачі (в процесі досягнення мети) може визначатися як добуток ймовірності невдачі (небажаних наслідків) на величину цих небажаних наслідків (збитки, платежі тощо), які мають місце в цьому випадку, тобто

$$W = W^{-} = p_{н} \cdot x_{н},$$

де $x_{н}$ – величина цих наслідків ($X = x_{н}$).

У багатьох випадках, щоб кількісно визначити ризик, необхідно знати всі можливі наслідки окремої події $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ та ймовірності цих наслідків $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, $\sum_{j=1}^{n} p_j$.

Очікуване значення (математичне сподівання), яке пов'язане з невизначеною ситуацією, є середньозваженим усіх можливих результатів, де ймовірність кожного з них використовується як частота або вага відповідного значення. Сподіване значення є центром групування значень випадкової величини X, а тому його можна розглядати як результат (ризик), що очікується в середньому. У дискретному вигляді воно обчислюється за формулою:

$$m = M(X) = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \cdot x_j \right).$$

Приклад 2.11. Надаючи, банківський кредит комерційній фірмі, вважають, що збитки можливі в 20% випадків. Величина збитків може становити 20 тис. гривень. Визначити величину ризику.

Розв'язання. Оскільки $x_н = 20000$ грн, $p_н = 0{,}2$, то величина ризику становить:

$$W = W^- = p_н \cdot x_н = 20000 \cdot 0{,}2 = 4000 \text{ грн}.$$

2.1.6. Моделі прийняття рішень в умовах ризику

Розглянемо модель прийняття рішення інвестором про будівництво об'єкту в певному місті (множина цих місць обмежена містобудівельними рішеннями, вартістю землі тощо). Приймаючи i-те рішення, інвестор очікує отримати дохід A_i при реалізації j-ї ситуації в момент завершення будівництва. Множина можливих ситуацій може бути формалізована на ретроспективній базі. Матриця $A = \left\| a_{i,j} \right\|$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) є матрицею доходів. Тоді при відомій ситуації на ринку інвестор прийняв би рішення, яке максимізує його дохід $a_j = \max_i a_{i,j}$. Приймаючи i-те рішення, інвестор може отримати дохід, який відрізняється від максимального, що, як відомо, приймається за величину ризику $r_{i,j}$ i-го рішення: $r_{i,j} = a_j - a_{i,j} = \max_i a_{i,j} - a_{i,j}$. З урахуванням ризиків інвестор прийме рішення на основі одного з критеріїв ефективності.

Прийняття рішення інвестором в умовах ризику (часткової невизначеності) розглядається як випадок з відомим розподілом ймовірностей. Якщо дохід інвестора прийняття i-го рішення щодо будівництва представляє собою випадкову величину A_i з розподілом $P = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$, то очікуваний дохід (математичне сподівання) дорівнює $M\left(A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot p_j$, причому слід шукати рішення, при якому досягається максимум:

$$\max_i M\left(A_i\right) = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot p_j .$$

Другий критерій полягає в мінімізації очікуваного ризику. Якщо ризики R_i при прийнятті i-го рішення являються випадковими величинами, то рішення інвестором вибирається з умови:

$$\min_i M\left(R_i\right) = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} \cdot p_j .$$

Інше визначення ризиків полягає в оцінюванні середнього квадратичного відхилення (міри розкидання можливих значень доходів інвестора навколо очікуваного середнього):

$$r_i = s\left(A_i\right) = \sqrt{D\left(A_i\right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \cdot p_j - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot p_j\right)^2} .$$

Якщо в якості оцінки обрати ризик $r_i = s\left(A_i\right)$, тоді інвестор може прийняти рішення на основі оцінки двох критеріїв: середніх очікуваних доходів $M\left(A_i\right)$ і ризиків $r_i = s\left(A_i\right)$, $i = \overline{1,m}$. Якщо при порівнянні i-х рішень серед пар ($M(A_i), r_i = s(A_i)$), $i=\overline{1,m}$ існує рішення i_0, яке домінує над іншими, таке, що задовольняє нерівностям $M\left(A_{i_0}\right) \geq M(A_i)$, $r_{i_0} \leq r_i$, $i=\overline{1,m}$, то воно являється оптимальним.

У протилежному випадку необхідно будувати множину рішень оптимальних по Парето, тобто які не можуть бути покращені за двома критеріями, і здійснювати вибір серед них.

Розглянемо як ілюстрацію вибір деякою особою, що приймає рішення (ОПР) одного з двох варіантів інвестицій в умовах ризику. Припустимо, що є два проекти A та B, в які зазначена ОПР може вкласти кошти. Проект A у визначений момент у майбутньому забезпечує випадкову величину прибутку. Припустимо, що її середнє очікуване значення, математичне сподівання, дорівнює m_A, а дисперсія дорівнює d_A. Для проекту B ці числові характеристики прибутку як випадкової величини передбачаються рівними відповідно m_B та d_B. Середньоквадратичні відхилення рівні відповідно r_A та r_B. Можливі такі випадки:

а) $m_A = m_B$, $r_A < r_B$;

б) $m_A > m_B$, $r_A < r_B$;

в) $m_A > m_B$, $r_A = r_B$;

г) $m_A > m_B$, $r_A > r_B$;

д) $m_A < m_B$, $r_A < r_B$.

У перших трьох випадах варто вибрати проект A, а в останніх двох випадках рішення про вибір проекту A чи B залежить від відношення до ризику ОПР. Зокрема, у випадку г) проект A забезпечує більш високий середній прибуток, однак він і більш ризикований. Вибір при цьому визначається тим, якою додатковою величиною середнього прибутку компенсується для ОПР задане збільшення ризику. У випадку д) для проекту A ризик менший, але й очікуваний прибуток менший.

Приклад 2.12. Припустимо, що є два інвестиційних проекти. Перший з ймовірністю 0,6 забезпечує прибуток 15 млн. грн, однак з ймовірністю 0,4 можна втратити 5,5 млн. грн. Для другого проекту з ймовірністю 0,8 можна дістати прибуток 10 млн. грн і з ймовірністю 0,2 утратити 6 млн. грн. Який проект вибрати?

Розв'язання. Обидва проекти мають однакову середню прибутковість, рівну 6,8 млн. грн $(0,6\cdot 15+0,4\cdot(-5,5)=0,8\cdot 10+0,2\cdot(-6)=6,8)$. Однак середньоквадратичне відхилення прибутку для першого проекту дорівнює 10,04 млн. грн ($\sqrt{0,6\cdot(15-6,8)^2+0,4\cdot(-5,5-6,8)^2}=10,04$), а для другого – 6,4 млн. грн ($\sqrt{0,8\cdot(10-6,8)^2+0,2\cdot(-6-6,8)^2}=6,4$), тому перевагу має другий проект.

Середньоквадратичне відхилення ефективності рішення часто використовується як міра ризику, воно не зовсім точно відображає реальність. Можливі ситуації, за яких варіанти забезпечують приблизно однаковий середній прибуток і мають однакові середньоквадратичні відхилення прибутку, однак не є рівною мірою ризикованими. Дійсно, якщо під ризиком розуміти ризик банкрутства, то величина ризику повинна залежати від величини вихідного капіталу ОПР чи фірми, яку вона представляє. Теорія Неймана–Моргенштерна цю обставину враховує.

На рис. 2.3 розглянутий випадок вибору з більш ніж двох варіантів інвестицій. Характеристики варіантів показані точками на площині (m,r), де m – середній прибуток, одержуваний у результаті інвестиції, а r – середньоквадратичне відхилення прибутку.

Таким чином, серед варіантів A, B та C (див. рис. 2.3) перевагу має A. З варіантів B, D та H варто було б вибрати H. Варіант H кращий за варіанти C і F. Однак порівняльна перевага – вибір між, наприклад, варіантами A, D, F і G – залежить від схильності ОПР до ризику.

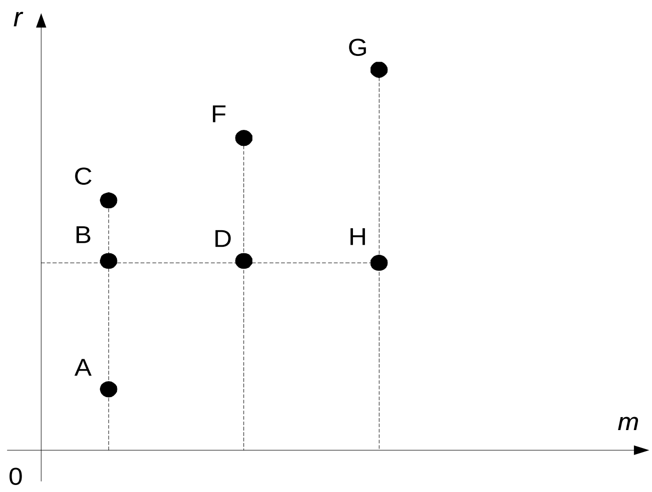

Рис. 2.3. Варіанти вибору інвестицій

Приклад 2.13. Акціонерному товариству (АТ) пропонуються два ризикових проекти, дані про ймовірні надходження по яким наведені у табл. 2.7.

Табл. 2.7. Надходження по проектах

	Проект 1			Проект 2		
Ймовірність події	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4
Наявні надходження, млн. грн	40	50	60	0	50	100

Враховуючи, що фірма має борг у 80 млн. грн, який проект повинні вибрати акціонери і чому?

Розв'язання. Для оцінки ефективності розглянутих інвестиційних проектів (див. рис. 2.3) обчислимо математичні сподівання m_{x_1} і m_{x_2} та середньоквадратичні відхилення d_{x_1} і d_{x_2} для проектів 1 та 2.

Проект 1: $m_{x_1} = 40 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,6 + 60 \cdot 0,2 = 50$ млн. грн.

Проект 2: $m_{x_2} = 0 \cdot 0,4 + 50 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,4 = 50$ млн. грн.

Як видно з обчислень, математичні очікування для обох проектів виявляються однаковими. Можливо, при виборі проекту вирішальним (згідно з рис. 2.3) будуть середньоквадратичні відхилення d_{x_1} і d_{x_2}, (на відміну від рис. 2.3, замість r_1 і r_2 будемо їх позначати d_{x_1} і d_{x_2}, оскільки для студентів такі позначення більш звичні). Отже, середньоквадратичні відхилення для цих проектів відповідно рівні:

$$d_{x_1} = \sqrt{M\left(x_1 - m_{x_1}\right)^2} = \sqrt{0,2 \cdot (40-50)^2 + 0,6 \cdot (50-50)^2 + 0,2 \cdot (60-50)^2} =$$

$$= \sqrt{20+0+20} = \sqrt{40} = 6,324;$$

$$d_{x_2} = \sqrt{M\left(x_2 - m_{x_2}\right)^2} = \sqrt{0,4 \cdot (0-50)^2 + 0,2 \cdot (50-50)^2 + 0,4 \cdot (100-50)^2} =$$

$$= \sqrt{2000} = 44,72.$$

За результатами розрахунку коефіцієнтів варіабельності $n_1 = \dfrac{6,324}{50} =$ $= 0,126$ та $n_2 = \dfrac{44,72}{50} = 0,894$, тож згідно з випадком а) варто вибрати проект 1, тому що при рівних математичних сподіваннях для обох цих проектів ($m_{x_1} = m_{x_2}$ =50) середньоквадратичне відхилення d_{x_1} =6,324 для проекту 1, порівняно з аналогічним показником для проекту 2 d_{x_2} =44,72, більш ніж у 7 разів менше ($\dfrac{0,894}{0,126} = 7,09$).

Отже, проект 1 при середній прибутковості, яка дорівнює 50 млн. грн, характеризується більш ніж у 7 разів меншої варіабельністю, тобто ризикованістю. Здавалося б, без сумнівів варто приймати проект 1. Однак слід звернути увагу на наведену в умові задачі вказівку, що фірма має фіксовані платежі по боргах 80 млн. грн, і цей факт може змінити рішення на протилежне.

Дійсно, у теорії ймовірностей і математичній статистиці відома центральна гранична теорема А. М. Ляпунова, що обґрунтовує так називаний нормальний розподіл, який є найпоширенішим у статистиці, а також у техніці та інших додатках.

Зокрема, якщо припустити прибутковість Pr по проектах 1 і 2 розподіленою за нормальним законом, а підставою для цього є зазначена гранична теорема, то з ймовірністю 0,997 (практично достеменно) можливі значення виграшів і платежів по проектах 1 і 2 відповідно виявляться в діапазонах $m_x \pm 3 \cdot d_x$, а саме:

Проект 1: $\Pr = 50 \pm 3 \cdot 6,324$; 31,03 ≤ Pr ≤ 68,97.

Проект 2: $\Pr = 50 \pm 3 \cdot 44,72$; –84,16 ≤ Pr ≤ 184,16.

Отже, у разі вибору істотно менш ризикового проекту 1 акціонерне товариство може більшою мірою зменшити свій борг у 80 млн. грн, але без додаткових фінансових джерел (а умовою задачі вони не передбачені) від боргів АТ цілком не звільниться.

Сильно ризикуючи, при прийнятті проекту 2 АТ (якщо пощастить) може цілком звільнитися від боргів, одержавши при цьому ще й чималий прибуток. У разі невдачі АТ очікує банкрутство. Інші варіанти можливих угод про відстрочку боргів умовами задачі не передбачаються.

Висновки. У разі реалізації низькоризикованого проекту 1 АТ все одно з боргами не спроможне розплатитися, хоча їх можна зменшити (якщо це щось дасть). Змушене ризикувати під час прийняття проекту 2, АТ, якщо сильно пощастить, відразу може вирішити всі фінансові проблеми, залишившись ще з прибутком. У разі невдачі ж воно – банкрут. Усе-таки, приймаючи ризиковий проект 2, можна потрапити у ситуацію "або пан, або пропав", тоді як, вибравши безризиковий проект 1, боргів не уникнути за будь-яких обставин.

2.1.7. Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Критерій прийняття рішень – це функція, що виражає переваги особи, що приймає рішення, і визначає правило, за яким вибирається прийнятний або оптимальний варіант рішення. Всяке рішення в умовах неповної інформації приймається з урахуванням кількісних характеристик. Критерії можна використовувати по черзі, причому після обчислення їх значень серед декількох варіантів доводиться довільним чином виділяти деяке остаточне рішення. Це дозволяє, по-перше, краще проникнути в усі внутрішні зв'язки проблеми ухвалення рішень і, по-друге, ослабити вплив суб'єктивного фактору.

Якщо при ухваленні рішення ОПР відомі ймовірності p_j станів $П_j$, то будемо вважати, що розглядається ситуація в умовах ризику (або часткової невизначеності). Гравець, приймаючи i-те рішення (використовувати стратегію A_i), очікує отримати дохід $a_{i,j}$ при реалізації стану $П_j$.

У цьому випадку для прийняття рішення можна використовувати один з наступних критеріїв.

Критерій Байєса-Лапласа. У разі задання матриці виграшів кожна з альтернатив оцінюється математичним сподіванням числової оцінки її наслідків при всіх станах середовища, яке максимізується:

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} M\left(A_i\right);\ M\left(A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot p_j ,$$

а при заданні матриці програшів кожна з альтернатив оцінюється математичним сподіванням числової оцінки її наслідків при всіх станах середовища, яке мінімізується:

$$Z = \min_{i=\overline{1,m}} M\left(A_i\right);\ M\left(A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot p_j .$$

При цьому припускається, що ситуація, в якій приймається рішення характеризується такими обставинами:

– ймовірності появи станів середовища відомі;

– рішення реалізується (теоретично) безліч разів;

– для невеликої кількості реалізацій допускається деякий ризик.

