Міністерство науки і освіти України
Рівненський державний гуманітарний університет

А.О. Сяський, В.А. Сяський, Н.В. Шевцова

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Рівне – 2019

С 99
УДК 519.61/.64 (075.8)

Рекомендовано до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 6 від 26 червня 2019 р.)

Рецензенти:
А. П. Власюк – доктор технічних наук, професор, Національний університет «Острозька академія»;
І. С. Войтович – доктор педагогічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет.

Сяський А. О., Сяський В. А., Шевцова Н. В. Чисельні методи прикладної математики. Навчальний посібник – Рівне : РДГУ, 2019. – 108 с.

У навчальному посібнику викладено основні чисельні методи, які використовуються при вирішенні на ЕОМ задач прикладної математики. Послідовно розглядаються методи розв’язування нелінійних рівнянь з однією змінною, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, методи інтерполювання, екстраполювання, чисельного диференціювання та інтегрування функцій. Вказані методи інтерпретуються геометрично. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується конкретними прикладами, які ілюструють особливості застосування чисельних методів до розв’язування практичних задач.

Особливо корисним посібник буде студентам, які вивчають курс математики за скороченими програмами, а також учителям математики та інформатики.

С 99
УДК 519.61/.64 (075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

При вирішенні багатьох проблем математичної фізики та сучасної техніки виникають задачі, пов'язані з прикладною математикою. Саме застосування математичних методів розв'язування прикладних задач викликало необхідність розробки більш ефективних та удосконалених чисельних методів, без яких неможливе широке використання сучасних ЕОМ.

На роль математики в суспільстві впливає розвиток математичного апарату науки і ступінь досконалості знань про досліджуваний об'єкт, можливість описати його найсуттєвіші риси і властивості мовою математичних понять, тобто побудувати математичну модель об'єкта.

Математичні моделі – це, як правило, різноманітні рівняння, що є записом законів природи, які керують досліджуваним об'єктом чи явищем. Вони будуються на основі деяких спрощень та ідеалізації об'єкта, а тому завжди є наближеним його описом.

Викладенню підходів використання чисельних методів у задачах прикладної математики, що описуються лінійними та нелінійними алгебраїчними рівняннями, і присвячений цей посібник. Основна увага приділяється не теоретичним, а обчислювальним аспектам цих методів та їх геометричній інтерпретації.

РОЗДІЛ 1
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

1.1. Поняття про наближені числа

Розглянемо таку просту задачу. Припустимо, що пасажир живе на відстані 1247 м від вокзалу. За скільки часу до відправлення поїзда пасажир повинен вийти з дому, якщо середня швидкість пішохода дорівнює 6 км/год?

Розв'язок такої задачі визначається формулою для рівномірного прямолінійного руху матеріальної точки

$$t = \frac{S}{V} = \frac{1247 \cdot 60}{6000} = 12{,}47 \text{ хв} = 12 \text{ хв } 28{,}2 \text{ с}.$$

Однак в дійсності ніхто не став би користуватися таким точним математичним розрахунком, і ось чому.

Обчислення проведені абсолютно точно, але чи точно виміряна відстань до вокзалу? Та чи можна взагалі виміряти шлях пішохода, не допустивши ніяких похибок? Чи може пішохід рухатися по прямій лінії в місті, де повно людей і машин, що переміщаються в різних напрямках? А середня швидкість $V = 6$ км/год – чи встановлена вона абсолютно точно? Цілком зрозуміло, що кожна людина в такому випадку віддасть перевагу не «математично точному», а практичному розв'язку такої задачі, тобто прикине, що йти потрібно $12 - 15$ хв, і додасть для гарантії ще декілька хвилин. Для чого ж тоді визначати секунди і їх десяті частини та отримувати високу точність розрахунку, якщо її не можна використати на практиці?

Математика, безумовно, наука точна, але саме поняття точності потребує конкретизації. Для того, щоб це здійснити потрібно починати з поняття числа, оскільки від точності чисел, тобто від достовірності вхідних даних у значній мірі залежить точність результатів проведених обчислень.

Є три джерела одержання чисел: вимірювання, лічба і виконання різноманітних математичних операцій.

Будь-яке вимірювання не можна виконати абсолютно точно. Кожний вимірювальний прилад дає деяку, більшу або меншу, похибку. Два спостерігачі, вимірюючи одним і тим же приладом одну і ту ж величину, можуть одержати різні результати. Повне співпадання результатів є винятком. Отже, похибка кожного вимірювання складається з похибки приладу і похибки спостереження.

Перейдемо до іншого джерела одержання чисел – лічби. Якщо кількість перелічуваних предметів невелика і якщо вона не змінюється з часом, то ми будемо одержувати абсолютно точні результати. Але чи можна стверджувати, що в кінці 1970 р. число жителів Мексики дійсно складало 48 377 363 осіб, як було встановлено у результаті проведеного перепису? Адже чисельність населення країни або міста постійно коливається навколо свого середнього за певний період часу значення, так як щогодинно, щохвилинно люди приїжджають і виїжджають, народжуються і помирають.

Математичні операції також не можна виконати без похибок. Добути корінь, знайти синус чи логарифм деякого числа, навіть поділити одне число на інше не завжди можна абсолютно точно.

Таким чином, ми встановили, що точні числа зустрічаються дуже рідко. Як правило, це коефіцієнти різних математичних виразів і формул.

Розглянемо інший аспект цього питання. А чи потрібна на практиці абсолютна точність і яку цінність має наближений результат? Знову звернемося до прикладів.

При розрахунку ліній електропередач чи газопроводів ніхто не буде визначати відстань між електроопорами з точністю до міліметра чи діаметр труби з точністю до мікрона. Норми висіву насіння встановлюють з точністю до кількох кілограмів на гектар тощо.

У техніці і будівництві кожну деталь чи споруду можна виготовити тільки в межах точності, яка визначається так званими допусками. Ці допуски змінюються від мікронів до міліметрів, сантиметрів і навіть дециметрів, у залежності від матеріалу, розміру та призначення деталі чи споруди. Це означає, що для визначення розміру деталі нема підстав проводити обчислення з точністю, яка більша ніж та, що визначена допусками.

З огляду на вищесказане, приходимо до таких висновків:

– вхідні дані, як правило, мають похибки, тобто є наближеними числами;
– ці похибки, часто в збільшеному розмірі, переходять у результати обчислень. Але практика часто не потребує абсолютно точних

результатів, а задовольняється наближеннями з деякими допустимими похибками, абсолютна величина яких повинна бути наперед заданою;

- забезпечити необхідну точність результату можна лише тоді, коли вхідні дані обирають достатньо точними і коли враховуються всі похибки, що накопичуються самими обчисленнями;
- обчислення з наближеними числами можна виконувати наближено, намагаючись при розв'язанні кожної конкретної задачі досягти мінімальної затрати праці й часу.

Правила і закони арифметики виведені в припущенні, що всі числа точні. Тому, якщо обчислення з наближеними числами виконувати звичайними способами, то витрачається багато часу на знаходження зайвих цифр, та найголовніше створюється небезпечна і шкідлива ілюзія точності там, де її насправді нема.

Істинна математична і наукова точність полягає в тому, щоб вказати на наявність похибок та встановити їх межі.

Одним із джерел одержання наближених чисел є округлення. Округленням даного числа до деякого розряду називають заміну його іншим числом, яке утворюється з даного шляхом відкидання всіх його цифр, записаних правіше від цифри цього розряду, або заміною їх нулями. Округлення необхідно проводити так, щоб похибка була мінімальною. Для забезпечення цього дотримуються такого правила: якщо перша з цифр зліва, що відкидаються, менша ніж 5, то останню залишену цифру не змінюють (округлення з недостачею); якщо ця цифра більша ніж 5, то останню залишену цифру збільшують на одиницю (округлення з надлишком); якщо ж ця цифра дорівнює 5, то останню цифру збільшують на 1 при умові, що вона непарна (округлення з надлишком) і залишають без зміни, якщо вона парна (округлення з недостачею).

Проілюструємо це на прикладах. Округлити:

a) до десятих число $12{,}34$; $12{,}34 \approx 12{,}3$;
b) до сотих число $3{,}2465$; $3{,}2465 \approx 3{,}25$;
c) до тисячних число $3{,}4335$; $3{,}4335 \approx 3{,}434$;
d) до тисяч число $12\,375$; $12\,375 \approx 12\,000$.

Розглянемо тепер геометричний зміст наближеного числа. Якщо число 3 точне, то на числовій осі йому відповідає одна точка. Якщо ж 3 наближене число, то це може бути $3{,}2$ або $2{,}847$, і взагалі довільне число з проміжку $[2{,}50001;\ 3{,}49999]$, якщо розглядати точність до однієї стотисячної. Округлюючи ці числа, будемо одержувати наближене число 3. На числовій осі йому відповідатиме вже не точка, а відрізок, що визначає проміжок допустимих значень наближеного числа. Наприклад, наближеному числу 3 відповідає проміжок допустимих значень $(2{,}5; 3{,}5)$, а наближеному числу $3{,}0$ – проміжок $[2{,}95;\ 3{,}05]$.

1.2. Абсолютна і відносна похибки наближеного числа

Позначимо точне значення числа великою буквою A, а його наближене значення – малою буквою a латинського алфавіту. Різницю між точним значенням числа A і його наближеним значенням a будемо називати похибкою наближення a точного числа A.

Очевидно, що похибка може бути додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Абсолютне значення похибки наближеного числа a скорочено називають **абсолютною похибкою** і записують у вигляді

$$\Delta a = |A - a|.$$

Точне значення числа A у більшості випадків невідоме, а тому невідома і абсолютна похибка. Але дуже часто, не знаючи точного числа, ми можемо встановити межу (границю) його абсолютної похибки.

Так, вимірюючи довжину заданого відрізка міліметровою лінійкою, ми маємо право стверджувати, що похибка вимірювання не перевищує 1 мм, а точніше 0,5 мм.

Обчислюючи площу S плоскої фігури довільної форми (яку точно знайти досить складно), ми легко можемо встановити верхню і нижню межі цієї площі. Для цього достатньо описати навколо цієї фігури і вписати в неї прямокутники зі сторонами a_2, b_2 і a_1, b_1 відповідно. У результаті цього одержимо

$$a_1 \cdot b_1 \leq S \leq a_2 \cdot b_2.$$

Якщо за наближене значення S обрати число

$$S \approx \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{2},$$

то очевидно, що похибка ΔS не буде перевищувати пів різниці площ прямокутників

$$\Delta S \le \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{2}.$$

Збільшуючи число вписаних і описаних прямокутників, можна зменшити похибку ΔS.

Граничною абсолютною похибкою наближеного числа a називається додатне число Δ_a^*, яке задовольняє нерівність

$$\Delta a = |A - a| \le \Delta_a^*.$$

Запис $A = a \pm \Delta_a^*$ слід розуміти так: точне значення величини A знаходяться у проміжку між числами $a - \Delta_a^*$ і $a + \Delta_a^*$, які називаються відповідно нижньою і верхньою границями A. Позначають ці числа відповідно НГ(A) і ВГ(A).

Наприклад, якщо $A = 2{,}3 \pm 0{,}1$, то $2{,}2 \le A \le 2{,}4$. Навпаки, якщо $7{,}3 \le A \le 7{,}4$, то $A = 7{,}35 \pm 0{,}05$.

Абсолютна або абсолютна гранична похибка не характеризують якості проведеного виміру. Та сама абсолютна похибка може вважатися значною і незначною в залежності від числа, яким виражається величина, що вимірюється. Наприклад, якщо вимірюємо відстань між містами з точністю до одного кілометра, то така точність цілком задовільна для цього виміру, тоді як при вимірюванні відстані між двома будинками на одній вулиці така точність неприпустима. Отже, точність наближеного значення величини залежить не тільки від величини абсолютної похибки, але й від самого значення величини, яку вимірюють. Тому мірою точності є відносна похибка.

Відносною похибкою наближеного числа a називається відношення його абсолютної похибки до модуля точного числа A

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|A|}.$$

Відносною граничною похибкою наближеного числа a називається число ε_a^*, яке задовольняє нерівність

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|A|} \le \varepsilon_a^*.$$

З урахуванням умови $\Delta a \le \Delta_a^*$, одержимо

$$\Delta_a^* = |A| \varepsilon_a^*.$$

Оскільки точне значення A, як правило, невідоме, але $A \approx a$, то за відносну граничну похибку числа a приймають величину

$$\varepsilon_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Відносну і граничну відносну похибки прийнято виражати у відсотках. Наприклад, якщо вимірювання показали, що відстань між двома пунктами більша, ніж 12,3 км, але менша, ніж 12,7 км, то за наближене значення відстані можна обрати пів суми цих чисел. Тоді гранична абсолютна похибка дорівнює пів різниці

$$\Delta_a^* = \frac{12{,}7 - 12{,}3}{2} = 0{,}2 \text{ км}.$$

У цьому випадку $a = 12{,}5 \pm 0{,}2$ км і гранична відносна похибка складає

$$\varepsilon_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} = 0{,}016\ (1{,}6\%).$$

1.3. Значущі та правильні цифри наближеного числа

У процесі розв'язання конкретної задачі ми приймаємо деяке число за точне, і воно визначає істинне значення певної величини. Тоді під наближеним його значенням ми розуміємо числа, які близькі до точного. Замінюючи точне значення числа його наближенням, ми припускаємось похибки.

Наближене число замінює точне число, яке дуже часто залишається невідомим. Число називається наближеним із недостачею, якщо воно менше, ніж точне число, і наближеним із надлишком, якщо воно більше, ніж точне число.

Наприклад, вибравши замість числа $\lg 5 = 0{,}69\,8970\ldots$ число $0{,}699$, одержимо наближення з надлишком, а замість числа $\pi = 3{,}141592\ldots -$ число $3{,}14$, маємо наближення з недостачею.

У десятковій системі числення довільне число a можна записати у вигляді

$$a = \pm(\alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \cdots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \cdots), \quad (1.1)$$

де $m -$ старший розряд числа; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n -$ числа, зображені однією із цифр $0{,}1, \ldots, 9$; $\alpha_1 \neq 0$.

Значущими цифрами наближеного числа a називаються всі цифри в його зображенні (1.1), що відмінні від нуля, та нулі між значущими цифрами або нулі в кінці числа, що вказують на збереження розряду точності.

Наприклад, числа $0{,}00\mathbf{1405}$ і $\mathbf{5{,}0300}$ мають відповідно 4 та 5 значущих цифр. Перші нулі в десяткових дробах не є значущими цифрами.

Якщо необхідно показати, що в числі 47 похибка починається тільки з п’ятої цифри, то користуються записом $47{,}000$.

Правильною цифрою наближеного числа у вузькому (широкому) сенсі називають ту, для якої гранична абсолютна похибка не перевищує одиниці (половини одиниці) відповідного десяткового розряду, що позначається цією цифрою. Якщо ця умова не виконується, то цифра називається **сумнівною**.

Нехай в числі $87\ 832\ 734$, яке одержане в результаті наближених обчислень, четверта цифра сумнівна, тоді це число будемо записувати так: $8{,}783 \cdot 10^7$; якщо сумнівна п’ята цифра, то це число запишемо так: $8{,}7833 \cdot 10^7$.

Для встановлення кількості правильних цифр у наближеному числі використовують правило: наближене число (1.1) має n правильних цифр, якщо його гранична абсолютна похибка не перевищує одиниці (половини одиниці) десяткового розряду, яка виражається n-ою значущою цифрою числа, тобто $\Delta_a^* \leq 1 \cdot 10^{m-n-1}$ ($\Delta_a^* \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n-1}$).

Точність наближеного числа визначають за принципом О.М. Крилова: наближене число необхідно записувати так, щоб в ньому всі значущі цифри, крім останньої, були правильними, і лише остання цифра була сумнівною.

1.4. Додавання і віднімання наближених чисел

При сумуванні двох наближених чисел $a_1 = A_1 \pm \Delta_{a_1}^*$ і $a_2 = A_2 \pm \Delta_{a_2}^*$ одержуємо $a_1 + a_2 = A_1 + A_2 \pm \Delta_{a_1}^* \pm \Delta_{a_2}^*$.

Істинні знаки похибок Δ_{a_1}, Δ_{a_2} нам невідомі, тому для забезпечення достовірності результату, ми повинні обрати найгірший випадок, коли похибки арифметично додаються. Аналогічний результат одержимо при додаванні довільного числа складових. Так приходимо до наступного твердження: «Гранична абсолютна похибка суми дорівнює сумі граничних абсолютних похибок складових».

Сформульоване вище твердження дає можливість оцінити точність одержуваної суми і передбачити, з якою точністю необхідно взяти складові, щоб гарантувати необхідну точність результату.

Наприклад, якщо необхідно знайти суму наближених чисел

$$5{,}8 + 287{,}649 + 0{,}308064,$$

то з трьох можливих способів тільки останній буде правильним

$$\begin{array}{r} 5{,}8 \\ +\,287{,}649 \\ 0{,}308064 \\ \hline 293{,}757\,064 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ +\,287{,}6 \\ 0{,}3 \\ \hline 293{,}7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ +\,287{,}65 \\ 0{,}31 \\ \hline 293{,}76 \end{array} \approx 293{,}8$$

Дійсно, в числі 5,8 відкинуті цифри нам невідомі. Тому нема ніяких підстав до невідомих цифр додавати відомі та одержувати результати з точністю до мільйонних, яка нічим не гарантована.

Другий спосіб не використовує більшу точність двох інших складових, тому одержаний результат неправильний.

Правильним буде зберегти в другому і третьому доданках по два десяткових знаки, а після додавання результати округлити до десятих – відповідно з точністю числа, що має найбільшу граничну абсолютну похибку.

При відніманні наближених чисел їх похибки також віднімаються, але теж арифметично. Коли похибки мають один знак, вони віднімаються, а коли в них різні знаки, то додаються. Тому, як і у випадку додавання, гранична абсолютна похибка різниці двох наближених чисел дорівнює сумі їх граничних абсолютних похибок.

Щоб відняти одне наближене число від іншого, насамперед потрібно їх однаково округлити. Наприклад, число 27,613 від числа 546,3 віднімаємо так

$$546{,}3 - 27{,}6 = 518{,}7.$$

Найбільш небезпечні похибки виникають при визначенні різниці двох близьких величин. Наприклад,

$$831{,}747 - 831{,}721 = 0{,}026.$$

Різниця двох чисел, кожне з яких має шість значущих правильних цифр, зберегла лише дві значущі цифри, тому одержаний результат може мати похибку від однієї до двох одиниць останнього розряду.

Уникнути таких похибок можна, або взявши при відніманні двох близьких чисел їх наближення з максимальною точністю, або виключивши різницю близьких величин.

1.5. Множення і ділення наближених чисел

Покажемо, що при множенні наближених чисел відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників. З цією метою запишемо співвідношення, яке зв'язує точне значення числа A з його граничною відносною похибкою ε_a^* і наближеним a

$$A = a \pm \Delta_a^* = a\left(1 \pm \frac{\Delta_a^*}{a}\right) = a(1 \pm \varepsilon_a^*).$$

Розглянемо два числа $A = a(1 \pm \varepsilon_a^*)$ і $B = b(1 \pm \varepsilon_b^*)$. У результаті їх множення одержимо

$$A \cdot B = a \cdot b \cdot (1 \pm \varepsilon_a^*)(1 \pm \varepsilon_b^*) = a \cdot b \cdot [1 \pm (\varepsilon_a^* + \varepsilon_b^*) \pm \varepsilon_a^* \varepsilon_b^*].$$

Числа ε_a^*, ε_b^*, як правило, дуже малі, тому добутком $\varepsilon_a^* \varepsilon_b^*$ можна знехтувати у порівнянні з сумою $\varepsilon_a^* + \varepsilon_b^*$.

Тоді з останньої рівності одержимо співвідношення

$$A \cdot B = a \cdot b \cdot [1 \pm (\varepsilon_a^* + \varepsilon_b^*)],$$

яке показує, що для двох співмножників $\varepsilon_{ab}^* = \varepsilon_a^* + \varepsilon_b^*$.

Узагальнення на випадок довільного числа співмножників виконується аналогічно.

Так як ділення на число B рівносильне множенню на число, обернене до B, то відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

Отже, при множенні і діленні наближених чисел необхідно брати до уваги кількість значущих цифр, які характеризують відносну точність числа, а не кількість десяткових знаків, що обумовлюють його абсолютну похибку.

Наближені обчислення можна виконувати і без урахування похибок з використанням правила підрахунку цифр. Це правило тісно пов'язане з принципом О.М. Крилова, який сформульований вище.

У такому випадку обчислення з наближеними числами виконують як з точними числами, але дотримуються наступних правил.

Правило 1. При додаванні та відніманні наближених чисел у результаті слід зберігати ті десяткові знаки, що відповідають наближеному числу з найвищим серед молодших десяткових розрядів.

Правило 2. При множенні та діленні наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх є в числі з найменшою кількістю значущих цифр.

Правило 3. При піднесенні наближеного числа до степеня у результаті зберігається стільки значущих цифр, скільки їх є в основі.

Сказане вище проілюструємо прикладами.

Приклад 1.1

$$\begin{array}{r} 127{,}42 \\ +\;\; 67{,}3 \\ 0{,}12 \\ 3{,}03 \\ \hline 197{,}87 \end{array} \approx 197{,}9$$

Приклад 1.2

$$\begin{array}{r} 418{,}7 \\ -\;\; 39{,}83 \\ \hline 378{,}87 \end{array} \approx 378{,}9$$

Приклад 1.3

$$\begin{array}{r} 12{,}32 \\ \mathrm{x}\;\; 3{,}4 \\ \hline 4928 \\ +\; 3696 \\ \hline 41{,}888 \end{array} \approx 42$$

Приклад 1.4

$(2{,}3)^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$

РОЗДІЛ 2
НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Однією з найважливіших задач прикладної математики є задача визначення коренів нелінійних рівнянь. До таких рівнянь зводиться багато практичних задач. Точні розв'язки цих задач часто знайти не вдається, тому ми будемо використовувати наближені чисельні методи.

Сформулюємо ряд означень, що стосуються нелінійних рівнянь з однією змінною.

