

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання
Факультет математики та інформатики

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА

Курс лекцій для здобувачів спеціальності
A4 Середня освіта (Математика)

Рівне 2026

УДК 51-028.31:512(075.8)
Е 50

Елементарна математика. Алгебра. Курс лекцій для здобувачів спеціальності А4 Середня освіта (Математика) / укладач Н. О. Генсіцька-Антонюк. 2026. 200 с.

Укладач:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання.

Рецензенти:

Гоменюк Г. В. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Сяська Н.А. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 5/а від 28.04.2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 4 від 29.04 2026 р.)

ЗМІСТ

Вступ

Лекція 1. Арифметика дійсних чисел.....6

Лекція 2. Одночлени і многочлени та дії над ними...20

Лекція 3. Тотожні перетворення показникових і логарифмічних виразів.....33

Лекція 4. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.....36

Лекція 5. Функції та їх властивості.....56

Лекція 6. Методи розв'язування алгебраїчних рівнянь.....78

Лекція 7. Системи алгебраїчних рівнянь.....99

Лекція 8. Алгебраїчні нерівності та їх системи.....105

Лекція 9. Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності.....123

Лекція 10. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.....143

Список використаної літератури.....199

ВСТУП

Пропонований навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Середня освіта (Математика)» і є базовим для супроводу курсу **«Елементарна математика. Алгебра»**.

Проте головна мета цього посібника — не просто нагадати відомі формули та алгоритми, а допомогти майбутньому вчителю здійснити фахову трансформацію: перейти від позиції «учня, який шукає відповідь», до позиції «педагога, який конструює шлях до неї».

Майбутній вчитель математики має володіти алгебраїчним апаратом на принципово іншому, глибшому рівні. Це означає не лише вміти технічно правильно розв'язувати задачі, але й чітко розуміти логічну структуру методів, бачити зв'язки між вищою та шкільною математикою, вміти строго обґрунтовувати кожен крок, розпізнавати причини появи типових учнівських помилок та знаходити найоптимальніші способи пояснення складних понять.

Саме тому матеріал у посібнику викладається з позиції наукової строгості, але з постійним проєктуванням на методiku викладання у школі.

Структура та зміст посібника

Курс лекцій структуровано за ключовими змістовими лініями шкільної алгебри. Посібник охоплює такі фундаментальні розділи:

- **Числові множини та тотожні перетворення виразів:** логіко-математична база, яка формує культуру обчислень та перетворень.
- **Функції та їх властивості:** глибокий аналіз елементарних функцій як основного інструменту

математичного моделювання, використання графічних методів.

- **Рівняння, нерівності та їх системи:** від раціональних та ірраціональних до трансцендентних (показникових, логарифмічних, тригонометричних). Особливий акцент зроблено на фундаментальному понятті *рівносильності*, причинах втрати коренів або появи сторонніх.

Лекція 1. Арифметика дійсних чисел

План

1. Натуральні числа. Арифметичні дії та їх властивості.
2. Цілі числа та дії над ними.
3. Ділення з остачею.
4. Подільність чисел. Ознаки подільності.
5. Прості та складені числа. НСД і НСК.
6. Звичайні дроби та дії над ними.
7. Скінченні десяткові дроби та дії над ними.
8. Нескінченні періодичні дроби. Перетворення нескінченного періодичного дроби у звичайний.
9. Дійсні числа. Властивості радикала.

1⁰. Числа, які використовуються при лічбі наз. *натуральними* (N). Щоб записати натуральні числа використовуємо десять знаків 0, 1, ... 9, які наз. *цифрами*. Значення цифри в записі числа залежить від того, яке місце вона займає. Якщо цифру переставити на одне місце вліво, її значення збільшується в 10 разів, вправо – зменшується в 10 разів. Тому цей спосіб записування наз. *десятьковою системою числення*. Числа розбивають на класи (одиниць, тисяч, мільйонів, ...), кожен клас містить три розряди (одиниці, десятки, сотні).

На множині натуральних можна виконувати такі дії: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня.

Додаванням натуральних чисел наз. арифметичну дію, за допомогою якої визначають число, що містить стільки одиниць, скільки їх є у кожному з даних чисел.

Числа, які додаються наз. *доданками*, а результат дії – *сумою*.

Відніманням наз. дія, за допомогою якої за даною сумою двох доданків і одним з них знаходиться другий

доданок. Компоненти дії віднімання: *зменшуване, від'ємник*, а результат – *різниця*.

Помножити одне натуральне число на друге – значить взяти перше число доданком стільки разів, скільки одиниць у другому числі.

$$5 \cdot 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$$

Компоненти дії множення: *множник, множник*, а результат – *добуток*.

Властивості дії множення:

- 1) Якщо один з двох множників дорівнює 1, то добуток дорівнює другому множнику.
- 2) Якщо один з двох множників дорівнює 0, то добуток дорівнює нулю.

Діленням наз. дія, за допомогою якої за даним добутком двох натуральних чисел і одним із множників знаходять другий множник. Компоненти дії ділення: *ділене, дільник*, а результат – *частка*.

(Повторити як знаходяться компоненти арифметичних дій, повторити усне і письмове додавання, віднімання, множення і ділення натуральних чисел)

Властивості арифметичних дій:

1. $(\forall a, b \in N) a + b = b + a$ - переставний закон додавання (комутативний);
2. $(\forall a, b, c \in N) a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$ – сполучний закон (асоціативний);
3. $(\forall a, b \in N) a \cdot b = b \cdot a$ - переставний закон множення (комутативний);
4. $(\forall a, b, c \in N) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – розподільний закон (дистрибутивний).

Піднесення до степеня є окремим випадком множення, а саме множення однакових чисел. Запис 5^2

називається степенем, 5 – основа степеня, 2 – показник степеня.

Властивості степеня:

- 1) $a^1 = a$;
- 2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
- 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
- 4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

2⁰. Цілі числа (Z) – це натуральні числа, протилежні їм за знаком і число нуль.

$$\text{Модуль числа } |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля – довжина відрізка від початку відліку.