У разі вибору такого критерію при великій кількості реалізацій середнє значення стабілізується. Тому при повній (нескінченній) реалізації будь-який ризик виключається.

Як відомо, математичне сподівання $M\left(A_i\right)$ випадкової величини A_i представляє собою середній очікуваний виграш (дохід) або програш (витрату).

Для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний виграш (програш) і відповідно до критерію Байєса-Лапласа слід вибирати варіант (стратегію A_i), для якого досягається відповідно найбільше (найменше) значення.

При застосуванні стратегії A_i ОПР може отримати виграш (програш), який відрізняється від максимального (мінімального), що й приймається за величину ризику. Ризик є випадковою величиною R_i. Математичне сподівання $M\left(R_i\right)$ випадкової величини R_i і є середній очікуваний ризик.

Для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний ризик (математичне сподівання), і відповідно до критерію Байєса-Лапласа у випадку задання матриці виграшів слід вибирати варіант, для якого досягається найменше значення:

$$Z=\min_{i=\overline{1,m}} M\left(R_i\right);\ M\left(R_i\right)=\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}\,p_j\,,$$

а у випадку задання матриці програшів слід вибирати варіант, для якого досягається найбільше значення:

$$Z=\max_{i=\overline{1,m}} M\left(R_i\right);\ M\left(R_i\right)=\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}\,p_j\,.$$

Критерій Байєса-Лапласа виступає як критерій мінімізації середнього очікуваного ризику. Його можна назвати також критерієм мінімуму середнього програшу.

Приклад 2.14. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, відомі ймовірності станів: $p_1=\frac{1}{8},\ p_2=\frac{2}{8},\ p_3=\frac{3}{8},\ p_4=\frac{1}{8},\ p_5=\frac{1}{8}$. За критерієм Байєса-Лапласа з'ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

Розв'язання. Спочатку для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найбільший середній дохід і обчислення величини цього доходу запишемо матрицю виграшів з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.8.

Табл. 2.8. Матриця виграшів ігри

$A \backslash П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	2	5	4	3	2
A_2	5	7	2	1	8
A_3	8	3	7	9	4
A_4	6	1	8	3	3
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i середній очікуваний дохід:

$$M(A_1) = 2\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{2}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{29}{8};$$

$$M(A_2) = 5\cdot\frac{1}{8} + 7\cdot\frac{2}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{8} = \frac{29}{8};$$

$$M(A_3) = 8\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{2}{8} + 7\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{46}{8};$$

$$M(A_4) = 6\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{2}{8} + 8\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{38}{8}.$$

Визначимо максимум серед отриманих значень:

$$Z = \max\left\{\frac{29}{8}; \frac{29}{8}; \frac{46}{8}; \frac{38}{8}\right\} = \frac{46}{8}.$$

Максимальний середній очікуваний дохід дорівнює $\frac{46}{8}$ і відповідає стратегії A_3.

Тепер для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найменший середній ризик і обчислення величини цього ризику запишемо матрицю виграшів ігри у вигляді табл. 2.9 і знайдемо найбільше значення $\max a_{i,j}$ для кожного стовпця.

Табл. 2.9. Матриця виграшів ігри

$A \backslash \Pi$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_1	2	5	4	3	2
A_2	5	7	2	1	8
A_3	8	3	7	9	4
A_4	6	1	8	3	3
$\max\limits_i a_{i,j}$	8	7	8	9	8

Запишемо тепер матрицю ризиків ігри з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді таблиці 2.10.

Табл. 2.10. Матриця ризиків ігри

$R \backslash \Pi$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
R_1	6	2	4	6	6
R_2	3	0	6	8	0
R_3	0	4	1	0	4
R_4	2	6	0	6	5
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i середній очікуваний ризик:

$$M(R_1) = 6 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{34}{8};$$

$$M(R_2) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{2}{8} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} = \frac{29}{8};$$

$$M(R_3) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{8};$$

$$M(R_4) = 2 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{2}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{8}.$$

Визначимо мінімум серед отриманих значень:

$$Z = \min\left\{\frac{34}{8}; \frac{29}{8}; \frac{15}{8}; \frac{25}{8}\right\} = \frac{15}{8}.$$

Мінімальний середній очікуваний ризик дорівнює $\frac{15}{8}$ і відповідає стратегії A_3.

Критерій Бернуллі-Лапласа. Критерій Бернуллі-Лапласа використовують у випадку, коли можна припусти, що будь-який з варіантів середовища не більш ймовірний, ніж інший. Тут передбачається, що всі стани середовища (всі варіанти реальної ситуації) рівно ймовірні, тобто $p_j = \frac{1}{n}$.

Для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний виграш (програш) за формулою:

$$M(A_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

і у разі задання матриці виграшів відповідно до критерію Бернуллі-Лапласа слід вибирати варіант (стратегію A_i), для якого досягається найбільше значення:

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} M(A_i),$$

а у випадку задання матриці програшів – варіант (стратегію A_i), для якого досягається найменше значення:

$$Z = \min_{i=\overline{1,m}} M(A_i).$$

Для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний ризик (математичне сподівання) за формулою:

$$M(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}$$

і відповідно до критерію Бернуллі-Лапласа при заданні матриці виграшів слід вибирати стратегію (варіант), для якої досягається найменше значення:

$$Z = \min_{i=\overline{1,m}} M(R_i),$$

а при заданні матриці виграшів – стратегію, для якої досягається найбільше значення:

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} M(R_i).$$

Приклад 2.15. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, всі стани рівноймовірні: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{5}$. За критерієм Бернуллі-Лапласа з'ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

Розв'язання. Спочатку для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найбільший середній дохід і обчислення величини цього доходу запишемо матрицю виграшів з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.11.

Табл. 2.11. Матриця виграшів ігри

$A \backslash П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	2	5	4	3	2
A_2	5	7	2	1	8
A_3	8	3	7	9	4
A_4	6	1	8	3	3
p_j	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i середній очікуваний дохід:

$$M(A_1)=\frac{1}{5}\cdot(2+5+4+3+2)=\frac{16}{5};$$

$$M(A_2)=\frac{1}{5}\cdot(5+7+2+1+8)=\frac{23}{5};$$

$$M(A_3)=\frac{1}{5}\cdot(8+3+7+9+4)=\frac{31}{5};$$

$$M(A_4)=\frac{1}{5}\cdot(6+1+8+3+3)=\frac{21}{5}.$$

Визначимо максимум серед отриманих значень:

$$Z=\max\left\{\frac{16}{5};\frac{23}{5};\frac{31}{5};\frac{21}{5}\right\}=\frac{31}{5}.$$

Максимальний середній очікуваний дохід дорівнює $\frac{31}{5}$ і відповідає стратегії A_3.

Тепер для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найменший середній ризик і обчислення величини цього ризику запишемо матрицю ризиків ігри з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.12.

Табл. 2.12. Матриця ризиків ігри

R \ Π	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
R_1	6	2	4	6	6
R_2	3	0	6	8	0
R_3	0	4	1	0	4
R_4	2	6	0	6	5
p_j	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i середній очікуваний ризик:

$$M(R_1)=\frac{1}{5}\cdot(6+2+4+6+6)=\frac{24}{5};$$

$$M(R_2)=\frac{1}{5}\cdot(3+0+6+8+0)=\frac{17}{5};$$

$$M(R_3)=\frac{1}{5}\cdot(0+4+1+0+4)=\frac{9}{5};$$

$$M(R_4)=\frac{1}{5}\cdot(2+6+0+6+5)=\frac{19}{5}.$$

Визначимо мінімум серед отриманих значень:

$$Z=\min\left\{\frac{24}{5};\frac{17}{5};\frac{9}{5};\frac{19}{5}\right\}=\frac{9}{5}.$$

Мінімальний середній очікуваний ризик дорівнює $\frac{9}{5}$ і відповідає стратегії A_3.

Слід відмітити, що критерій Бернуллі-Лапласа безпосередньо не відноситься до випадку часткової невизначеності, і його застосовують в умовах повної невизначеності.

Критерій мінімізації дисперсії оцінок. Цей критерій використовують, коли ОПР зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний виграш (програш) за формулою:

$$M(A_i)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{i,j}\cdot p_j\right),$$

потім кожна альтернатива оцінюється дисперсією числової оцінки її наслідків при всіх станах середовища:

$$z_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(a_{i,j}-M(A_i)\right)^2\cdot p_j\right)$$

і у випадку задання матриці виграшів відповідно до критерію мінімізації дисперсії оцінок слід вибирати варіант (стратегію A_i), для якого досягається найменше значення дисперсії:

$$Z = \min_{i=\overline{1,m}} z_i,$$

а при заданні матриці програшів – варіант, для якого досягається найбільше значення дисперсії:

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} z_i.$$

Для кожної стратегії A_i (i-го варіанта рішення) слід розрахувати середній очікуваний ризик за формулою:

$$M(R_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(r_{i,j} \cdot p_j \right),$$

потім кожна альтернатива оцінюється дисперсією числової оцінки її наслідків при всіх станах середовища:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(r_{i,j} - M(R_i) \right)^2 \cdot p_j \right)$$

і у випадку задання матриці виграшів відповідно до критерію мінімізації дисперсії оцінок слід вибирати варіант (стратегію A_i), для якого досягається найбільше значення дисперсії:

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} z_i,$$

а при заданні матриці програшів – варіант, для якого досягається найменше значення дисперсії:

$$Z = \min_{i=\overline{1,m}} z_i.$$

Інші умови такі самі, як і для попереднього критерію.

Приклад 2.16. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, відомі ймовірності станів: $p_1 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{2}{8}$, $p_3 = \frac{3}{8}$, $p_4 = \frac{1}{8}$, $p_5 = \frac{1}{8}$. За критерієм мінімізації дисперсії оцінок з’ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

Розв’язання. Спочатку для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найбільший середній дохід і обчислення величини цього доходу запишемо матрицю виграшів з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.8.

Для кожної стратегії A_i обчислюємо середній очікуваний дохід. Згідно прикладу 2.14 отримаємо, що $M(A_1)=\frac{29}{8}$, $M(A_2)=\frac{29}{8}$, $M(A_3)=\frac{46}{8}$, $M(A_4)=\frac{38}{8}$. Потім формуємо матрицю виразів $\left(a_{i,j}-M(A_i)\right)^2$ з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.13.

Табл. 2.13. Матриця обчислених виразів $\left(a_{i,j}-M(A_i)\right)^2$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$\left(a_{1,j}-M(A_1)\right)^2$	$\frac{169}{64}$	$\frac{121}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{169}{64}$
$\left(a_{2,j}-M(A_2)\right)^2$	$\frac{121}{64}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{169}{64}$	$\frac{441}{64}$	$\frac{1225}{64}$
$\left(a_{3,j}-M(A_3)\right)^2$	$\frac{324}{64}$	$\frac{484}{64}$	$\frac{100}{64}$	$\frac{676}{64}$	$\frac{196}{64}$
$\left(a_{4,j}-M(A_4)\right)^2$	$\frac{100}{64}$	$\frac{900}{64}$	$\frac{676}{64}$	$\frac{196}{64}$	$\frac{196}{64}$
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i дисперсії $z_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(a_{i,j}-M(A_i)\right)^2\cdot p_j\right)$:

$$z_1=\frac{169}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{121}{64}\cdot\frac{2}{8}+\frac{9}{64}\cdot\frac{3}{8}+\frac{25}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{169}{64}\cdot\frac{1}{8}=\frac{79}{64};$$

$$z_2=\frac{121}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{729}{64}\cdot\frac{2}{8}+\frac{169}{64}\cdot\frac{3}{8}+\frac{441}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1225}{64}\cdot\frac{1}{8}=\frac{469}{64};$$

$$z_3=\frac{324}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{484}{64}\cdot\frac{2}{8}+\frac{100}{64}\cdot\frac{3}{8}+\frac{676}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8}=\frac{308}{64};$$

$$z_4=\frac{100}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{900}{64}\cdot\frac{2}{8}+\frac{676}{64}\cdot\frac{3}{8}+\frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8}+\frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8}=\frac{540}{64}.$$

Визначимо мінімум серед отриманих значень:

$$Z = \min\left\{\frac{79}{64}; \frac{469}{64}; \frac{308}{64}; \frac{540}{64}\right\} = \frac{79}{64}.$$

Максимальний середній очікуваний дохід дорівнює $\frac{29}{8}$ і відповідає стратегії A_1.

Тепер для знаходження варіанта рішення, при якому досягається найменший середній ризик і обчислення величини цього ризику запишемо матрицю ризиків ігри з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.10.

Для кожної стратегії A_i обчислюємо середній очікуваний ризик. Згідно прикладу 2.14 отримаємо, що $M(R_1) = \frac{34}{8}$, $M(R_2) = \frac{29}{8}$, $M(R_3) = \frac{15}{8}$, $M(R_4) = \frac{25}{8}$. Далі формуємо матрицю виразів $\left(r_{i,j} - M(R_i)\right)^2$ з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.14.

Табл. 2.14. Матриця обчислених виразів $\left(r_{i,j} - M(R_i)\right)^2$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$\left(r_{1,j} - M(R_1)\right)^2$	$\frac{196}{64}$	$\frac{324}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{196}{64}$	$\frac{196}{64}$
$\left(r_{2,j} - M(R_2)\right)^2$	$\frac{25}{64}$	$\frac{841}{64}$	$\frac{361}{64}$	$\frac{1244}{64}$	$\frac{841}{64}$
$\left(r_{3,j} - M(R_3)\right)^2$	$\frac{225}{64}$	$\frac{289}{64}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{225}{64}$	$\frac{289}{64}$
$\left(r_{4,j} - M(R_4)\right)^2$	$\frac{81}{64}$	$\frac{529}{64}$	$\frac{625}{64}$	$\frac{529}{64}$	$\frac{225}{64}$
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Знайдемо для кожної стратегії A_i дисперсії $z_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(a_{i,j} - M(A_i)\right)^2 \cdot p_j\right)$:

$$z_1 = \frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{324}{64}\cdot\frac{2}{8} + \frac{4}{64}\cdot\frac{3}{8} + \frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{196}{64}\cdot\frac{1}{8} = \frac{156}{64};$$

$$z_2 = \frac{25}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{841}{64}\cdot\frac{2}{8} + \frac{361}{64}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1244}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{841}{64}\cdot\frac{1}{8} = \frac{607}{64};$$

$$z_3 = \frac{225}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{289}{64}\cdot\frac{2}{8} + \frac{49}{64}\cdot\frac{3}{8} + \frac{225}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{289}{64}\cdot\frac{1}{8} = \frac{183}{64};$$

$$z_4 = \frac{81}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{529}{64}\cdot\frac{2}{8} + \frac{625}{64}\cdot\frac{3}{8} + \frac{529}{64}\cdot\frac{1}{8} + \frac{225}{64}\cdot\frac{1}{8} = \frac{471}{64}.$$

Визначимо максимум серед отриманих значень:

$$Z = \max\left\{\frac{156}{64}; \frac{607}{64}; \frac{183}{64}; \frac{471}{64}\right\} = \frac{607}{64}.$$

Мінімальний середній очікуваний ризик дорівнює $\frac{29}{8}$ і відповідає стратегії A_2.