Співвідношення вигляду

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

називається **рівнянням з однією змінною $\boldsymbol{x}$** на заданому проміжку $[a; b]$. Відносно функції $f(x)$ будемо вважати, що вона кусково-неперервна функція дійсного аргументу, яка на проміжку $[a; b]$ неперервна і має кусково-неперервну похідну $f'(x)$ на $(a; b)$.

Рівняння (2.1) називається алгебраїчним, якщо функція $f(x)$ є поліномом n-го степеня

$$f(x) \equiv P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{2.2}$$

де $a_0, \ldots, a_n$ – дійсні числа; $a_0 \neq 0$.

Вимога $a_0 \neq 0$ обов'язкова, бо при $a_0 = 0$ поліном $P_n(x)$ буде мати степінь нижчу ніж n.

Будь-яке неалгебраїчне рівняння (2.1) називається трансцендентним, наприклад,

$$5e^x - 7x^2 + 15 = 0; \qquad x - tg\, x = 0.$$

Алгебраїчні і трансцендентні рівняння одержали загальну назву скінченних рівнянь, на відміну від диференціальних, інтегральних, інтегродиференціальних та інших функціональних рівнянь.

Задача розв'язування рівняння (2.1) еквівалентна задачі визначення нулів функції $f(x)$.

Число $x = \xi \in [a; b]$ називається **коренем** рівняння (2.1) або **нулем** функції $f(x)$, якщо $f(\xi) = 0$.

Число ξ називається коренем кратності k, якщо при $x = \xi$ разом з функцією дорівнюють нулю і всі її похідні до $k - 1$ порядку включно

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(k-1)}(\xi) = 0, \; f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

При $k = 1$ корінь рівняння (2.1) називається простим.

Для визначення коренів рівняння (2.1) наближеним методом необхідно розв'язати такі дві задачі:

1) **відокремлення (локалізація) коренів**, тобто визначення достатньо малих проміжків, у кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння (простий чи кратний). Розв'язок цієї задачі визначається на підставі першої теореми Больцано-Коші про неперервні функції;

2) **уточнення коренів** із наперед заданою граничною абсолютною чи відносною похибкою.

За виконання умови $f'(x) \neq 0$ відокремлення кореня $x = \xi$ завжди можливе.

2.1. Відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$

Відокремлення коренів рівняння (2.1) можна проводити графічно і аналітично. Розглянемо спочатку **графічний** спосіб.

Введемо в розгляд функцію $y = f(x)$, яка визначена і неперервна на проміжку $[a; b]$. Допускається, що цей проміжок може бути напівнескінченний або нескінченний.

Для відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ графічним методом будують схематично графік функції $y = f(x)$. Точки його перетину з віссю Ox визначають наближені значення коренів рівняння (2.1).

Зауважимо, що ці точки в залежності від значень $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $f''(\xi)$, $f'''(\xi)$ поділяються на:

а) **точки перетину** ($f(\xi) = 0$; $f'(\xi) \neq 0$) (рис. 2.1);

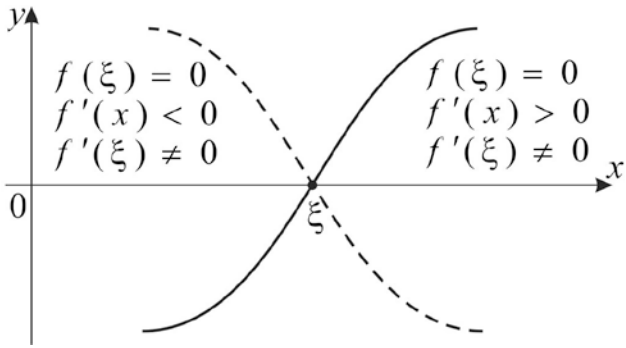


Рис. 2.1

б) **точки дотику першого роду** ($f(\xi) = 0; f'(\xi) = 0;\ f''(\xi) \neq 0$) (рис. 2.2);

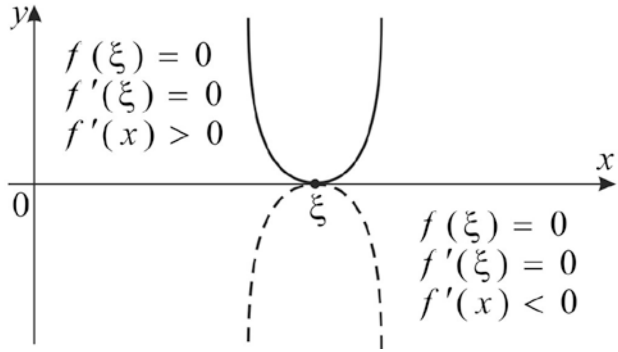


Рис. 2.2

в) точки перегину ($f(\xi) = 0;\ f'(\xi) = 0;\ f''(\xi) = 0;\ f'''(\xi) \neq 0$) (рис. 2.3).

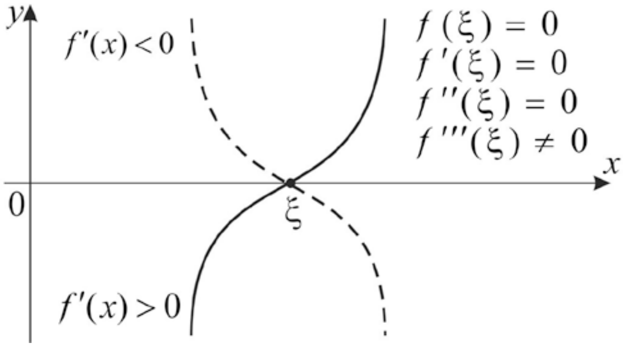


Рис. 2.3

За виглядом графіка функції $y = f(x)$ в околі точки $x = \xi$ легко встановити кратність кореня $x = \xi$.

У випадку а) рівняння $f(x) = 0$ в точці $x = \xi$ має простий корінь; у випадку б) – двократний корінь; у випадку в) – трикратний корінь.

Якщо функція $f(x)$ достатньо складна, то рівняння (2.1) завжди можна перетворити до вигляду

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \qquad (2.3)$$

і побудувати графіки функцій $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x)$. Тоді коренями рівняння (2.1)

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$$

будуть абсциси точок перетину цих графіків.

Зі всіх способів, якими рівняння (2.1) можна перетворити до вигляду (2.3), обираємо той, який забезпечує найбільш просту побудову графіків функцій $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$.

Приклад 2.1. Відокремити корені трансцендентного рівняння

$$e^x + x - 2 = 0.$$

Розв'язання. У цій задачі $f(x) = e^x + x - 2$.

Оскільки $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $f''(x) = e^x > 0$, $f'''(x) = e^x > 0$, відокремлення коренів здійснюється однозначно. Всі корені будуть простими.

Розглянемо показникову $y = \varphi_1(x) = e^x$ і лінійну $y = \varphi_2(x) = 2 - x$ функції та побудуємо їх графіки. Ці графіки перетинаються в одній точці (рис. 2.4), а це означає, що рівняння $e^x + x - 2 = 0$ має один простий корінь.

Для його відокремлення обчислимо значення функцій $\varphi_1(x) = e^x$ і $\varphi_2(x) = 2 - x$ та їх різниці $\Delta\varphi = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ в точках $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$, які визначаються абсцисами точок перетину прямої $y = 2 - x$ координатними осями та серединою проміжку $[0; 2]$.

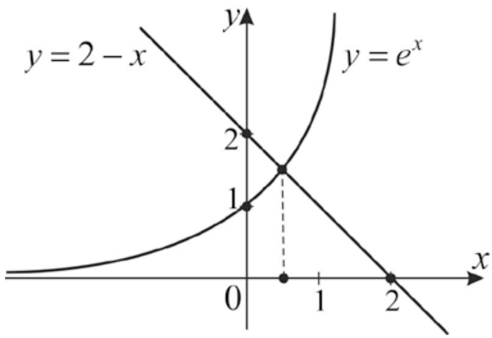


Рис. 2.4

$\varphi_1(x_1) = 1$;	$\varphi_2(x_1) = 2$;	$\Delta\varphi(x_1) = -1$;
$\varphi_1(x_2) = 1{,}2718282$;	$\varphi_2(x_2) = 1$;	$\Delta\varphi(x_2) = \quad 1{,}718282$;
$\varphi_1(x_3) = 7{,}388889$;	$\varphi_2(x_3) = 0$;	$\Delta\varphi(x_3) = \quad 7{,}388889$.

Серед двох проміжків $[x_1; x_2]$ та $[x_2; x_3]$ обирається той, на якому $\Delta\varphi(x)$ змінює знак.

Наведені розрахунки показують, що шуканий корінь міститься на проміжку $[0; 1]$.

Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на відповідних теоремах з курсу математичного аналізу.

Теорема 1 (теорема існування кореня). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і набуває на кінцях цього проміжку значень протилежних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то в середині проміжку $[a; b]$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Зазначимо, що ця теорема не дає відповіді про кількість коренів рівняння (2.1). За виконання умов теореми рівняння може мати і декілька коренів.

Теорема 2 (теорема існування і єдиності кореня). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована на $[a; b]$ і набуває на кінцях цього проміжку значень протилежних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак в середині $[a; b]$, то рівняння $f(x) = 0$ на цьому проміжку має єдиний корінь.

У відповідності з теоремами 1 і 2 алгоритм відокремлення коренів рівняння (2.1) можна сформулювати так:

1. Знайти область визначення рівняння.
2. Знайти критичні точки функції $f(x)$.
3. Встановити інтервали монотонності функції $f(x)$.
4. Визначити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити проміжки, на кінцях яких функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків.
6. Оцінити значення функції на кінцях проміжку $[a; b]$.

2.2. Уточнення коренів рівняння з наперед заданою граничною похибкою

2.2.1. Табличний метод. Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ локалізовано на проміжку $[a; b]$. Ідея методу полягає в тому, що на проміжку $[a; b]$ потрібно знайти менший проміжок, на якому функція $f(x)$ змінює знак.

Побудуємо таблицю значень функції для скінченого числа вузлів з проміжку $[a; b]$. Будемо вважати, що ці вузли розміщені рівномірно з кроком $h = (b - a)/n$, де n – число вузлів. Позначимо їх відповідно через

$$x_0 = a; \quad x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2h; \ \dots;$$
$$x_k = x_0 + kh; \dots; \ x_n = x_0 + b - a = b.$$

Обчислимо значення $f(x_k)$, вважаючи числа x_k наближеними

$$y_0 = f(x_0); \ y_1 = f(x_1); \ y_k = f(x_k); \ \dots; \ y_n = f(x_n).$$

Результати обчислень заносимо в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1

x_0	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

Оскільки $f(x_0) \cdot f(x_n) < 0$, то для простого кореня на деякому проміжку $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0,1, \dots, n-1$ відбудеться зміна знаку функції. Це означає, що ми одержали новий менший проміжок локалізації кореня рівняння $f(x) = 0$.

Повторюючи цей процес з новим інтервалом локалізації певне число разів, визначимо корінь з наперед заданою точністю.

Зауважимо, що такий спосіб ефективний у випадку скінченного проміжку $[a; b]$.

Для ілюстрації сказаного розглянемо попередній приклад, для якого $f(x) = e^x + x - 2 = 0$; $a = 0{,}00$; $b = 0{,}50$; $n = 5$.

Поділимо проміжок $[a; b]$ на 5 рівних частин точками

$$x_0 = 0{,}00; \ x_1 = 0{,}10; \ x_2 = 0{,}20; \ x_3 = 0{,}30; \ x_4 = 0{,}40; \ x_5 = 0{,}50.$$

Будуємо таблицю 2.2 відповідних значень функції, обчислених з точністю до сотих

Таблиця 2.2

x_i	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$e^{x_i} + x_i - 2$	−1,0	−0,79	−0,58	−0,35	−0,11	0,15

Зміна знаку функції відбувається на проміжку [0,40; 0,50], тому за наближене значення кореня з точністю 0,05 приймаємо $\xi = 0{,}45$.

На наступному етапі проміжок [0,40; 0,50] знову поділимо на 5 однакових частин і визначимо корінь рівняння з абсолютною граничною похибкою $\Delta = 0{,}01$.

2.2.2. Метод дихотомії. Одним із ефективних методів локалізації та уточнення кореня рівняння $f(x) = 0$ на проміжку $[a; b]$ є метод ділення цього проміжку навпіл. Його називають методом дихотомії або бісекції. Оскільки корінь локалізовано, то $f(a) \cdot f(b) < 0$ (функція на кінцях проміжку набуває значень різних знаків).

Обчислення проводимо за такою схемою.

Поділимо відрізок $[a; b]$ навпіл точкою $x_1 = (a + b)/2$ і обчислимо значення функції в цій точці. Якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 – корінь рівняння. Якщо ж $f(x_1) \neq 0$, то для подальшого розгляду обираємо той з відрізків $[a; x_1]$ і $[x_1; b]$, на кінцях якого функція приймає значення різних знаків:

– при $f(a) \cdot f(x_1) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 = a;\; b_1 = x_1$;
– при $f(a) \cdot f(x_1) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 = x_1;\; b_1 = b$.

Повторюємо цей процес на новому інтервалі локалізації $[a_n; b_n]$ до тих пір, доки $|b_n - a_n| < 2\Delta$.

Середина останнього відрізка $[a_n; b_n]$ визначає корінь $\xi = (a_n + b_n)/2$ рівняння $f(x) = 0$ із наперед заданою точністю Δ.

Такий процес збігається з швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $1/2$, оскільки

$$|b_n - a_n| = \frac{|b - a|}{2^n}.$$

Кількість ітерацій, необхідних для встановлення кореня із заданою точністю Δ, визначається з умови

$$n = \left[\log_2 \frac{b - a}{\Delta}\right].$$

Тут $[\cdots]$ – ціла частина виразу.

Перевага методу – легка реалізація на ЕОМ.

Приклад 2.2. Ізолювати корені рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ та визначити їх з точністю $\Delta = 0{,}1$ методом дихотомії.

Розв'язання. Функція $f(x) = x^3 - 3x - 1$ визначена і неперервна на всій числовій осі, причому $f(-\infty) \to -\infty;\; f(+\infty) \to +\infty$.

Точки, підозрілі на екстремум, визначаємо з рівняння $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, розв'язки якого $x_1 = -1;\; x_2 = 1$. Знаходимо відповідні значення функції $f(x_1) = 1;\;\; f(x_2) = -3$.

Встановлюємо проміжки зростання і спадання функції:

$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ – проміжки зростання;
$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1; 1)$ – проміжок спадання.

Обчислимо значення функції в точках $x_3 = -2$; $x_4 = 2$;

$$f(x_3) = -3;\ \ f(x_4) = 1.$$

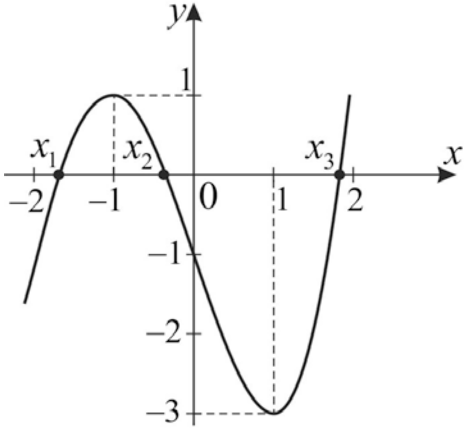


Рис. 2.5

Із наведеного на рис. 2.5 графіка видно, що задане рівняння має три різних корені, які ізольовані на проміжках $[-2, -1]$, $[-1; 1]$ і $[1; 2]$.

Уточнимо другий корінь рівняння на проміжку $[-1; 1]$. Тут

$$a = -1;\ \ \ b = 1;\ \ f(a) = 1 > 0;\ \ f(b) = -3 < 0.$$

Знаходимо середину проміжку $[a; b]$ $x_1 = 0{,}5(a + b) = 0$ і визначаємо $f(x_1) = -1 < 0$.

Оскільки $f(x_1) < 0$, за наступний проміжок обираємо $[-1; 0]$. Його середина $x_2 = 0{,}5(-1 + 0) = -0{,}5$ і $f(x_2) = 0{,}375 > 0$. Третім проміжком буде $[-0{,}5; 0]$, для якого $x_3 = 0{,}5(-0{,}5 + 0) = -0{,}25$, $f(x_3) = -0{,}265625 < 0$. Для четвертого проміжку $[-0{,}5; -0{,}25]$ $x_4 = 0{,}5(-0{,}5 - 0{,}25) = -0{,}375$; $f(x_4) = 0{,}0722657 > 0$ і так далі.

Кількість ітерацій, необхідних для визначення кореня із заданою точністю, знаходимо за формулою

$$n = \left[\log_2 \frac{b-a}{\Delta}\right] = \left[\log_2 \frac{2}{0{,}1}\right] = 4.$$

Аналогічно уточнюються інші корені рівняння.

2.2.3. Метод Ньютона або дотичних. Метод Ньютона, або як його ще називають метод дотичних, належить до найчастіше вживаних методів уточнення коренів нелінійних рівнянь із хорошою збіжністю.

Нехай корінь $x = \xi$ рівняння $f(x) = 0$ локалізовано на проміжку $[a; b]$. Це означає, що $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Вважаємо, що функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і двічі неперервно диференційована на інтервалі $(a; b)$, на якому похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають свої знаки, причому $f'(x) \neq 0$.

Поставлені вимоги вказують на те, що функція $f(x)$ монотонна (єдиний корінь), а її графіком є опукла крива.

Побудуємо на проміжку $[a; b]$ відповідну частину графіка функції $y = f(x)$. У залежності від знаків функцій $f'(x)$ і $f''(x)$ можливі 4 випадки розміщення цього графіка відносно осі *Ox* (рис. 2.6 *а*, *б*, *в*, *г*)

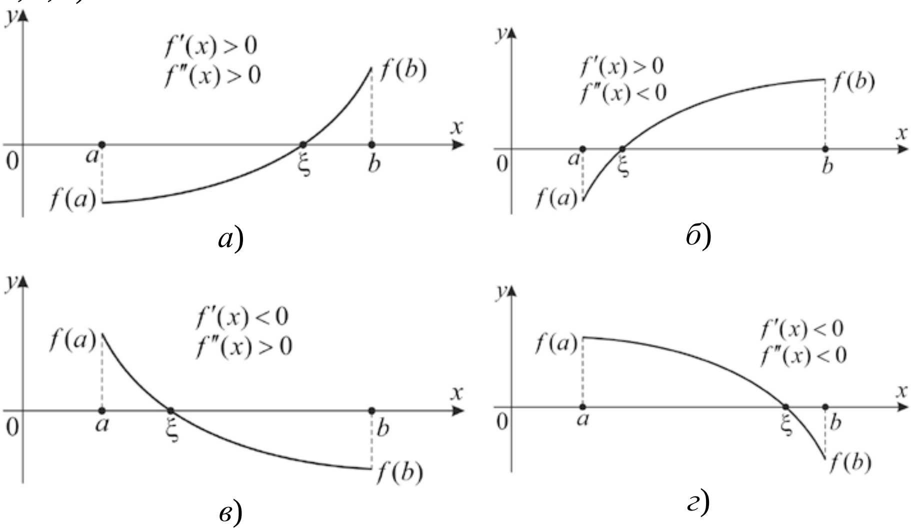


Рис. 2.6

Знак $f'(x)$ визначає проміжки зростання ($f'(x) > 0$) чи спадання ($f'(x) < 0$) функції $f(x)$. Знак $f''(x)$ визначає проміжки опуклості графіка ($f''(x) > 0$ – опуклість вниз; $f''(x) < 0$ – опуклість вгору).

Описаний метод проілюструємо для випадку, який відповідає рис. 2.6а.

Нехай AB – дуга кривої $y = f(x)$, яка перетинає вісь Ox в точці з координатою $x = \xi$, яка відповідає кореню рівняння $f(x) = 0$ (рис. 2.7).

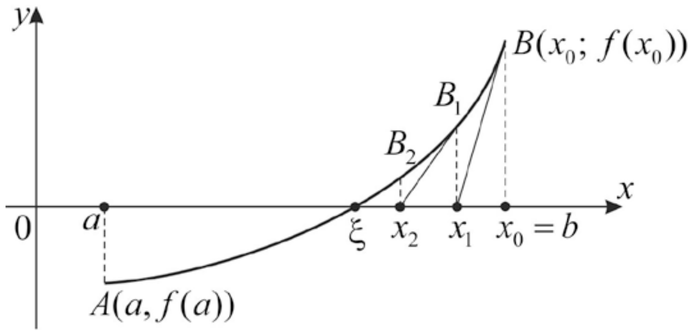


Рис. 2.7

Розглянемо точку B з координатами $(x_0; f(x_0))$ і через неї проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$. Її рівняння має вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.4}$$

Покладаючи в ньому $y = 0$, знаходимо точку перетину дотичної з віссю Ox

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Число x_1 приймаємо за перше наближення кореня ξ.

На графіку $y = f(x)$ будуємо точку $B_1(x_1;\ f(x_1))$, через яку знову проводимо дотичну і знаходимо друге наближення кореня

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Повторюючи цей процес, одержимо формулу Ньютона

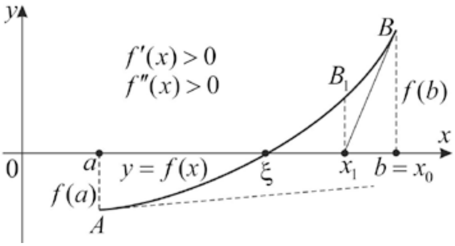
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ \ n = 0,1,2, \ldots, \tag{2.5}$$

яка дозволяє крок за кроком обчислювати точніші значення кореня.

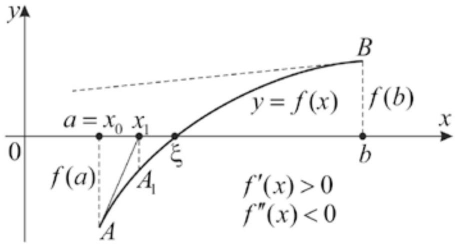
За виконання згаданих вище умов послідовність чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, визначених за формулою Ньютона (2.5), збігається до кореня $x = \xi$ рівняння $f(x) = 0$.

Якщо дотичну проводити в точці A (на рис. 2.8 *а*, *г* зображена штриховою лінією), то точка її перетину з віссю Ox може не належати проміжку $[a; b]$.