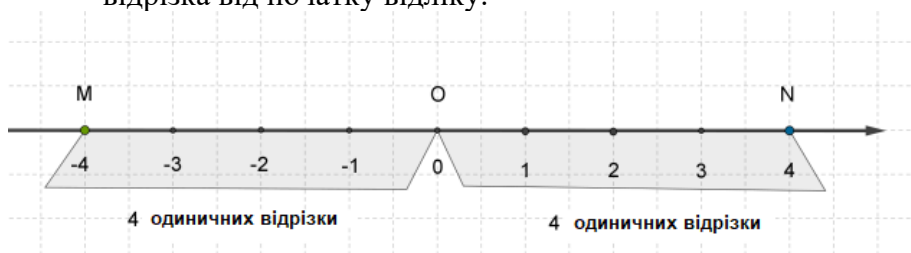


Рис.1

Арифметичні дії з цілими числами

1. Додавання.

Щоб додати два числа з однаковими знаками необхідно модулі цих чисел додати і в результаті поставити їх спільний знак.

$$\text{Напр. } -5 + (-3) = -8$$

Щоб додати два числа з різними знаками необхідно від числа модуль якого більший відняти число модуль якого менший і в результаті поставити знак того числа модуль якого більший.

$$\text{Напр. } -5 + 3 = -2$$

2. Множення.

Щоб помножити два числа (парна кількість множників) з однаковими знаками множимо модулі цих чисел і в результаті отримаємо додатне число. Якщо ж кількість множників непарна, то в результаті отримаємо від'ємне число.

Напр. $-5 \cdot (-3) = 15$

Щоб помножити два числа з різними знаками множимо модулі цих чисел і в результаті отримаємо від'ємне число.

Напр. $5 \cdot (-3) = -15$

3. Ділення аналогічно

Напр. $-15 : (-3) = 5$, $15 : (-3) = -5$.

4. Піднесення до степеня

1) При піднесенні від'ємного числа до парного степеня в результаті отримаємо додатне число.

2) При піднесенні від'ємного числа до непарного степеня в результаті отримаємо від'ємне число.

3) $a^0 = 1$.

4) $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

3⁰. Діленням з *остачею* називається відшукування найбільшого цілого числа, яке у добутку з дільником дає число, що не перевищує діленого. Шукане число наз. *неповною часткою*. Різниця між діленим і добутком дільника на неповну частку називається *остачею*.

Загальне означення ділення: Поділити число a на число b значить знайти таку два числа q (*неповна частка*) і

r (остача), які задовольняють співвідношення $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

4⁰. Число a ділиться на число b , якщо існує таке число c , $a = bc$.

Основні властивості подільності.

- 1) $(\forall a \in N) a : a$ (рефлексивність)
- 2) $(\forall a, b, c \in N) a : b \wedge b : c \Rightarrow a : c$

(транзитивність)

- 3) $(\forall a, b \in N) a : b \wedge b : a \Rightarrow a = b$

(антисиметричність)

- 4) $(\forall a \in N_0) a \neq 0 \Rightarrow 0 : a$
- 5) $(\forall a \in N) a \neq 0$.

Подільність суми.

Достатня умова. Якщо кожен доданок ділиться на деяке число, то і сума ділиться на це число.

Необхідна і достатня умова. Сума двох або кількох доданків ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли на це число ділиться сума остач від ділення кожного доданка на це число.

Подільність різниці.

Достатня умова. Різниця двох чисел ділиться на дане число, якщо зменшуване і від'ємник діляться на це число.

Необхідна і достатня умова. Різниця двох або кількох чисел ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли остачі від ділення на це число зменшуваного і від'ємника рівні між собою.

Подільність добутку.

Достатня умова. Для ділення добутку кількох множників на дане число достатньо, щоб на це число ділився хоча б один множник.

Необхідна і достатня умова. Добуток ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли на це число ділиться добуток остач від ділення кожного із множників на дане число.

Загальна ознака подільності (ознака Паскаля):

Число a запишемо в позиційній системі числення з будь-якою основою g :

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + a_2 \cdot g^2 + a_1 g + a_0$$

Поділимо на b кожну з розрядних одиниць $g^0, g^1, \dots, g^n$. Отримаємо

$$g^0 = bg_0 + r_0$$

$$g^1 = bg_1 + r_1$$

$$\vdots$$

$$g^n = bg_n + r_n,$$

де $g_0, g_1, \dots, g_n$ – неповні частки, $r_0, r_1, \dots, r_n$ – остачі, $0 \leq r_1 \leq g$.

Тоді

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot (bg_n + r_n) + a_{n-1} \cdot (bg_{n-1} + r_{n-1}) + \dots + a_0 \\ &\quad \cdot (bg_0 + r_0) = \\ &= b \cdot (a_n g_n + a_{n-1} g_{n-1} + a_0 g_0) \\ &\quad + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + a_0 r_0). \end{aligned}$$

Отже, $a : b \Leftrightarrow (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + a_0 r_0) : b$.

Тобто, натуральне число a , задане в позиційній системі числення з основою g , ділиться на число b тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків цифр цього числа на остачі, утворені при діленні на b відповідних степенів основи ($g^0, g^1, \dots, g^n$).

Напр. Чи ділиться число 256375 на 11?

Знайдемо ознаку подільності на 11, $g = 10, a : 11 - ?$

$$10^0 = 11g_0 + 1, \quad r_0 = 1$$

$$10^1 = 11g_1 + 10,$$

$$r_1 = 10 \text{ або } r_1 = -1$$

$$10^2 = 11g_2 + 1, \quad r_2 = 1$$

$$10^3 = 11g_3 + 10,$$

$$r_3 = 10 \text{ або } r_3 = -1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot (-1) + \dots =$$

$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1})$$

$$(5+3+5)-(7+6+2)=-2. \text{ Отже, число } 256375 \text{ не ділиться}$$

на 11.

Ознаки подільності на деякі числа:

1. На 2 діляться всі парні числа.
2. На 3 (на 9) діляться числа, сума цифр яких ділиться на 3 (на 9).
3. На 4 (на 25) діляться числа, якщо число складене з двох останніх цифр даного числа ділиться на 4 (на 25).
4. На 5 діляться числа, які закінчуються на 0 або 5.