Модальний критерій. Суть його полягає у виборі стратегії A_i, виходячи з найбільш ймовірного стану “природи” $П_j$.

Припустимо, що існує одне значення $p_{j_0} = \max_j p_j$. При використанні цього критерію ОПР вважає, що “природа” знаходиться у стані j_0 і вибирає альтернативу з умови:

$$Z = \max_i a_{i,j_0}.$$

Хоча цей критерій є песимістичним, він має певні переваги:

– достатньо виділити лише найбільш ймовірний стан “природи” й не потрібно знати точне кількісне значення ймовірності його виникнення;

– збільшується швидкість обчислень, оскільки розрахунки ведуться лише для найбільш ймовірного стану “природи”.

Приклад 2.17. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, відомі ймовірності станів: $p_1 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{2}{8}$, $p_3 = \frac{3}{8}$, $p_4 = \frac{1}{8}$, $p_5 = \frac{1}{8}$. За модальним критерієм визначити найкращу альтернативу.

Розв'язання. Запишемо матрицю виграшів з додатковим рядком з ймовірностями станів у вигляді табл. 2.15.

Табл. 2.15. Матриця виграшів ігри

$A \backslash П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	2	5	4	3	2
A_2	5	7	2	1	8
A_3	8	3	7	9	4
A_4	6	1	$\boxed{8}$	3	3
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Тоді:

$$\max_{j=\overline{1,5}} p_j = \max\left\{\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right\} = \frac{3}{8},\ j_0 = 3,\ Z = \max_{i=\overline{1,4}} a_{i,3} = \{4; 2; 7; 8\} = 8.$$

Отже, найкращою альтернативою за модальним критерієм є A_4.

Можна рекомендувати одночасно застосовувати по черзі різні критерії. Після цього серед декількох варіантів, відібраних таким чином як оптимальні, доводиться вольовим рішенням виділяти деяке остаточне рішення.

Такий підхід дозволяє, по-перше, краще зрозуміти всі внутрішні зв'язки проблеми ухвалення рішень і, по-друге, послаблює вплив суб'єктивного чинника.

2.1.8. Вибір рішень за допомогою дерева рішень

Розглянемо більш складні (позиційні, чи багатоетапні) рішення в умовах ризику. Одноетапні ігри з "природою", таблиці рішень, зручно використовувати в задачах, що мають одну множину альтернативних рішень і одну множину станів середовища. Проте багато задач вимагають аналізу послідовності рішень і станів середовища, коли одна сукупність стратегій гравця і станів "природи" породжує інший стан подібного типу. Якщо мають місце дві (або більше) послідовні множини рішень, причому наступні рішення ґрунтуються на результатах попередніх, та/або дві (чи більше) множини станів середовища (з'являється цілий ланцюг рішень, що випливають одне з одного, та відповідають подіям, що відбуваються з деякою ймовірністю), використовується дерево рішень.

Дерево рішень – це графічне зображення послідовності рішень і станів середовища з вказівкою відповідних ймовірностей і виграшів для будь-яких комбінацій альтернатив і станів середовища.

У постановочному плані розглянемо кілька задач, що можуть бути вирішені за допомогою даного методу.

Приклад 2.18. Розвідувальне буріння свердловин. Нафтова розвідувальна компанія повинна вирішити питання: чи варто бурити свердловини на даній ділянці до того, як мине термін контракту? Для керівників компанії не з'ясовано багато обставин:

– у яку суму обійдеться вартість буріння, що залежить від якості ґрунту, глибини залягання нафти тощо;

– на які запаси нафти в цьому місці можна розраховувати;

– скільки коштуватиме експлуатація свердловини.

У розпорядженні керівництва є об'єктивні дані про аналогічні і не цілком схожі свердловини цього типу. За допомогою сейсмічної розвідки можна одержати додаткову інформацію, що, однак, не дає вичерпних відомостей про геофізичну структуру розвідуваної ділянки. Крім того, одержання сейсмічної інформації коштує недешево, тому ще до того, як буде прийняте остаточне рішення (бурити чи ні), варто визначити, чи є необхідність збирати ці відомості.

Приклад 2.19. Випуск нового товару. Велика хімічна компанія успішно завершила дослідження з удосконалення будівельної фарби. Керівництво компанії повинне вирішити, робити цю фарбу самим (і якщо – так, то якої потужності будувати завод) або продати патент чи ліцензію, а також технологію незалежній фірмі, що має справи виключно з виробництвом і збутом будівельної фарби. Основні джерела невизначеності:

– ринок збуту, який фірма може забезпечити в разі продажу нової фарби за даною ціною;

– витрати на рекламу, якщо компанія буде сама виробляти і продавати фарбу;

– час, потрібний конкурентам, щоб випустити на ринок подібний товар (чи встигне компанія за цей термін окупити витрати, понесені для того, щоб стати лідером у даній сфері виробництва).

Компанія може одержати деякі додаткові відомості, що опосередковано стосуються проблеми проникнення конкурентів на ринок збуту, опитавши частину постачальників фарби. Але до матеріалів опитувань варто ставитися з обережністю, тому що постачальники насправді можуть чинити не так, як вони спочатку передбачають. На підтвердження останнього судження можна згадати про дослідження, проведені американськими автомобільними корпораціями, для того щоб визначити попит на великі легкові автомобілі. Незважаючи на енергетичну кризу, що насувалася 1971 – 1973 рр., результати анкетування показали, що американські покупці, як і раніше віддають перевагу багатомісцевим легковим автомобілям. Однак насправді усе відбулося з точністю до навпаки, і на ринку стали користатися попитом невеликі, економічні автомобілі. Такі результати опитування можуть бути частково пояснені скритністю людського характеру, і це повинно враховуватися під час прийняття рішень.

Процес прийняття рішень за допомогою дерева рішень у загальному випадку передбачає виконання наступних п'яти етапів.

Етап 1. Формулювання задачі. Насамперед необхідно відкинути фактори, що не стосуються проблеми, а серед множини, що залишилася, виділити істотні і несуттєві. Це дозволить привести опис задачі ухвалення рішення до форми, що піддається аналізу. Повинні бути виконані такі основні процедури:

а) визначення можливостей збору інформації для експерименту і реальних дій;

б) складання переліку подій, що з визначеною ймовірністю можуть відбутися;

в) встановлення часового порядку розташування подій, у результатах яких міститься корисна і доступна інформація, і тих послідовних дій, що можна виконати.

Етап 2. Побудова дерева рішень.

Етап 3. Оцінка ймовірностей станів середовища, тобто порівняння шансів виникнення кожної конкретної події. Слід зазначити, що вказані ймовірності визначаються або на підставі наявної статистики, або експертним шляхом.

Етап 4. Встановлення виграшів (або програшів як виграшів зі знаком "мінус") для кожної можливої комбінації альтернатив (дій) і станів середовища.

Етап 5. Розв'язання задачі.

Введемо ряд означень.

Залежно від ставлення ОПР до ризику розв'язання задачі може виконуватися з позицій так званих "об'єктивістів" та "суб'єктивістів". Пояснимо ці поняття на наступному прикладі. Нехай пропонується лотерея: за 10 грн (вартість лотерейного квитка) гравець з рівною ймовірністю p = 0,5 може нічого не виграти або виграти 100 грн. Один індивід пошкодує 10 грн за право участі в такій лотереї, тобто просто не купить лотерейний квиток, інший готовий заплатити за лотерейний квиток 50 грн, а третій заплатить навіть 60 грн за можливість одержати 100 грн (наприклад, коли ситуація складається так, що, тільки маючи 100 грн, гравець може досягти своєї мети, тому можливість втрати останніх коштів, а в нього їх саме 60 грн, не змінює для нього ситуації).

Безумовним грошовим еквівалентом (БГЕ) ігри називається максимальна сума грошей, яку ОПР готовий заплатити за участь у грі (лотереї), або, що те ж саме, та мінімальна сума грошей, за якої він готовий відмовитися від ігри. Кожен індивід має свій БГЕ. Індивіда, для якого БГЕ збігається з очікуваною грошовою оцінкою (ОГО) гри, тобто із середнім виграшем у грі (лотереї), умовно називають об'єктивістом; індивіда, для якого БГЕ не дорівнює ОГО, – суб'єктивістом.

Очікувана грошова оцінка розраховується як сума добутків розмірів виграшів на ймовірності цих виграшів. Наприклад, для нашої лотереї ОГО = 0,5*0 + 0,5*100 = 50 грн. Якщо суб'єктивіст схильний до ризику, то його БГЕ > ОГО. Якщо не схильний, то БГЕ < ОГО.

Припустімо, що рішення приймаються з позиції об'єктивіста. Розглянемо процедуру ухвалення рішення на прикладі наступної задачі.

Приклад 2.20. Керівництво деякої компанії вирішує, створювати для випуску нової продукції велике виробництво, мале підприємство або продати патент іншій фірмі. Розмір виграшу, який компанія може одержати, залежить від сприятливого чи несприятливого стану ринку (табл. 2.16).

Табл. 2.16. Виграш компанії за різних станів середовища

Номер стратегії	Дії компанії	Виграш (грн) при стані економічного середовища*	
		сприятливий	несприятливий
1	Будівництво крупного підприємства (a_1)	200000	– 180000
2	Будівництво малого підприємства (a_2)	100000	– 20000
3	Продаж патенту (a_3)	10000	10000
*Ймовірність настання сприятливого або несприятливого стану економічного середовища дорівнює 0,5			

Розв’язання. На основі даної таблиці виграшів (втрат) можна побудувати дерево рішень (рис. 2.4).

Процедура ухвалення рішення полягає в обчисленні для кожної вершини дерева (при русі справа наліво) очікуваних грошових оцінок, відкиданні безперспективних галузей (гілок) і виборі галузей (гілок), яким відповідає максимальне значення ОГО.

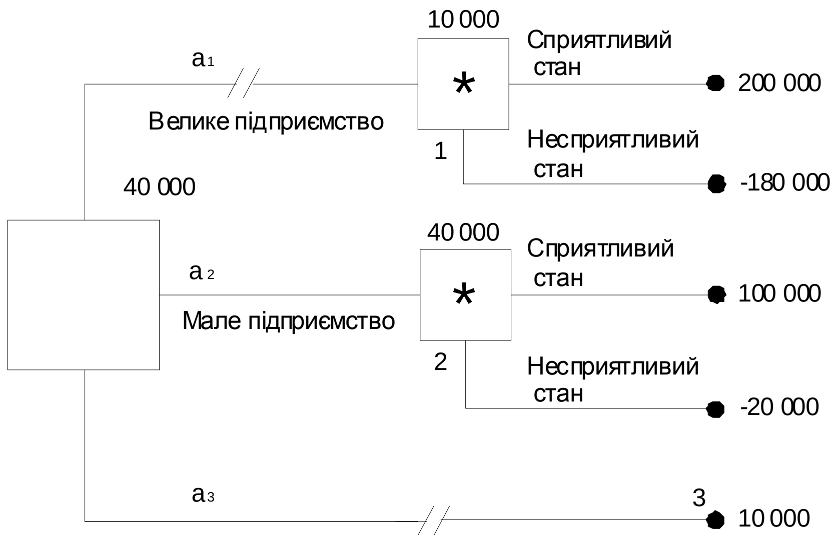

Рис. 2.4. Дерево рішень без додаткового обстеження кон’юнктури ринку

При побудові дерева рішень приймаються такі позначення:

$\square$ – рішення (рішення, що приймає гравець);

$\boxed{*}$ – випадок (рішення, що "приймає" випадок);

// – відкинуте рішення.

Визначимо середній очікуваний виграш:

– для вершини 1 $ОГО_1$ = 0,5*200 000 + 0,5*(–180 000) = 10 000 грн;

– для вершини 2 $ОГО_2$ = 0,5*100 000 + 0,5*(–20 000) = 40 000 грн;

– для вершини 3 $ОГО_3$ = 10 000 грн.

Висновок. Найбільш доцільно вибрати стратегію a_2, тобто будувати мале підприємство, а гілки (стратегії) a_1 та a_3 дерева рішень можна відкинути. ОГО найкращого рішення дорівнює 40 000 грн. Слід зазначити, що наявність стану з ймовірностями 50 % невдачі та 50 % удачі на практиці часто означає, що дійсні ймовірності гравцю, швидше за все, невідомі і він усього лише приймає таку гіпотезу (так зване припущення "fifty - fifty" – п'ятдесят на п'ятдесят).

Ускладнимо розглянуту вище задачу.

Приклад 2.21. Нехай перш ніж приймати рішення про будівництво, керівництво компанії повинне визначити, чи замовляти додаткове дослідження стану ринку, причому ця послуга обійдеться компанії в 10 000 грн. Керівництво розуміє, що додаткове дослідження, як і раніше, не здатне дати точної інформації, але воно допоможе уточнити очікувані оцінки кон'юнктури ринку, змінивши тим самим значення ймовірностей.

Щодо фірми, якій можна замовити прогноз, відомо, що вона здатна уточнити значення ймовірностей сприятливого чи несприятливого результату. Можливості фірми у вигляді умовних ймовірностей сприятливості та несприятливості ринку збуту представлені в табл. 2.17. Наприклад, коли фірма стверджує, що ринок сприятливий, то з ймовірністю 0,78 цей прогноз виправдається (та з ймовірністю 0,22 можуть виникнути несприятливі умови), прогноз про несприятливість ринку виправдається з ймовірністю 0,73.

Табл. 2.17. Результати прогнозу

Прогноз фірми	Фактично	
	Сприятливий	Несприятливий
Сприятливий	0,78	0,22
Несприятливий	0,27	0,73

Припустимо, що фірма, якій замовили прогноз стану ринку, стверджує:

– ситуація буде сприятливою з ймовірністю 0,45;
– ситуація буде несприятливою з ймовірністю 0,55.

Розв'язання. На підставі додаткових відомостей можна побудувати нове дерево рішень (рис. 2.5), де розвиток подій походить від кореня дерева до результатів, а розрахунок прибутку виконується від кінцевих станів до початкового.