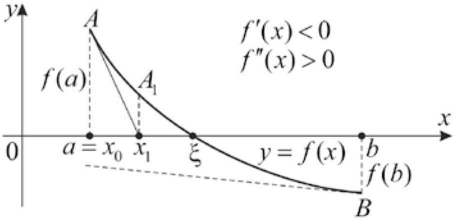
Для правильного вибору початкового значення x_0 користуються умовою $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (на рис. 2.6 *а, г* $x_0 = b$, на рис. 2.6 *б, в* $x_0 = a$).



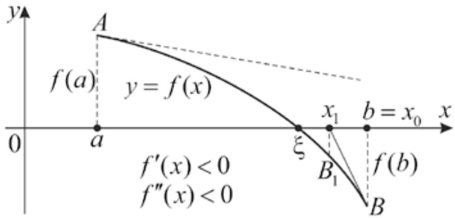
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.8

Використовуючи подання функції $f(x)$ в околі точки $x = x_n$ формулою Тейлора, можна показати, що для методу дотичних справедливе співвідношення

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_n|^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in (a;b)} |f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in (a;b)} |f'(x)|$, яке показує, що похибка кожного наступного наближення пропорційна квадрату похибки попереднього наближення (метод збігається з квадратичною швидкістю).

Можна також довести, що для методу Ньютона справедлива оцінка

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_{n+1} - x_n|^2,$$

З цієї оцінки видно, що для досягнення заданої точності Δ, ітераційний процес необхідно продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень не виконуватиметься нерівність

$$|x_{n+1} - x_n| < \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\Delta}. \qquad (2.6)$$

Приклад 2.3. Уточнити з граничною абсолютною похибкою $\Delta = 0{,}001$ корінь рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ на проміжку $[1{,}5; 2]$ методом Ньютона (дотичних).

Розв'язання. Для заданого рівняння

$$f(x) = x^3 - 3x - 1; \qquad f(1{,}5) = -2{,}125; \qquad f(2) = 1;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3; \qquad f'(1{,}5) = 3{,}75; \qquad f'(2) = 9;$$

$$f''(x) = 6x; \qquad f''(1{,}5) = 9; \qquad f''(2) = 12;$$

$$f(x) \cdot f''(x) = 6x(x^3 - 3x - 1); \quad f(1{,}5) \cdot f''(1{,}5) = -19{,}125;$$

$$f(2)f''(2) = 12; \qquad M_2 = \max_{x \in [-1{,}5;2]} |f''(x)| = 12\,;$$

$$m_1 = \min_{x \in [-15;2]} |f'(x)| = 3{,}75;$$

$$\sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\Delta} = \sqrt{\frac{7{,}5 \cdot 10^{-3}}{12}} = 0{,}025.$$

Оскільки $f(2) \cdot f''(2) > 0$, то за початкове наближення обираємо точку $x_0 = 2; f(x_0) = 1$.

Перше наближення:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{9} = 1{,}8999; \ |x_1 - x_0| = 0{,}1001 > 0{,}025;$$

$$f(x_1) = (1{,}8999)^3 - 3 \cdot 1{,}8999 - 1 = 0{,}1582;$$

$$f'(x_1) = 3(1{,}8999)^2 - 3 = 7{,}8289.$$

Друге наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}8999 - \frac{0{,}1582}{7{,}8289} = 1{,}8797;$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}0202 < 0{,}025.$$

Подальші обчислення припиняємо і приймаємо $\xi = 1{,}880$.

2.2.4. Метод хорд. Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ локалізовано на відрізку $[a; b]$ $(f(a) \cdot f(b) < 0)$. Функція $y = f(x)$ неперервна на

$[a;b]$ і двічі неперервно диференційована на $(a;b)$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають сталі знаки.

Ідея методу хорд полягає в тому, що на досить малому відрізку дуга кривої $y=f(x)$ замінюється хордою, а абсциса точки перетину цієї хорди з віссю Ox приймається за наближене значення кореня.

Нехай для визначеності $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ (рис. 2.9*а*). Для початкового наближення шуканого кореня рівняння використаємо значення $x_0=a$.

Побудуємо хорду, що визначається точками A, B, і визначимо абсцису x_1 точки перетину цієї хорди з віссю Ox. Її рівняння має вигляд

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Покладаючи в ньому $x_0=a,\ x=x_1,\ y=0$, знаходимо

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)(b-x_0)}{f(b)-f(x_0)}.$$

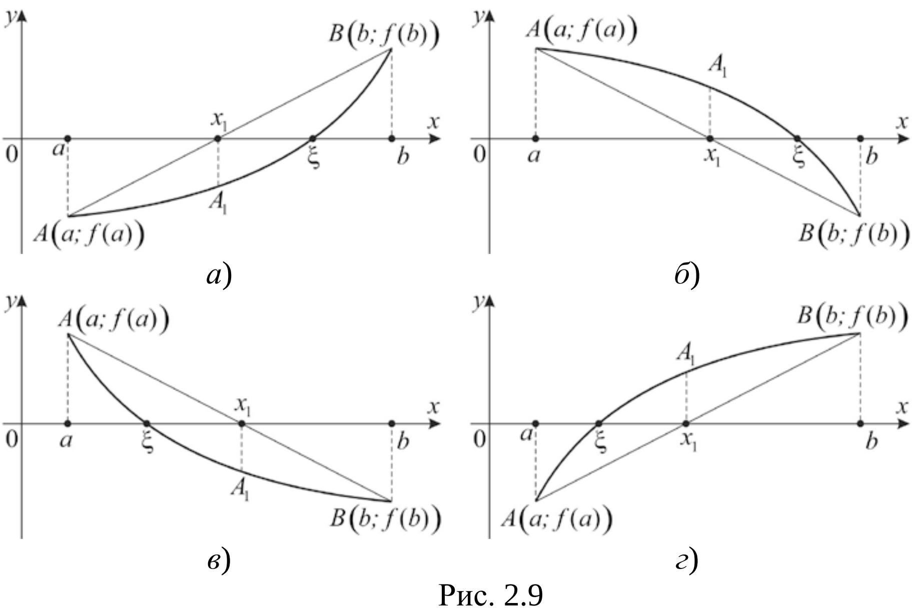


Рис. 2.9

Число x_1 приймаємо за перше наближення кореня ξ. Таку саму процедуру виконуємо для відрізка $[x_1;b]$ і знаходимо друге наближення

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

Повторюючи цей процес, одержимо для $(n+1)$-го наближення

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \qquad (2.7)$$

У розглянутому випадку, а також коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (рис.2.9 *б*) кінець b відрізка $[a; b]$ залишається нерухомим.

Якщо $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (рис.2.9 *в*) або $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (рис.2.9 *г*), то нерухомим залишається кінець a відрізка $[a; b]$ і можна записати аналогічну формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}. \qquad (2.8)$$

У загальному випадку нерухомим буде той кінець відрізка локалізації кореня, для якого знак функції $f(x)$ збігається зі знаком другої похідної, а за початкове наближення x_0 слід обрати ту точку відрізка $[a; b]$, для якої $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$. Тоді загальна формула методу хорд набуває вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}, \qquad (2.9)$$

де $c = \begin{cases} a, & f(a) \cdot f''(a) > 0, \\ b, & f(b) \cdot f''(b) > 0. \end{cases}$

Для оцінки похибки методу хорд запишемо формулу, яка дозволяє оцінити абсолютну похибку наближення x_{n+1} через два послідовні наближення x_n, x_{n+1}

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{n+1} - x_n|. \qquad (2.10)$$

Тут

$$M_1 = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|, \qquad m_1 = \min_{x \in [a;b]} |f'(x)|.$$

Отже, корінь ξ рівняння $f(x) = 0$ буде знайдено методом хорд з наперед заданою точністю Δ, якщо для двох послідовних наближень x_nі x_{n+1} справджуватиметься нерівність

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{m_1}{M_1 - m_1}\Delta. \qquad (2.11)$$

Сказане вище проілюструємо на прикладі.

Приклад 2.4. Уточнити з граничною абсолютною похибкою $\Delta = 0{,}001$ корінь рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ на проміжку $[1{,}5; 2]$ методом хорд.

Розв'язання. Використовуючи результати попереднього прикладу, знаходимо

$$M_1 = \max_{x\in[1,5;2]} |f'(x)| = 9\,; \qquad m_1 = \min_{x\in[1,5;2]} |f'(x)| = 3{,}75;$$

$$\frac{m_1}{M_1 - m_1}\Delta = \frac{3{,}75}{5{,}25} \cdot 0{,}001 = 0{,}0007142.$$

У цьому прикладі нерухомою буде точка $b = 2$, для якої $f(2) \cdot f''(2) > 0$. Тоді $x_0 = 1{,}5$.

У цьому випадку будемо використовувати формулу (2.7).

Перше наближення:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)} = 1{,}5 + \frac{2{,}125 \cdot 0{,}5}{1 + 2{,}125} = 1{,}84;$$

$$f(x_1) = (1{,}84)^3 - 3 \cdot 1{,}84 - 1 = -0{,}290496.$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}34 > 0{,}007142.$$

Друге наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} = 1{,}84 + \frac{0{,}290496 \cdot 0{,}16}{1 + 0{,}290496} = 1{,}8760166;$$

$$f(x_2) = (1{,}8760166)^3 - 3 \cdot 1{,}8760166 - 1 = -0{,}0255254;$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}0360166 > 0{,}0007142.$$

Третє наближення:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} = 1{,}8760166 + \frac{0{,}0255254 \cdot 0{,}1239834}{1 + 0{,}0255254} =$$

$= 1,8791025; \quad |x_3 - x_2| = 0,0030859 > 0,0007142;$

$f(x_3) = (1,8791025)^3 - 3 \cdot 1,8791025 - 1 = -0,0021474.$

Четверте наближення:

$$x_4 = x_4 - \frac{f(x_3)(b - x_3)}{f(b) - f(x_3)} = 1,8791025 + \frac{0,0021474 \cdot 0,1208975}{1 + 0,0021474} =$$

$= 1,8793615; \ |x_4 - x_3| = 0,000259 < 0,0007142.$

Процес ітерацій завершено з результатом

$$\xi = 1,879.$$

Зауважимо, що якщо метод дотичних дає наближення кореня з надлишком, то метод хорд – з недостачею і навпаки. Застосовуючи ці два методи почергово, можна встановити «вилку», в яку «затиснуто» корінь рівняння.

2.2.5. Метод простої ітерації (релаксації). Нехай нам необхідно розв'язати рівняння $f(x) = 0$ і відомо, що його корінь локалізовано на проміжку $[a; b]$.

Запишемо задане рівняння в такому вигляді

$$x = \varphi(x). \tag{2.12}$$

Це можна зробити різними способами і одержати різні вирази для $\varphi(x)$.

Довільно обираємо початкове наближене значення кореня $x_0 \in [a; b]$ і знаходимо більш точний результат за формулою $x_1 = \varphi(x_0)$, або в загальному вигляді

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \ \ n = 0,1,2, \dots . \tag{2.13}$$

Повторюючи цей процес, тобто ітеруючи декілька разів, можна одержати значення кореня із наперед заданою точністю.

Якщо послідовність наближених значень $\{x_n\}$ має границю ξ, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, то ця границя є коренем рівняння (2.12).

Достатні умови збіжності методу ітерації отримаємо на підставі принципу стискуючих відображень (теорема Банаха). Якщо функція $\varphi(x)$ визначена на $[a; b]$ та диференційована на $(a; b)$ і для кожного $x \in (a, b)$ виконується умова $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то послідовність наближених значень, отриманих за співвідношеннями (2.13), збігається до єдиного кореня рівняння $x = \varphi(x)$ при довільному виборі $x_0 \in (a; b)$.

Для методу простої ітерації існують такі оцінки

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_0 - \varphi(x_0)| = \frac{q^{n+1}}{1-q}|x_0 - x_1|$$

або

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_0 - x_1|.$$

За умови $q < 0,5$ попередні оцінки набувають вигляду

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_{n+1} - x_n|.$$

Отже, якщо

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \Delta\frac{1-q}{q}, \tag{2.14}$$

то

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \Delta.$$

Таким чином, процес ітерацій слід продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_n, x_{n+1} не справджуватиметься нерівність (2.14), в якій Δ – гранична абсолютна похибка наближення для кореня ξ.

Якщо ж умова $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ не виконується, то рівняння (2.12) завжди можна подати у вигляді

$$x = x - cf(x) = \varphi(x),$$

де $c \neq 0$ – довільна стала, яку необхідно підібрати так, щоб для функції $\varphi(x) = x - cf(x)$ умова збіжності виконувалася

$$|\varphi'(x)| = |1 - cf'(x)| \leq q < 1$$

або

$$0 < cf'(x) < 2. \tag{2.15}$$

Отже, стала c повинна мати той самий знак, що й $f'(x)$ і задовольняти умову

$$c < \frac{2}{\max\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)|}. \tag{2.16}$$

Приклад 2.5. Визначити з точністю $\Delta = 0,001$ корінь рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ на проміжку $[-0,5; 0]$ методом ітерації.

Розв'язання. Задане рівняння запишемо у вигляді

$$x = \frac{x^3 - 1}{3} = \varphi(x).$$

Визначаємо похідну $\varphi'(x) = x^2$ та її значення на кінцях проміжку

$$\varphi'(0) = 0;\ \ \varphi'(-0{,}5) = 0{,}25,$$

причому

$$q = 0{,}25;\ \ \Delta\frac{1-q}{q} = 0{,}003.$$

Отже, на відкритому інтервалі $(-0{,}5; 0)$ умова $|\varphi'(x)| < 1$ виконується, тому процес ітерацій буде збіжним.

За початкове наближення приймаємо $x_0 = -0{,}25$. Тоді

$$x_1 = \frac{x_0^3 - 1}{3} = \frac{(-0{,}25)^3 - 1}{3} = -0{,}3385; \qquad |x_1 - x_0| > 0{,}003;$$

$$x_2 = \frac{x_1^3 - 1}{3} = \frac{(-0{,}3385)^3 - 1}{3} = -0{,}3463; \qquad |x_2 - x_1| > 0{,}003;$$

$$x_3 = \frac{x_2^3 - 1}{3} = \frac{(-0{,}3463)^3 - 1}{3} = -0{,}3472; \qquad |x_3 - x_2| < 0{,}003.$$

Процес ітерацій завершено з результатом

$$\xi = -0{,}347.$$

РОЗДІЛ 3
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У процесі вивчення різних питань економіки, природознавства, техніки доводиться розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Зокрема, до СЛАР зводиться чисельне розв'язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь. У таких системах коефіцієнти і вільні члени рівнянь – числа наближені. А це веде до появи неусувних похибок, які необхідно враховувати як в процесі обчислень, так і в остаточному результаті.

3.1. Постановка задачі

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad (i = 1,2, \dots n), \tag{3.1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи; x_j – невідомі; b_i – вільні члени.

Систему (3.1) можна записати у вигляді одного матрично-векторного рівняння

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b},$$

де $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів a_{ij} (індекс i – визначає рівняння, якому належить коефіцієнт, а індекс j – невідому при цьому коефіцієнті);

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – відповідно вектор стовпець вільних членів і вектор стовпець невідомих.

Упорядкована сукупність чисел $\xi_1 , \xi_2 , \cdots , \xi_n$, яка при підстановці в (3.1) замість $x_1, x_2, \dots , x_n$ перетворює всі рівняння в правильні числові рівності, називається розв'язком системи (3.1).

З курсу лінійної алгебри відомо: якщо визначник системи (3.1)

$$det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3.2)$$

то вона має єдиний розв'язок, який можна визначити зокрема за формулами Крамера.

Ці формули мають велике теоретичне і практичне значення, але через значний обсяг обчислювальної роботи (для визначення однієї невідомої необхідно виконати порядку n! арифметичних дій типу множення) мало ефективні при чисельному розв'язуванні СЛАР.

Методи розв'язування СЛАР поділяються на *точні* та *ітераційні*.

Точними або *арифметичними* називають такі методи, які дають змогу знайти точний розв'язок системи за допомогою виконання скінченної кількості арифметичних операцій у припущенні, що всі обчислення виконуються без округлень, а коефіцієнти системи і вільні члени – точні числа. Але на практиці всі обчислення виконуються з обмеженою кількістю десяткових розрядів, а ірраціональні коефіцієнти і вільні члени, якщо такі є, замінюються наближеними раціональними числами. Тому в процесі обчислень вдаються до округлень, а це означає, що розв'язки, знайдені за точними методами, фактично є наближеними числами з певними похибками. До точних належать метод Крамера, метод Гаусса і його модифікації, метод квадратних коренів, метод прогонки.

Порівняння ефективності точних методів проводиться за числом арифметичних дій, необхідних для знаходження розв'язку. За інших рівних умов перевага надається методу з меншим числом таких дій.

Ітераційними називаються такі методи, які дають змогу знайти наближений розв'язок СЛАР із наперед заданою точністю шляхом послідовного його уточнення при виконанні скінченної кількості арифметичних операцій, хоч самі обчислення можуть проводитися і без округлень, а коефіцієнти системи і вільні члени можуть бути точними числами. Точний розв'язок системи за допомогою ітераційних методів можна знайти тільки теоретично, як границю збіжного нескінченного процесу.

Для оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу введемо поняття норми для вектора і матриці.

Розглянемо в n-вимірному просторі впорядковану сукупність з дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яку будемо називати n – вимірним вектором і записувати у вигляді стовпця $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Міру (норму) дійсного або комплексного числа визначає його модуль.

Норму вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ як число $\|\vec{x}\|$ можна вводити різними способами. Найбільш вживаними є такі норми вектора:

$$1.\ \|\vec{x}\|_{\mathrm{I}} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|\ ; \quad 2.\ \|\vec{x}\|_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad 3.\ \|\vec{x}\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad (3.3)$$

Нормою матриці $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ будемо називати число $\|\boldsymbol{A}\|$, для якого виконуються такі умови:

1. $\|\boldsymbol{A}\| \ge 0, \qquad \|\boldsymbol{A}\| = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0;$
2. $\|\lambda \boldsymbol{A}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{A}\|$, λ – дійсне число;
3. $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \le \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$, $\boldsymbol{B}$ – матриця розмірності $n \times n$;
4. $\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\| \le \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$.

Норму матриці можна обирати довільним чином. Оскільки у багатьох прикладних задачах, фігурують вектори і матриці, то необхідно, щоб норма матриці була певним чином пов'язана з нормою вектора.

Норма матриці $\boldsymbol{A}$ називається узгодженою з нормою вектора $\vec{x}$, якщо

$$\|\boldsymbol{A}\vec{x}\| \le \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\vec{x}\|.$$

Норми матриці $\boldsymbol{A}$, які узгоджені з нормами (3.3) вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначаються за формулами

$$1.\ \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{I}} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|; \quad 2.\ \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{II}} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;$$

$$3.\ \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}. \qquad (3.4)$$

Якщо для будь-якої з цих норм виконується нерівність

$$\|\boldsymbol{A}\|_k \leq q < 1, \quad k = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), \tag{3.5}$$

то оператор, який визначається матрицею $\boldsymbol{A}$, буде стискуючим.

В ітераційних методах визначальним є число ітерацій $k = k(\Delta)$, які необхідно провести для отримання заданої точності Δ. Якість ітераційних процесів визначається необхідним числом ітерацій $k(\Delta)$.

Розв'язуючи системи рівнянь ітераційними методами, крім похибок округлення, потрібно враховувати також похибки методу.

До ітераційних методів належать методи простої ітерації, Якобі, Зейделя тощо.

Сказане вище стосується СЛАР, для яких існує єдиний розв'язок. Тому будемо розглядати такі системи рівнянь, які не є виродженими ($det\,\boldsymbol{A} \neq 0$) і добре обумовленими ($det\,\boldsymbol{A}$ є величина не нижчого порядку, ніж коефіцієнти a_{ij} і вільні члени b_i, а коефіцієнти і вільні члени системи – точні числа).

3.2. Метод Гаусса та його модифікації

Одним із найбільш уживаних методів розв'язування СЛАР – метод послідовного виключення змінних або метод Гаусса. Є декілька модифікацій цього методу.

Розглянемо схему *єдиного ділення*, за якою СЛАР розв'язують у два етапи. На першому етапі (прямий хід) задану систему рівнянь зводять до рівносильної їй системи з матрицею коефіцієнтів трикутної форми.

На другому етапі (зворотний хід) знаходять розв'язок лінійної системи рівнянь трикутної форми.

Запишемо систему (3.1) у розгорнутому вигляді

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \tag{3.6}$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$ (цього завжди можна досягти перестановкою рівнянь). Поділивши коефіцієнти і вільний член першого рівняння (3.6) на a_{11}, одержимо нове рівняння

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \tag{3.7}$$

в якому $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11}$ $(j = 2,3,\dots,n)$; $b_1^{(1)} = b_1/a_{11}$.

Виключимо тепер невідому x_1 з решти рівнянь системи (3.6). Для цього рівняння (3.7) послідовно множитимемо на коефіцієнт a_{i1} $(i = 2,3,\dots,n)$ і віднімемо від i-го рівняння системи (3.6). Одержимо систему рівнянь (*n*-*1*)-го порядку відносно невідомих $x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}; \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}; \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}$; $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1^{(1)}$; $(i,j = 2,3,\dots,n)$.

Ця система має таку ж структуру як і система (3.6). Провівши над нею за умови $a_{22}^{(1)} \neq 0$ такі самі перетворення як і над (3.6), приходимо до рівняння

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \tag{3.9}$$

і системи рівнянь *(n-2)*-го порядку

$$\begin{aligned} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}; \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 + \cdots + a_{4n}^{(2)}x_n &= b_4^{(2)}; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + a_{n4}^{(2)}x_4 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Повторюючи цей процес *n* разів, одержимо лінійне рівняння

$$x_n = b_n^{(n)}. \tag{3.11}$$

Процедура послідовного виключення невідомих завершена. Об’єднуючи рівняння (3.7), (3.9), (3.10), (3.11), одержимо еквівалентну (3.6) систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots \qquad \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}; \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots \qquad \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}; \\ x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)}; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= b_n^{(n)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

матриця якої має трикутну форму, а $det\,\boldsymbol{A} = 1$.