5. Число ділиться на 11, якщо різниця суми цифр числа, які стоять на парних місцях, і суми цифр, які стоять на непарних місцях, ділиться на 11.

Два числа a і b наз. порівняльні за модулем m , якщо при діленні на m вони дають однакові остачі. Це записують так: $a \equiv b(\text{mod } m)$.

Теорема 1. $a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow (a - b) : m$.

Теорема 2. $a \equiv b(\text{mod } m)$ і $c \equiv d(\text{mod } m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(\text{mod } m), a - c \equiv b - d(\text{mod } m), a \cdot c \equiv b \cdot d(\text{mod } m)$.

Теорема 3. $a \equiv b(\text{mod } m) \Rightarrow a^n \equiv b^n(\text{mod } m)$.

Напр. Довести, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ $(12^{2n+1} + 11^{n+2}) : 133$.

$$12^{2n+1} = 12^{2n} \cdot 12 = 144^n \cdot 12$$

$$11^{n+2} = 11^n \cdot 121$$

$$121 \equiv -12 \pmod{133}$$

$$144 \equiv 11 \pmod{133}$$

$$144^n \equiv 11^n \pmod{133}$$

$$12^{2n+1} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

$$11^{n+2} \equiv 11^n \cdot (-12) \pmod{133}$$

Додамо дві останні рівності, отримаємо:

$$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$$

Отже, $(12^{2n+1} + 11^{n+2}) : 133$.

5⁰. Числа, на які ділиться дане число наз. його *дільниками*.

Всі числа множини натуральних чисел і число 0 можна поділити на 4 класи:

1) число 1, яке ділиться лише саме на себе, тобто має один дільник.

2) числа, які мають 2 дільники, тобто діляться на 1 і самі на себе. Такі числа наз. *простими*.

3) числа, які крім 1 і самого себе мають ще й інші дільники. Такі числа наз. *складеними*.

4) число 0, яке має нескінченну множину дільників.

Основна теорема арифметики

Будь-яке натуральне число, більше 1, може бути розкладене в добуток простих множників. Цей розклад є єдиним, якщо не враховувати порядок слідування множників. Розклад числа на прості множники наз. *канонічним записом числа*.

Напр. Розкласти на прості множники числа 126, 3780, 532950

126	2	3780	2	532950	2
63	3	1890	2	266475	3
31	31	945	3	88825	5
1		315	3	17765	5
		105	3	3553	11
		35	5	323	17
		7	7	19	19
		1		1	

$$123 = 2 \cdot 3 \cdot 31;$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$532950 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19.$$

НСД (a , b) – це найбільше число, на яке ділиться кожне з даних.

НСК (a , b) – це найменше число, яке ділиться на кожне з цих чисел.

Властивості НСД та НСК:

1) кожне спільне кратне даних чисел ділиться на їхнє найменше спільне кратне;

$$2) \quad a : b \Rightarrow \text{НСД}(a, b) = b, \text{НСК}(a, b) =$$

a ;

3) НСД кількох чисел є НСК всіх спільних дільників цих чисел;

$$4) \quad \text{НСД}(a, b) = 1, \text{НСК}(a, b) = a \cdot b;$$

$$5) \quad \text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}(a, b) = a \cdot b.$$

Щоб знайти найбільше спільний дільник двох чисел (кількох), потрібно розкласти їх на прості множники. Добуток спільних множників і є НСД цих чисел.

$$\text{Напр. } 441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \quad 350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$\text{НСД}(441, 350) = 7.$$

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел, потрібно розкласти їх на прості множники. Після цього,

необхідно менше з двох чисел помножити на прості множники більшого яких не має у меншому.

$$\text{Напр. } 441 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7} \cdot 7, \quad 350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$\text{НСК}(441, 350) = \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}_{350} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 22050.$$

Другий спосіб знаходження *найменшого спільного кратного* ґрунтується на зв'язку між НСК і НСД за п'ятою властивістю:

$$\text{НСК}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НСД}(a, b)}$$

Тобто задача знаходження НСК в такий спосіб, зводиться до задачі обчислення найбільшого спільного дільника, для знаходження якого, існує дуже ефективний алгоритм Евкліда- це побудова спадної послідовності чисел, у якій першим елементом є більше з двох даних чисел, другим – менше, третім є остача від ділення першого на друге, четвертим є остача від ділення другого числа на третє і т.д., аж поки не дістанемо ділення без остачі. Дільник при останньому діленні (остання ненульова остача) і буде НСД двох чисел.

Напр. Знайти НСД двох чисел 1432 і 41.

Знайдемо НСД, скориставшись алгоритмом Евкліда. Отримаємо:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1432 \\
 - 123 \\
 \hline
 202 \\
 - 164 \\
 \hline
 38 = r_1 \\
 - 38 \\
 \hline
 3 = r_2 \\
 - 3 \\
 \hline
 4 \\
 - 3 \\
 \hline
 11 \\
 - 11 \\
 \hline
 1 \\
 - 1 \\
 \hline
 0 = r_4
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 41 \\
 - 34 \\
 \hline
 7 \\
 - 7 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Остання ненульова остача дорівнює 1, тому НСД (1432, 41)=1. Далі, знаходимо шукане найменше спільне кратне:

$$\text{НСК}(1432, 41) = \frac{1432 \cdot 41}{\text{НСД}(1432, 41)}.$$

6⁰. Числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$ утворюють множину раціональних чисел (Q).

Символ $\frac{m}{n}$, де m і $n \in N$ наз. дробом, m – чисельник, n – знаменник. Дріб $\frac{m}{n}$ означає, що одна n -на частина одиниці виміру e міститься m разів у відрізку a , тобто одиничний відрізок розділили на n рівних частин і взяли m таких частин. Це записують так: $a = \frac{m}{n} \cdot e$, дріб $\frac{m}{n}$ є мірою довжини відрізка a при одиниці довжини 1.

Основна властивість дробу

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити на те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює (еквівалентний) даному: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$.