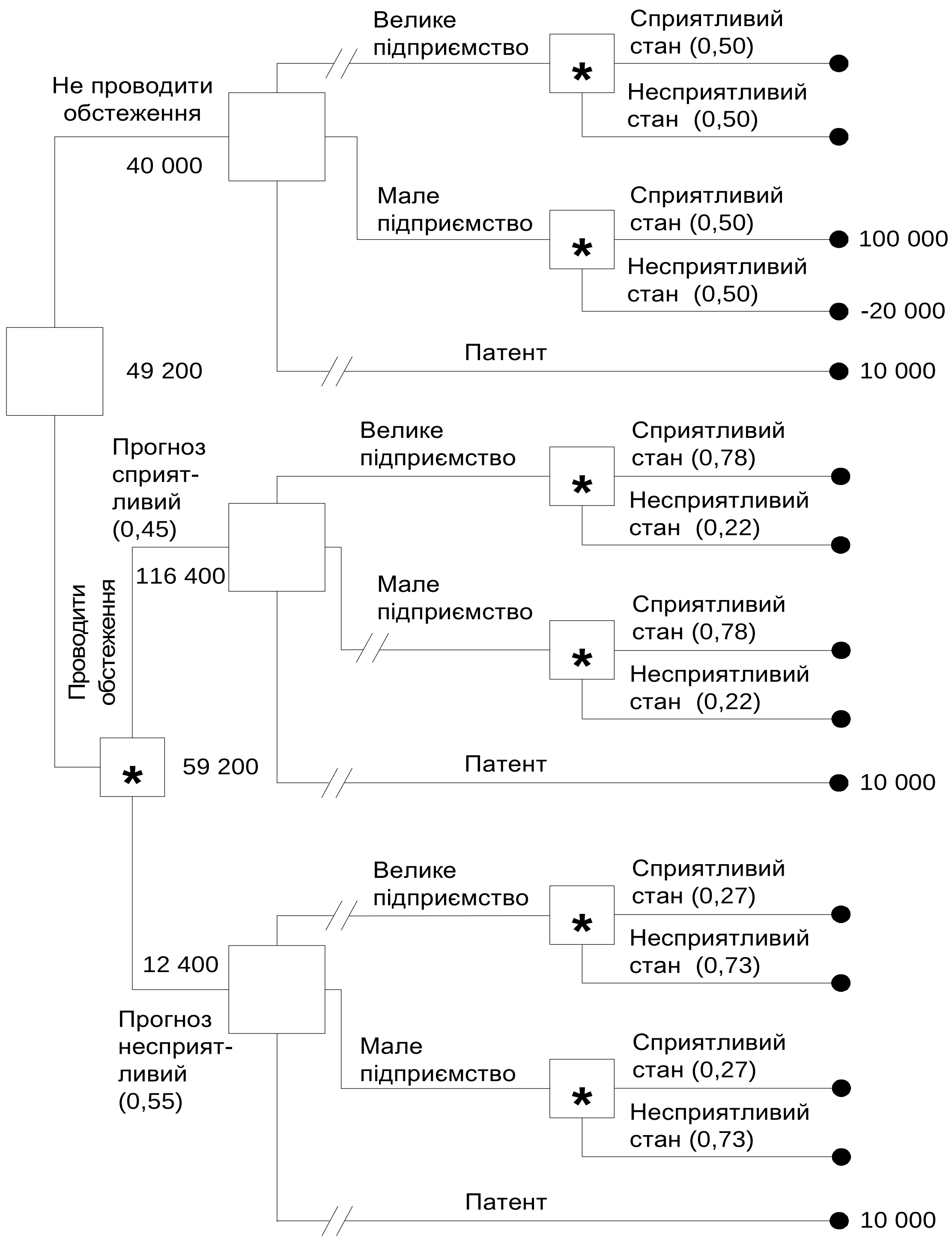

Рис. 2.5. Дерево рішень при додатковому обстеженні ринку

Висновки. З аналізу дерева рішень випливає: необхідно проводити додаткове дослідження кон'юнктури ринку, оскільки це дозволяє істотно уточнити прийняте рішення; якщо фірма прогнозує сприятливу ситуацію на ринку, то доцільно будувати велике підприємство (очікуваний максимальний прибуток 116 400 грн), якщо прогноз несприятливий, – мале (очікуваний максимальний прибуток 12 400 грн).

Припустимо, що консультаційна фірма за визначену плату готова надати інформацію про фактичну ситуацію на ринку в той момент, коли керівництву компанії слід прийняти рішення про масштаб виробництва. Прийняття пропозиції залежить від співвідношення очікуваної цінності (результативності) точної інформації до величини плати, що вимагають за додаткову (точну) інформацію, завдяки якій може бути відкориговане ухвалення рішення, тобто первісна дія може бути зміненою.

Очікувана цінність точної інформації про фактичний стан ринку дорівнює різниці між очікуваною грошовою оцінкою за наявності точної інформації і максимальною очікуваною грошовий, оцінкою за відсутності точної інформації.

Розрахуємо очікувану цінність точної інформації для приклада, у якому додаткове обстеження кон'юнктури ринку не проводиться. За відсутності точної інформації, як вже було показано вище, максимальна очікувана грошова оцінка дорівнює:

ОГО = 0,5 * 100 000 – 0,5 * 20 000 = 40 000 грн.

Якщо точна інформація про дійсний стан ринку буде сприятливою (ОГО = 20 0000 грн, див. табл. 2.16), приймається рішення будувати велике виробництво, якщо несприятливою, то найдоцільніше рішення – продаж патенту (ОГО = 10 000 грн). З огляду на, те що ймовірності сприятливої і несприятливої ситуацій дорівнюють 0,5, значення $ОГО_{т.і.}$ (ОГО точної інформації) визначається як:

$ОГО_{т.і.}$ = 0,5 * 200 000 + 0,5 * 10 000 = 105 000 грн.

Тоді очікувана цінність точної інформації дорівнює:

$ОЦ_{т.і.}$ = $ОГО_{т.і.}$ – ОГО =105 000 – 40 000 = 65 000 грн.

Значення $ОГО_{т.і.}$ показує, яку максимальну ціну повинна бути готова заплатити компанія за точну інформацію про дійсний стан ринку в той момент, коли їй це необхідно.

2.1.9. Функція корисності Неймана–Моргенштерна

Обґрунтування вибору рішення в попередніх розділах виконувалося з позицій об'єктивіста. Якщо ж ОПР – суб'єктивіст, то він буде керуватися індивідуально визначеним БГЕ. Пояснимо зміст цієї величини. Розглянемо ситуацію, коли гравець з ймовірністю 0,8 виграє 40 грн і з ймовірністю 0,2 програє 20 грн. Спробуємо з'ясувати, за яку суму ОПР поступиться своїм правом брати участь у грі. Як відзначалося, об'єктивіст користується правилом: БГЕ = ОГО = 0,8 * 40 + 0,2 * (–20) = 28 грн. Тому своє право на гру він віддасть не менш ніж за 28 грн. Суб'єктивіст, як правило, готовий поступитися своїм правом на гру за меншу суму, оскільки для нього БГЕ < ОГО. Причинами такого поводження можуть бути:

– фінансовий стан гравця (можливо, він на грані банкрутства і йому необхідні гроші);

– ставлення гравця до ризику взагалі (несхильність до ризику);

– чи настрій стан здоров'я гравця;

– безліч інших, навіть таких, що безпосередньо не стосуються бізнесу, причин.

Величина БГЕ може змінюватися згодом залежно від обумовлених зазначеними причинами обставин. Наприклад, у випадку катастрофічної нестачі фінансових засобів (готівки) право на гру можна віддати і за більш низький еквівалент.

Дослідимо реалістичність критерію вибору рішення, заснованого на розрахунку ОГО. Розглянемо дві альтернативи:

1. Виграш 1 000 000 грн з ймовірністю 1.

2. Гра (лотерея): виграш 2 100 000 грн з ймовірністю 0,5 і програш 50 000 грн. з ймовірністю 0,5. У цьому випадку: ОГО = 0,5 * 2 100 000 – 0,5 * 50 000 = 1 025 000 грн.

Щодо одержуваного середнього виграшу зазначені альтернативи практично еквівалентні, і, якщо гравець байдужий до ризику, він вибере другу альтернативу. Якщо він до ризику не байдужий, а переважна більшість саме такими й є, то вибір буде залежати головним чином від фінансового стану гравця. Гравці, що мають скромний грошовий дохыд, волітимуть не ризикувати і виберуть гарантований виграш. Для ОПР, що володіє досить великим капіталом, програш у 50 00 грн невеликий, і вона вирішить ризикнути. Ризикувати будуть також гравці, патологічно схильні до фінансових авантюр.

Методологія раціонального прийняття рішень в умовах невизначеності, що заснована на функції корисності індивіда, спирається на п’ять аксіом. Припустімо, що конструюється лотерея (гра), у якій індивід з ймовірністю p одержує грошову суму x та з ймовірністю $(1-p)$ – суму z. Цю ситуацію будемо позначити $L(x, p, z)$.

Аксіома 1 порівнянності (повноти). Для всієї множини S невизначених альтернатив (можливих наслідків) індивід може сказати, що або результат x вагоміший за результат y $(x > y)$, або $y > x$, або індивід байдужий щодо вибору між x і y $(x \sim y)$. Запис $x > y$ означає, що результат x вагоміший за результат y або індивід байдужий стосовно вибору між x і y.

Аксіома 2 транзитивності (заможності). Якщо $x>y$ і $y>z$, то $x>z$. Якщо $x\sim y$ і $y\sim z$, то $x\sim z$.

Аксіома 3 сильної незалежності. Припустімо, що ми конструюємо лотерею, у якій індивід з ймовірністю p одержує грошову суму x та з ймовірністю $(1-p)$ – суму z, тобто $L(x, p, z)$. Сильна незалежність означає, що якщо індивід байдужий щодо вибору між x і y $(x\sim y)$, то він також буде байдужий стосовно вибору між лотереєю $L(x, p, z)$ і лотереєю $L(y, p, z)$, тобто з $x\sim y$ випливає: $L(x, p, z) \sim L(y, p ,z)$.

Аксіома 4 вимірності. Якщо $x > y \sim z$ або $x \sim y > z$, то існує єдина ймовірність p, така що $y \sim L(x, p, z)$.

Пояснимо зміст цієї аксіоми. Нехай, наприклад, маємо три результати: $x = 1000$; $y = 0$; z – означає смерть гравця. Виходячи зі здорового глузду, наслідок z не можна порівняти з жодним виграшем, і відповідного до цього результату значення ймовірності p існувати не може. Однак у житті трапляються ситуації, коли певний програш рівнозначний смерті. Тоді твердження $y \sim L(x, p, z)$ можна вважати справедливим для деякого значення $0 \leq p \leq 1$.

Аксіома 5 ранжирування. Якщо альтернативи y та u знаходяться за перевагою між альтернативами x та z і можна побудувати лотереї, такі, що індивід байдужий щодо вибору між y і $L(x, p_1, z)$, а також до вибору між u і $L(x, p_2, z)$, то при $p1 > p2$ $y > u$.

Пояснимо зміст цієї аксіоми. Нехай існують такі альтернативи: $x = 1000$; $y = 500$; $u = 200$; $z = -10$. Нехай еквівалентні дві пари ситуацій, одна з яких неігрова, а інша ігрова:

– гарантовано одержати 500 або лотерея: з ймовірністю p_1 виграти 1000 і з ймовірністю $(1-p_1)$ програти 10, тобто $500 \sim L(1000, p_1, -10)$;

– гарантовано одержати 200 або лотерея: з ймовірністю p_2 виграти 1000 і з ймовірністю $(1-p_2)$ програти 10, тобто $200 \sim L(1000, p_1, -10)$.

Очевидно, що за зазначених умов $p_1 > p_2$. Якщо $p_1 = p_2$, то $y \sim u$.

Твердження аксіоми цілком відповідає здоровому глуздові: чим більша ймовірність великого виграшу, тим більше гра "коштує", тобто тим більша плата потрібна за здобуття права брати участь у цій грі.

Якщо прийняти наведені аксіоми і припустити, що люди віддають перевагу більшій кількості деякого блага порівняно з меншою кількістю, то все це в сукупності визначає раціональну поведінку ОПР.

За умови названих припущень американськими вченими Нейманом і Моргенштерном було показано, що ОПР у разі ухвалення рішення буде прагнути до максимізації очікуваної корисності. Іншими словами, з усіх можливих рішень він вибирає те, що забезпечує найбільшу очікувану корисність.

Сформулюємо визначення корисності за Нейманом–Моргенштерном.

Корисність – це деяке число, приписуване особою, що приймає рішення, кожному можливому результату. Функція корисності Неймана–Моргенштерна для ОПР показує корисність, яку вона приписує кожному можливому результату. У кожної ОПР своя функція корисності, що показує її перевагу тих чи інших наслідків залежно від її відношення до ризику.

Очікувана корисність події дорівнює сумі добутків ймовірностей результатів на значення корисностей цих результатів.

Проілюструємо практичну реалізацію введених понять на прикладі розрахунку ОГО і зіставлення цього значення з корисністю.

Приклад 2.22. Нафтопереробна фірма вирішує питання про буріння свердловини. Відомо, що якщо фірма буде бурити, то з ймовірністю 0,6 нафти знайдено не буде; з ймовірністю 0,1 запаси родовища складуть 50 000 т; з ймовірністю 0,15 – 100 000 т; з ймовірністю 0,1 – 500 000 т; з ймовірністю 0,05 – 1 000 000 т. Якщо нафта не буде знайдена, то фірма втратить 50 000 грн; якщо потужність родовища складе 50 000 т, то втрати знизяться до 20 000 грн; потужність родовища в 100 000 т принесе прибуток 30 000 грн; 500 000 т – 430 000 грн; 1 000 000 т – 930 000 грн. Дерево рішень даної задачі представлено на рис. 2.6.

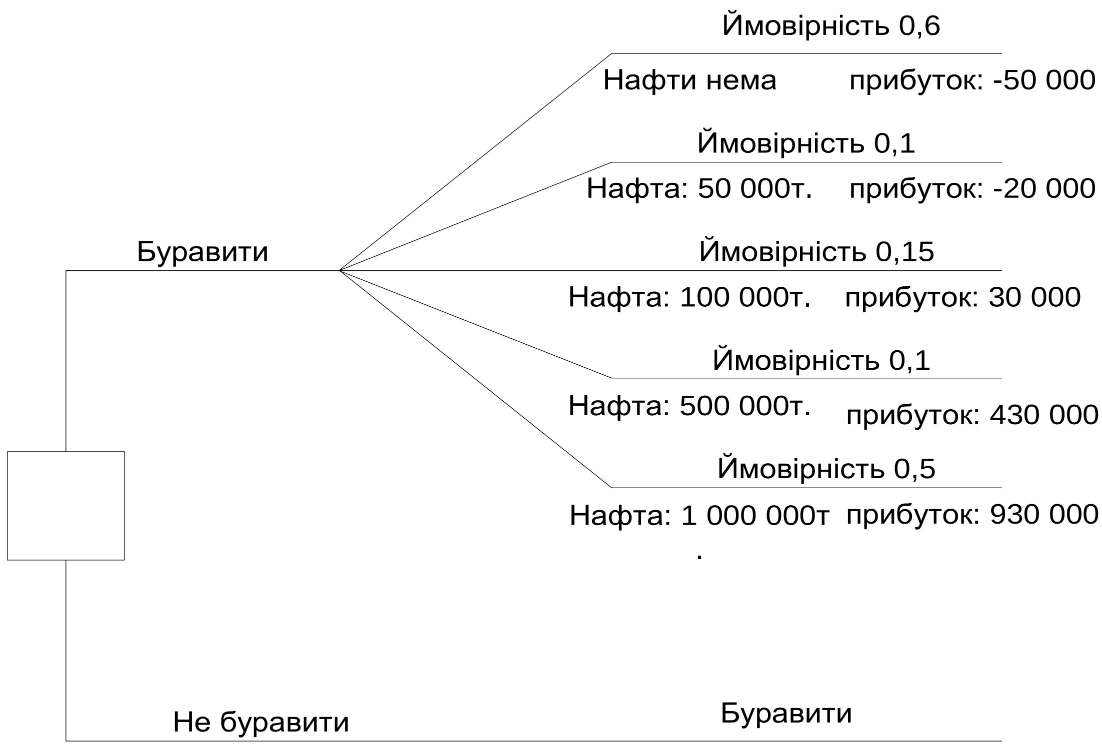

Рис. 2.6. Дерево рішень (прибуток вказано у гривнях)

Якщо ОПР, що представляє фірму, байдужа до ризику і приймає рішення про проведення бурових робіт на підставі розрахованого ОГО, то вона сприймає очікувану корисність як пропорційну ОГО; вважаючи U = 62. З огляду на те, що U – індивідуальне число, яке характеризує ОПР, нулі, що відповідають розрахунку ОГО, можна відкинути. У цьому випадку функція корисності $U(v)$, де v – прибуток, одержуваний при різних результатах, є прямою з позитивним схилом. Нижче буде показано, що U можна задавати з точністю до деякого монотонного перетворення.