Розв'язком системи (3.6) буде розв'язок системи (3.12), який можна визначити за явною схемою

$$\begin{aligned} x_n &= b_n^{(n)}; \\ x_{n-1} &= b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1\,n}^{(n-1)} x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_1 &= b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - \dots - a_{1\,n-1}^{(1)} x_{n-1} - a_{1\,n}^{(1)} x_n. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Співвідношення (3.13) визначають зворотний хід методу Гаусса.

Основним обмеженням цього методу є припущення про те, що всі діагональні елементи $a_{ii}^{(k-1)}$, на які діляться рівняння, відмінні від нуля. Навіть, якщо який-небудь діагональний елемент не дорівнює нулю, але близький до нього, то в процесі обчислень може відбутися значне нагромадження похибок. У такому разі у системі достатньо змінити нумерацію рівнянь для продовження процесу виключення невідомих.

Якщо система рівнянь (3.6) вироджена ($det\,\boldsymbol{A} = 0$), то в процесі реалізації прямого ходу методу Гаусса один з діагональних елементів буде дорівнювати нулю. При цьому всі коефіцієнти при невідомих в рівнянні, яке визначається нульовим діагональним елементом також будуть нульовими. Якщо вільний член рівняння відмінний від нуля, система (3.6) несумісна, і обчислювальний процес зупиняють. У випадку, коли вільний член такого рівняння теж дорівнює нулю, то система має безліч розв'язків.

Однією з модифікацій методу Гаусса є *схема виключення*, яка полягає у зведені початкової матриці СЛАР до трикутної, на діагоналі якої стоять ведучі елементи.

Розглянемо перше рівняння системи (3.6), з якого при $a_{11} \neq 0$ визначаємо

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n - b_1).$$

Одержаний результат підставляємо в решту рівнянь системи (3.6). Після підстановки одержимо перетворену систему, яка має вигляд

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1;\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)};\\
\dots\dots\dots\\
a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{11}^{-1}a_{i1}a_{1j}$, $\quad b_i^{(1)} = b_i - a_{11}^{-1}a_{i1}b_1$, $i, j = 2,3, \dots, n$.

На другому кроці розв'язування з усіх рівнянь системи, крім першого і другого, виключається невідома x_2. Нехай $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Тоді з другого рівняння знаходимо x_2

$$
x_2 = -\frac{1}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n - b_2^{(1)}\right)
$$

і підставляємо в решту рівнянь системи (3.14)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \quad \cdots + a_{1n}x_n &= b_1;\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots \quad \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)};\\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)};\\
\dots\dots\dots\\
a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Тут $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(a_{22}^{(1)}\right)^{-1} a_{2j}^{(1)} a_{i2}^{(1)}$; $\quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - (a_{22}^{(1)})^{-1} a_{i2}^{(1)} b_2^{(1)}$;

$$
i, j = 3,4, \dots, n.
$$

Продовжуючи процес виключення за умови $a_{33}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{n-1\,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ після *(n-1)*-го кроку одержимо еквівалентну (3.6) систему рівнянь з верхньою трикутною матрицею

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1;\\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)};\\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)};\\
\dots\dots\dots\\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Прямий хід методу виключення завершено.

На зворотному ході із системи (3.15) визначається розв'язок системи (3.6)

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}; \quad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}^{(n-2)}}\left(b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1\,n}^{(n-2)} x_n\right);$$

… … … … … … … …

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}^{(2)}}\left(b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3 - a_{24}^{(1)} x_4 - \cdots - a_{2n}^{(1)} x_n\right);$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right).$$

Якщо хоч один з діагональних елементів $a_{ii}^{(k)} = 0$, а $det\,\boldsymbol{A} \neq 0$, то перестановкою відповідного рівняння системи можна добитися того, що всі діагональні елементи будуть відмінними від нуля. Якщо все таки $det\,\boldsymbol{A} = 0$, то нулі на діагоналі будуть з'являтися, починаючи з останнього рівняння.

Метод Гаусса з вибором головного елемента. Якщо необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь (3.6), за головний елемент на першому кроці обирають найбільший за модулем елемент матриці $\boldsymbol{A}$.

$$|a_{11}^{*}| = max\left|a_{ij}\right|, \qquad i,j = \overline{1,n}.$$

Змінюючи нумерацію рядків (рівнянь) і стовпців (невідомих), завжди можна добитися того, щоб цей елемент став діагональним для першого рівняння.

Тоді система (3.6) матиме такий вигляд

$$\begin{array}{l}
a_{11}^{*} x_j + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij-1}x_{j-1} + a_{i\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\
a_{1j}\,x_j + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j-1}x_{j-1} + a_{1j+1}\,x_{j+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i-1\,j}x_j + a_{i-1\,1}x_1 + \cdots + a_{i-1\,j-1}x_{j-1} + a_{i-1j+1}x_{j+1} + \cdots + a_{i-1n}x_n = b_{i-1}; \\
a_{i+1\,j}x_j + a_{i+1\,1}x_1 + \cdots + a_{i+1\,j-1}x_{j-1} + a_{i+1j+1}x_{j+1} + \cdots + a_{i+1n}x_n = b_{i+1}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{nj}x_j + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj-1}x_{j-1} + a_{nj+1}x_{j+1} + \cdots + a_{nn}x_n = b_n;
\end{array} \qquad (3.16)$$

У неї така ж структура, як і у системи (3.6).

Перше рівняння системи (3.16) залишається без змін, а з решти рівнянь виключаємо невідому x_j. Це завжди можна зробити, бо $a_{11}^{*} \neq 0$. У результаті певних перетворень одержимо

$$a_{11}^{*}x_j + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i\ \ j-1}x_{j-1} + a_{ij+1}x_{j+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i; \qquad (3.17)$$
$$a_{11}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{1\ \ j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i-1\,1}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{i-1\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{i-1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots + a_{i-1n}^{(1)}x_n = b_{i-1}^{(1)};$$
$$a_{i+1\,1}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{i+1\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{i+1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots + a_{j+1n}^{(1)}x_n = b_{j+1}^{(1)};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}^{(1)}x_1 + \cdots \ + a_{n\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + \ a_{n\,j-1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots \ + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}.$$

До підсистеми (3.17) відносно $(n-1)$ невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n$

$$a_{11}^{(1)}x_1 \ + \cdots + a_{1\ \ j-1}^{(1)}\,x_{j-1} \ + \ \ a_{1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots \ + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i-1\,1}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{i-1\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{i-1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots + a_{i-1n}^{(1)}x_n = b_{i-1}^{(1)};$$
$$(3.18)$$
$$a_{i+1\,1}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{i+1\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{i+1j+1}^{(1)}x_{j+1} + \cdots + a_{i+1n}^{(1)}x_n = b_{i+1}^{(1)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}^{(1)}x_1 + \ \cdots \ + a_{n\,j-1}^{(1)}x_{j-1} + a_{n\,j+1}^{(1)}x_{j+1} + \ \cdots \ + a_{nn}^{(1)}x_n \ = b_n^{(1)},$$

застосовуємо ту ж саму процедуру, що і до системи (3.16). Повторюючи цей процес, одержимо систему вигляду (3.12) з трикутною матрицею, на діагоналі якої містяться ведучі елементи.

Повне упорядкування системи (3.6) вимагає значної обчислювальної роботи, тому часто використовують метод виключення з частковим упорядкуванням по рядках або стовпцях.

Різні варіанти методу Гаусса з вибором головного елемента проілюструємо на прикладі системи двох рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Припустимо, що $|a_{12}| > |a_{11}|$, тоді на першому кроці будемо виключати невідому x_2. У цьому випадку систему (3.19) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 &= b_1; \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 &= b_2. \end{aligned}$$

До неї застосуємо перший крок методу Гаусса

$$a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = b_1;$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Такий спосіб виключення називається методом Гаусса з вибором головного елемента по рядку. Він еквівалентний застосуванню звичайного методу Гаусса до системи, в якій на кожному кроці виключення відповідно перенумеровуються невідомі.

За умови $|a_{21}| > |a_{11}|$ систему (3.19) запишемо так

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1. \end{aligned} \qquad (3.20)$$

і застосуємо до неї перший крок методу Гаусса

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2;$$
$$(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})x_1 = b_2a_{11} - b_1a_{12}.$$

Таким чином, метод Гаусса з вибором ведучого елемента по стовпцю еквівалентний застосуванню методу Гаусса до системи, в якій на кожному кроці виключення відповідно перенумеровуються рівняння.

У системах з діагональною перевагою

$$\left|a_{kk}^{(k-1)}\right| > \sum_{j=1}^{n}\left|a_{kj}^{(k-1)}\right|, \quad k = 1,2,\dots,n$$

відносна похибка буде меншою.

При реалізації алгоритму методом Гаусса слід враховувати, що операція ділення більш трудомістка, ніж інші операції. Тому при перетворенні рівнянь необхідно ділити не на головний елемент, а множити на елемент, обернений до нього.

Однією з форм контролю є безпосередня перевірка знайденого розв'язку підстановкою його в систему (3.6). Якби всі обчислення виконувалися точно, то у результаті підстановки в кожне рівняння системи одержали б правильну числову рівність. Але в процесі обчислень відбувається округлення числових результатів, тому значення лівих частин рівнянь системи (3.6), в загальному випадку, не співпадатимуть зі значеннями правих частин. Значення різниць між вільними членами вихідної системи лінійних рівнянь і результатами підстановки в ці рівняння обчислених значень невідомих називаються *нев'язками*

$$\delta_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n), \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Якщо нев'язки малі, то можна стверджувати, що розв'язок системи (3.6) знайдемо з малими похибками.

Умова $\|\delta\| \le \Delta$ вказує, що наближений розв'язок системи (3.6) знайдено з точністю Δ.

Приклад 3.1. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} 3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 &= -1{,}81; \\ 0{,}74\,x_1 + 3{,}45x_2 - 0{,}84x_3 &= -11{,}29; \\ -0{,}65x_1 + 1{,}18x_2 + 2{,}38x_3 &= 0{,}57, \end{aligned} \tag{3.21}$$

за допомогою трьох модифікацій методу Гаусса, вважаючи коефіцієнти та вільні члени системи точними числами.

Розв'язання. Переконаємося спочатку, що система невироджена і добре обумовлена. З цією метою обчислимо основний визначник системи

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3{,}90 & 1{,}25 & -0{,}98 \\ 0{,}74 & 3{,}45 & -0{,}84 \\ -0{,}65 & 1{,}18 & 2{,}38 \end{vmatrix} = 31{,}316194 \ne 0.$$

Значення визначника складає 803% значення найбільшого за модулем коефіцієнта $a_{11} = 3{,}90$, тому система добре обумовлена.

Метод Гаусса (схема єдиного ділення). Перше рівняння системи (3.21) поділимо на 3,90, друге – на 0,74, а третє – на $-0{,}65$.

$$\begin{aligned} x_1 + 0{,}3205128x_2 - 0{,}2512820x_3 &= -0{,}4641025; \\ x_1 + 4{,}6621621x_2 - 1{,}1351351x_3 &= -15{,}2567560; \\ x_1 - 1{,}8153846x_2 - 3{,}6615384x_3 &= -0{,}8769230. \end{aligned}$$

Віднімаючи послідовно від другого і третього рівнянь перше, одержимо

$$\begin{aligned} x_1 + 0{,}3205128x_2 - 0{,}2512820x_3 &= -0{,}4641025; \\ 4{,}3416493x_2 - 0{,}8838531x_3 &= -14{,}792654; \\ -2{,}1358974x_2 - 3{,}4102564x_3 &= -0{,}4128205. \end{aligned}$$

Поділимо друге рівняння на 4,3416493, а третє на $-2{,}1358974$

$$x_1 + 0{,}3205128x_2 - 0{,}2512820x_3 = -0{,}4641025;$$
$$x_2 - 0{,}2035754x_3 = -3{,}4071508;$$
$$x_2 + 1{,}5966386x_3 = 0{,}1932773\ .$$

Із останнього рівняння одержаної системи виключаємо невідому x_2

$$\begin{aligned} x_1 + 0{,}3205128x_2 - 0{,}2512820x_3 &= -0{,}4641025; \\ x_2 - 0{,}2035754x_3 &= -3{,}4071508; \\ x_3 &= 2. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

На цьому прямий хід методу Гаусса завершено.

Задана система рівнянь зведена до еквівалентної їй системи (3.22) трикутного вигляду з одиничними діагональними елементами. За процедурою оберненого ходу знаходимо

$$x_3 = 2;$$
$$x_2 = 0{,}2035754x_3 - 3{,}4071508 = -3;$$
$$x_1 = -0{,}3205128x_2 + 0{,}251282x_3 - 0{,}4641025 = 1.$$

Точний розв'язок системи

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = 2.$$

Метод Гаусса (*схема виключення невідомих*). З другого і третього рівнянь заданої системи рівнянь (3.21) виключаємо невідому x_1

$$3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 = -1{,}81;$$
$$-12{,}530x_2 + 2{,}5508x_3 = 42{,}6916;$$
$$5{,}4145x_2 + 8{,}645x_3 = 1{,}0465,$$

а з останнього рівняння – невідому x_2

$$\begin{aligned} 3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}9800x_3 &= -1{,}81; \\ -12{,}530x_2 + 2{,}5508x_3 &= 42{,}6916; \\ 122{,}13315x_3 &= 244{,}2663. \end{aligned} \qquad (3.23)$$

Система зведена до трикутного вигляду.

Виконуючи обернений хід методу Гаусса, знаходимо

$$x_3 = \frac{244{,}2663}{122{,}13315} = 2; \quad x_2 = \frac{2{,}5508 - 42{,}6916}{12{,}530} = -3;$$
$$x_1 = \frac{1{,}25x_2 + 0{,}98x_3 - 1{,}81}{3{,}90} = 1.$$

Метод Гаусса з вибором головного елемента. Оскільки $\max\limits_{1\le i,j\le 3}|a_{ij}| = 3{,}90$, то вихідна система (3.21) залишається без змін

$$\begin{aligned} 3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 &= -1{,}81;\\ 0{,}74x_1 + 3{,}45x_2 - 0{,}84x_3 &= -11{,}29;\\ -0{,}65x_1 + 1{,}18x_2 + 2{,}38x_3 &= 0{,}57; \end{aligned}$$

З другого і третього рівняння виключаємо невідому x_1. Тоді

$$\begin{aligned} 3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 &= -1{,}81;\\ -12{,}530x_2 + 2{,}5508x_3 &= 42{,}6916;\\ 5{,}4145x_2 + 8{,}645x_3 &= 1{,}0465. \end{aligned}$$

Серед коефіцієнтів $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$ отриманої системи найбільшим за модулем є a_{22}. Тому вона залишається без змін. Після виключення з останніх двох рівнянь невідомої x_2, одержимо

$$\begin{aligned} 3{,}90x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 &= -1{,}81;\\ -12{,}530x_2 + 2{,}5508x_3 &= 42{,}6916;\\ 122{,}13315x_3 &= 244{,}2663. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ця система повністю співпадає з системою (3.23), одержаною за схемою виключення невідомих. Її розв'язок $x_3 = 2$; $x_2 = -3$; $x_1 = 1$.

Оскільки для кожного з методів нев'язки дорівнюють нулю, то знайдено точний розв'язок заданої системи рівнянь.

3.3. Ітераційні методи розв'язування СЛАР

Застосування методу Гаусса для розв'язування систем лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих досить громіздке, а результат однаково може бути наближеним. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнти системи не завжди можна помістити в оперативній пам'яті ЕОМ. Тоді застосовувати метод Гаусса взагалі не можна. У цих випадках СЛАР розв'язують ітераційними методами.

Ітераційні методи характеризуються тим, що розв'язок системи рівнянь визначається у вигляді деякої послідовності векторів $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, які будуються за спільним ітераційним процесом. Перевагою цих процесів є те, що при побудові наступного наближення використовуються раніше отримані. Недолік – обмежена область застосування через умовну збіжність або повільну збіжність, що не завжди дозволяє досягти потрібної точності в умовах обмеженості часу.

Ітераційний процес для системи рівнянь (3.6) з неособливою матрицею $\boldsymbol{A}$ опишемо такою схемою:

1) запишемо систему (3.6) у вигляді матричного рівняння
$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b},$$
яке помножимо зліва на невироджену матрицю $\boldsymbol{H}$
$$\boldsymbol{HA}\vec{x} = \boldsymbol{H}\vec{b};$$
2) до обох частин останньої рівності додамо вектор $\vec{x}$
$$\vec{x} = \vec{x} - \boldsymbol{HA}\vec{x} + \boldsymbol{H}\vec{b};$$
3) одержаний результат подаємо у вигляді наступної ітераційної схеми
$$\vec{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{HA})\vec{x}^{(k)} + \boldsymbol{H}\vec{b}. \qquad (3.25)$$

При цьому початкове наближення $\vec{x}^{(0)}$ можна обирати довільно, але за умови стиску відображення з оператором $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{HA})$ (теорема Банаха)
$$\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{HA}\| \le q < 1,$$
яка співпадає з достатньою умовою збіжності та зводиться до умови діагональної переваги, причому для кожної з трьох основних норм.

Можливості кожного ітераційного процесу (3.25) залежать від вибору матриці $\boldsymbol{H}$.

3.3.1 Метод простої ітерації. Розглянемо систему рівнянь (3.6) і будемо вважати, що всі діагональні елементи a_{ii} $(i = 1,2, \dots, n)$ відмінні від нуля. Побудуємо для цієї системи однокрокову схему
$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right), \qquad (3.26)$$
$$i = 1,2, \dots, n; \;\; k = 0,1,2, \dots,$$
яка в розгорнутому вигляді запишеться так:
$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1\right];$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2\right]; \qquad (3.27)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n\right].$$

Увівши до розгляду матриці

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots & \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn-1} \; 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \qquad (3.28)$$

де $\beta_i = b_i a_{ii}^{-1}$; $\; a_{ij} = -a_{ij}a_{ii}^{-1}$ $(i \neq j)$; $a_{ii} = 0$,
систему (3.27) або (3.26) можна записати в нормальному вигляді

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j^{(k)} + \beta_i, \qquad i = 1,2,\dots,n; \quad k = 0,1,2\dots \qquad (3.29)$$

Для збіжності ітераційного процесу (3.29) достатньо, щоб яка-небудь норма (3.4) матриці $\boldsymbol{\alpha}$ була менша, ніж 1, тобто щоб виконувалися нерівності

$$q_0 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}| < 1; \quad q_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}| < 1;$$

$$q^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2 < 1. \qquad (3.30)$$

Беручи до уваги (3.28), умови (3.30) можна перетворити до вигляду

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = \overline{1,n}); \qquad \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}| < |a_{jj}| \quad (j = \overline{1,n});$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 < \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2. \qquad (3.31)$$

Співвідношення (3.31) показують, що для збіжності процесу простої ітерації потрібно, щоб для матриці $\boldsymbol{A}$ сума модулів усіх членів кожного рядка або кожного стовпця без діагонального була менша, ніж модуль діагонального; сума квадратів усіх коефіцієнтів, крім діагональних, була меншою, ніж сума квадратів діагональних коефіцієнтів. Це так звана діагональна перевага.

При виконанні достатньої умови збіжності вибір початкового наближення $\vec{x}^{(0)}$ може бути довільним.

За початкове наближення можна обрати, наприклад, стовпець вільних членів

$$x_1^{(0)} = \beta_1;\ x_2^{(0)} = \beta_2; \dots\ x_n^{(0)} = \beta_n.$$

Якщо послідовність $\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right\}$ має границю при $k \to \infty$, то ця границя і буде розв'язком системи (3.6).

Метод послідовних наближень, який визначається формулами (3.27), називається методом простої ітерації або просто методом ітерації. Його зручно використовувати у тих випадках, коли діагональні елементи перевищують за модулем всі інші коефіцієнти при невідомих.

Зауважимо, що відповідно до (3.25)

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Звідси можна зробити висновок про обмежене застосування методу простої ітерації, оскільки матриця $\boldsymbol{H}$ вміщує лише діагональні елементи матриці $\boldsymbol{A}$, а інші елементи матриці не враховуються в ітераційному процесі.

Оцінка похибки k-го наближення проводиться за формулою

$$\left\|\vec{\xi} - \vec{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q^*}{1 - q^*}\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\right\|, \qquad (3.32)$$

де q^* – коефіцієнт стиску відображення $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{HA}$ в метричному просторі, де введена норма вектора (3.3).

Із загальної оцінки (3.32) можна записати аналогічні оцінки для наближень, отриманих методом простої ітерації

$$\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{q_0}{1 - q_0}\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - x_i^{(k)}\right| \leq \frac{q_1}{1-q_1}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - x_i^{(k)})^2 \leq \frac{q^2}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})^2, \qquad (3.33)$$

в яких величини q_0, q_1, q визначаються зі співвідношень (3.30).

Часто на практиці доводиться знаходити розв'язок $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ системи (3.26) із заданою точністю Δ. У цьому випадку за наближення $\vec{\xi}$ необхідно вибрати таке $\vec{x}^{(k)}$, для якого виконується умова

$$\left\|\vec{\xi} - \vec{x}^{(k)}\right\| \leq \Delta. \qquad (3.34)$$

Тоді оцінки (3.33) для методу простої ітерації набувають вигляду

$$\frac{q_0}{1-q_0}\max_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \leq \Delta; \quad \frac{q_1}{1-q_1}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \leq \Delta;$$

$$\frac{q^2}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})^2 \leq \Delta. \qquad (3.35)$$

Контроль обчислень в методі ітерації не має такого принципового значення, як в точних методах. Метод ітерацій за умови стисливості відображення збіжний для будь-якого початкового значення $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$.

Помилка, допущена в процесі обчислень за формулами (3.29), не впливає на кінцевий результат, бо знайдене значення можна розглядати як нове початкове наближення. Тут ми маємо справу з важливою властивістю самокорегування ітераційного процесу.

Зазначимо, що нерівності (3.31) визначають достатні умови збіжності, та їх невиконання ще не означає розбіжності методу простої ітерації.

Невироджену систему лінійних рівнянь тотожними перетвореннями можна звести до системи, для якої достатні умови збіжності методу простої ітерації будуть виконуватися.