Властивості відношення рівності (еквівалентності):

1) Рефлексивність (кожний дріб еквівалентний самому собі)

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad (k = 1)$$

2) Симетричність $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

3) Транзитивність $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ і $\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} =$

$$\frac{e}{f}$$

З означення еквівалентності дробів випливає:

1) якщо у двох еквівалентних дробів знаменника рівні, то і чисельники їх також рівні;

2) якщо у двох еквівалентних дробів чисельники рівні, то і знаменники їх також рівні.

Дріб, чисельник якого менший від знаменника, наз. *правильним*; дріб, чисельник якого більший або дорівнює знаменнику, наз. *неправильним*. Дріб, який містить цілу і дробову частини наз. *мішаним числом*.

Для перетворення неправильного дробу в мішане число необхідно:

1. поділити чисельник дробу на його знаменник;
2. остачу від ділення записати в чисельник, знаменник залишити без змін;
3. результат від ділення записати цілою частиною.

Дріб, чисельник і знаменник якого є взаємопрості числа, тобто НСД цих чисел дорівнює 1, наз. *нескоротним дробом*.

(Самостійно повторити дії з звичайними дробами: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня)

7^0 . *Десятковим дробом* наз. дріб, знаменником якого є 10^n , де $n \in \mathbb{N}$ і який записано в позиційній десятковій системі числення так: записано чисельник і в ньому справа наліво відділено n цифр (десяткових знаків).

Основна властивість десяткового дробу:

Дописування нулів справа дробової частини запису десяткового дробу не змінює його значення.

Правило. Щоб даний десятковий дріб помножити (поділити) на 10^n , треба перенести кому на n цифр вправо (вліво).

(Самостійно повторити дії з десятковими дробами: додавання, віднімання, множення, ділення)

Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом додатного числа a називають його представлення у вигляді $a_0 \cdot 10^m$, де $1 \leq a_0 < 10$, де m — ціле число; число m називають порядком числа a .

Отже, для того, щоб привести число до стандартного вигляду, треба перенести в ньому кому так, щоб вона була відразу після першої значущої цифри, і отримане число помножити на 10^m , де m підбирається так, щоб добуток дорівнював даному числу. Значущою цифрою числа називають його першу (зліва направо) відмінну від нуля цифру, а також всі наступні за нею цифри.

Напр. Записати число 274,35 в стандартному вигляді $274,35 = 2,7435 \cdot 10^2$ (порядок числа дорівнює 2)

Теорема 1. Для того, щоб звичайний нескоротний дріб можна було перетворити у десятковий, необхідно і достатньо, щоб канонічний розклад його знаменника не містив жодних простих множників крім 2 і 5.

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15}{10^2} = 0,15$$

Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, можна його чисельник поділити на знаменник.

Теорема 2. Якщо нескоротний дріб не перетворюється у скінченний десятковий, то його можна записати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

8⁰. Чистим періодичним десятковим дробом наз. періодичний десятковий дріб, у якого період починається відразу після коми.

Чистий періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробу, чисельник якого є період, а знаменник — цифра 9, що записана стільки разів, скільки цифр у періоді.

$$0, (37) = \frac{37}{99}$$

Мішаним періодичним десятковим дробом наз. періодичний десятковий дріб, у якого період починається не відразу після коми.

Для того щоб перетворити мішаний нескінченний періодичний дріб на звичайний, треба від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду. Потім записати цю різницю чисельником, а в знаменнику записати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді, а після дев'яток дописати стільки нулів, скільки цифр стоїть між комою і першим періодом.

$$0,2(18) = \frac{218-2}{990} = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}.$$

9⁰. Нескінченні неперіодичні десяткові дробы утворюють множину ірраціональних чисел. Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел (R).

Властивості множини дійсних чисел:

1) множина дійсних чисел нескінченна, впорядкована, не містить ні найменшого, ні найбільшого числа;

2) у множині R можливі дії додавання, віднімання, множення та ділення (окрім ділення на нуль).

Квадратним коренем з числа a наз. число, квадрат якого дорівнює a .

Додатне значення квадратного кореня наз. арифметичним значенням. « $\sqrt{}$ » - знак квадратного кореня або радикал. Число чи вираз, який стоїть під радикалом наз. *підкореновим числом або підкореновим виразом*. Квадратний корінь з від'ємного числа на множині дійсних чисел не існує.

Основна властивість радикала:

Значення радикала не зміниться, якщо показник кореня і показник підкоренового виразу помножити на одне й те саме число, тобто

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}$$

Наслідки:

1) радикали різних степенів можна звести до однакових показників

$$\sqrt{ax} \text{ і } \sqrt[3]{a^2} \\ \sqrt[6]{(ax)^3} \text{ і } \sqrt[3]{a^2}$$

2) Якщо підкореневий вираз є степенем, показник якого мав спільний множник з показником радикала, то на цей множник можна поділити обидва показники, тобто

$$\sqrt[m \cdot p]{|a^{n \cdot p}|} = \sqrt[m]{|a^n|}$$

3) Якщо підкореневий вираз є добутком кількох степенів, показники яких мають один і той самий множник з показником радикала, то на цей множник можна поділити всі показники.

$$\text{Напр. } \sqrt[4]{(3-x)^4} = |3-x|,$$

$$\text{якщо } x > 3, \text{ то } |3-x| = -(3-x) = x-3,$$

$$\text{якщо } x \leq 3, \text{ то } |3-x| = 3-x.$$

$$4) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$5) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$6) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Лекція 2. Одночлени і многочлени та дії над ними

План

1. Одночлени та дії над ними.
2. Многочлени та дії над ними.
3. Розклад многочлена на множники.

1⁰. Одночленом називається алгебраїчний вираз, що є добутком чисел, змінних та їх степенів називається одночленом.

Вирази $6 \cdot a \cdot y$; $0,25x^3$; $abbc$; $8,43$; $16c \cdot (-\frac{1}{2})d$; $38x^2y$

також є одночленами. При записі одночленів між числами та змінними знак множення не ставиться:

$(6 \cdot a \cdot y = 6ay)$.