Неважко розрахувати очікуване значення виграшу:

$$ОГО = 0{,}6(–50\ 000) + 0{,}1\ (–20\ 000) + 0{,}15 * 30\ 000 +$$

$$+ 0{,}1 * 430\ 000 + 0{,}05 * 930\ 000 = 62\ 000 \text{ грн.}$$

Для ухвалення рішення у випадку небайдужості ОПР до ризику необхідно вміти оцінювати значення корисності кожного з припустимих результатів. Дж. Нейман і О. Моргенштерн запропонували процедуру побудови індивідуальної функції корисності, що полягає в наступному: ОПР відповідає на ряд питань, виявляючи при цьому свої індивідуальні переваги, що враховують її ставлення до ризику. Значення корисностей можуть бути знайдені за два кроки.

Крок 1. Привласнюються довільні значення корисностей виграшам для гіршого і кращого наслідків, причому першій величині (гірший результат) ставиться у відповідність менше число. Наприклад, для наведеної вище задачі U(-50 000 грн) = 0, а U(930 000 грн) = 50. Тоді корисності проміжних виграшів будуть знаходитися в інтервалі від 0 до 50. Корисність результату навіть для одного індивіда визначається не однозначно, а з точністю до монотонного перетворення. Нехай, наприклад, маємо x_1, x_2, ..., x_n – корисності, приписувані n очікуваним значенням виграшів. Тоді $a + bx_1$, $a + bx_2$, ..., $a + bx_n$ (де $b > 0$) також будуть корисностями. Якщо в прикладі 2.22 під час обчислення корисності відкинути останні нулі, це буде еквівалентно лінійному перетворенню функції корисності при $a = 0$ і $b = 0{,}001$.

Крок 2. Гравцеві пропонується на вибір: одержати деяку гарантовану грошову суму v, що знаходиться між кращим і гіршим значеннями S і s, або взяти участь у грі, тобто одержати з ймовірністю p найбільшу грошову суму S і з ймовірністю $(1–p)$ – найменшу суму s. При цьому ймовірність варто змінювати (знижувати або підвищувати) доти, поки ОПР стане байдужою щодо вибору між одержанням гарантованої суми і грою. Нехай зазначене значення ймовірності дорівнює p_0. Тоді корисність гарантованої суми визначається як середнє значення (математичне сподівання) корисностей найменшої і найбільшої сум, тобто:

$$U(v) = p_0 * U(S) + (1–p_0) * U(s). \quad (2.3)$$

Розрахуємо корисність результатів кожного з можливих наслідків для прикладу 2.22. Нехай для ОПР байдуже, втратити 20 000 грн, чи взяти участь у грі (виграш 930 000 грн з ймовірністю 0,1 або програш 50 000 грн з ймовірністю 0,9). Відповідно до формули (2.3) маємо:

$U(–20) = 0{,}1\ U(930) + 0{,}9\ U(–50) = 5$,

при цьому за визначенням прийнято, що

$U(–50) = 0$, $U(930) = 50$,

тобто

$U(–20) = 5$.

Таким чином, якщо визначена шкала виміру, то може бути побудована функція корисності ОПР (рис. 2.7).

У загальному випадку графік функції корисності може бути трьох типів (рис. 2.8–2.10):

ОПР не схильна до ризику тоді і тільки тоді, коли її функція корисності строго увігнута, у якої кожна дуга кривої лежить вище від своєї хорди.

ОПР схильна до ризику тоді і тільки тоді, коли функція корисності строго опукла вниз, у якої кожна дуга кривої лежить нижче від своєї хорди.

ОПР нейтральна до ризику тоді і тільки тоді, коли функція корисності – пряма лінія.

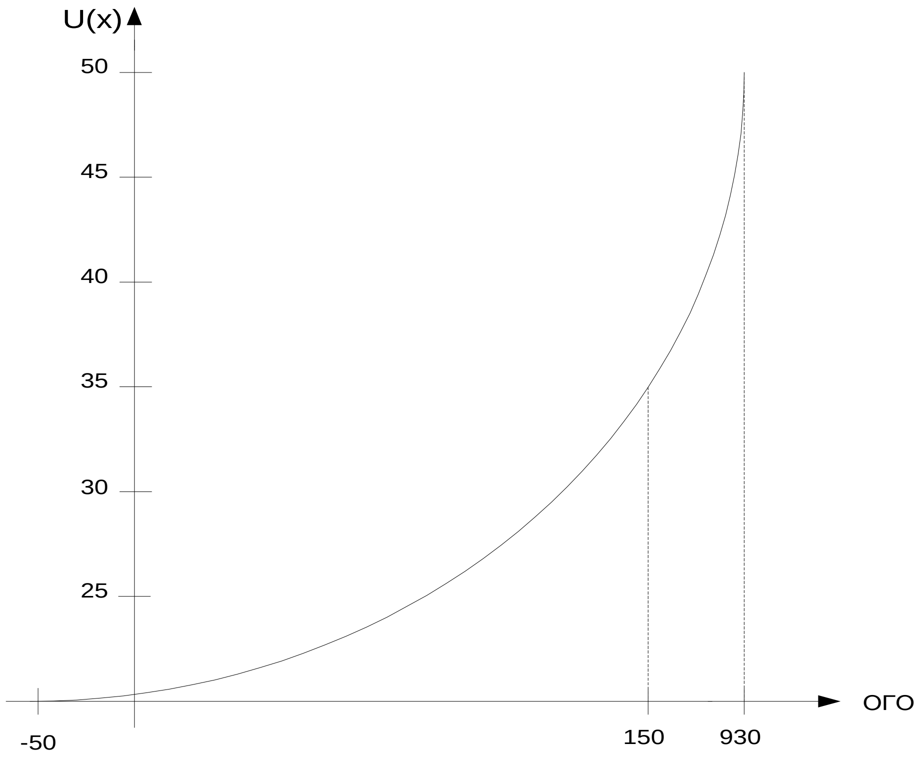

Рис. 2.7. Графік корисності

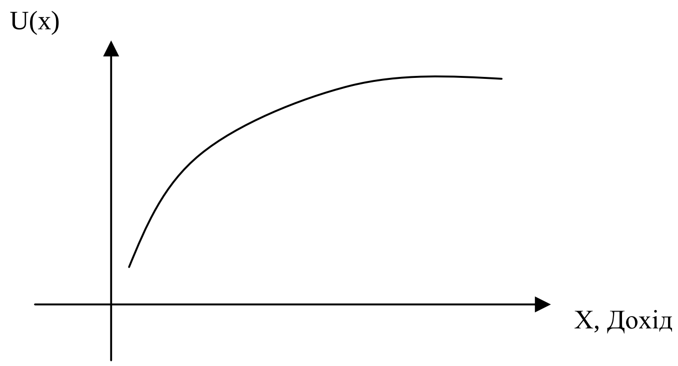

Рис. 2.8. Функція корисності для ОПР, яка є не схильною до ризику

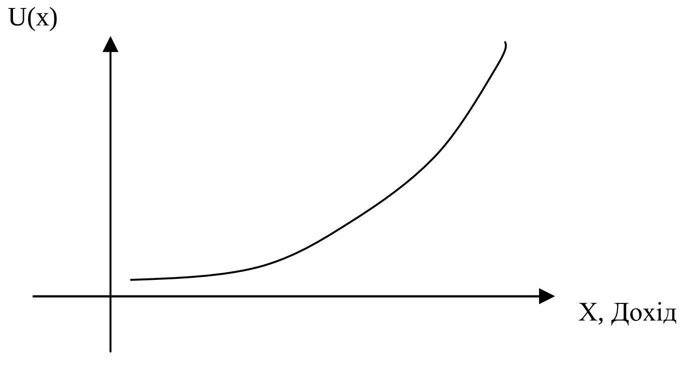

Рис. 2.9. Функція корисності для ОПР, яка є схильною до ризику

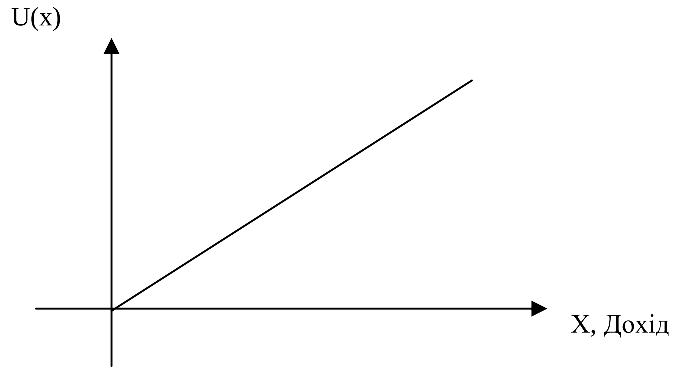

Рис. 2.10. Функція корисності для ОПР, яка є нейтральною до ризику

Існує також функція схильності-несхильності до ризику (див. рис. 2.11). На різних рівнях доходу (багатства) ставлення ОПР до ризику може мінятися. Досить реалістичною гіпотезою є схильність до ризику при невеликих сумах загального статку і несхильність до ризику при значних сумах.

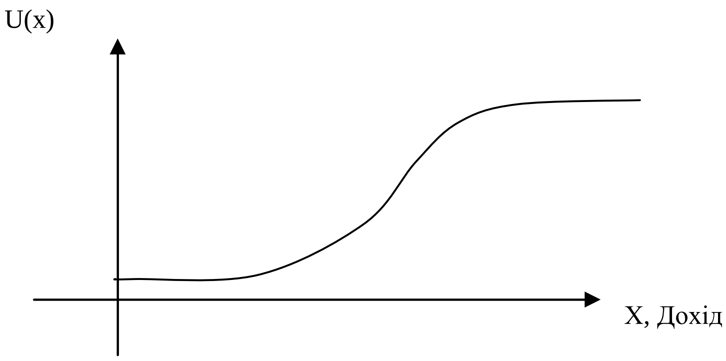

Рис. 2.11. Функція схильності-несхильності до ризику

2.1.10. Тест для самоконтролю

І. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. У задачах прийняття рішення особою, що приймає рішення (ОПР), називають:

а) одного суб'єкта, який розв'язує проблему

б) декілька суб'єктів, які розв'язують проблему

в) обидві відповіді правильні

2. Кажуть, що ОПР здійснює прийняття рішення в умовах ризику, якщо встановлений наступний зв'язок альтернатив з результатами:

а) коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку

б) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи

в) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи, але на їх появу впливають сторонні чинники

г) якщо кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, причому відсутня навіть стохастична залежність наслідків від альтернатив

3. Середнім очікуваним доходом згідно критерію Байєса-Лапласа є:

а) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot p_j)$ в) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$

б) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (r_{i,j} \cdot p_j)$ г) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_{i,j}$

4. Середнім очікуваним ризиком згідно критерію Байєса-Лапласа є:

а) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot p_j)$ в) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$

б) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (r_{i,j} \cdot p_j)$ г) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_{i,j}$

5. Середнім очікуваним доходом згідно критерію Бернуллі-Лапласа є:

а) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot p_j)$ в) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$

б) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (r_{i,j} \cdot p_j)$ г) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_{i,j}$

6. Середнім очікуваним ризиком згідно критерію Бернуллі-Лапласа є:

а) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot p_j)$ в) $Z = \max\limits_{i=1,m} M(A_i);\ M(A_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$

б) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (r_{i,j} \cdot p_j)$ г) $Z = \min\limits_{i=1,m} M(R_i);\ M(R_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_{i,j}$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Гра з “природою” може бути задана:

а) платіжною матрицею в) матрицею ризиків

б) матрицею програшів г) матрицею виграшів

8. Елементи матриці ризиків знаходяться за формулою:

а) $r_{i,j} = \min_i a_{i,j} - a_{i,j}$ в) $r_{i,j} = \max_i a_{i,j} - a_{i,j}$

б) $r_{i,j} = a_{i,j} - \min_i a_{i,j}$ г) $r_{i,j} = a_{i,j} - \max_i a_{i,j}$

9. Матриця ризиків володіє наступними властивостями:

а) всі елементи є від’ємними числами

б) всі елементи є невід’ємними числами

в) у кожному стовпчику є мінімум один нульовий елемент

г) у кожному стовпчику є лише один нульовий елемент

д) у кожному стовпчику відсутні нульові елементи

10. Критеріями прийняття рішень в умовах ризику є:

а) Байєса-Лапласа г) мінімізації дисперсії оцінок

б) Бернуллі-Лапласа д) максимізації дисперсії оцінок

в) модальний е) модульний

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: В іграх з “природою” гравця називають… ________________

____

12. Продовжіть: Критерій прийняття рішень – це…________________________

____

2.1.11. Завдання для самостійного виконання

1. Характеристики інвестиційних проектів представлені у вигляді точок на площині (m, r), де m – середній прибуток, що планують одержати від інвестицій, а r – середньоквадратичне відхилення прибутку (рис. 2.12). Зробіть спочатку вибір між проектами, що позначені точками *A*, *B*, *C*, а потім точками *D*, *F*, *G* з погляду інвестора й обґрунтуйте свій вибір.

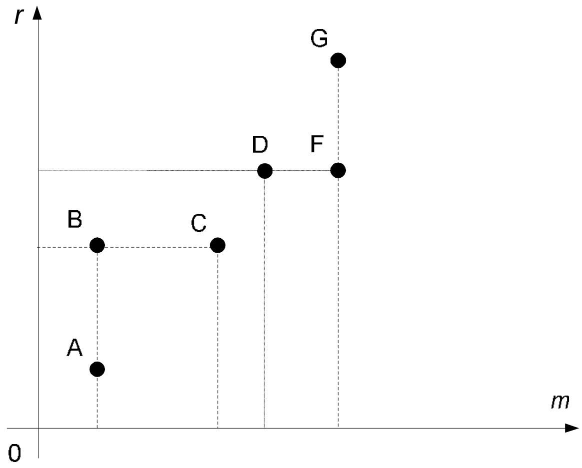

Рис. 2.12. Варіанти вибору інвестицій

2. Нехай є два інвестиційних проекти. Перший з імовірністю 0,3 забезпечує прибуток 20 млн. грн, з імовірністю 0,2 – прибуток 15 млн. грн, однак, уклавши гроші в цей проект, з імовірністю 0,5 можна втратити 3,6 млн. грн. Для другого проекту з імовірністю 0,4 можна дістати прибуток 10 млн. грн, з імовірністю 0,4 – прибуток 20 млн. грн і з імовірністю 0,2 втратити 12 млн грн. Який проект вибрати?

3. Спеціалісти фірми, що виробляє оргтехніку, провели аналіз ринку нових видів техніки та встановили, що можливий випуск техніки видів A_1, A_2, A_3, A_4. Виділено п’ять станів $П_1, П_2, П_3, П_4, П_5$, кожен з яких означає певне поєднання факторів (якість продукції, реклама, затребуваність товару на ринку тощо), що впивають на ефективність рішення. Економічна ефективність випуску партії оргтехніки змінюється залежно від станів “природи” і задана матрицею ефективності:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ймовірності настання станів $П_1, П_2, П_3, П_4, П_5$ рівні $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}1$, $p_5 = 0{,}2$. За критерієм Байєса-Лапласа з’ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

4. Нехай для гри, яку задано матрицею виграшів у завданні 4, ймовірності настання станів $П_1, П_2, П_3, П_4, П_5$ рівні, тобто $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0,2$. За критерієм Бернуллі-Лапласа з'ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

5. Для гри, яку наведено у завданні 3, за критерієм мінімізації дисперсії оцінок з'ясувати, при якому варіанті рішення досягається найбільший середній дохід і яка величина цього доходу та при якому варіанті рішення досягається найменший середній ризик і яка величина цього ризику.