Наприклад, нехай маємо систему рівнянь

$$5x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = \ \ 8;$$
$$3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 18;$$
$$6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10,$$
для якої жодна з умов (3.31) не виконується.

Перетворимо цю систему до вигляду, в якому модулі елементів головної діагоналі були б більшими за суму модулів інших елементів відповідних рядків.

Побудуємо нову систему, в якій першим і третім рівняннями будуть відповідно перше і друге рівняння цієї системи, для яких друга умова (3.31) виконується. Друге рівняння нової системи одержимо, якщо від третього рівняння заданої віднімемо перше. В результаті проведених перетворень одержимо систему

$$5x_1 - \ x_2 + 2x_3 = \ 8;$$
$$x_1 - 4x_2 \qquad\quad = \ 2;$$
$$3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 18,$$
коефіцієнти якої задовольняють умови (3.31).

3.3.2. Метод Якобі. Припустимо, що в системі (3.6) всі діагональні коефіцієнти відмінні від нуля $(a_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1,n})$. Цю систему запишемо у нормальному вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \qquad\quad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots \quad + a_{1n}x_n; \\ x_2 &= \beta_2 + a_{21}x_1 \qquad\quad + a_{23}x_3 + \cdots \quad + a_{2n}x_n; \\ &\quad \dots\dots\dots \\ x_n &= \beta_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Тут введено позначення

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \quad a_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \ \ (i \neq j), \ \ i,j = \overline{1,n}.$$

Розрахункові формули ітераційного процесу методу Якобі подаються у вигляді

$$x_i^{(0)} = \beta_i\,; \qquad x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, k = 0,1,2,\dots, \ \ j \neq i. \tag{3.37}$$

Умова закінчення ітераційного процесу (3.37) має вигляд

$$\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\| \leq \Delta. \tag{3.38}$$

Достатня умова його збіжності записується так:

$$\left\|a_{ij}\right\| < 1.$$

Тут Δ – задана точність.

Зауважимо, що метод Якобі є частковим випадком методу простої ітерації.

Різниця між цими методами полягає у виборі матриці $\boldsymbol{H}$:

4) у методі простої ітерації $\boldsymbol{H}$ – це довільна невироджена матриця, яка забезпечує умову стиску
$$\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{HA}\| \le q < 1;$$
5) у методі Якобі матриця $\boldsymbol{H}$ будується з елементів матриці $\boldsymbol{A}$. У ній
$$h_{ii}=\frac{1}{a_{ii}}, \quad h_{ij}=0, \quad i\neq j.$$

Метод Якобі зручно застосовувати до СЛАР, в яких діагональні елементи перевищують інші коефіцієнти при невідомих.

3.3.3. Метод Зейделя. Цей метод є модифікацією методу Якобі простої ітерації, при використанні якого для обчислення величин $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$ на $(k+1)$-му кроці використовуються всі значення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, обчислені в попередньому кроці. Метод Зейделя відрізняється від методу Якобі тим, що при обчисленні $(k+1)$-го наближення компоненти x_i використовуються значення $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$, обчислені на цьому ж кроці.

Формули для знаходження послідовних наближень на підставі (3.29) приймають вигляд
$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \phantom{a_{21}x_1^{(k+1)}+} a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1;\\
x_2^{(k+1)} &= a_{21}x_1^{(k+1)} + \phantom{a_{32}x_2^{(k+1)}} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2;\\
x_3^{(k+1)} &= a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \dots + a_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n^{(k+1)} &= a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \beta_n.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Тут введено позначення
$$\beta_i=\frac{b_i}{a_{ii}}; \quad a_{ij}=\frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \ (i\neq j), \qquad i,j=\overline{1,n}.$$

Збіжність і точність методу Зейделя встановлюється так само, як і у випадку методу простої ітерації.

Достатня умова збіжності методу Зейделя така:

$$\|\boldsymbol{a}\| < 1.$$

Оцінку похибки методу визначає нерівність

$$\left\|\vec{\xi} - \vec{x}^{(k)}\right\| \le \frac{\mu}{1-\mu}\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\right\|, \qquad (3.40)$$

де

$$\mu = \max_{1\le i\le n} \frac{q_i}{1-p_i}; \quad p_i = \sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|; \;\; q_i = \sum_{j=i}^{n}\left|a_{ij}\right|, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Приклад 3.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2{,}40x_1 + 1{,}10x_2 + 0{,}60x_3 &= \;\; 7{,}680; \\ 0{,}98x_1 + 2{,}60x_2 + 1{,}20x_3 &= 11{,}354; \\ 0{,}56x_1 + 1{,}10x_2 + 2{,}70x_3 &= 12{,}008 \end{aligned} \qquad (3.41)$$

з похибкою $\Delta = 0{,}001$ методами простої ітерації, Якобі і Зейделя. Будемо вважати коефіцієнти системи та вільні члени точними числами.

Розв'язання.

1. *Метод простої ітерації*. Розв'яжемо перше рівняння системи (3.41) відносно x_1, друге – відносно x_2, третє – відносно x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= -0{,}458333x_2 - 0{,}250000x_3 + 3{,}2; \\ x_2 &= -0{,}376923x_1 - 0{,}461538x_3 + 4{,}366923; \\ x_3 &= -0{,}207407x_1 - 0{,}407407x_2 + 4{,}447407. \end{aligned} \qquad (3.42)$$

Перевіряємо одну з достатніх умов збіжності ітераційного процесу (3.30), а саме першу умову

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{1j}\right| = 0{,}708333; \; \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{2j}\right| = 0{,}838461; \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{3j}\right| = 0{,}614814.$$

Отже,

$$q_0 = \max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{ij}\right| = 0{,}838461,$$

тому метод ітерації збігатиметься.

Оскільки

$$\frac{1-q_0}{q_0}\Delta = \frac{1-0{,}838461}{0{,}838461}\cdot 0{,}001 = 0{,}0002,$$

то процес ітерації слід завершити, якщо

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le 0{,}0002;$$

Ітераційний процес для заданої системи рівнянь записуємо у вигляді (3.27)

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \frac{1}{2{,}40}\left(2{,}40x_1^{(k-1)} + 1{,}10x_2^{(k-1)} + 0{,}60x_3^{(k-1)} - 7{,}680\right);$$

$$x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \frac{1}{2{,}60}\left(0{,}98x_1^{(k-1)} + 2{,}60x_2^{(k-1)} + 1{,}20x_3^{(k-1)} - 11{,}354\right);$$

$$x_3^{(k)} = x_3^{(k-1)} - \frac{1}{2{,}70}\left(0{,}56x_1^{(k-1)} + 1{,}10x_2^{(k-1)} + 2{,}70x_3^{(k-1)} - 12{,}008\right),$$

$$k = 1, 2, \dots$$

За початкове наближення приймаємо

$$x_1^{(0)} = 1{,}5;\ \ x_2^{(0)} = 2{,}5;\ \ x_3^{(0)} = 3{,}5.$$

Результати обчислень зведені в таблицю 3.1.

Розв'язок $x_1 \approx 1{,}300$; $x_2 \approx 2{,}400$; $x_3 \approx 3{,}200$ системи (3.41) методом простої ітерації знайдено за 25 ітерації.

2. *Метод Якобі*. Система рівнянь нормального виду, яка відповідає (3.14), має вигляд (3.42). Тоді ітераційну схему Якобі запишемо так:

$$x_1^{(k)} = -0{,}458333x_2^{(k-1)} - 0{,}250000x_3^{(k-1)} + 3{,}2;$$

$$x_2^{(k)} = -0{,}376923x_1^{(k-1)} - 0{,}461538x_3^{(k-1)} + 4{,}366923;$$

$$x_3^{(k)} = -0{,}207407x_1^{(k-1)} - 0{,}407407x_2^{(k-1)} + 4{,}447407.$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Процес ітерації необхідно завершити при

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \Delta.$$

Результати числового розрахунку при $x_1^{(0)} = 1{,}5$; $x_2^{(0)} = 2{,}5$; $x_3^{(0)} = 3{,}5$ наведені в таблиці 3.2.

Розв'язок $x_1 \approx 1{,}300$; $x_2 \approx 2{,}400$; $x_3 \approx 3{,}200$ системи (3.41) з похибкою $\Delta = 10^{-3}$ знайдено за 20 ітерацій.

Таблиця 3.1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max\limits_{1\le i\le 3}\left\lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right\rvert$
1	1,17917	2,18615	3,11778	0,38222
2	1,41857	2,48349	3,31218	0,29734
3	1,23369	2,30353	3,14139	0,18488
4	1,35887	2,45205	3,25306	0,14851
5	1,26288	2,35332	3,16659	0,09872
6	1,32975	2,42941	3,22671	0,07609
7	1,27984	2,37646	3,18185	0,05295
8	1,31533	2,41598	3,21377	0,03952
9	1,28923	2,38787	3,19031	0,02811
10	1,30798	2,40853	3,20718	0,02066
11	1,29430	2,39368	3,19487	0,01485
12	1,30418	2,40452	3,20376	0,01084
13	1,29699	2,39669	3,19729	0,00783
14	1,30219	2,40238	3,20197	0,00569
15	1,29841	2,39826	3,19857	0,00412
16	1,30115	2,40126	3,20104	0,00299
17	1,29917	2,39909	3,19925	0,00217
18	1,30061	2,40066	3,20055	0,00157
19	1,29956	2,39952	3,19960	0,00114
20	1,30032	2,40035	3,20029	0,00083
21	1,29977	2,39975	3,19979	0,00060
22	1,30017	2,40018	3,20015	0,00044
23	1,29988	2,39987	3,19989	0,00032
24	1,30009	2,40010	3,20008	0,00023
25	1,29994	2,39993	3,19994	0,00017

3. *Метод Зейделя.* Ітераційну схему Зейделя для системи (3.42) подаємо у вигляді

$$x_1^{(k)} = -0{,}458333x_2^{(k-1)} - 0{,}250000x_3^{(k-1)} + 3{,}2;$$
$$x_2^{(k)} = -0{,}376923x_1^{(k)} \quad - 0{,}461538x_3^{(k-1)} + 4{,}366923;$$
$$x_3^{(k)} = -0{,}207407x_1^{(k)} \quad - 0{,}407407x_2^{(k)} \quad + 4{,}447407,$$
$$(k = 1, 2, \dots).$$

Таблиця 3.2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max\limits_{1\le i\le 3}\left\lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right\rvert$
1	1,17917	2,18616	3,11778	0,38222
2	1,41857	2,48349	3,31218	0,29734
3	1,23369	2,30353	3,14139	0,18488
4	1,35887	2,45205	3,25306	0,14851
5	1,26288	2,35333	3,16659	0,09872
6	1,32975	2,42941	3,22671	0,07609
7	1,27984	2,37646	3,18185	0,05295
8	1,31533	2,41598	3,21377	0,03952
9	1,28923	2,38787	3,19031	0,02811
10	1,30798	2,40853	3,20718	0,02066
11	1,29430	2,39368	3,19487	0,01485
12	1,30418	2,40452	3,20376	0,01084
13	1,29699	2,39669	3,19729	0,00783
14	1,30219	2,40239	3,20197	0,00569
15	1,29841	2,39826	3,19857	0,00412
16	1,30115	2,40126	3,20104	0,00299
17	1,29917	2,39909	3,19925	0,00217
18	1,30061	2,40066	3,20055	0,00157
19	1,29956	2,39952	3,19961	0,00114
20	1,30032	2,40035	3,20029	0,00083

Для оцінки похибки ітераційного процесу Зейделя визначаємо параметри (3.40).

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lvert \alpha_{ij} \rvert; \;\; q_i = \sum_{j=i}^{n} \lvert \alpha_{ij} \rvert, \quad (i = \overline{1,n});$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0{,}376923; \quad p_3 = 0{,}614814;$$

$$q_1 = 0{,}708333; \quad q_2 = 0{,}461538; \quad q_3 = 0.$$

Тоді

$$\mu = \max_{1\le i\le 3}\left(\frac{q_i}{1 - p_i}\right) = 0{,}739553;$$

$$\frac{1-\mu}{\mu}\Delta = \frac{1-0{,}739553}{0{,}739553}\cdot 0{,}001 = \ 0{,}00035.$$

Отже, процес ітерації необхідно завершити, якщо

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le 0{,}00035.$$

Результати числового розрахунку при $x_1^{(0)} = 1{,}5;$ $x_2^{(0)} = 2{,}5;$ $x_3^{(0)} = 3{,}5$ наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max_{1\le i\le 3}\left\|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right\|$
1	1,17917	2,30708	3,26292	0,32083
2	1,32686	2,36084	3,21038	0,14769
3	1,31535	2,38942	3,20113	0,02858
4	1,30457	2,39776	3,19997	0,01079
5	1,30104	2,39963	3,19994	0,00353
6	1,30019	2,39996	3,19998	0,00085
7	1,30002	2,40000	3,20000	0,00016

Розв'язок $x_1 \approx 1{,}300;$ $x_2 \approx 2{,}400;$ $x_3 \approx 3{,}200$ системи (3.41) знайдено за 7 ітерацій.

У наведеному прикладі найкращу збіжність має метод Зейделя.

Повільна збіжність методів простої ітерації та Якобі зумовлена тим, що:

1) в обох випадках норма q_0 матриці $\boldsymbol{A}$ близька до одиниці;

2) різниця між двома послідовними наближеннями завжди більша, ніж різниця між відповідним наближенням $x_i^{(k)}$ і точним значенням x_i, оскільки з двох наближень $x_i^{(k)}$ і $x_i^{(k-1)}$ одне визначене з надлишком, а інше – з недостачею.

РОЗДІЛ 4
ІНТЕРПОЛЮВАННЯ, ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

У найпростіших задачах практики передбачають відповідь у формі числа. Прикладом такої задачі є задача табулювання функції: за формулою, що визначає функцію, необхідно скласти таблицю значень функції в окремих точках області її задання.

Іншою задачею є така: відомі значення функції $y = f(x)$ в окремих точках (вузлах) $x_0, x_1, \dots, x_n$, необхідно знайти наближені значення функції у деяких точках x, які не співпадають із жодним заданим вузлом. Якщо точка x міститься всередині проміжку задання вузлів, то мова йде про *інтерполяцію*, якщо ж зовні – то про *екстраполяцію*.

4.1. Інтерполювання функцій

4.1.1. Інтерполяційний поліном Лагранжа. Розглянемо таку задачу. В окремих вузлах $x_0, x_1, \dots, x_n$ задано значення функції $y = f(x)$, які дорівнюють відповідно $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, … , $y_n = f(x_n)$. Необхідно знайти значення функції в довільній точці x, яка можливо не співпадає з жодною вузловою точкою.

Задача відразу стає проблематичною, оскільки нам невідомий аналітичний вираз функції. З цією метою змінимо підхід до задачі у такий спосіб: дібрати таку функцію $y = \varphi(x)$, графік якої проходив би через точки (x_k, y_k), $k = 0,1,2,\dots,n$, а значення функції $\varphi(x)$ в довільній точці x було близьким до шуканого $f(x)$. За такої умови задача стає невизначеною, бо таких функцій $\varphi(x)$ існує багато (рис. 4.1). У зв’язку з цим постановку задачі переформулюємо так: серед функції певного класу вибрати ту, яка визначатиме розв’язок вихідної задачі.

Найбільш зручним класом функції, в якому просто виконуються арифметичні дії, є клас поліномів (многочленів), тому ними і наближатимемо функції.

Оскільки нам задано $(n+1)$ вузлів, тому обираємо поліном n-го степеня

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, (a_n \neq 0), \qquad (4.1)$$

який має $(n+1)$ коефіцієнтів.

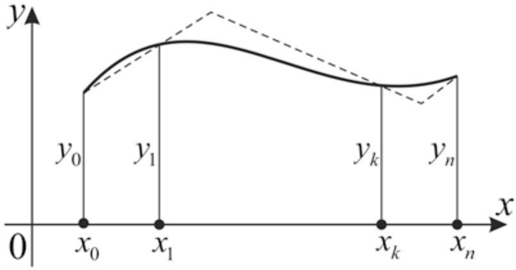


Рис. 4.1.

Тепер поставлену задачу сформулюємо так: серед поліномів вигляду (4.1) вибрати такий, який задовольняє умови

$$P_n(x_k) = y_k, \; k = 0,1,\dots,n. \tag{4.2}$$

Покажемо, що такий поліном існує і він єдиний. Для цього необхідно довести, що його коефіцієнти a_k визначається однозначно.

Підстановка (4.1) в (4.2) дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_k

$$\begin{gathered} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0; \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

відомий з курсу лінійної алгебри, як визначник Вандермонда, відмінний від нуля при $x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$. Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі система (4.3) має єдиний розв'язок, який можна встановити, зокрема, методом Крамера. А це означає, що існує єдиний поліном вигляду (4.1), який визначає розв'язок поставленої задачі. Для його побудови необхідно знайти розв'язок системи (4.3).

З попереднього розділу відомо, що для великих n ця задача надзвичайно складна. Тому будемо шукати поліном $P_n(x)$ у вигляді лінійної комбінації інших поліномів n-го степеня

$$P_n(x) = A_0Q_0(x) + A_1Q_1(x) + \dots + A_nQ_n(x), \qquad (4.4)$$

де A_k – числа, $Q_k(x)$ – поліноми n-го степеня ($k = 0,1, \dots, n$).

На перший погляд може видатися, що ми ускладнили задачу, замість одного полінома n-го степеня доведеться будувати $(n+1)$ поліномів цього ж степеня. Однак поліноми $Q_k(x)$ будемо підбирати так, щоб кожен із них в точці x_k приймав значення 1, а в усіх інших вузлах дорівнював 0

$$Q_k(x_k) = 1;\ \ Q_k(x_i) = 0,\ i \neq k. \qquad (4.5)$$

Таким чином, для кожного з поліномів $Q_k(x)$ відомо n його коренів і те, що коефіцієнт при найстаршому степені x дорівнює одиниці. Такий поліном можна записати у вигляді

$$Q_k(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n). \qquad (4.6)$$

Зауважимо, що в останньому виразі відсутній множник $(x - x_k)$.

Визначимо коефіцієнти A_k в лінійній комбінації (4.4). Для цього обчислимо значення (4.4) у кожному вузлі з урахуванням (4.2)

$$y_k = A_k(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n).$$

Тоді

$$A_k = \frac{y_k}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \qquad (4.7)$$

Оскільки всі коефіцієнти A_k знайдені, то інтерполяційний поліном побудовано. Метод його побудови запропонував відомий французький математик Ж. Лагранж. В його честь даний поліном називають Лагранжевим і позначають $L_n(x)$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} y_k. \qquad (4.8)$$

Для скороченого запису (4.8) розглянемо поліном $(n+1)$-го степеня

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) \dots (x - x_n), \qquad (4.9)$$

для якого

$$(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) = \frac{\omega(x)}{x - x_k};$$

$$(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) = \omega'(x_k).$$

Тоді інтерполяційний поліном Лагранжа (4.8) запишемо у вигляді

$$L_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\omega'(x_k)(x - x_k)}. \qquad (4.10)$$

Якщо функція $f(x)$ є поліном степеня не вищого ніж n, то в цьому випадку $L_n(x) \equiv f(x)$. У протилежному випадку, коли $f(x)$ є довільною функцією, то

$$f(x) = L_n(x) + R_{n+1}(x), \qquad (4.11)$$

де функцію $R_{n+1}(x) = f(x) - L_n(x)$ називають залишковим членом інтерполяційного полінома Лагранжа або залишком Лагранжа, який фактично є похибкою інтерполяції.

Важливою є оцінка залишку. Якщо нам нічого невідомо про функцію $f(x)$, то оцінити залишок $R_{n+1}(x)$ ми не можемо.

Припустимо, що функція $f(x)$ має похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Тоді для похибки інтерполювання, яка виникає внаслідок заміни функції $f(x)$ її поліномом Лагранжа, використовують наближену рівність

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (4.12)$$

Тут ξ – внутрішня точка найменшого інтервалу, що містить усі вузли інтерполяції і точку x; $\xi \neq x_k$ $(k = \overline{0, n})$. Якщо точка x співпадає з якимось із вузлів x_k , то похибка дорівнює нулю, оскільки $\omega(x_k) = 0$.

Приклад 4.1. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції, заданої таблично:

k	0	1	2	3
x_k	-2	-1	2	3
y_k	-12	-8	3	5

Розв'язання. На підставі формули (4.10) маємо:

$$L_3(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{3} \frac{y_k}{\omega'(x_k)(x - x_k)},$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

У цій задачі

$$\omega(x) = (x+2)(x+1)(x-2)(x-3);$$

$$\omega'(x) = (x+1)(x-2)(x-3) + (x+2)(x-2)(x-3) +$$
$$+(x+2)(x+1)(x-3) + (x+2)(x+1)(x-2);$$

$$\omega'(x_0) = \omega'(-2) = -20; \qquad \omega'(x_1) = \omega'(-1) = 12;$$
$$\omega'(x_2) = \omega'(2) = -12; \qquad \omega'(x_3) = \omega'(3) = 20.$$

Підставляючи одержані результати у вираз для полінома, одержимо

$$L_3(x) = \frac{3}{5}(x+1)(x-2)(x-3) - \frac{2}{3}(x+2)(x-2)(x-3) -$$
$$-\frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-3) + \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-2) =$$
$$= -\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{20}x^2 + \frac{241}{60}x - \frac{39}{10}.$$

Інтерполяція функцій за допомогою поліномів називається параболічною.

4.1.2. Скінченні різниці та різницеві відношення. Для одержання різновидів інтерполяційних поліномів, а також інших потреб практики введемо поняття скінченних різниць і скінченних різницевих відношень.

Нехай задано довільні значення незалежної змінної x: $x_0, x_1, \dots, x_n$ і відповідні їм значення функції $y = f(x)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Вважаємо, що всі вузли x_k – взаємовідмінні та $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n$.

Скінченними різницями для аргументу x відповідного порядку називаються величини:

різниці першого порядку

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0;\ \Delta x_1 = x_2 - x_1; \dots;\ \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1};$$

різниці другого порядку

$$\Delta^2 x_0 = x_2 - x_0;\ \Delta^2 x_1 = x_3 - x_1; \dots;\ \Delta^2 x_{n-2} = x_n - x_{n-2};$$

різниці третього порядку

$$\Delta^3 x_0 = x_3 - x_0;\ \Delta^3 x_1 = x_4 - x_1; \dots;\ \Delta^3 x_{n-3} = x_n - x_{n-3};$$

…………………………………………………………………..........