Одночленом також вважається:

— одна змінна, наприклад, x , бо $x = 1 \cdot x$;

— число, наприклад, 3 , бо $3 = 3 \cdot x^0$ (одне число також є одночленом).

Деякі одночлени можна спростити. Спростимо одночлен $6xy^2 \cdot (-2)x^3y$, використовуючи властивість множення степенів:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$6xy^2 \cdot (-2)x^3y = 6 \cdot (-2)xx^3y^2y = -12x^4y^3$$

(числа перемножуються, а показники степенів з однаковими основами додаються).

Стандартний вигляд одночлена

Якщо в одночлені першим записаний числовий множник, а добуток однакових степенів змінних записано у вигляді одного степеня, то такий вигляд одночлена називають стандартним виглядом. Одночлен записаний у стандартному вигляді, якщо:

— добуток однакових змінних записано у вигляді степеня;

— числовий множник або коефіцієнт одночлена записаний першим множником в одночлені.

Стандартним виглядом одночлена $10 \cdot \frac{1}{2} abbb$ є $\frac{10 \cdot 1}{2} abbb = 5 \cdot 1ab^3 = 5ab^3$.

Числовий множник одночлена, записаного у стандартному вигляді, називається коефіцієнтом одночлена (коефіцієнти перемножуються між собою, змінні

— між собою). Коефіцієнт днчлена $5ab^3$ дорівнює 5, коефіцієнт одночлена $-12x^4y^3$ дорівнює -12 .

Коефіцієнти 1 і -1 зазвичай не записуються.

$$1a^2y = a^2y, \quad -1x^3 = -x^3$$

Степенем одночлена називається сума показників степенів усіх його змінних.

Щоб визначити степінь одночлена, потрібно додати показники степенів усіх змінних (букв).

$-12x^4y^3$ — одночлен сьомого степеня ($4+3=7$);

$6a$ — одночленом першого степеня (змінна a першого степеня);

7 — одночленом нульового степеня.

Подібні одночлени

Одночлени, у яких однакові буквені частини, тобто буквені частини є тотожно рівними виразами, називаються подібними одночленами.

Подібними одночленами є $3x^2y$ і $4x^2y$; $3bab$ і $2ab^2$; $6xy$ і xy ; 5 і -3 .

Подібними одночленами не є x^2y і xy^2 .

Якщо в подібних одночленів рівні коефіцієнти, вони називаються рівними (однаковими) одночленами. З одночленів $8xy^3$; xy^3 ; $8y^3x$; $2 \cdot 4xyuu$; $8x^3y$ рівними є $8xy^3$; $8y^3x$; $2 \cdot 4xyuu$. У цьому можна переконатися, записавши одночлени в стандартному вигляді.

Якщо в подібних одночленів коефіцієнти є протилежними числами, одночлени називаються протилежними. Серед одночленів $3ac$; $-9ab$; $-3ac$; abc ; $9ba$ протилежними є $3ac$ та $-3ac$; $9ba$ та $-9ba$.

Дії над одночленами

1) Множення одночленів

Щоб помножити однечлен на одночлен, потрібно перемножити їх коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами.

2) Піднесення одночленів до степеня

Щоб піднести одночлен до степеня, потрібно піднести його коефіцієнт до цього степеня і помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого підноситься одночлен.

2⁰. Многочленом називається сума декількох одночленів. Одночлени, з яких складається многочлен, називаються його членами.

Наприклад: $3xy + ab + 2; 172b - 2xy + a$

Подібні члени многочлена можна об'єднати в один член, подібних до них, коефіцієнтом, який подівиноє алгебраїчний сумі коефіцієнтів членів, що об'єднуються; така їх заміна називається зведенням подібних членів (доданків).

Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, із яких складається многочлен. Степенем довільного многочлена називають степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Дії над многочленами

1. Додавання і віднімання многочленів

Сумою (різницею) двох многочленів називається многочлен, коефіцієнти якого є сумою (різницею) коефіцієнтів при подібних членах цих множників.

При додаванні (відніманні) многочленів використовуються *правила розкривання дужок*:

- 1) якщо перед дужками стоїть знак «+», то многочлен можна записати без дужок, зберігши всі знаки перед його одночленами;

Наприклад: $(3x^2 - 2x + 5) + (6x^2 + 5x - 3) = 3x^2 - 2x + 5 + 6x^2 + 5x - 3 = 9x^2 + 3x + 2$.

- 2) якщо перед дужками стоїть знак «-», то многочлен можна записати без дужок,

помінявши знаки перед кожним його
одночленом.

Наприклад: $(2x^2 - 3x + 2) - (3x^2 - 2x - 1) - (-x^2 + 2x + 1) + (-2x^2 + x - 1) =$
 $= 2x^2 - 3x + 2 - 3x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x - 1 - 2x^2 + x - 1 = -2x^2 - 2x + 1.$

Однією із важливих дій в алгебрі є дія ділення многочленів.

Розглянемо ділення многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x^1 + a_0$ на многочлен $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + b_1 x^1 + b_0$, де n, m — натуральні числа. Ділення можливе, якщо степінь многочлена-діленого $P_n(x)$ не менший за степінь многочлена-дільника $Q_m(x)$, тобто коли $n \geq m$ і $Q_m(x)$ — не нуль-многочлен.

Поділити многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ ($n \geq m$) — означає знайти два таких многочлени $S_{n-m}(x)$ і $R_k(x)$ щоб

$$P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x) \quad (1)$$

При цьому многочлен $S_{n-m}(x)$ степеня $n - m$ називають *многочленом-часткою*,

$R_k(x)$ — *многочленом-остачею*.

Якщо дільник $Q_m(x)$ — не нуль-многочлен, то ділення $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ ($n \geq m$) завжди виконуване, а частка і остача визначаються остаточно.

У тому разі, коли $R_k(x) = 0$ при всіх x , тобто $P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x)$ кажуть, що многочлен $P_n(x)$ ділиться (або націло ділиться) на многочлен $Q_m(x)$.

Для ділення многочлена, що залежить від однієї змінної x , на многочлен меншого степеня використовують такий алгоритм *ділення стовпчиком*:

1. Розмістити доданки в многочленах у порядку спадання степеня змінної.