6. Числові оцінки наслідків вибору альтернативи з множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ для різних станів середовища $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ наведені в табл. 2.18. Ймовірності настання станів середовища рівні $p_1 = 0,15$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,25$, $p_4 = 0,3$, $p_5 = 0,1$. Знайти оптимальні альтернативи за критеріями Байєса-Лапласа, Бернуллі-Лапласа, мінімізації дисперсії оцінок та модальним.

Табл. 2.18. Матриця ефективності

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	10	12	14	15	6
x_2	5	14	18	16	5
x_3	17	11	10	9	3
x_4	7	13	20	8	4

2.2. Прийняття рішень у конфліктних ситуаціях

2.2.1. Особливості прийняття рішень у конфліктних ситуаціях

У задачах прийняття рішень в мовах ризику ОПР, під яким ми розуміли "природу", ніяк не реагував на можливі рішення ОПР – статистика. Однак досить часто таким суперником є мислячий суб'єкт або їх група, який усвідомлено вибирає варіант реалізації ситуації.

Розглянемо наступну модель. ОПР A приймає рішення, на результат якого впливає інша ОПР B. Мета B протилежна A. ОПР B аналізує всі можливі варіанти A і приймає таке рішення, яке приводить до найменьшого виграшу A (відповідно максимального свого виграшу). Прикладами таких ситуацій служать відносини між продавцем та покупцем, адвокатом та прокурором, кредитором та дебітором і т. д.

Ситуація конфлікту є невід'ємною складовою ринкового середовища, під час якої кожен із суб'єктів (конкурентів) намагається завдати збиток іншому та мінімізувати власні витрати. *Конфліктною* називається *ситуація*, коли стикаються інтереси двох чи більше сторін, які мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить під того, як поводитимуться інші. У житті конфлікт завжди супроводжується ризиком.

2.2.2. Сутність теорії ігор

Рішення в умовах конфлікту завжди пов'язані з ризиком, тому необхідним є обґрунтований підхід у виборі напряму подальших дій. ОПР у процесі своїх дій повинен вибрати таку стратегію, що дасть змогу йому зменшити ступінь протидії, що, у свою чергу, знизить ступінь ризику.

Математичний апарат для вибору відповідного рішення в конфліктній ситуації сформований у *теорії ігор*. Завдяки їй:

• ОПР краще розуміє конкретну проблему в цілому та зводить до мінімуму ступінь ризику;

• можна вирішувати багато економічних проблем, пов'язаних з вибором, визначенням найкращого стану, підпорядкованого тільки деяким обмеженням, що випливають з умов самої проблеми;

• ОПР спонукується розглядати всі можливі альтернативи як своїх дій, так і стратегії партнерів, конкурентів.

Мета теорії ігор – формування рекомендацій щодо оптимальної поведінки учасників конфлікту, тобто визначення оптимальної стратегії кожному з них. У теорії ігор розроблено систему власних понять. Математична модель конфлікту називається *грою*, сторони у конфлікті – *гравцями*. Результат ігри називається *виграшем*, *програшем* або *нічиєю*, *правила гри* – перелік прав і обов'язків гравців. *Ходом* називається вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій. Ходи бувають *особисті* та *випадкові*. Особистий хід – це свідомий вибір гравця, випадковий хід – вибір дії, що не залежить від його волі. Залежно від кількості можливих ходів у грі ігри поділяються на *скінченні* та *нескінченні*. Скінченні – ті, котрі передбачають скінченну кількість ходів, нескінченні – навпаки. Деякі ігри в принципі мають вважатися скінченними, але мають так багато ходів, що належать до нескінченних (шахи).

Стратегією гравця називається сукупність правил, які визначають вибір варіанту дій у кожному особистому ході. Оптимальною стратегією гравця називається така, що забезпечує йому максимальний виграш. Ігри, що складаються тільки з випадкових ходів, називаються азартними. Ними теорія ігор не займається. Її мета – оптимізація поведінки гравця у грі, де поряд з випадковими є особисті ходи (стратегічні ігри). Гра називається грою з нульовою сумою, якщо сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю, тобто кожен виграє за рахунок інших. Гра називається парною, якщо в неї грають два гравці. Парна гра з нульовою сумою називається *антагоністичною*.

Основне припущення, на підставі якого знаходять оптимальне рішення в теорії ігор, полягає в тому, що супротивник такий же розумний, як і сам гравець. У гру грають два гравці, назвемо їх A і B. Себе прийнято ототожнювати з гравцем A. Нехай в A є m можливих стратегій: A_1, A_2, …, A_m, а в супротивника B – n можливих стратегій: B_1, B_2, …, B_n. Така гра називається грою $m \times n$. Припустимо, що відомі виграші (програші) гравця A при довільній вибраній їм стратегії A_i і довільній відповіді йому гравця B – стратегії B_j. Нехай цей результат виражається числом $a_{i,j}$ (яке може бути і від'ємним у випадку програшу гравця A).

Гра може мати нормальну (матричну) форму або розгорнуту (у вигляді дерева). Гру зручно відображати таблицею, що називається *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів* (табл. 2.19). Платіжна матриця має стільки стовпців, скільки стратегій у гравця B, і стільки рядків, скільки стратегій у гравця A. На перетині рядків і стовпців, що відповідають різним стратегіям, стоять виграші гравця A і, відповідно, програші гравця B.

Зведення гри до матричної форми саме по собі може бути важким і навіть нездійсненним завданням унаслідок незнання стратегій, величезної їх кількість, а також через складність оцінювання виграшу. В усіх подібних випадках задача не може бути розв'язана методами теорії ігор.

Табл. 2.19. Загальний вигляд платіжної матриці

Стратегії гравців	B_1	B_2	…	B_n
A_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,n}$
A_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,n}$
…	…	…	…	…
A_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	…	$a_{m,n}$

2.2.3. Чиста та змішана стратегії

Розглянемо гру зі сторони гравця A. Гравець A, вибираючи свою стратегію A_i, розуміє, що B відповість йому такою стратегією B_j, щоб виграш A був мінімальним. Тому, із всіх найгірших варіантов (мінімальних елементів кожного стовпця платіжної матриці) $a_i = \min\limits_j a_{i,j}$, гравцю A вигідно вибрати стратегію, що відповідає максимальному із цих елементів:

$$a = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{i,j}.$$

Величина a називається *нижньою ціною гри або максиміном*. Це гарантований виграш гравця A. З іншої сторони, гравець B, вибираючи свою стратегію B_j розуміє, що гровець A відповість такою стратегією A_i, щоб його виграш бул максимальним. Тому із найкращих варіантів для A (максимальний елемент кожного стовпця) $b_j = \max\limits_i a_{i,j}$ гравцю B раціонально вибрати свою стратегію, що відповідає мінімальному із цих чисел:

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{i,j}.$$

Величина b називається *верхньою ціною гри* або *мінімаксом*. Це максимальний програш гравця B. Реальний результат рішення конфліктної ситуації, називається *ціною гри* n, що міститься між верхньою і нижньою цінами: $a \le n \le b$. У випадку, коли верхня і нижняя ціни співпадають $a = b = n$, то гра має *рішення в чистих стратегіях*, тобто можна точно визначити стратегії $\left(A_i, B_j\right)$, які вигідні для обох сторін. Якщо одна сторона відійде від своеї оптимальної стратегії, то її виграш від цього тільки зменьшиться.

Приклад 2.23. Дебітор A бажає вибрати одну із чотирьох умов займу: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор може на довільний варіант займу відповісти п’ятьма варіантами надання кредиту B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентні ставки для дебітора при довільному варіанті кредитора представлені платіжною матрицею, що наведена у табл. 2.20. Визначити оптимальні стратегії поведінки дебітора і кредитора.

Табл. 2.20. Платіжна матриця гри

B \ A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	3	4
A_2	7	8	9	5	6
A_3	3	7	6	2	5
A_4	5	6	7	4	3

Розв'язання. Знаходимо мінімальні елементи кожного рядка платіжної матриці a_i $(i=\overline{1,4})$, а далі із них вибираємо максимальне значення a. Із максимальних елементів кожного стовпця b_j $(j=\overline{1,5})$ вибираємо мінімальний b (див. табл. 2.21).

Табл. 2.21. Знаходження цін ігри

B \ A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a
A_1	6	1	8	3	4	1
A_2	7	8	9	$\boxed{5}$	6	$\boxed{5}$
A_3	3	7	6	2	5	2
A_4	5	6	7	4	3	3
b	7	8	9	$\boxed{5}$	6	

Видно, що верхня і нижня ціни гри співпадають $a=b=n=5$. Отже, для обох гравців вигідні стратегії (A_2, B_4) і процентна ставка рівна 5. При прийнятті гравцями іншої стратегії, відмінної від оптимальної, цей гравець тільки програє.

Розглянемо тепер ситуацію, коли верхня і нижня ціни неспівпадають $a \neq b$. У цьому випадку гра вирішується у *змішаних стратегіях*. Змішані стратегії передбачають, що кожен гравець буде вибирати випадково із можливо допустимих чистих стратегій (але вибирати їх з ймовірністю), або частково реалізовувати чисті стратегії в заданих пропорціях. Знаходження цих ймовірностей (або пропорцій) і є рішенням ігри. Таким чином, у загальному виді, рішення гри є змішані стратегії $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$, де p_i і q_j – відповідно ймовірності чистих стратегій A_i і B_j в змішаній.

Розглянемо спочатку простіший випадок ігри, яка вирішується в змішаних стратегіях – гру 2×2, коли у кожного гравця є лише по дві стратегії. Платіжна матриця такої гри наведена у табл. 2.22.

Табл. 2.22. Платіжна матриця гри

A \ B	B_1	B_2
A_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$
A_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$

Рішення гри $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, де $p_1 = \dfrac{a_{2,2} - a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}}$, $p_2 = 1 - p_1$, $q_1 = \dfrac{a_{2,2} - a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}}$, $q_2 = 1 - q_1$. Ціна гри рівна $n = \dfrac{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}}$.

Приклад 2.24. Гравець A ховає в одній із рук монету. Гравець B намагається вгадати руку з монетою. Якщо B не вгадує, то A отримує від B п'ять цукерок. Якщо B вгадує руку з монетою і ця рука права, то він отримує від A п'ять цукерок. Якщо B знаходить монету у лівій руці, то він отримує від A десять цукерок. Визначити оптимальні стратегії поведінки для кожного гравця і середній виграш для A.

Розв'язання. Нехай стратегії гравців: A_1 – сховати у правій руці; B_1 – шукати у правій руці; A_2 – сховати у лівій руці; B_2 – шукати у лівій руці. Платіжна матриця для цієї ситуації відносно гравця A наведена в табл. 2.23.

Табл. 2.23. Платіжна матриця гри

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	-5	5
A_2	5	-10

Тоді ймовірності чистих стратегій у змішаній рівні:

$$p_1 = \frac{-10-5}{-5+(-10)-5-5} = \frac{3}{5},\ p_2 = \frac{2}{5},\ q_1 = \frac{-10-5}{-5+(-10)-5-5} = \frac{3}{5},\ q_2 = \frac{2}{5}.$$

Ціна гри рівна:

$$n = \frac{(-5)\cdot(-10)-5\cdot 5}{(-5)+(-10)-5-5} = -1.$$

Таким чином, гравецю A потрібно випадково чергувати руки з монетою, але у правій руці ховати в середньому у трьох випадках з п'яти, а у лівій – в двох випадках з п'яти. У цьому випадку у кожній грі в середньому A втрачає рдну цукерку, тобто гра для A не вигідна.

Для гравця B вигідно також чергувати руки, в яких він шукає монету, але в правій руці шукати в трьох випадках з п'яти, що приведе до середнього виграшу для нього в одну цукерку за гру.

У деяких випадках вдається аналогічним чином рішити і ігрові ситуації з платіжними матрицями більшого розміру, спростивши їх до гри 2×2. При цьому використовуються наступні правила:

1) якщо всі елементи якого-небудь рядка платіжної матриці не перевищують відповідних елементів довільного іншого рядка, то рядок з меншими елементами відповідної стратегії, яка для гравця A зазделегідь не вигідна

при довільній відповіді гравця B. Тому із платіжної матриці рядок із найменшими елементами можна викреслити, тим самим вивівши із розгляду відповідну їй стратегію;

2) з іншої сторони, для гравця B зазаделегідь невигідна, незалежно від відповіді A, стратегія, якій відповідає стовпець платіжної матриці, у якому всі елементи більші або рівні відповідним елементам довільного іншого стовпця. Стовпець з найбільшими елементами також можна вивести із розгляду, викресливши із платіжної матриці.

Приклад 2.25. Директор транспортної компанії A, що здійснює транспортні послуги по перевезенню пасажирів в обласному центрі, планує відкрити один або декілька маршрутів: A_1, A_2, A_3 і A_4. Для цього було закуплено 100 мікроавтобусів. Він може поставити весь транспорт на одному із маршрутів (найбільш вигідному), або розподілити по декільком маршрутам. Попит на транспорт, а відповідно і прибуток компанії залежить від того, які маршрути найближчим часом відкриє головний конкурент – компанія B. Її керівництво повністю володіє ситуацією і може відкрити декілька із п'яти маршрутів B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5. Оцінки прибутку компанії A (млн. грн) при довільній відповіді B представлена платіжною матрицею, що наведена в табл. 2.24.

Табл. 2.24. Платіжна матриця гри

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	3	4	8
A_3	7	7	6	7	5
A_4	6	6	5	4	3

Розв'язання. Знаходимо оптимальний розполіл прибутку по маршрутам і очікуваний прибуток. Викреслюємо із таблиці другий стовпець, так як всі його елементи більші або рівні елементам третього. Викреслюємо четвертий рядок, так як решта його елементів менші елементів третього. Елементи першого стовпця більші елементов третього, викреслюємо перший стовпець. Другий рядок викреслюємо в результаті порівняння з першим. Четвертий стовпець викреслюємо після порівняння з третім. У результаті отримаємо платіжну матрицю, що наведена в табл. 2.25, яка еквівалентна матриці, наведеній у табл. 2.26.

Табл. 2.25. Платіжна матриця гри після спрощення

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	~~5~~	~~6~~	4	~~6~~	9
A_2	~~6~~	~~5~~	~~3~~	~~4~~	~~8~~
A_3	~~7~~	~~7~~	6	~~7~~	5
A_4	~~6~~	~~6~~	~~5~~	~~4~~	~~3~~

Табл. 2.26. Спрощена платіжна матриця гри

B / A	B_3	B_5
A_1	7	8
A_3	6	7

Тоді ймовірності чистих стратегій компанії A в змішаній $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$ рівні:

$$p_1 = \frac{5-9}{5+(-9)-6-5} = \frac{4}{15},\ p_2 = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}.$$

Ціна гри рівна:

$$n = \frac{4\cdot 5 - 9\cdot 6}{4+5-9-6} = \; = \frac{34}{6} \approx 5,67\,.$$

Отже, $\frac{4}{15}$ автопарка (27 машин) потрібно направити на маршрут A_1, а решту $\frac{11}{15}$ парка (73 машини) на маршрут A_3. Маршрути A_2 і A_4 використовувати не раціонально. При цьому прибуток, не залежно від відповіді компанії B, буде складати $5,67$ млн. грн.