різниця n-го порядку

$$\Delta^n x_0 = x_n - x_0. \tag{4.13}$$

Якщо вузли $x_0, x_1, \dots, x_n$ розподілені рівномірно з кроком h $(x_i = x_0 + ih;\ i = \overline{0, n})$, то на підставі (4.13) всі різниці першого порядку дорівнюють h, другого порядку – $2h$, а n-го порядку – nh.

Скінченні різниці для функції $y = f(x)$ вводяться за формулами:

різниці першого порядку

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1};$$

різниці другого порядку

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0;$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2};$$

різниці третього порядку

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0;$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

різниця n-го порядку

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_{n-k},$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

У загальному випадку формулу, яка визначає скінченні різниці функції в точках x_i через її значення у вузлових точках, можна записати у вигляді

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_{n+i-k}. \tag{4.14}$$

Зауважимо, що різниці нульового порядку дорівнюють значенню функції.

Послідовні скінченні різниці зручно записувати у вигляді таблиць. Використовують дві форми таблиць: діагональну (табл. 4.1) і горизонтальну (табл. 4.2).

Таблиця 4.1.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$	$\Delta^8 y_i$	$\Delta^9 y_i$
x_0	y_0									
		Δy_0								
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$							
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$						
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$					
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$				
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		$\Delta^6 y_0$			
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$		$\Delta^7 y_0$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		$\Delta^6 y_1$		$\Delta^8 y_0$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		$\Delta^5 y_2$		$\Delta^7 y_1$		$\Delta^9 y_0$
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_3$		$\Delta^6 y_2$		$\Delta^8 y_1$	
		Δy_5		$\Delta^3 y_4$		$\Delta^5 y_3$		$\Delta^7 y_2$		
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$		$\Delta^4 y_4$		$\Delta^6 y_3$			
		Δy_6		$\Delta^3 y_5$		$\Delta^5 y_4$				
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$		$\Delta^4 y_5$					
		Δy_7		$\Delta^3 y_6$						
x_8	y_8		$\Delta^2 y_7$							
		Δy_8								
x_9	y_9									

Діагональну таблицю одержують тоді, коли табличні різниці в кожному стовпці записують між відповідними значеннями зменшуваного і від'ємника. В горизонтальній таблиці різниці записують в одному рядку з від'ємником.

Таблиця 4.2.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$	$\Delta^8 y_i$	$\Delta^9 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$	$\Delta^7 y_0$	$\Delta^8 y_0$	$\Delta^9 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	$\Delta^6 y_1$	$\Delta^7 y_1$	$\Delta^8 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_2$	$\Delta^6 y_2$	$\Delta^7 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_3$	$\Delta^5 y_3$	$\Delta^6 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$	$\Delta^5 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5	$\Delta^2 y_5$	$\Delta^3 y_5$	$\Delta^4 y_5$					
x_6	y_6	Δy_6	$\Delta^2 y_6$	$\Delta^3 y_6$						
x_7	y_7	Δy_7	$\Delta^2 y_7$							
x_8	y_8	Δy_8								
x_9	y_9									

Домовимося скінченні різниці всіх порядків записувати в одиницях нижчого розряду значень функції у вузлах інтерполювання.

Різниці k-го порядку на деякій ділянці таблиці називаються **практично сталими**, якщо всі вони відрізняються між собою не більш як на 2^k одиниць останнього розряду табличних значень функції.

Якщо різниці k-го порядку практично сталі, то різниці $(k+1)$-го порядку обчислювати нема потреби, бо вони складатимуться лише з неправильних цифр, і в межах даної точності можна вважати, що вони практично дорівнюють нулю. Якщо на деякій ділянці зі сталим кроком різниці порядку k практично сталі, то можна вважати, що функція в межах заданої точності поводиться як поліном k-го степеня. Тому, коли знаходять проміжні значення функції на цій ділянці, обмежуються обчисленням значень інтерполяційних поліномів k-го степеня.

Приклад 4.2. Функція $y = f(x)$ задана таблично з точністю до третього і п’ятого десяткових знаків

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y_k	1,000	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625
y_k	1,00000	0,90909	0,83333	0,76923	0,71429	0,66667	0,62500

Побудувати діагональні таблиці скінченних різниць і встановити порядок практично сталих різниць.

Розв'язання. Оскільки вузли x_i $(i = \overline{0,6})$ на проміжку $[1; 1,6]$ розподілені рівномірно, то для визначення скінченних різниць використовуємо формулу (4.14). Результати числового розрахунку наведені в таблиці 4.3 ($\Delta = 10^{-3}$) і таблиці 4.4 ($\Delta = 10^{-5}$).

Таблиця 4.3

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
1,0	1,000						
		-91					
1,1	0,909		15				
		-76		**-3**			
1,2	0,833		12		0		
		-64		**-3**		2	
1,3	0,769		9		2		-6
		-55		**-1**		-4	
1,4	0,714		8		-2		
		-47		**-3**			
1,5	0,667		5				
		-42					
1,6	0,625						

Аналізуючи одержані результати встановлюємо, що при $\Delta = 10^{-3}$ практично сталими будуть треті різниці, а при $\Delta = 10^{-5}$ – п'яті різниці. Це означає, що на проміжку $[1; 1,6]$ у першому випадку функція $y = f(x)$ поводить себе як многочлен третього степеня, а в другому випадку – як многочлен п'ятого степеня.

Таблиця 4.4

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
1,0	1,00000						
		-9091					
1,1	0,90909		1515				
		-7576		-349			
1,2	0,83333		1166		99		
		-6410		-250		**-33**	
1,3	0,76923		916		66		14
		-5496		-184		**-19**	
1,4	0,71429		732		47		
		-4762		-137			
1,5	0,66667		595				
		-4167					
1,6	0,62500						

Різницевими відношеннями *першого порядку* будемо називати величини

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_0}{x_0-x_1};$$
$$f(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{y_2}{x_2-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_2};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.15)$$
$$f(x_{n-1};x_n)=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}=$$
$$=\frac{y_n}{x_n-x_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}.$$

Аналогічно вводяться різницеві відношення вищих порядків: *різницеві відношення другого порядку*

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+$$
$$+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)};$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{y_3}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}+$$

$$+\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.16)$$

$$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)=\frac{f(x_{n-1},x_n)-f(x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}=$$

$$=\frac{y_n}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})}+\frac{y_{n-1}}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})}+$$

$$+\frac{y_{n-2}}{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})};$$

різницеві відношення третього порядку

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=$$

$$=\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$

$$+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)};$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_1}=$$

$$=\frac{y_4}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+$$

$$+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.17)$$

$$f(x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n)=\frac{f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)-f(x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-3}}=$$

$$=\frac{y_n}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-3})}+$$

$$+\frac{y_{n-1}}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-3})}+$$
$$+\frac{y_{n-2}}{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-3})}+$$
$$+\frac{y_{n-3}}{(x_{n-3}-x_n)(x_{n-3}-x_{n-1})(x_{n-3}-x_{n-2})}.$$

Враховуючи позначення (4.9) для функції $\omega(x)$, *різницеве відношення n-го порядку* запишемо так

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n-x_0}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\omega'(x_k)},\qquad (x_k=x_0+kh). \tag{4.18}$$

У випадку рівномірного розподілу вузлів з кроком h різницеві відношення визначаються за формулами

$$f(x_0,x_1)=\frac{\Delta y_0}{h};\ f(x_1,x_2)=\frac{\Delta y_1}{h};\dots;f(x_{n-1},x_n)=\frac{\Delta y_{n-1}}{h};$$
$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2};\ f(x_1,x_2,x_3)=\frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2};\dots;$$
$$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2};$$
$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3};\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\Delta^3 y_1}{3!\,h^3};\dots;$$
$$f(x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n)=\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{4.19}$$
$$f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}.$$

4.1.3 . Інтерполяційні поліноми Ньютона. Формула параболічної інтерполяції Лагранжа (4.10) має суттєвий недолік. Якщо до заданих вузлів інтерполяції додати ще декілька і вказати для них значення функції, то побудову інтерполяційного полінома потрібно виконувати повторно.

Розглянемо інтерполяційну формулу, яка позбавлена вказаного недоліку і допускає деякі модифікації.

Нехай нам задано сітку довільно розташованих різних вузлів $x_0, x_1, \dots, x_n$ і значення функції $y = f(x)$ у цих вузлах $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\dots$, $y_n = f(x_n)$. З пункту 4.1.1 відомо, що існує єдиний поліном n-го степеня $P_n(x)$, для якого

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0,1, \dots, n. \tag{4.20}$$

Запишемо його у такому вигляді

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \tag{4.21}$$

де $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі коефіцієнти, поки що невідомі.

Для їх визначення виконаємо такі дії. Покладаючи в (4.21) $x = x_0$ з урахуванням (4.20), знаходимо

$$c_0 = P(x_0) = y_0.$$

При $x = x_1$ із (4.20) і (4.21) визначаємо

$$y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0),$$

або

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_1, x_0).$$

Для визначення c_2 в (4.21) підставляємо $x = x_2$ і в результаті нескладних перетворень знаходимо $c_2 = f(x_2, x_1, x_0)$.

Аналогічно визначаємо решту сталих

$$c_i = f(x_i,\ x_{i-1}, \dots, x_1,\ x_0).$$

Підставляючи значення $c_0,\ c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$ в (4.21), одержимо *перший інтерполяційний поліном Ньютона* для інтерполювання вперед (на початку таблиці)

$$P_n(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0) +$$
$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0). \tag{4.22}$$

Якщо вузли інтерполяції перенумерувати з кінця таблиці до її початку, то з (4.22) знаходимо *другий інтерполяційний поліном Ньютона* для інтерполювання назад (в кінці таблиці)

$$P_n(x) \approx f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) +$$
$$+(x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + \qquad (4.23)$$
$$+(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0).$$

Зі співвідношень (4.22), (4.23) видно, що при додаванні нових вузлів на початку або в кінці таблиці значень функції з'являються нові доданки, які не змінюють попередні.

Формули Лагранжа (4.10), і Ньютона (4.22), (4.23) для однакових вузлів інтерполяції це різні подання одного полінома, тому залишковий член для поліномів Ньютона на підставі (4.12) можна записати у вигляді

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (4.24)$$

Модифікації формул (4.22), (4.23) пов'язані з розташуванням точки x, в якій визначається значення полінома.

Розглянемо модифікацію формули (4.22) для рівномірно розподілених вузлів $x_i = x_0 + ih$ $(i = \overline{0, n})$, яка з урахуванням (4.19) набуває вигляду

$$P_n^I(x) \approx y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots +$$
$$+\frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (4.25)$$

де $q = (x - x_0)/h$.

Це *перший інтерполяційний поліном Ньютона-I* для інтерполювання вперед (на початку таблиці). Його залишковий член визначається зі співвідношення

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_0. \qquad (4.26)$$

Формула (4.25) використовується для обчислення значень полінома $P_n^I(x)$ в точці $x \in [x_0, x_n]$, яка близька до точки x_0.

Якщо необхідно обчислити значення полінома в точці x з проміжку $[x_0, x_n]$, близькій до x_n, використовуємо формулу (4.23), яку для рівномірно розподілених вузлів $x_i = x_0 - ih$ $(i = \overline{0, n})$ можна записати так:

$$P_n^{II}(x) \approx y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (4.27)$$

Тут $t = (x - x_n)/h$.

Наближена рівність (4.27) визначає *другий інтерполяційний поліном Ньютона-II*, який використовується для інтерполювання назад (в кінці таблиці). Його залишок визначається за формулою

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t+1)\ldots(t+n). \qquad (4.28)$$

На практиці інтерполяційні поліноми (4.22), (4.23), (4.25), (4.27) обриваються на членах, які містять практично сталі різниці, а точка x_0 чи x_n обирається так, щоб виконувалися нерівності $x < x_0 + h$ чи $x > x_n - h$.

При цьому результат інтерполювання, як правило, має стільки правильних цифр, скільки їх в табличних значеннях функції. Тому в таких випадках нема потреби обчислювати залишкові члени інтерполяційних формул. Оцінки залишкового члена проводять тільки тоді, коли різниці не стають практично сталими або коли не зручно користуватися різницями вище деякого порядку.

Приклад 4.3. Експериментально встановлено вкорочення x(мм) пружини від дії стискальної сили $P = y(x)$(кН).

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	5	10	15	20	25	30	35	40
y_k	49	105	172	253	352	473	619	793

Необхідно визначити силу $P(x)$, яка вкорочує пружину на величину $x = 6$ мм.

Розв'язання. Значення $x = 6$ близьке до $x_0 = 5$, тому будемо використовувати формулу Ньютона інтерполювання вперед (4.24):

$$P(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!\,h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \cdots$$
$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots(x - x_0 - 6h)}{6}\Delta^7 y_0.$$

Скінченні різниці функції $P = y(x)$ визначаємо за формулами (4.14) і заносимо їх значення в таблицю 4.5.

Таблиця 4.5

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$
5	49							
		56						
10	105		11					
		67		**5**				
15	172		16		-5			
		83		**0**		11		
20	253		16		6		-20	
		99		**6**		-9		32
25	352		22		-3		12	
		121		**3**		3		
30	473		25		0			
		146		**3**				
35	619		28					
		174						
40	793							

З цієї таблиці видно, що практично сталими будуть скінченні різниці третього порядку, тому в попередній формулі залишаємо чотири доданки

$$P(x) = 49 + \frac{x - 5}{5}56 + \frac{(x - 5)(x - 10)}{2 \cdot 5^2}11 + \frac{(x - 5)(x - 10)(x - 15)}{6 \cdot 5^3}5.$$

При $x = 6$ знаходимо $P = 60$ кН.

4.1.4. Інтерполяційні формули Лагранжа і Ньютона. Якщо функція $y = f(x)$ є поліном степеня не вищого, ніж n, то для кожного $x \in [x_0, x_n]$ значення функції і її інтерполяційного полінома $\varphi_n(x)$ співпадають. Для довільної функції $f(x)$ вираз

$$f(x) \approx \varphi_n(x)$$

називається *інтерполяційною формулою*, породженою поліномом $\varphi_n(x)$.

На підставі (4.10)-(4.12), (4.22)-(4.28) запишемо інтерполяційні формули і відповідні їм залишки для побудованих вище поліномів:

інтерполяційна формула Лагранжа

$$f(x) \approx \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}; \quad R_{n+1}(x) \approx \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi); \quad (4.29)$$

загальна інтерполяційна формула Ньютона інтерполювання вперед

$$f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0) f(x_1, x_0) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_2, x_1, x_0) +$$
$$+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0);$$
$$R_{n+1}(x) \approx (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}; \quad (4.30)$$

загальна інтерполяційна формула Ньютона інтерполювання назад

$$f(x) \approx f(x_n) + (x-x_n) f(x_n, x_{n-1}) +$$
$$+(x-x_n)(x-x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + \quad (4.31)$$
$$+(x-x_n)(x-x_{n-1}) \dots (x-x_1) f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0);$$
$$R_{n+1}(x) \approx (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!};$$

перша інтерполяційна формула Ньютона-I інтерполювання вперед для рівновіддалених вузлів

$$f(x) \approx y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots +$$
$$+ \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0; \quad (4.32)$$
$$R_{n+1}(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_0;$$

друга інтерполяційна формула Ньютона-II інтерполювання назад для рівновіддалених вузлів

$$f(x) \approx y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots +$$

$$+\frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0; \qquad (4.33)$$

$$R_{n+1}(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}t(t+1)\dots(t+n).$$

Для прикладу наведемо формули *лінійної* ($n=1$) і *квадратичної* ($n=2$) інтерполяції. Для лінійної інтерполяції співвідношення (4.29) – (4.33) набувають вигляду

$$f(x)\approx\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1;\ R_2(x)\approx\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\xi),$$

$$\xi\in(x_0;x_1);$$

$$f(x)\approx\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1;\ R_2(x)\approx\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\xi),$$

$$\xi\in(x_0;x_1);$$

$$f(x)\approx\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1;\ R_2(x)\approx\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\xi),$$

$$\xi\in(x_0;x_1); \qquad (4.34)$$

$$f(x)\approx y_0+\frac{q}{1!}\Delta y_0;\quad R_2(x)\approx\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0;$$

$$f(x)\approx y_1+\frac{t}{1!}\Delta y_0;\quad R_2(x)\approx\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Для квадратичної інтерполяції відповідні співвідношення запишемо так:

$$f(x)\approx\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2;\quad R_3(x)\approx (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

$$\xi\in(x_0;x_2);$$

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2; \quad R_3(x) \approx (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

$$\xi \in (x_0; x_2);$$

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2; \quad R_3(x) \approx (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

$$\xi \in (x_0; x_2); \tag{4.35}$$

$$f(x) \approx y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0; \quad R_3(x) \approx \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0;$$

$$f(x) \approx y_2 + \frac{t}{1!}\Delta y_1 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0; \quad R_3(x) \approx \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

З формул (4.34) – (4.35) випливає, що квадратичне інтерполювання слід застосовувати тоді, коли другі різниці практично сталі, а лінійне – у випадку сталості перших різниць.

4.2. Екстраполювання та обернене інтерполювання

Нехай функцію $y = f(x)$ задано її значеннями $y_k = f(x_k)$ у рівновіддалених точках x_k $(k = 0,1, \dots, n)$. Обчислення значень функції f для значень аргументу, що не належать проміжку $[x_0;\ x_n]$, тобто для $x < x_0$ і $x > x_n$, називають **екстраполюванням** або **екстраполяцією**.

Для обчислення значень функції f в точці $x < x_0$ доцільно використати першу інтерполяційну формулу Ньютона-І (4.25). У цьому випадку $q = (x - x_0)/h < 0$, тому кажуть, що формулу Ньютона-І інтерполювання вперед використовують для екстраполювання назад.

Якщо $x > x_n$ $(t = (x - x_n)/h > 0)$, то для екстраполювання вперед використовують формулу Ньютона-ІІ (4.27) інтерполювання назад.

Слід зазначити, що екстраполювання є менш точною операцією, ніж інтерполювання. Тому до екстраполювання можна вдатися тоді, коли відстань від точки x до точок x_0 або x_n менша, ніж крок h. При більшій відстані треба очікувати значних похибок. З огляду на це межі застосування екстраполяції обмежені.

Зауважимо, що при використанні формул (4.22) або (4.23) екстраполяція можлива і у випадку довільної системи вузлів.

Приклад 4.4. За умовою попереднього прикладу визначити силу, яка вкорочує пружину на величину $x = 42$ мм.

Розв'язання. Значення $x = 42$ близьке до $x_7 = 40$ і $x - x_7 = 2 < h$. Тому для екстраполювання функції $P(x)$ в точці x використаємо формулу Ньютона-II інтерполювання назад (4.27)

$$P(x) = y_7 + \frac{x - x_7}{1!\,h}\Delta y_6 + \frac{(x - x_7)(x - x_6)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_5 + \\ + \frac{(x - x_7)(x - x_6)(x - x_5)}{3!\,h^3}\Delta^3 y_4,$$

в якій враховано, що треті різниці функції $y(x)$ практично сталі.

З урахуванням даних таблиці 4.5 запишемо останню формулу при $h = 5$

$$P(x) = 793 + \frac{x - 40}{5}174 + \frac{(x - 40)(x - 35)}{2 \cdot 5^2}28 + \\ + \frac{(x - 40)(x - 35)(x - 30)}{6 \cdot 5^3}3.$$

Тоді для $x = 42$ знаходимо $P = 871$ кН.

На практиці часто виникає задача **оберненого інтерполювання**: за таблицею значень функції знайти значення аргумента, що відповідає деякому значенню функції, якого в таблиці немає.

Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна (зростаюча або спадна) на заданому проміжку, то для неї існує монотонна (зростаюча або спадна) обернена функція $x = \varphi(y)$. У цьому випадку обернене інтерполювання функції $y = f(x)$ зводиться до звичайного інтерполювання оберненої функції $x = \varphi(y)$. При цьому значення $y_k = f(x_k)$ вважаються значеннями аргументу, а значення x_k – значеннями функції $x_k = \varphi(y_k)$. Але табличні різниці Δy_k функції f не зберігають сталих значень (значення y_k не рівновіддалені), тому для оберненого інтерполювання зручно використовувати інтерполяційний многочлен Лагранжа. Відповідно до формули (4.8) його можна записати у вигляді

$$x(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(y-y_0)\dots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\dots(y-y_n)}{(y_k-y_0)\dots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\dots(y_k-y_n)} x_{k.}$$

Якщо функція $y = f(x)$ не монотонна, то для неї записують інтерполяційний поліном Ньютона (4.22), (4.23) або Лагранжа (4.8), а потім методом ітерацій розв'язують рівняння $P_n(x) = y$ або $L_n(x) = y$ відносно x при заданому y.

Спосіб оберненого інтерполювання, яким розв'язуються рівняння $P_n(x) = y$ або $L_n(x) = y$ відносно x при заданому y, можна застосовувати і тоді, коли функція $y = f(x)$ строго монотонна.

4.3. Чисельне диференціювання функцій

До чисельного диференціювання функцій вдаються тоді, коли функція задана таблично, а тому методи диференціального числення застосувати не можна, або, коли функцію задано складним аналітичним виразом, і обчислення похідних пов'язане зі значними труднощами.

Щоб побудувати формули чисельного диференціювання, задану на відрізку $[a; b]$ функцію $f(x)$ замінюють відповідним інтерполяційним поліномом $P_n(x)$. Тоді

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{4.36}$$

де $R_{n+1}(x)$ – залишковий член інтерполяційної формули.