2. Поділити перший доданок діленого многочлена на перший доданок дільника і результат написати в частку.

3. Помножити результат на дільник і відняти його від діленого.

4. Виконати зі здобутим після віднімання многочленом дії згідно з п. 2 і 3.

Повторювати зазначені операції доти, доки після віднімання не дістанемо або нуль, або многочлен степеня, меншого, ніж у дільника. Цей многочлен називається *остачею*.

Приклад. Виконати ділення многочленів:

$$(12x^2 - 5x - 7x^3 + 3 + 3x^4) : (3 + x^2 - 2x).$$

• 1. Розмістимо доданки в многочленах у порядку спадання степенів змінної x :

$$12x^2 - 5x - 7x^3 + 3 + 3x^4 = 3x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 5x + 3 \text{ —}$$

ділене;

$$3 + x^2 - 2x = x^2 - 2x + 3 \text{ — дільник.}$$

2. Поділимо перший член діленого $3x^4$ на перший член дільника x^2 . У результаті знайдемо перший член частки $3x^2$.

3. Помножимо $3x^2$ на дільник і здобутий результат $3x^4 - 6x^3 + 9x^2$ віднімемо від діленого. Дістанемо $-x^3 + 3x^2 - 5x + 3$.

4. Поділимо перший член результату $-x^3$ на перший член дільника x^2 і знайдемо $-x$ — другий член частки.

5. Помножимо другий член частки на дільник і знайдений добуток $-x^3 + 2x^2 - 3x$ віднімемо від результату п.

3. Дістанемо $x^2 - 2x + 3$.

6. Поділимо результат $x^2 - 2x + 3$ на дільник $x^2 - 2x + 3$. Дістанемо 1 — третій член частки. Остача від ділення дорівнює 0.

Запишемо ділення у вигляді:

$$\begin{array}{r}
 - 3x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 3 \\
 - \quad 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 \quad \quad 3x^2 - x + 1 \\
 \hline
 - x^3 + 3x^2 - 5x + 3 \\
 - \quad - x^3 + 2x^2 - 3x \\
 \hline
 x^2 - 2x + 3 \\
 - \quad - x^2 - 2x + 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Отже, дістали відповідь: $3x^2 - x + 1$.

Наприклад. Алгоритм ділення многочленів:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 16x^2 - 12x + 3 & 3x^2 - 14x + 15 \\
 \underline{6x^3 - 28x^2 + 30x} & \\
 12x^2 - 42x + 3 & \\
 \underline{12x^2 - 56x + 60} & \\
 14x - 57 & \text{(многочлен -остача)}
 \end{array}$$

Отже, згідно з (1) можемо записати:

$$6x^3 - 16x^2 - 12x + 3 = (3x^2 - 14x + 15)(2x + 4) + (14x - 57).$$

Розглянемо ділення з остачею многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$, де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — задані числа, на двочлен $(x - c)$.

Згідно з (1) дістаємо: $P_n(x) = (x - c)S_{n-1}(x) + R$ (2),

де $S_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$ — частка; R — остача. Оскільки степінь многочлена-остачі має бути меншим за степінь многочлена-дільника

$x - c$ тобто менший на одиницю, то остача R — деяке число.

Знайдемо коефіцієнти $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ частки $S_{n-1}(x)$.

Рівність (2) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\
 = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + R
 \end{aligned}$$

і виконаємо множення у правій частині:

$$\begin{array}{r}
 \times \frac{b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0}{x - c} \\
 + \frac{b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \dots + b_1x^2 + b_0x}{-cb_{n-1}x^{n-1} - \dots - cb_1x - cb_0} \\
 \hline
 b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \dots + (b_0 - cb_1)x - cb_0.
 \end{array}$$

Сума здобутого многочлена і остачі R має тотожно дорівнювати многочлену $P_n(x)$.

Два многочлени, одного й того самого степеня відносно змінної x , задані у стандартному вигляді, вважають *рівними між собою*, коли тотожно рівні коефіцієнти їх подібних членів. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x здобутого многочлена і многочлена $P_n(x)$ маємо:

$$\begin{aligned}
 b_{n-1} &= a_n, \quad b_{n-2} - cb_{n-1} = a_{n-1}, \quad b_{n-3} - cb_{n-2} = a_{n-2}, \\
 \dots, \quad b_0 - cb_1 &= a_1, \quad R - cb_0 = a_0.
 \end{aligned}$$

Звідси послідовно знаходимо коефіцієнти многочлена $S_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
 b_{n-1} &= a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \quad b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2}, \\
 \dots, \quad R &= a_0 + cb_0.
 \end{aligned}$$

Щоб знайти коефіцієнти многочлена-частки $S_{n-1}(x)$, зручно скористатися методом, який називають *схемою Горнера*. Цей метод полягає ось у чому.

У верхньому рядку записують послідовно всі коефіцієнти многочлена-діленого. У нижньому рядку на одну позицію ліворуч від a_n записують число c . Заповнюючи нижній рядок, ураховують, що старший коефіцієнт многочлена-частки дорівнює старшому коефіцієнту многочлена-діленого, а тому під старшим коефіцієнтом многочлена-діленого записують цей самий коефіцієнт. Кожне наступне число нижнього рядка знаходять додаванням до відповідного коефіцієнта

верхнього рядка добутку попереднього числа нижнього рядка і числа c . В останній позиції нижнього рядка під вільним членом многочлена-діленого дістаємо остачу. Усі числа нижнього рядка, крім числа c , є коефіцієнтами многочлена-частки.

У розглядуваному випадку ділення многочлена $P_n(x)$ на $(x - c)$ схема Горнера матиме такий вигляд:

Таблиця 1

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$	...	$b_0 = a_1 + cb_1$	$R = a_0 + cb_0$

Наприклад. Знайти частку і остачу при діленні многочлена

$$6x^3 - 16x^2 - 12x + 3 \text{ на двочлен } x + 2.$$

Складемо схему Горнера (тут $c = -2$):

Таблиця 2

	6	- 16	- 12	3
- 2	<u>6</u>	$-16 + 6 \cdot (-2)$ <u>$= -28$</u>	$-12 + (-28) \cdot (-2)$ <u>$= 44$</u>	$3 + 44 \cdot (-2) =$ <u>-85</u>

Маємо, числа 6, -28 і 44 — шукані коефіцієнти частки. Отже, частка подається у вигляді $6x^2 - 28x + 44$ а остача дорівнює -85.