Розглянемо випадок, коли платіжну матрицю неможна спростити до розміра 2×2. Нехай спрощена платіжна матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Тоді для знаходження ймовірностей p_i і q_j змішаних стратегій $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$ необходимо розв’язати пряму і двоїсту задачі лінійного програмування виду:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \to \min; \qquad y_1 + y_2 + \dots + y_m \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{1,1}\cdot x_1 + a_{2,1}\cdot x_2 + \dots + a_{n,1}\cdot x_n \ge 1; \\ a_{1,2}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + \dots + a_{n,2}\cdot x_n \ge 1; \\ \dots \\ a_{1,m}\cdot x_1 + a_{2,m}\cdot x_2 + \dots + a_{n,m}\cdot x_n \ge 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{1,1}\cdot y_1 + a_{1,2}\cdot y_2 + \dots + a_{1,m}\cdot y_m \le 1; \\ a_{2,1}\cdot y_1 + a_{2,2}\cdot y_2 + \dots + a_{2,m}\cdot y_m \le 1; \\ \dots \\ a_{n,1}\cdot y_1 + a_{n,1}\cdot y_2 + \dots + a_{n,m}\cdot y_m \le 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0; i = 1,2,\dots,n; \qquad y_j \ge 0;\; j = 1,2,\dots,m.$$

Із розв’язків задач лінійного програмування знаходяться ціна гри:

$$n = \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{1}{y_1 + y_2 + \dots + y_m}$$

і ймовірності:

$$p_i = x_i \cdot n\;,\; q_j = y_j \cdot n\,.$$

Приклад 2.26. Побудувати пряму і двоїсту задачі лінійного програмування для розв'язання матричної гри, заданої платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Пряма і двоїста задачі лінійного програмування мають вигляд:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min;$$
$$\begin{cases} 9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 \ge 1; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 \ge 1; \\ 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 \ge 1; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 9 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3 + 5 \cdot y_4 \le 1; \\ 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + 8 \cdot y_3 + 3 \cdot y_4 \le 1; \\ 6 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 \le 1; \\ 5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 6 \cdot y_4 \le 1; \\ 3 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 7 \cdot y_4 \le 1; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Із розв'язання можна знайти ціну гри:

$$n = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = = \frac{1}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}$$

і ймовірності:

$$p_i = x_i \cdot n \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),\ q_j = y_j \cdot n \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Відомо, що розв'язання задач лінійного програмування пов'язане з громіздкими обчисленнями. Для числового розв'язання цих задач можна використовувати надстройку пакета прикладних программ MS Excel "Поиск решения", яка входить в MS Office.

2.2.4. Тест для самоконтролю

І. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. Кажуть, що ОПР здійснює прийняття рішення в умовах невизначеності, якщо встановлений наступний зв'язок альтернатив з результатами:

а) коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку

б) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи

в) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи, але на їх появу впливають сторонні чинники

г) якщо кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, причому відсутня навіть стохастична залежність наслідків від альтернатив

2. Критерій Вальда є критерієм:

а) крайнього песимізму	в) песимізму

б) крайнього оптимізму	г) оптимізму

3. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію Вальда статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$	в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$	г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

4. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію оптимізму статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$	в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$	г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

5. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію песимізму статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$	в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$	г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

6. Якщо гру задано матрицею виграшів, то елементи матриці ризиків знаходяться за формулою:

а) $r_{i,j} = \min_i a_{i,j} - a_{i,j}$	в) $r_{i,j} = \max_i a_{i,j} - a_{i,j}$

б) $r_{i,j} = a_{i,j} - \min_i a_{i,j}$	г) $r_{i,j} = a_{i,j} - \max_i a_{i,j}$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Якщо гру задано матрицею виграшів або програшів, то згідно критерію Севіджа статистик обирає стратегію відповідно за формулами:

а) $Z = \min_i \min_j r_{i,j}$ в) $Z = \max_i \min_j r_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j r_{i,j}$ г) $Z = \max_i \max_j r_{i,j}$

8. Якщо гру задано матрицею виграшів або програшів, то згідно критерію Гурвіца статистик обирає стратегію відповідно за формулами:

а) $Z = \max_i \left(a \cdot \min_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \max_j a_{i,j} \right)$ в) $Z = \max_i \left(a \cdot \max_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \min_j a_{i,j} \right)$

б) $Z = \min_i \left(a \cdot \min_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \max_j a_{i,j} \right)$ г) $Z = \min_i \left(a \cdot \max_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \min_j a_{i,j} \right)$

9. У критерії Гурвіца коефіцієнт a розглядають як показник:

а) крайнього песимізму в) песимізму

б) крайнього оптимізму г) оптимізму

10. У критерії Гурвіца коефіцієнт a :

а) $a \in (0,1)$ в) $a \in [0,1)$

б) $a \in [0,1]$ г) $a \in (0,1]$

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: Якщо гру задано матрицею програшів, то елементи матриці ризиків знаходяться за формулою: ____________________________________

12. Продовжіть: Критеріями прийняття рішень в умовах невизначеності є: __
____

2.2.5. Завдання для самостійного виконання

1. Дебітор A бажає вибрати одну із чотирьох умов займу: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор може на довільний варіант займу відповісти п'ятьма варіантами надання кредиту B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентні ставки для дебітора при довільному варіанті кредитора представлені платіжною матрицею, що наве-

дена у табл. 2.27. Визначити оптимальні стратегії поведінки дебітора і кредитора.

Табл. 2.27. Платіжна матриця гри

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	4	5	7	3
A_2	3	5	2	1	4
A_3	5	7	6	9	8
A_4	4	6	1	3	5

2. Гравець A ховає в одній із рук монету. Гравець B намагається вгадати руку з монетою. Якщо B не вгадує, то A отримує від B три цукерки. Якщо B вгадує руку з монетою і ця рука ліва, то він отримує від A дві цукерки. Якщо B знаходить монету у правій руці, то він отримує від A чотири цукерки. Визначити оптимальні стратегії поведінки для кожного гравця і середній виграш для A.

3. Директор транспортної компанії A, що здійснює транспортні послуги по перевезенню пасажирів в обласному центрі, планує відкрити один або декілька маршрутів: A_1, A_2, A_3 і A_4. Для цього було закуплено 100 мікроавтобусів. Він може поставити весь транспорт на одному із маршрутів (найбільш вигідному), або розподілити по декількох маршрутам. Попит на транспорт, а відповідно і прибуток компанії залежить від того, які маршрути найближчим часом відкриє головний конкурент – компанія B. Її керівництво повністю володіє ситуацією і може відкрити декілька із п'яти маршрутів B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5. Оцінки прибутку компанії A (млн. грн) при довільній відповіді B представлена платіжною матрицею, що наведена в табл. 2.28.

Табл. 2.28. Платіжна матриця гри

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	4	7	6	8
A_2	8	5	3	9	4
A_3	7	9	6	8	7
A_4	6	3	8	4	5

2.3. Прийняття рішень в умовах невизначеності

2.3.1. Поняття невизначеності у задачах прийняття рішень

У більшості теоретичних завдань мова йде про постановку і методи вирішення завдань, що не містять невизначеностей. Проте, як правило, більшість реальних практичних завдань містять у тому або іншому вигляді невизначеність. Можна навіть стверджувати, що вирішення завдань з урахуванням різного виду невизначеностей є загальним випадком.

Накопичено достатньо велике число методів формалізації постановки і ухвалення рішень з урахуванням невизначеностей. При використанні цих методів необхідно мати на увазі, що всі вони носять рекомендаційний характер і вибір остаточного рішення завжди залишається за ОПР.

При вирішенні конкретних завдань з урахуванням невизначеностей ОПР стикається з різними їх типами. У загальній практиці прийнято розрізняти три типи невизначеностей:

– невизначеність цілей;

– невизначеність природи (невизначеність наших знань про навколишнє середовище і чинники, що діють в досліджуваному явищі);

– невизначеність дій активного або пасивного партнера чи супротивника.

У наведеній вище класифікації тип невизначеності розглядається з позицій того або іншого елемента математичної моделі. Так, наприклад, невизначеність цілей відбивається при постановці завдання на виборі або окремих критеріїв, або всього вектора корисного ефекту. З іншого боку, два інші типи невизначеностей впливають в основному на складання цільової функції, рівнянь обмежень і методу ухвалення рішення. Звичайно, наведене вище твердження є достатньо умовним, як, утім, і будь-яка класифікація. Ми подаємо його лише з метою виділити ще деякі особливості невизначеностей, які треба мати на увазі в процесі ухвалення рішень.

Річ у тому, що, крім розглянутої вище класифікації невизначеностей, потрібно враховувати їх типологію з погляду відношення до випадковості. За цією ознакою можна розрізняти стохастичну (ймовірнісну) невизначеність, коли невідомі чинники статистично стійкі й тому є звичайними об’єктами теорії ймовірності – випадковими величинами (або випадкові функції, події і так далі). При цьому повинні бути відомі або визначені при постановці завдання всі необхідні статистичні характеристики (закони розподілу і їх параметри). Прикладом таких завдань можуть бути, зокрема, система технічного обслуговування і ремонту будь-якого виду техніки, система організації рубок відходу і так далі.

Іншим крайнім випадком може бути невизначеність нестохастичного вигляду, при якій ніяких припущень про стохастичну стійкість не існує.

Нарешті, можна говорити про проміжний тип невизначеності, коли рішення ухвалюється на підставі яких-небудь гіпотез про закони розподілу випадкових величин. При цьому ОПР повинна мати на увазі небезпеку незбігання його результатів з реальними умовами. Ця небезпека незбігання формалізується за допомогою коефіцієнтів ризиків. Таким чином, невизначеність цілей вимагає залучення яких-небудь гіпотез, що допомагають отриманню однозначних рішень. У даному разі облік чинника невизначеності мети приводить до необхідності розгляду іншої проблеми, яка формулюється у вигляді проблеми ухвалення оптимальних багатоцільових рішень.

2.3.2. Постановка модельних задач прийняття рішень в умовах невизначеності

У розглянутих раніше задачах прийняття рішення в умовах ризику відомі оцінки ймовірностей, з якими можна очікувати на той чи інший результат при їх випадковому виборі. Однак, в багатьох практичних задачах досить часто зовсім не відомо, з якою ймовірністю можна очікувати можливого сценарію розвитку ситуації.

Математичну модель задачі прийняття рішення в умовах невизначеності можна сформулювати наступним чином:

Нехай задано деякі дискретні множини альтернатив $X=\{x_1,...,x_m\}$ і станів середовища $Y=\{y_1,...,y_n\}$ та матриця (2.1) розмірністю $m\times n$.

Щоб прийти до одного і, по можливості, найкращого наслідку в разі, коли альтернативи *X* неоднаково проявляють себе у різних станах середовища *Y*, уводять оціночні функції. Кожній альтернативі x_i приписується числова оцінка z_i, яка характеризує всі її наслідки в цілому. Процедуру прийняття рішення можна після цього зробити, як і в умовах визначеності і ризику, максимізуючи чи мінімізуючи оціночну функцію (критерій).

2.3.3. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності

На практиці модельну задачу прийняття рішень в умовах невизначеності, як і у випадку задач прийняття рішень в умовах ризику, буває зручно подати у вигляді моделі гри з "природою".

Припустимо, що ми не володіємо інформацією про ймовірності появи кожного стану "природи" чи не можемо її застосувати. У цьому випадку головний метод прийняття рішень – це введення гіпотези про поведінку "природи", що дає можливість оцінити наслідки для кожної альтернативи.

Критерій Вальда є критерієм крайнього песимізму, оскільки статистик вважає, що "природа" діє проти нього найгіршим чином. Це критерій гарантованого результату.

Нехай гру задано матрицею виграшів гравця A. Тоді на думку статистика – гравця A, дії гравця “природа”, який діє проти нього найгіршим чином, відображуються в реалізації гравцем “природа” таких своїх станів Π_j, при яких величина виграшу гравця A (статистика) приймає найменше значення $\min_j a_{i,j}$. Виходячи з цього статистик обирає таку чисту стратегію A_i, при якій найменший виграш $\min_j a_{i,j}$ буде максимальним, тобто забезпечувати максимін:

$$Z_B = \max_i \min_j a_{i,j}.$$

Ця величина називається нижньою ціною гри – це максимальний виграш, що є гарантованим в грі з певним противником шляхом вибору однієї зі своїх стратегій при мінімальних результатах.

Нехай гру задано матрицею програшів гравця A, тоді найгірші дії гравця “природа”, будуть реалізовуватися в таких станах Π_j, при яких величина програшу гравця A (статистика) приймає найбільше значення $\max_j a_{i,j}$. Виходячи з цього статистику необхідно обрати таку чисту стратегію A_i, при якій найбільший програш $\max_j a_{i,j}$ буде мінімальним, тобто забезпечувати мінімакс:

$$Z_B = \min_i \max_j a_{i,j}.$$

Критерій Вальда забезпечує максимізацію мінімального виграшу або, що теж саме, мінімізацію максимального програшу (втрат), який може виникнути при реалізації однієї зі стратегій. Цей критерій орієнтує ОПР дотримуватися вкрай обережної поведінки. Така поведінка прийнятна наприклад, коли гравець не має зацікавленості в крупному виграші, але хоче себе застрахувати від неочікуваних програшів. Вибір такої поведінки визначається відношенням гравця до ризику. Критерій Вальда застосовують у тих випадках, коли необхідно забезпечити успіх в будь-якій ситуації.

Приклад 2.27. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, за критерієм Вальда вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

Розв' язання. Запишемо матрицю виграшів (2.2) у вигляді табл. 2.29 і знайдемо найменше значення $\min a_{i,j}$ для кожного рядка.

Табл. 2.29. Матриця виграшів ігри

$A \backslash П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{i,j}$
A_1	2	5	4	3	2	2
A_2	5	7	2	1	8	1
A_3	8	3	7	9	4	3
A_4	6	1	8	3	3	1

Слід вибрати таку стратегію серед стратегій A_i ($i = \overline{1,4}$), яка є найбільш вигідною (оптимальною), тому матимемо:

$$Z_B = \max\{2; 1; 3; 1\} = 3,$$

що вказує на перевагу стратегії A_3.

Це означає, що незалежно від того яку стратегію буде застосовувати гравець “природа”, тобто який зі станів складеться на ринку, гравець A (статистик), при застосуванні стратегії A_3, тобто техніки виду A_3, отримає гарантований виграш не менше 3 одиниць. При використанні гравцем A будь-якої іншої стратегії, тобто випуску іншого виду техніки, у випадку гіршої ситуації може бути отриманий виграш менший ніж 3 одиниці.

Критерій оптимізму, який називають критерієм максимаксу, використовують коли особа, що приймає рішення орієнтується на найбільш сприятливі умови.

У випадку, коли гру задано матрицею виграшів за критерієм оптимізму визначається варіант рішення, який максимізує максимальні виграші (наприклад, доходи) для кожного варіанта ситуації. Критерій оптимізму записують у вигляді:

$$Z_O = \max_i \max_j a_{i,j}.$$

У випадку, коли гру задано матрицею програшів за критерієм оптимізму визначається варіант рішення, який мінімізує мінімальні програші (наприклад, витрати) для кожного варіанта ситуації. Критерій оптимізму записують у вигляді:

$$Z_O = \min_i \min_j a_{i,j}.$$

Критерій оптимізму доцільно застосовувати у тих випадках, коли статистик має можливість впливати на вибір стратегій гравцем "природа".