Якщо функція $f(x)$ на $[a; b]$ має похідні до k-го порядку включно, то внаслідок диференціювання (4.36) по x одержимо

$$f'(x) = P_n'(x) + R_{n+1}'(x); \quad f''(x) = P_n''(x) + R_{n+1}''(x);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R_{n+1}^{(k)}(x). \tag{4.37}$$

В якості наближених значень похідних від функції $f(x)$ обирають перші доданки в правих частинах (4.37)

$$f'(x) \approx P_n'(x); \;\; f''(x) \approx P_n''(x); \; \dots; \; f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x). \tag{4.38}$$

Тоді залишкові члени $r_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ формул чисельного диференціювання (4.37) дорівнюють похідним від залишкового члена інтерполяційної формули (4.36), тобто

$$r_i(x) = f^{(i)}(x) - P_n^{(i)}(x). \tag{4.39}$$

Зауважимо, що з малості залишкового члена інтерполяційної формули $R_{n+1}(x)$ не випливає малість залишкових членів похідних $r_i(x)$.

Якщо інтерполяційний поліном $P_n(x)$ на певній ділянці з достатньою точністю наближає функцію $f(x)$, а сама функція $f(x)$ гладка і змінюється плавно на цій ділянці, то можна сподіватися, що при досить малому кроці інтерполювання похідні інтерполяційного полінома мало відрізнятимуться від похідних функції.

Проте не слід забувати, що із зростанням порядку похідної точність чисельного диференціювання, як правило, різко спадає. Тому на практиці формули чисельного диференціювання інтерполяційних поліномів для похідних, вищих від другого порядку, застосовують досить рідко.

4.3.1. Формули чисельного диференціювання, побудовані за інтерполяційною формулою Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$, яка у рівновіддалених вузлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ з кроком $h = x_{k+1} - x_k$ $(k = \overline{0, n-1})$ набуває значень $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots, y_n = f(x_n)$, задана таблично. Її інтерполяційний поліном Лагранжа $L_n(x)$ можна подати у вигляді (4.10).

Перейдемо в (4.10) до нової змінної $q = (x - x_0)/h$, для якої

$$x - x_k = h(q - k);$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) = h^{n+1} q(q-1) \ldots (q-n);$$

$$\omega'(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x - x_i} = h^n q(q-1) \ldots (q-n) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{q-i};$$

$$\omega''(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)} - \frac{1}{(x - x_i)^2} \right) =$$

$$= h^{n-1} q(q-1)\dots(q-n) \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(q-i)} \frac{1}{(q-j)} - \frac{1}{(q-i)^2} \right);$$

$$\omega(x_k) = 0; \quad \omega'(x_k) = (-1)^{n-k} h^n k!\,(n-k)!; \qquad (4.40)$$

$$\omega''(x_k) = 2(-1)^{n-k} h^{n-1} k!\,(n-k)!\,\Omega,$$

де введено позначення

$$\Omega = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k-j} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i}.$$

За умови $k = 0$ перша сума, а при $k = n$ друга сума в останній рівності дорівнюють нулю.

У результаті підстановки (4.40) в (4.10), одержимо

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} y_k. \quad (4.41)$$

Диференціюванням (4.41) по x з урахуванням співвідношення

$$\frac{dL_n(x)}{dx} = \frac{dL_n(x)}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dL_n(x)}{dq},$$

знаходимо

$$f'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{d}{dq} \left(\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} \right) y_k; \quad (4.42)$$

$$f''(x) \approx L''_n(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} \right) y_k.$$

Для оцінки похибки чисельного диференціювання

$$r_i(x) = f^{(i)}(x) - L_n^{(i)}(x)$$

використаємо формулу (4.12) для залишкового члена інтерполяційного полінома Лагранжа.

Якщо функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(n+3)$-го порядку

$(i \le n)$, то для залишкових членів наближених рівностей $f'(x) \approx L_n'(x)$, $f''(x) \approx L_n''(x)$ знаходимо

$$r_1(x) = R_{n+1}'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\omega'(x) f^{(n+1)}(\xi) + \omega(x)\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi)\right];$$

$$r_2(x) = R_{n+1}''(x) = \frac{1}{(n+1)!} * \qquad (4.43)$$

$$* \left[\omega''(x) f^{(n+1)}(\xi) + 2\omega'(x)\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi) + \omega(x)\frac{d^2}{dx^2} f^{(n+1)}(\xi)\right].$$

З урахуванням (4.40) формули (4.43) у вузлах інтерполювання запишемо так:

$$r_1(x_k) = R_{n+1}'(x_k) = \frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,h^n f^{(n+1)}(\xi);$$

$$r_2(x_k) = R_{n+1}''(x_k) = 2\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,h^{n-1} * \qquad (4.44)$$

$$*\left[\Omega f^{(n+1)}(\xi) + h f^{(n+2)}(\xi)\right].$$

Оскільки похідні $f^{(n+1)}(\xi)$, $f^{(n+2)}(\xi)$ у багатьох випадках оцінити важко, тому при малих h приймають, що

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}, \quad f^{(n+2)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+2} y_0}{h^{n+2}}.$$

Тоді залишкові члени (4.44) у вузлах інтерполяції набувають вигляду

$$r_1(x_k) = \frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h};$$

$$r_2(x_k) = 2\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\left[\Omega\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^2} + \frac{\Delta^{n+2} y_0}{h^2}\right]. \quad (4.45)$$

Формули (4.42) мають суттєвий недолік – невисоку точність, особливо при додаванні нових вузлів інтерполяції. Тому на практиці переважно використовують наближені формули, одержані з (4.42) шляхом квадратичної або лінійної інтерполяції.

У випадку, коли маємо всього три рівновіддалені вузли інтерполяції x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, похідні першого і другого порядку визначаються за формулами

$$y'_0 = y'(x_0) \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2);$$

$$y'_1 = y'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(y_2 - y_0);$$

$$y'_2 = y'(x_2) \approx \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2);$$

$$y''_0 \approx y''_1 \approx y''_2 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2). \qquad (4.46)$$

Ці формули можна використовувати також і для довільних трьох послідовних вузлів з таблиці інтерполяції x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$,…, $x_n = x_0 + nh$.

Найпростіші вирази для похідних першого порядку можна одержати з використанням лінійної інтерполяції

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}\ ; \quad f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h};$$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}, \ \ k = 0,1,2, \dots \qquad (4.47)$$

Перша з них називається лівою похідною, друга – центральною, а третя – правою.

4.3.2. Формули чисельного диференціювання, побудовані за інтерполяційними формулами Ньютона. Нехай функцію $y = f(x)$ задано у рівновіддалених вузлах $x_\mathrm{i} = x_0 + ih$ $(i = \overline{0, n})$ значеннями $y_i = f(x_i)$.

Щоб знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$ в точках x, близьких до x_0, використаємо інтерполяційну формулу Ньютона-I (4.32)

$$f(x) \approx y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.48)$$

із залишковим членом

$$R_{n+1}(x) \approx h^{n+1}\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (4.49)$$

Враховуючи співвідношення

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{h}\frac{df(x)}{dq}; \qquad \frac{d^2f}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\frac{d^2f(x)}{dq^2},$$

знаходимо внаслідок двократного диференціювання по q наближеної рівності (4.48)

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{3!}\Delta^3 y_0+\right.$$

$$(4.50)$$

$$\left.+\dots+\frac{nq^{n-1}-(n-1)S_{n-1}^1 q^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}S_{n-1}^{n-1}}{n!}\Delta^n y_0\right];$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+\frac{6q-6}{3!}\Delta^3 y_0+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)q^{n-2}+(n-1)(n-2)S_{n-1}^1 q^{n-3}+\ldots+(-1)^n 2S_{n-1}^{n-2}}{n!}\Delta^n y_0\right],$$

де S_k^i – сума всіх добутків чисел $x_0,\ x_1,\ x_2,\dots,x_{k-1}$ по i множників $(i=1,2,\dots,k)$.

Коли похідні за формулами (4.50) обчислюють в точці x, то за x_0 обирають найближче значення аргумента, яке менше за x.

Ці формули значно спрощуються, якщо значення похідних обчислювати у вузлах інтерполювання. Оскільки кожне табличне значення аргументу можна взяти за x_0, то приймаючи в (4.50) $q=0$ $(x=x_0)$, одержимо

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_0\right];$$

$$(4.51)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\dots+\frac{(-1)^n 2S_{n-1}^{n-2}}{n!}\Delta^n y_0\right].$$

Залишкові члени для інтерполяційних формул Ньютона-І (4.49) і Лагранжа (4.12) для однакових вузлів повністю співпадають. Це означає, що для оцінки похибки формул (4.50), (4.51) можна використовувати співвідношення (4.43)-(4.45).

Загальні формули (4.50), (4.51) мають невисоку точність, тому на практиці користуються наближеними формулами, які одержуються із загальних шляхом лінійної або квадратичної інтерполяції:

одночленні формули лінійної інтерполяції

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\Delta y_0 = \frac{1}{h}(y_1 - y_0);$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_0 = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0); \qquad (4.52)$$

двочленні формули квадратичної інтерполяції

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + (2x - x_0 - x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2h}\right]; \qquad (4.53)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \big(6x - 2(x_0 + x_1 + x_2)\big)\frac{\Delta^3 y_0}{6h}\right],$$

які у вузлах інтерполяції набувають вигляду

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2); \quad f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(y_2 - y_0);$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2);$$

$$(4.54)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0);$$

$$f''(x_1) \approx \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0); \quad f''(x_2) \approx \frac{1}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1).$$

Легко замітити, що

$$f'(x_1) = \frac{f'(x_2) + f'(x_0)}{2}; \quad f''(x_1) = \frac{f''(x_2) + f''(x_0)}{2}.$$

Аналогічні формули можна записати для довільних послідовних вузлів $x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ x_{k+3}$.

Якщо вузли інтерполяції нумеруються в зворотному порядку $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$, то для обчислення похідних $f'(x)$, $f''(x)$ в точках x, близьких до x_n використаємо інтерполяційну формулу Ньютона-II (4.33)

$$f(x) \approx y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots +$$

$$+\frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.55)$$

із залишковим членом

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}t(t+1)\dots(t+n)f^{(n+1)}(\xi). \qquad (4.56)$$

У результаті двократного диференціювання по x наближеної рівності (4.55) з урахуванням співвідношень

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\frac{df(x)}{dt}; \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\frac{d^2f(x)}{dt^2},$$

знаходимо

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{nt^{n-1} + (n-1)\tilde{S}_{n-1}^1 t^{n-2} + (n-2)\tilde{S}_{n-1}^2 t^{n-3} + \dots + \tilde{S}_{n-1}^{n-1}}{n!}\Delta^n y_0\right];$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_{n-2} + (t+1)\Delta^3 y_{n-3} + \qquad (4.57)$$

$$+\frac{6t^2+18t+11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{2t^3+12t^2+21t+10}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + \cdots +$$

$$\left. + \frac{n(n-1)t^{n-2} + (n-1)(n-2)\tilde{S}_{n-1}^1 t^{n-3} + \cdots + 2\tilde{S}_{n-1}^{n-2}}{n!}\Delta^n y_0\right].$$

Тут $\tilde{S}_k^i$ – сума всіх добутків чисел $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ по i множників $(i = 1,2,\dots,k)$.

Якщо в співвідношеннях (4.57) покласти $q = 0$ $(x = x_n)$, то одержимо формули чисельного диференціювання функції $f(x)$ для табличних значень аргументу

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{n-4} + \right.$$

$$+\frac{1}{5}\Delta^5 y_{n-5} + \cdots + \frac{1}{n}\Delta^n y_0\Bigg];$$

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} +$$

$$+\frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + \frac{137}{180}\Delta^6 y_{n-6} + \cdots + \frac{2\tilde{S}_{n-1}^{n-2}}{n!}\Delta^n y_0\Bigg]. \qquad (4.58)$$

Одночленні формули лінійної інтерполяції для (4.58) запишемо у вигляді

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(y_n - y_{n-1});$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}), \qquad (4.59)$$

а двочленні формули квадратичної інтерполяції подамо наступними співвідношеннями

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + (2x - x_n - x_{n-1})\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h}\right]; \qquad (4.60)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{n-2} + \big(6x - 2(x_n + x_{n-1} + x_{n-2})\big)\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{6h}\right].$$

У вузлах інтерполяції з формул (4.60) одержимо

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{2h}(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2});$$

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{1}{2h}(y_n - y_{n-2}); \quad f'(x_{n-2}) \approx \frac{1}{2h}(-3y_{n-2} + 4y_{n-1} - y_n);$$

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}(2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}); \qquad (4.61)$$

$$f''(x_{n-1}) \approx \frac{1}{h^2}(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2});$$

$$f''(x_{n-2}) \approx \frac{1}{h^2}(y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3}).$$

При цьому

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f'(x_n) + f'(x_{n-2})}{2}; \quad f''(x_{n-1}) = \frac{f''(x_n) + f''(x_{n-2})}{2}.$$

Для оцінки похибки формул чисельного диференціювання (4.57), (4.58) залишковий член (4.56) запишемо у вигляді

$$R_{n+1}(x) \approx \frac{1}{(n+1)!}\widetilde{\omega}(x)f^{(n+1)}(\xi), \qquad (4.62)$$

де $\widetilde{\omega}(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_0) = t(t+1)\dots(t+n)$.

У результаті двократного диференціювання по x функції $\widetilde{\omega}(x)$ знаходимо

$$\widetilde{\omega}'(x) = \widetilde{\omega}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x - x_i} = h^n t(t+1)\dots(t+n)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{t+i};$$

$$\widetilde{\omega}''(x) = \widetilde{\omega}(x)\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)} - \frac{1}{(x - x_i)^2}\right) =$$

$$= h^{n-1}t(t+1)\dots(t+n)\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(t+i)}\frac{1}{(t+j)} - \frac{1}{(t+i)^2}\right). \qquad (4.63)$$

У вузлах інтерполяції $x = x_k$ з формул (4.63) одержимо

$$\widetilde{\omega}(x_k) = 0; \quad \widetilde{\omega}'(x_k) = (-1)^k h^n k!\,(n-k)!;$$

$$\widetilde{\omega}''(x_k) = 2(-1)^{k+1}h^{n-1}k!\,(n-k)!\,\Omega. \qquad (4.64)$$

Диференціюючи (4.62) по x, знаходимо після певних перетворень

$$r_1(x) = R'_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\widetilde{\omega}'(x)f^{(n+1)}(\xi) + \widetilde{\omega}(x)\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi)\right];$$

$$r_2(x) = R''_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} * \qquad (4.65)$$

$$* \left[\widetilde{\omega}''(x)f^{(n+1)}(\xi) + 2\widetilde{\omega}'(x)\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi) + \widetilde{\omega}(x)\frac{d^2}{dx^2}f^{(n+1)}(\xi)\right].$$

З урахуванням (4.64) формули (4.65) у вузлах інтерполювання набувають вигляду

$$r_1(x_k) = R'_{n+1}(x_k) = \frac{(-1)^k}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,h^n f^{(n+1)}(\xi);$$

$$r_2(x_k) = R''_{n+1}(x_k) = 2\frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,h^{n-1} * \tag{4.66}$$

$$*\left[\Omega f^{(n+1)}(\xi) - h f^{(n+2)}(\xi)\right].$$

Для малих h приймають, що

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}; \quad f^{(n+2)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+2} y_0}{h^{n+2}}.$$

Тоді похибки чисельного диференціювання (4.66) у вузлах інтерполяції запишемо так:

$$r_1(x_k) = \frac{(-1)^k}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\,\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h};$$

$$r_2(x_k) = 2\frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)!} k!\,(n-k)!\left[\Omega\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^2} - \frac{\Delta^{n+2} y_0}{h^2}\right]. \tag{4.67}$$

Приклад 4.5. У точках $x = 1$, $x = 1.6$ знайти першу і другу похідні від функції $y = f(x) = {}^{1}/_{x}$, заданої таблицею 4.3.

Розв'язання. Точка $x = 1$ розміщена на початку таблиці і співпадає з точкою x_0, тому похідні $f'(1)$, $f''(x)$ обчислюємо за формулами (4.51), які у випадку третіх практично сталих різниць набувають вигляду

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right];$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0].$$

Підставляючи в ці формули значення $x_0 = 1;\ \ h = 0{,}1;$ $\Delta y_0 = -0{,}091;\ \ \Delta^2 y_0 = 0{,}015;\ \ \Delta^3 y_0 = -0{,}003,$ одержимо

$$f'(1) \approx 10\left(-0{,}091 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}015 - \frac{1}{3}0{,}003\right) = -0{,}995;$$

$$f''(1) \approx 100(0{,}015 + 0{,}003) = 1{,}800;$$

Точні значення похідних $f'(1) = -1$; $f''(1) = 2$.

Абсолютна похибка при обчисленні першої похідної дорівнює 0,005, а другої похідної - 0,200.

Точка $x = 1{,}6$ розміщена в кінці таблиці, тому для обчислення похідних $f'(1{,}6)$ і $f''(1{,}6)$ використаємо формули (4.58), які при $x = x_n$ запишемо у вигляді

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3}\right];$$

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3}].$$

Виконавши обчислення при $x_n = 1{,}6$; $h = 0{,}1$; $\Delta y_{n-1} = -0{,}042$; $\Delta^2 y_{n-2} = 0{,}005$; $\Delta^3 y_{n-3} = -0{,}003$, знаходимо

$$f'(1{,}6) \approx 10\left(-0{,}042 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}005 - \frac{1}{3}0{,}003\right) = -0{,}405;$$

$$f''(1{,}6) \approx 100(0{,}005 - 0{,}003) = 0{,}200.$$

Значення похідних, обчислених з точністю $\Delta = 10^{-6}$, дорівнюють відповідно$f'(1{,}6) = -0{,}390625$; $f''(1{,}6) = 0{,}488281$.

Абсолютна похибка для першої похідної дорівнює 0,014, а для другої похідної - 0,288.

РОЗДІЛ 5
НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Обчислення визначених інтегралів на підставі формули Ньютона-Лейбніца

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

за допомогою первісної $F(x)$ не завжди можливе через те, що навіть для простих функцій $f(x)$ первісні часто не виражаються через елементарні функції, а в деяких випадках, навіть якщо такий вираз існує, то він може бути надзвичайно складним і незручним для обчислень. Тоді формула (5.1) виявляється непридатною для практичного використання. З огляду на це виникає проблема наближеного обчислення інтеграла (5.1).

Формули, за якими проводиться наближене обчислення визначених інтегралів, називаються формулами механічних квадратур або квадратурними формулами. Серед них найбільш поширеними і зручними є формули прямокутників, трапецій і парабол (Сімпсона).

5.1. Квадратурні формули для обчислення інтегралів

5.1.1. Квадратурні формули прямокутників. Означений інтеграл (5.1) визначає площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 5.1). Для його наближеного обчислення розділимо проміжок $[a;\ b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2,\ldots, x_n = b$ на n рівних частин. Проведемо в цих точках вертикальні прямі, які перетинають графік функції $y = f(x)$ відповідно в точках з ординатами $y_0 = f(x_0) = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, …., $y_n = f(x_n) = f(b)$ (у загальному випадку вузли поділу не обов'язково рівновіддалені $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$).

У результаті такої побудови криволінійна трапеція з висотою $b - a$ розділилась на n елементарних криволінійних трапецій з висотами $h = (b - a)/n$. Розглянемо одну з них, яка визначається точками x_{k-1} і x_k $(k = \overline{1,n})$.

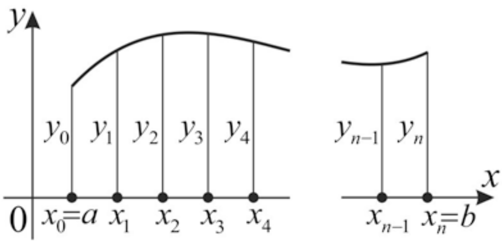


Рис. 5.1.

Побудуємо три прямокутники зі спільною основою $h = x_k - x_{k-1}$ і висотами $y_{k-1} = f(x_{k-1})$ (рис. 5.2*а*), $y_k = f(x_k)$ (рис. 5.2*б*), $y_{k-0,5} = f(x_k - 0{,}5h)$ (рис. 5.2*в*). Перший з них назвемо лівим прямокутником, другий – правим, а третій – середнім. Їх площі позначимо відповідно через $\Delta S_k^{\text{лп}}$, $\Delta S_k^{\text{пп}}$, $\Delta S_k^{\text{сп}}$, причому

$$\Delta S_k^{\text{лп}} = y_{k-1}h, \quad \Delta S_k^{\text{пп}} = y_k h, \quad \Delta S_k^{\text{сп}} = y_{k-0,5}h. \tag{5.2}$$

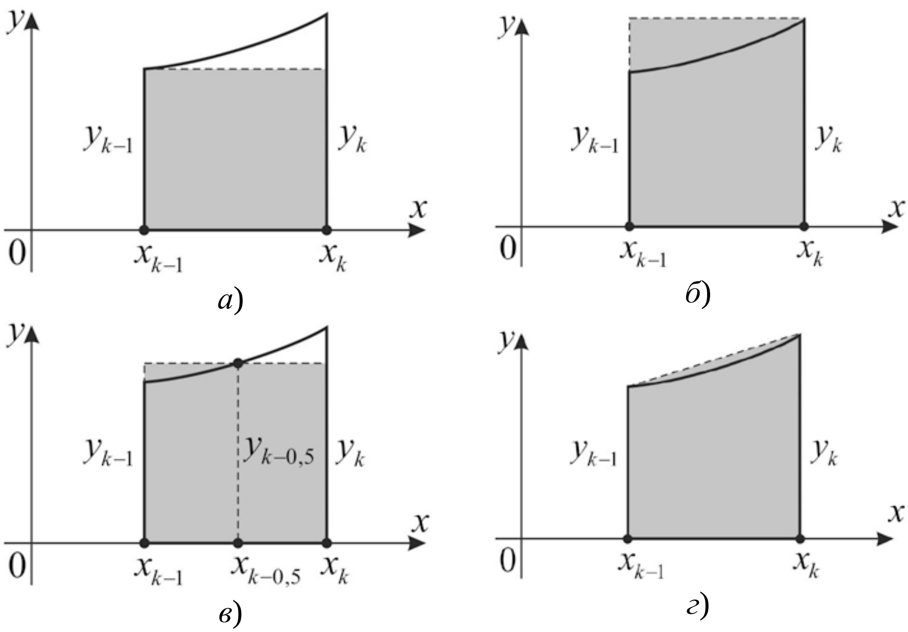


Рис. 5.2

Суми площ елементарних прямокутників будемо приблизно вважати площею розглядуваної криволінійної трапеції

$$S \approx S^{\text{лп}} = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1});$$

$$S \approx S^{\text{пп}} = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n); \qquad (5.3)$$

$$S \approx S^{\text{сп}} = h\left(y_{0,5} + y_{1,5} + \cdots + y_{n-0,5}\right).$$

Тоді наближений розв'язок задачі (5.1) можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\,; \qquad (5.4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_{0,5} + y_{1,5} + \cdots + y_{n-0,5}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-0,5}.$$

Перша з квадратурних формул (5.4) називається формулою лівих прямокутників, друга – правих прямокутників, а третя середніх прямокутників.