Розглянемо теорему, яка дає змогу знаходити остачу R від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - c$ не виконуючи самого ділення.

Теорема Безу

Теорема (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x^1 + a_0$ на двочлен $x - c$ дорівнює значенню многочлена при $x = c$ тобто $R = P_n(c)$.

Справді виконавши ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - c$ дістанемо (згідно з (2)) $P_n(x) = (x - c)S_{n-1}(x) + R$ де остача R — деяке число.

Вважаючи $x = c$ маємо $P_n(c) = (c - c)S_{n-1}(c) + R = 0 \cdot S_{n-1}(c) + R = R$. Таким чином, $R = P_n(c)$.

Наприклад. Знайти остачу від ділення многочлена $2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ на двочлен $x + 2$.

Для знаходження остачі R обчислимо значення многочлена при $x = -2$

$P_3(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 3$. Шукана остача $R = 3$.

Зауваження. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $(ax + b, a \neq 0)$ дорівнює $P_n - \frac{b}{a}$.

Наслідок. Для подільності многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - c$ необхідно і достатньо, щоб число c було коренем многочлена $P_n(x)$.

Покажемо, що коли многочлен $P_n(x)$ ділиться на $x - c$, то $x = c$ — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто що умова необхідна. Справді, якщо $P_n(x)$ ділиться на $x - c$, то остача $R = 0$. Водночас (за теоремою Безу), $R = P_n(c)$. Отже, $P_n(c) = 0$, а це означає (за означенням), що $x = c$ — корінь многочлена $P_n(x)$. Умова достатня, оскільки якщо $x = c$ — корінь многочлена $P_n(x)$, то (за означенням) $P_n(c) = 0$.

Водночас (за теоремою Безу) $P_n(c) = R$. Отже, $R = 0$, тобто $P_n(x)$ ділиться на $x - c$.

З **теорему Безу** випливають і інші наслідки. Сформулюємо їх без доведення.

1. Якщо $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — різні корені многочлена $P_n(x)$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться на добуток $(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$.

2. Якщо $P_n(x) \neq 0$, то кількість різних коренів многочлена $P_n(x)$ не перевищує його степеня.

3. Якщо $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — усі корені многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x^1 + a_0$, то $P_n(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$.

4. Многочлен $P_n(x) = x^n - a^n$ ділиться на двочлен $x - a$ при будь-якому натуральному n .

5. Многочлен $P_n(x) = x^n - a^n$ ділиться на двочлен $x + a$ при будь-якому парному n .

6. Многочлен $P_n(x) = x^n + a^n$ ділиться на двочлен $x + a$ при будь-якому непарному n .

Многочлен зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, називають *зведеним многочленом*.

Для знаходження коренів многочленів можна скористатися такими теоремами.

Теорема (про дробові корені). *Зведений многочлен із цілими коефіцієнтами не може мати дробових раціональних коренів.*

Теорема (про цілі корені). *Кожний цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником вільного члена.*

Наприклад. Знайти корені многочлена $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$.

Спочатку спробуємо знайти цілі корені цього многочлена. Згідно з теоремою про цілі корені такими коренями можуть бути лише дільники вільного члена, тобто числа 1 і -1 . Дослідимо число $P_3(-1) = 6(-1)^3 - 11(-1)^2 + 6(-1) - 1 = -24 \neq 0$. Таким чином, число -1 не є коренем многочлена. Дослідивши число 1, дістанемо $P_3(1) = 0$, а отже, число 1 — цілий корінь многочлена. Згідно з наслідком із теореми Безу даний многочлен

ділиться на двочлен $x - 1$. Визначимо частку від ділення даного многочлена на $x - 1$. Коефіцієнти частки знайдемо за схемою Горнера:

Таблиця 3

	6	-11	6	-1
1	6	-5	1	0

Отже, при діленні $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$ на $x - 1$ отримаємо многочлен $6x^2 - 5x + 1$ (За дискримінантом знайдемо $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$). За наслідком 3 теореми Безу. Як бачимо многочлен має три корені $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

3⁰. Розкласти многочлен на множники – це означає, подати його у вигляді добутку двох або більше многочленів $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x^1 + a_0 = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$.

Методи розкладання многочленів на множники:

1. Метод винесення спільного множника за дужки

$$\text{Напр. } 10a^4b^3 - 15a^6b = 5a^4b(2b^2 - 3a^2)$$

2. Метод групування

$$a + 3b + a^2 + 3ab = (a + 3b) + a(a + 3b) = (a + 3b)(1 + a)$$

3. Метод використання формул скороченого множення

$$\begin{aligned} a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2 \\ a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 &= (a \pm b)^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

Напр. Розкласти на множники:

$$1) \quad 16x^2 - 9.$$

Скористаємося формулою різниці квадратів:

$$16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x - 3)(4x + 3)$$

$$2) \quad 27a^3 - 8b^3.$$

Скористаємося формулою різниці кубів:

$$\begin{aligned} 27a^3 - 8b^3 &= (3a)^3 - (2b)^3 = (3a - 2b)((3a)^2 + 3a \cdot 2b + (2b)^2) = (3a - 2b)((3a)^2 + \underbrace{6ab + 6ab}_{12ab} + (2b)^2 - 6ab) = (3a - 2b)((3a + 2b)^2 - 6ab) = \\ &= (3a - 2b)((3a + 2b) - \sqrt{6ab})(3a + 2b + \sqrt{6ab}). \end{aligned}$$

4. Метод виділення повного квадрата

Виділення повного квадрата — це таке тотожне перетворення, у якому заданий тричлен записується у вигляді $(a \pm b)^2$ — суми або різниці квадрата двочлена та деякого числового або буквеного виразу.