Приклад 2.28. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, за критерієм оптимізму вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

Розв'язання. Запишемо матрицю виграшів у вигляді табл. 2.30 і знайдемо найбільше значення $\max a_{i,j}$ для кожного рядка.

Табл. 2.30. Матриця виграшів ігри

A \ $П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max_j a_{i,j}$
A_1	2	5	4	3	2	5
A_2	5	7	2	1	8	8
A_3	8	3	7	9	4	9
A_4	6	1	8	3	3	8

Слід вибрати таку стратегію серед стратегій A_i ($i=\overline{1,4}$), яка є найбільш вигідною (оптимальною), тому матимемо:

$$Z_O = \max\{5; 8; 9; 8\} = 9,$$

що вказує на перевагу стратегії A_3.

Це означає, що незалежно від того яку стратегію буде застосовувати гравець "природа", тобто який зі станів складеться на ринку, гравець A (статистик), при застосуванні стратегії A_3, тобто техніки виду A_3, отримає гарантований виграш 9 одиниць. При використанні гравцем A будь-якої іншої стратегії, тобто випуску іншого виду техніки, у випадку гіршої ситуації може бути отриманий виграш менше 9 одиниць.

Слід відмітити, що висновки, отримані за критерієм Вальда і критерієм оптимізму, співпадають, та надають перевагу стратегії A_3.

Критерій песимізму. У випадку, коли ОПР орієнтується на найменш сприятливі умови та неконтрольовані фактори застосовують критерій песимізму.

Для гри, яку задано матрицею виграшів за критерієм песимізму визначається варіант рішення, який мінімізує мінімальні виграші для кожного варіанта ситуації. Критерій песимізму записують у вигляді:

$$Z_П = \min_i \min_j a_{i,j}.$$

Для гри, яку задано матрицею програшів за критерієм песимізму визначається варіант рішення, який максимізує максимальні програші для кожного варіанта ситуації. Критерій песимізму записують у вигляді:

$$Z_П = \max_i \max_j a_{i,j}.$$

За критерієм песимізму передбачається, що неконтрольовані фактори можуть бути використані несприятливим чином. В реальних ситуаціях можуть в багатьох задачах неможливий контроль за неконтрольованими факторами. Це відноситься до задач, в яких є необхідність урахування фактору часу; задач соціально-економічного прогнозування; задач довгострокового планування тощо.

Наприклад, витрати виробництва є контрольованими факторами на короткострокових часових інтервалах, але при аналізі довгострокових проектів певні елементи витрат виробництва стають неконтрольованими: вартість електроенергії, вартість матеріалів тощо.

Приклад 2.29. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, за критерієм оптимізму вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

Розв'язання. Запишемо матрицю виграшів у вигляді табл. 2.29 і знайдемо найменше значення $\min a_{i,j}$ для кожного рядка. Тоді матимемо:

$$Z_{П} = \min\{2; 1; 3; 1\} = 1,$$

що вказує на перевагу стратегій A_2 і A_4.

Це означає, що незалежно від того, яку стратегію буде застосовувати гравець "природа", тобто який зі станів складеться на ринку, гравець A (статистик), при застосуванні стратегій A_2 і A_4, тобто техніки видів A_2 і A_4, отримає гарантований виграш не менше 1 одиниці. При використанні гравцем A будь-якої іншої стратегії, тобто випуску іншого виду техніки, у випадку гіршої ситуації може бути отриманий виграш менший ніж 1 одиниця.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Виникають ситуації, в яких неконтрольовані фактори діють більш приємним чином у порівнянні з найкращім становищем, на яке орієнтувалась ОПР. Наприклад, погодні умови оказалися краще прогнозованих; конкуренція зменшилась на ринку у порівнянні з прогнозованими очікуваннями. У цих умовах виникає необхідність визначення можливих відхилень отриманих результатів від їх оптимальних значень. У цьому випадку застосовують критерій Севіджа.

Цей критерій аналогічний попередньому критерію Вальда, але ОПР використовує не матрицю виграшів або програшів A, а матрицю ризиків R.

У разі задання матриці виграшів за критерієм Севіджа кращим є рішення, при якому максимальне значення ризику буде найменшим, тобто розглядаючи i-ту стратегію, допускаємо ситуацію максимального ризику та вибираємо стратегію з найменшим ризиком:

$$Z_C = \min_i \max_j r_{i,j} = \min_i \max_j (\max_i a_{i,j} - a_{i,j}),$$

а у разі задання матриці програшів:

$$Z_C = \max_i \min_j r_{i,j} = \max_i \min_j (a_{i,j} - \min_i a_{i,j}).$$

Для застосування критерію Севіджа до ситуації пред'являються ті ж самі умови, що й для критерію Вальда.

Суть критерію Севіджа полягає у прагненні уникнути великого ризику при виборі рішення (стратегії).

Приклад 2.30. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, за критерієм Севіджа вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

Розв язання. Запишемо матрицю ризиків гри у вигляді табл. 2.31 і знайдемо найбільше значення $\max r_{i,j}$ для кожного рядка.

Табл. 2.31. Матриця ризиків гри

R \ $П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max_j r_{i,j}$
R_1	6	2	4	6	6	6
R_2	3	0	6	8	0	8
R_3	0	4	1	0	4	4
R_4	2	6	0	6	5	6

Слід вибрати таку стратегію серед A_i $(i = \overline{1,4})$, яка має найменший ризик, тому матимемо:

$$Z_C = \min\{6; 8; 4; 6\} = 4,$$

тобто вибираємо стратегію A_3, при застосуванні якої статистиком величина ризику, що дорівнює 4 одиниці, приймає мінімальне значення у самій гіршій ситуації.

Відмітимо, що цей вибір оптимальної стратегії збігається з вибором за критеріями Вальда і оптимізму.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій рекомендує в процесі прийняття рішення використовувати певний середній результат, що характеризує стан між крайнім песимізмом і крайнім оптимізмом.

У випадку, коли гру задано матрицею виграшів за критерієм Гурвіца перевага віддається варіанту рішення, яке визначається максимумом серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$Z_{\Gamma} = \max_i \left(a \cdot \min_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \max_j a_{i,j} \right), a \in [0,1].$$

Коефіцієнт a можна розглядати як показник оптимізму. При $a = 0$ критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, тобто орієнтація на граничний ризик, оскільки великий виграш спрягається з великим ризиком. При $a = 1$ критерій Гурвіца співпадає з критерієм Вальда, тобто орієнтація на обережну поведінку. Тому критерій Гурвіца це називають критерієм узагальненого максиміну.

Значення a є проміжними між ризиком та обережністю і вибирається із суб'єктивних (інтуїтивних) міркувань в залежності від конкретних умов та схильності до ризику ОПР.

У випадку, коли гру задано матрицею програшів за критерієм Гурвіца перевага віддається варіанту рішення, яке визначається мінімумом серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$Z_{\Gamma} = \min_i \left(a \cdot \max_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \min_j a_{i,j} \right).$$

Критерій Гурвіца застосовується у випадку, коли:

– про ймовірність появи стану Π_j нічого не відомо;

– з появою стану Π_j необхідно рахуватися;

– реалізується тільки мала кількість рішень;

– допускається деякий ризик.

Загальні рекомендацій з вибору того або іншого критерію дати важко. Проте відзначимо таке:

– якщо в окремих ситуаціях не допустимий навіть мінімальний ризик, то потрібно застосовувати критерій Вальда;

– якщо певний ризик цілком прийнятний, то можна скористатися критерієм Севіджа.

Приклад 2.31. Для гри, яку задано матрицею виграшів (2.2) у прикладі 2.9, за критерієм Гурвіца при $a = 0,6$ вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

Розв'язання. Запишемо матрицю виграшів у вигляді табл. 2.32 і знайдемо найменше значення $\min a_{i,j}$ і найбільше значення $\max a_{i,j}$ для кожного її рядка.

Табл. 2.32. Матриця виграшів ігри

$A \backslash П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{i,j}$	$\max\limits_j a_{i,j}$	$a \cdot \min\limits_j a_{i,j} + (1-a)\cdot \max\limits_j a_{i,j}$
A_1	2	5	4	3	2	2	5	3,2
A_2	5	7	2	1	8	1	8	3,8
A_3	8	3	7	9	4	3	9	5,4
A_4	6	1	8	3	3	1	8	3,2

Визначимо максимум серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$Z_Г = \max\{3,2; 3,8; 5,4; 3,2\} = 5,4 .$$

Таким чином, за критерієм Гурвіца при значенні показнику оптимізму $a = 0,6$ слід вибрати стратегію A_3.

2.3.4. Тест для самоконтролю

І. Виберіть один із кількох варіантів відповідей:

1. Кажуть, що ОПР здійснює прийняття рішення в умовах невизначеності, якщо встановлений наступний зв'язок альтернатив з результатами:

а) коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку

б) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи

в) коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, що мають певні ймовірності появи, але на їх появу впливають сторонні чинники

г) якщо кожна альтернатива може привести до одного з декількох наслідків, причому відсутня навіть стохастична залежність наслідків від альтернатив

2. Критерій Вальда є критерієм:

а) крайнього песимізму

б) крайнього оптимізму

в) песимізму

г) оптимізму

3. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію Вальда статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$

в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

4. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію оптимізму статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$

в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

5. Якщо гру задано матрицею виграшів, то згідно критерію песимізму статистик обирає стратегію, при якій виграш обчислюється за формулою:

а) $Z = \max_i \min_j a_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j a_{i,j}$

в) $Z = \max_i \max_j a_{i,j}$

г) $Z = \min_i \min_j a_{i,j}$

6. Якщо гру задано матрицею виграшів, то елементи матриці ризиків знаходяться за формулою:

а) $r_{i,j} = \min_i a_{i,j} - a_{i,j}$

б) $r_{i,j} = a_{i,j} - \min_i a_{i,j}$

в) $r_{i,j} = \max_i a_{i,j} - a_{i,j}$

г) $r_{i,j} = a_{i,j} - \max_i a_{i,j}$

II. Виберіть декілька із кількох варіантів відповідей:

7. Якщо гру задано матрицею виграшів або програшів, то згідно критерію Севіджа статистик обирає стратегію відповідно за формулами:

а) $Z = \min_i \min_j r_{i,j}$ в) $Z = \max_i \min_j r_{i,j}$

б) $Z = \min_i \max_j r_{i,j}$ г) $Z = \max_i \max_j r_{i,j}$

8. Якщо гру задано матрицею виграшів або програшів, то згідно критерію Гурвіца статистик обирає стратегію відповідно за формулами:

а) $Z = \max_i \left(a \cdot \min_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \max_j a_{i,j} \right)$ в) $Z = \max_i \left(a \cdot \max_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \min_j a_{i,j} \right)$

б) $Z = \min_i \left(a \cdot \min_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \max_j a_{i,j} \right)$ г) $Z = \min_i \left(a \cdot \max_j a_{i,j} + (1-a) \cdot \min_j a_{i,j} \right)$

9. У критерії Гурвіца коефіцієнт a розглядають як показник:

а) крайнього песимізму в) песимізму

б) крайнього оптимізму г) оптимізму

10. У критерії Гурвіца коефіцієнт a :

а) $a \in (0,1)$ в) $a \in [0,1)$

б) $a \in [0,1]$ г) $a \in (0,1]$

III. Запишіть відповідь:

11. Продовжіть: Якщо гру задано матрицею програшів, то елементи матриці ризиків знаходяться за формулою: ____________________________________

12. Продовжіть: Критеріями прийняття рішень в умовах невизначеності є: __

____

2.3.5. Завдання для самостійного виконання

1. Спеціалісти фірми, що виробляє оргтехніку, провели аналіз ринку нових видів техніки та встановили, що можливий випуск техніки видів A_1, A_2, A_3, A_4. Виділено п’ять станів $П_1, П_2, П_3, П_4, П_5$ кожен з яких означає певне поєднання факторів (якість продукції, реклама, затребуваність товару на ринку тощо), що впивають на ефективність рішення. Економічна ефекти-

вність випуску партії оргтехніки змінюється залежно від станів “природи” і задана матрицею ефективності:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Побудувати матрицю ризиків за заданою матрицею ефективності (виграшів).

2. Для гри, яку задано матрицею виграшів у завданні 1, за критерієм крайнього песимізму Вальда вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

3. Для гри, яку задано матрицею виграшів у завданні 1, за критерієм оптимізму вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

4. Для гри, яку задано матрицею виграшів у завданні 1, за критерієм песимізму вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

5. Для вихідних даних завдання 1 за критерієм мінімаксного ризику Севіджа вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

6. Для гри, яку задано матрицею виграшів у завданні 1, за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца при $a = 0,4$ вибрати стратегію, яка є найбільш вигідною.

7. Розглядається гра з “природою” 3×4, тобто з трьома стратегіями гравця A_1, A_2, A_3 і чотирма варіантами станів “природи” $П_1, П_2, П_3, П_4$. Матриця ефективності (виграшів) наведена в табл. 2.33. Потрібно знайти оптимальну стратегію за критеріями Вальда, оптимізму, песимізму, Севіджа і Гурвіца при $a = 0,5$.

Табл. 2.33. Матриця ефективності (виграшів)

A \ $П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	7	4	1
A_2	5	4	3	2
A_3	7	3	2	5

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Блюмин С. Л.* Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – 138 с.
2. *Василенко В. А.* Теорія і практика: розробки управлінських рішень: навчальний посібник / В. А. Василенко. – К. : ЦУЛ, 2003. – 420 с.
3. *Вербин С.* Наука принятия решений / С. Вербин. – СПб. : Питер, 2002. – 160 с.
4. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.
5. *Колпаков В. М.* Теория и практика принятия управленческих решений: учеб. пособие / В. М. Колпаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : МАУП, 2004. – 504 с.
6. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в волшебных странах: ученик /О. И. Ларичев. – М.: Логос, 2000. – 296 с.
7. Многокритериальные методы принятия решений / С. В. Емельянов, О. И. Ларичев. – М. : Знание, 1985. – 346 с.
8. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели / Э. Мулен. – М. : Наука, 1991. – 246 с.
9. *Мушик Э.* Методы принятия технических решений / Э. Мушик., П. Мюллер. – М. : Наука,1990. – 340 с.
10. *Подиновский В. В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 226 с.
11. *Соболь И. М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. – М. : Наука, 1981. – 248 с.
12. Теория выбора и принятия решений: учебное пособие / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. – М. : Наука, 1982. – 328 с.
13. *Черноморов Г. А.* Теория принятия решений: учебное пособие / Г. А. Черноморов. – Новочеркасск, 2002. –276 с.
14. *Юкаева В. С.* Управленческие решения: учеб. пособие / В. С. Юкаева. – М. : Издательский дом «Дашков и К°», 1999. – 292 с.
15. *Эддоус М.* Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд; пер. с англ. под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М. : Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ю. Є. КЛИМЮК

СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчально-методичний посібник
для проведення практичних занять та самостійної роботи
для студентів напрямів підготовки
6.040301 “прикладна математика”, 6.040302 “інформатика”
денної форми навчання

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 03.02.2015 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11. Тираж 50. Зам. № 457/2.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12