5.1.2. Квадратурна формула трапецій. Розглянемо на рис. 5.2*г* елементарну криволінійну прямокутну трапецію з висотою $h = x_k - x_{k-1}$ і двома вертикальними основами y_{k-1}, y_k. Сполучивши відрізком точки $(x_{k-1};\, y_{k-1})$ і $(x_k;\, y_k)$, одержимо елементарну трапецію з площею $\Delta S_k^{\text{т}} = h(y_{k-1} + y_k)/2$. Площу S заданої криволінійної трапеції замінимо сумою площ елементарних трапецій

$$S = S^{\text{т}} \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n). \qquad (5.5)$$

З урахуванням (5.5) квадратурну формулу для обчислення інтеграла (5.1) можна записати так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} + y_k). \qquad (5.6)$$

Це квадратурна формула трапецій.

5.1.3. Квадратурна формула Сімпсона. Поділимо проміжок $[a; b]$ на парну кількість однакових частин $(n = 2m)$. Площу двох сусідніх елементарних криволінійних трапецій, що визначаються проміжками $[x_{k-1};\ x_k]$ та $[x_k;\ x_{k+1}]$ замінимо площею однієї елементарної криволінійної трапеції, яка обмежена параболою 2-го степеня (рис. 5.3).

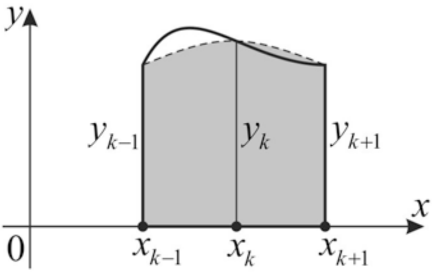


Рис. 5.3

Рівняння цієї параболи запишемо у вигляді

$$y = Ax^2 + By + C, \qquad (5.7)$$

де $A \neq 0$, B, C – сталі.

Оскільки шукана парабола проходить через точки $(x_{k-1};\ y_{k-1})$, $(x_k;\ y_k)$, $(x_{k+1};\ y_{k+1})$, то мають місце такі співвідношення

$$\begin{aligned} &A(x_k - h)^2 + B(x_k - h) + C = y_{k-1}; \\ &Ax_k^2 + Bx_k + C = y_k; \\ &A(x_k + h)^2 + B(x_k + h) + C = y_{k+1}, \end{aligned} \qquad (5.8)$$

де $h = (b - a)/(2m)$.

Площу елементарної трапеції, обмеженої параболою (5.7), визначимо за формулою

$$\Delta S_k^{\text{пар}} = \int_{x_k-h}^{x_k+h} (Ax^2 + Bx + C)dx =$$

$$= \frac{A}{3}[(x_k + h)^3 - (x_k - h)^3] + \frac{B}{2}[(x_k + h)^2 - (x_k - h)^2] + C2h,$$

яку з урахуванням другого рівняння (5.8) можна перетворити до вигляду

$$\Delta S_k^{\text{пар}} = 2h\left[\frac{A}{3}(3x_k^2 + h^2) + \frac{B}{2}(2x_k) + C\right] = 2h\left[y_k + \frac{A}{3}h^2\right] \quad (5.9)$$

Додаючи перше і третє співвідношення (5.8) та враховуючи друге, знаходимо

$$Ah^2 = 0{,}5(y_{k+1} + y_{k-1}) - y_k. \quad (5.10)$$

Підставляючи (5.10) в (5.9), одержимо після певних перетворень

$$\Delta S_k^{\text{пар}} = \frac{1}{3}h(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}). \quad (5.11)$$

Додаючи вирази (5.11) для всіх значень $k = 1, 3, 5, \dots, n-1$, одержимо квадратурну формулу Сімпсона для проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) +$$

$$+2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] \quad (5.12)$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k}\right]. \quad (5.13)$$

Формула Сімпсона (5.12) або (5.13), яка використовує квадратичну (параболічну) інтерполяцію, є найбільш точною серед розглянутих вище квадратурних формул.

Зауважимо, що квадратурні формули прямокутників, трапецій і Сімпсона можуть бути успішно використані, коли підінтегральна функція задана таблично. Якщо вузли x_k на проміжку $[a, b]$ розміщені рівномірно, то ці формули використовуються безпосередньо. У випадку нерівномірного розміщення вузлів для таблично заданої функції загальну квадратурну формулу для обчислення інтеграла (5.1) можна записати так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}).$$

У випадку рівномірного розподілу вузлів останню формулу можна подати у вигляді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[\alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k), \qquad (5.14)$$

де x_k, α_k відповідно вузли і коефіцієнти квадратурної формули:

– *формула лівих прямокутників*

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n-1}; \\ 0, & k = n; \end{cases}$$

– *формула правих прямокутників*

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ 1, & k = \overline{1, n}; \end{cases}$$

– *формула трапецій*

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, k = n; \\ 1, & k = \overline{1, n-1}; \end{cases}$$

– *формула Сімпсона*

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, k = n = 2m; \\ \frac{2}{3}, & k = 2j,\ j = \overline{1, m-1}; \\ \frac{4}{3}, & k = 2j-1,\ j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Для середніх прямокутників формулу (5.14) не можна використовувати, оскільки значення функції в центрах вузлових проміжків невідомі.

Приклад 5.1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

за формулами лівих і правих прямокутників, трапецій та Сімпсона при $n = 2m = 10$, $h = (b-a)/n = 0{,}1$.

Розв’язання. У цьому прикладі $f(x) = 1/(1+x^2)$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}3$; $x_3 = 0{,}3$; …; $x_{10} = 1{,}0$.

Складаємо таблицю 5.1 значень аргументу, підінтегральної функції та коефіцієнтів квадратурних формул.

Таблиця 5.1

k	x_k	$y_k = \frac{1}{1+x_k^2}$	α_k			
			лівих прямокутників	правих прямокутників	трапецій	Сімпсона
0	0	1	1	0	0,5	0,(3)
1	0,1	0,990099	1	1	1	1,(3)
2	0,2	0,961538	1	1	1	0,(6)
3	0,3	0,917431	1	1	1	1,(3)
4	0,4	0,862069	1	1	1	0,(6)
5	0,5	0,800000	1	1	1	1,(3)
6	0,6	0,735294	1	1	1	0,(6)
7	0,7	0,671141	1	1	1	1,(3)
8	0,8	0,609756	1	1	1	0,(6)
9	0,9	0,552486	1	1	1	1,(3)
10	1,0	0,500000	0	1	0,5	0,(3)

Обчислюємо суми для кожної з квадратурних формул:

– формула лівих прямокутників

$$\sum_{k=0}^{10} \alpha_k y_k = 8{,}099814;$$

– формула правих прямокутників

$$\sum_{k=0}^{10} \alpha_k y_k = 7{,}599814;$$

– формула трапецій

$$\sum_{k=0}^{10} \alpha_k y_k = 7{,}849814;$$

– формула Сімпсона

$$\sum_{k=0}^{10} \alpha_k y_k = 7{,}853983.$$

Помноживши одержані результати на $(b-a)/n = 0{,}1$, одержимо:

– формула лівих прямокутників

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}809981\,;$$

– формула правих прямокутників

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}759981\,;$$

– формула трапецій

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}784981\,;$$

– формула Сімпсона

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}785398.$$

Для оцінки точності квадратурних формул встановимо точне значення заданого інтеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}25\pi = 0{,}785400.$$

Найбільш близький до точного результат дає формула Сімпсона.

5.2. Оцінка похибки квадратурних формул

Розглянемо квадратурну формулу (5.14). Рівність (5.14) наближена. Різницю між точним значенням інтеграла (5.1) і квадратурною сумою

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

будемо називати залишковим членом або похибкою квадратурної формули. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) + R_n(f). \qquad (5.15)$$

Крім похибки, яка виникає від заміни інтеграла квадратурною сумою (похибки методу $|R_n(f)|$), є похибка, що зумовлена виконанням арифметичних дій над наближеними числами – значеннями $f(x_k)$. Якщо абсолютні похибки значень $f(x_k)$ дорівнюють Δ_f, то абсолютна похибка квадратурної суми $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$ дорівнює

$$R_f = \Delta_f \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|.$$

Це так звана неусувна похибка, яка зумовлена наближеними значеннями $f(x_k)$. У процесі обчислень виникає ще похибка за рахунок округлення проміжних результатів. Цю похибку можна зробити значно меншою у порівнянні з неусувною, якщо проміжні результати виконувати із запасними цифрами, які відкидають в остаточному результаті. Оцінюючи похибки чисельного інтегрування, необхідно враховувати і похибку остаточного округлення Δ_0. Отже, повна похибка чисельного інтегрування Δ_I дорівнює сумі названих вище трьох похибок, тобто

$$\Delta_I = |R_n(f)| + \frac{b-a}{n}\Delta_f \sum |\alpha_k| + \Delta_0. \qquad (5.16)$$

Замінюючи підінтегральну функцію поліномом Лагранжа або формулою Тейлора можна встановити наступні формули для залишкових членів квадратурних формул (5.14):

– формула лівих прямокутників

$$R_n^{\text{лп}}(f) = \frac{b-a}{2} hf'(x);$$

– формула правих прямокутників

$$R_n^{\text{пп}}(f) = -\frac{b-a}{2} hf'(x);$$

– формула середніх прямокутників

$$R_n^{\text{сп}}(f) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(x);$$

– формула трапецій

$$R_n^{\text{т}}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x);$$

– формула Сімпсона

$$R_n^{\text{пар}}(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(IV)}(x), \tag{5.17}$$

де $x \in [a; b]$.

Обчислити значення залишкових членів (5.17) не можна, бо точки x невідомі. Але для них справедливі такі оцінки:

$$|R_n^{\text{п}}| = |R_n^{\text{л}}(f)| \le h \frac{b-a}{2} M_1 = \frac{(b-a)^2}{2n} M_1;$$

$$|R_n^{\text{с}}(f)| \le h^2 \frac{b-a}{24} M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2;$$

$$|R_n^{\text{т}}(f)| \le h^2 \frac{b-a}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2;$$

$$\left|R_n^{\text{пар}}(f)\right| \le h^4 \frac{b-a}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4. \tag{5.18}$$

Тут введено позначення

$$M_1 = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|; \quad M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|;$$

$$M_4 = \max_{x \in [a;b]} \left|f^{(IV)}(x)\right|.$$

Якщо наближене значення інтеграла (5.1) треба обчислити з точністю $\Delta > 0$, то на підставі (5.18) відповідний крок інтегрування h або число $n = (b-a)/h$ визначається з нерівностей

$$h^{\text{пп}} = h^{\text{лп}} \le \frac{2\Delta}{(b-a)M_1}; \quad h^{\text{сп}} = \sqrt{\frac{24\Delta}{(b-a)M_2}}; \; h^{\text{т}} = \sqrt{\frac{12\Delta}{(b-a)M_2}};$$

$$h^{\text{пар}} = \sqrt[4]{\frac{180\Delta}{(b-a)M_4}}; \; n^{\text{пп}} = n^{\text{лп}} \ge \frac{M_1(b-a)^2}{2\Delta}; \; n^{c\text{п}} \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{24\Delta}};$$

$$n^{\text{т}} \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\Delta}}; \quad n^{\text{пар}} = 2m \ge 2\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{2880\Delta}}. \qquad (5.19)$$

Зауважимо, що для квадратурної формули Сімпсона число n повинне бути парним.

Використовуючи (5.18) оцінимо похибку обчислення інтеграла в прикладі 1. З цією метою обчислимо похідні від функції $f(x) = 1/(1+x^2)$ до четвертого порядку

$$f_1'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \; f_1''(x) = 2\frac{3x^2}{(1+x^2)^3}; \; f_1^{(IV)}(x) = 24\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(1+x^2)^5}.$$

На проміжку $[0; 1]$ похідні $f''(x)$ і $f^{(IV)}(x)$ приймають найбільші абсолютні значенняя в точці $x = 0$, а похідна $f'(x)$ в точці $x = \pm 1/\sqrt{3}$

$$M_2 = |f''(0)| = 2; \; M_4 = f^{(IV)}(0) = 24; \; M_1 = \left|f'\left(1/\sqrt{3}\right)\right| = 0{,}65.$$

Тому

$$\Delta^{\text{пп}} = \Delta^{\text{лп}} = \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot 0{,}65 = 0{,}032476;$$

$$\Delta^{\text{т}} = \frac{1}{12 \cdot 100} \cdot 2 = 0{,}001667;$$

$$\Delta^{\text{пар}} = \frac{24}{180 \cdot 10^4} = 0{,}000013.$$

Співвідношення (5.17) показують, що квадратурні формули (5.4), (5.6), (5.13) дають точні результати, якщо підінтегральна функція стала (формули лівих і правих прямокутників), лінійна (формула середніх прямокутників і трапецій), кубічна (формула Сімпсона), для яких відповідно $f'(x) \equiv 0$; $f''(x) \equiv 0$; $f^{(IV)}(x) \equiv 0$.

Оцінки квадратурних формул (5.4), (5.6), (5.13) можна застосовувати тільки в тих випадках, коли існують і визначаються похідні $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(IV)}$, що на практиці трапляється надзвичайно рідко. Однак з їх допомогою можна одержати зручні для використання на практиці оцінки похибок при обчисленні інтеграла (5.1).

5.3. Порівняння і практична оцінка квадратурних формул

Точність квадратурної формули характеризується порядком залишкового члена $R_n(f)$ відносно степеня кроку інтегрування h. З формул (5.17) видно, що залишковий член $R_n(f)$ залежить від h і умови $R_n(f) \to 0$ при $h \to 0$.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n(f)}{h^p} = M \neq 0, \tag{5.20}$$

то говорять, що залишковий член $R_n(f)$ має порядок p $(p \in N)$ відносно h і записують це так $R_n(f) = 0\,(h^p)$.

На підставі умов (5.18) можна зробити висновок, що залишкові члени формул лівих і правих прямокутників мають перший порядок $\big(R_n(f) = 0(h)\big)$, середніх прямокутників і трапецій – другий порядок $\big(R_n(f) = 0(h^2)\big)$, а Сімпсона – четвертий порядок $\big(R_n(f) = 0\,(h^4)\big)$.

Квадратурну формулу вважають тим точнішою, чим більший порядок її залишкового члена. З розглянутих вище квадратурних формул найточнішою є формула Сімпсона, а найменш точними – формули лівих і правих прямокутників.

Як зазначалося вище, у багатьох випадках оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або і зовсім неможливо. Наприклад, тоді, коли підінтегральну функцію задано графічно чи таблично і аналітичний вираз її невідомий. Або тоді, коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Проте оцінити залишковий $R_n(f)$ квадратурної формули можна і тоді, коли не вдається оцінити зверху модуль підінтегральної функції. Важливо лише знати порядок залишкового члена $R_n(f)$ відносно кроку інтегрування h. Для цього використовують метод подвійного перерахунку.

Нехай залишковий член деякої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h, тобто $R_n(f) = O(h^p), p \in N$. Припустимо також, що похідна, яка входить до залишкового члена $R_n(f)$, на проміжку інтегрування $[a; b]$ змінюється мало, а тому наближено її можна вважати сталою.

Тоді залишковий член $R_n(f)$ можна подати у вигляді

$$R_n(f) = M \cdot h^p, \tag{5.21}$$

де M – невідома стала.

Якщо проміжок $[a; b]$ поділити на n і $2n$ рівних частин $(h = (b - a)/n\,,\ h/2 = (b - a)/(2n))$ та обчислити за квадратурною формулою наближені значення I_n, I_{2n} інтеграла (5.1), а відповідні їм залишкові члени позначити через $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$, то одержимо такі залежності

$$I = I_n + R_n(f) = I_n + M \cdot h^p; \tag{5.22}$$
$$I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + M \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^p.$$

Співвідношення (5.22) можна розглядати як лінійну систему рівнянь відносно I і M, з якої визначаємо

$$M = \frac{2^p}{2^p - 1} \cdot \frac{I_{2n} - I_n}{h^p}; \quad R_{2n}(f) = \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}. \tag{5.23}$$

Остання рівність показує, що залишковий член квадратурної формули пропорційний різниці двох наближених значень інтеграла, обчислених за цією ж квадратурною формулою з кроками h і $0{,}5h$. Таку оцінку квадратурної формули називають правилом Рунге.

Якщо (5.23) підставити у друге рівняння системи (5.22), то знайдемо уточнене значення інтеграла

$$I_{n,2n} = I_n + \frac{I_{2n} - I_n}{2^p}. \tag{5.24}$$

Обчислення наближеного значення інтеграла за формулою (5.24) називають екстраполяцією за Річардсоном. Якщо $I_n \neq I_{2n}$, то для значення $I_{n,2n}$ завжди виконується умова $I_n < I_{n,2n}$ або $I_{n,2n} > I_{2n}$, тому обчисленя $I_{n,2n}$ і називають екстраполюванням.

У таблиці 5.2 для квадратурних формул, розглянутих вище, наведено значення порядку p залишкового члена відносно кроку h, формули для обчислення значень залишкового члена $R_{2n}(f)$ і уточненого значення інтеграла $I_{n,2n}$.

Таблиця 5.2

Квадратурна формула	p	$R_{2n}(f)$	$I_{n,2n}$
Лівих і правих прямокутників	1	$I_{2n} - I_n$	$I_{2n} + (I_{2n} - I_n)$
Середніх прямокутників і трапецій	2	$\frac{1}{3}(I_{2n} - I_n)$	$I_{2n} + \frac{1}{3}(I_{2n} - I_n)$
Сімпсона	4	$\frac{1}{15}(I_{2n} - I_n)$	$I_{2n} + \frac{1}{15}(I_{2n} - I_n)$

З цієї таблиці видно, що для обчислення наближеного значення інтеграла з точністю $\Delta > 0$ методом подвійного перерахунку треба:

1. Обчислити наближені значення інтеграла I_n та I_{2n} з кроками $h = (b-a)/n$ і $h = (b-a)/(2n)$ відповідно.
2. За формулою (5.23) обчислити наближене значення похибки $|R_{2n}(f)|$ чисельного інтегрування.
3. Порівняти $|R_{2n}(f)|$ з Δ. Якщо $|R_{2n}(f)| < \Delta$, то за формулою (5.24) обчислити уточнене значення інтеграла $I_{n,2n}$ і процес обчислень припинити. Якщо $|R_{2n}(f)| > \Delta$, то відрізок $[a, b]$ поділити на $4n$ рівних частин і обчислити $|R_{4n}(f)|$, яке знову порівняти з Δ. Цей процес послідовного зменшення вдвічі кроку інтегрування продовжують доти, поки на певному кроці не буде виконуватись нерівність

$$|R_{2n}(f)| < \Delta.$$

Такий алгоритм має циклічний характер і легко реалізується на ЕОМ.

Приклад 5.2. Обчислити за формулою трапецій з точністю $\Delta = 0{,}00001$ інтеграл

$$I = \int_0^1 (2x^2 - 3x^2 + 5x + 1)dx.$$

Розв'язання. Щоб забезпечити необхідну точність підінтегральну функцію $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ будемо визначати з точністю 0,000001, тобто шістьма значущими цифрами.

Наближене значення інтеграла обчислюємо за формулою (5.14) при $n = 8,\ h = (b - a)/n = 0{,}125$. В таблиці 5.3 наведено значення аргумента x_k підінтегральної функції y_k та коефіцієнтів квадратурної формули трапецій.

Таблиця 5.3

k	x_k	$y_k = 2x_k^3 - 3x_k^2 + 5x + 1$	α_k		
			$n = 8$	$n = 4$	$n = 2$
0	0,000	1,000000	0,5	0,5	0,5
1	0,125	1,582031	1	0	0
2	0,250	2,093750	1	1	0
3	0,375	2,558593	1	0	0
4	0,500	3,000000	1	1	1
5	0,625	3,441407	1	0	0
6	0,750	3,906250	1	1	0
7	0,875	4,417969	1	0	0
8	1,000	5,000000	0,5	0,5	0,5

У цій же таблиці наведено відповідні значення при $n = 4$ і $n = 2$.

Підставляючи x_k, y_k і α_k у формулу (5.14), знаходимо

$$I_8 = 3{,}000000;\ \ I_4 = 3{,}000000;\ \ I_2 = 3{,}000000.$$

Оскільки одержані результати повністю співпали, то всі значущі цифри правильні.

Такий же результат одержимо при прямому інтегруванні

$$I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 5x + 1)dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = 3.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Григоренко Я.М. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики / Я.М. Григоренко, Н.Д. Панкратова. – К.: Либідь, 1995. – 280 с.
2. Жалдак М.І. Чисельні методи математики / М.І. Жалдак, Ю.С. Рамський. – К.: Радянська школа, 1984. – 206 с.
3. Лященко М.Я. Чисельні методи / М.Я. Лященко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
4. Новіков Л.О. Чисельні та наближені методи прикладної математики. Лекції / Л.О. Новіков, А.Ф. Обшта. – Львів: Львівська політехніка, 1998. – 188 с.
5. Самарський А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / П.Ф. Фильчаков. – К.: Наукова думка, 1972. – 743 с.

Навчальне видання

Сяський Андрій Олексійович
Сяський Володимир Андрійович
Шевцова Наталія Вікторівна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Відповідальний за випуск: к.т.н. Батишкіна Ю.В.

Підписано до друку 26.06.2016 р.

Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman Cyr.

Умовн. друк. арк. 6.0

Тираж 100 прим. Зам № 575/2.

Редакційно-видавничий відділ Рівненського державного гуманітарного університету
33028, м. Рівне, вул. С. Бандери, 12.