Напр. Розкласти многочлен на множники $x^2 + 14x + 45$

Розкладемо многочлен на множники методом виділення повного квадрата.

Додамо й віднімемо від многочлена $x^2 + 14x + 45$ число 4, щоб виділити повний квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + 14x + 45 + 4 - 4 &= (x^2 + 14x + 49) - 4 = (x + 7)^2 - 4 \\ &= (x + 7)^2 - 2^2 \end{aligned}$$

Застосуємо формулу різниці квадратів $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$:

$$(x + 7)^2 - 2^2 = (x + 7 - 2)(x + 7 + 2) = (x + 5)(x + 9).$$

5. Метод використання теореми Безу (див. попередній пункт плану)

Лекція 3. Тотожні перетворення показникових і логарифмічних виразів

План

1. Степінь. Властивості степенів з дійсними показниками.

2. Логарифм та його властивості.

1⁰. *Степінь. Властивості степенів з дійсними показниками*

Означення

$$1) \quad a^1 = a, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n -$$

натуральне число; a – будь-яке дійсне число.

$$2) \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n -$$

натуральне число.

$$3) \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m - \text{ціле число}, \quad n \geq 2, \\ a > 0.$$

Властивості степенів з дійсним показником

($a > 0, \quad b > 0, \quad x, y$ – Дійсні числа)

$$1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$2) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3) \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x;$$

$$4) \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x;$$

$$5) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$6) \quad a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

2⁰. *Логарифм та його властивості*

Знаходження логарифма числа – це дія, обернена до піднесення числа до степеня.

Означення. Логарифмом числа b ($b > 0$) за основою a ($a > 0, a \neq 1$) називається такий показник степеня c , до якого потрібно піднести основу a , щоб отримати b : $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$. Звідси, $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0$).

Властивості логарифмів

($a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y > 0$)

$$1. \quad \log_a 1 = 0;$$

$$2. \quad \log_a a = 1;$$

$$3. \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y);$$

Доведення. За основною логарифмічною тотожністю маємо: $a^{\log_a x} = x$, $a^{\log_a y} = y$. Знайдемо добуток цих функцій

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a (x \cdot y)} \Rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y). \text{ Доведено.}$$

$$4. \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y};$$

$$5. \quad \log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}, \quad x \neq 1;$$

$$6. \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \quad x \neq 1;$$

$$7. \quad \log_a (x^k) = k \cdot \log_a x, \quad \text{де } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$8. \quad \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x, \quad \text{де } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Перетворення логарифмічних виразів:

- 1) логарифмування;
- 2) потенціювання;
- 3) обчислення значення виразів;
- 4) тотожні перетворення виразів;
- 5) порівняння логарифмічних виразів;
- 6) доведення тотожностей.

Властивості логарифмування

$(a > 0, \quad a \neq 1)$

1. Сума і різниця не логарифмуються.
2. $\log_a (x \cdot y) = \begin{cases} \log_a x + \log_a y, & x > 0, \quad y > 0, \\ \log_a (-x) + \log_a (-y), & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \begin{cases} \log_a x - \log_a y, & x > 0, \quad y > 0, \\ \log_a (-x) - \log_a (-y), & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$
4. $\log_a (x^{2n}) = 2n \cdot \log_a |x|, \quad n \in \mathbb{N}.$
5. $\log_a (x^{2n+1}) = (2n+1) \cdot \log_a x, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $\log_a x = \log_{a^n} (x^n), \quad x > 0, \quad n \neq 0.$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad b > 0, \quad b \neq 0, \quad x > 0.$
8. $k = \log_a (a^k), \quad \text{де } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Приклад 1. Обчислити $\log_{100} 40$, якщо $\log_2 5 = a$.

$$\begin{aligned}
 \log_{100} 40 &= \frac{1}{2} \log_{10} (8 \cdot 5) = \frac{1}{2} (\lg 8 + \lg 5) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\log_2 8}{\log_2 10} + \frac{\log_2 5}{\log_2 10} \right) = \frac{1}{2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{3 \log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 (2 \cdot 5)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 + a}{1 + a} \right) = \frac{3 + a}{2(1 + a)}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити

$$\begin{aligned}
 &\frac{81^{1/\log_5 9} + 3^{1/\log_{\sqrt{6}} 3}}{409} \left((\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6} \right). \\
 &\frac{81^{1/\log_5 9} + 3^{1/\log_{\sqrt{6}} 3}}{409} \left((\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6} \right) = \\
 &= \frac{81^{\log_9 5} + 3^{3 \log_3 \sqrt{6}}}{409} \left(7^{\frac{1}{2} \cdot 2 \log_7 25} - 5^{\frac{3}{2} \log_5 6} \right) = \\
 &= \frac{(9^{\log_9 5})^2 + (\sqrt{6})^3}{409} \cdot \left(25 - 6^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= \frac{\left(25 + 6^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(25 - 6^{\frac{3}{2}} \right)}{409} = \frac{625 - 216}{409} = 1.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити

$$\log_3 2 \log_4 3 \log_5 4 \log_6 5 \log_7 6 \log_8 7.$$

$$\begin{aligned}
 \log_3 2 \log_4 3 \log_5 4 \log_6 5 \log_7 6 \log_8 7 &= \frac{\log_3 2}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_5 4}{\log_5 6} \\
 &\quad \cdot \frac{\log_7 6}{\log_7 8} = \log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6 = \frac{\log_4 2}{\log_4 6} \\
 &\quad \cdot \log_8 6 = \\
 &= \log_6 2 \\
 &\quad \cdot \log_8 6 = \log_6 2 \cdot \frac{1}{3} \log_2 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_6 2}{\log_6 2} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Лекція 4. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

План.

1. Радіанна міра кутів та залежність між градусною. і радіанною мірами кутів.
2. Означення тригонометричних функцій будь-якого аргументу та знаки тригонометричних функцій.
3. Побудова кута за значенням тригонометричної функції. Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів.
4. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж кута.
5. Парність та періодичність тригонометричних функцій.
6. Формули зведення.
7. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.

1⁰. Радіанна міра кутів та залежність між градусною і радіанною мірами кутів

В геометрії, кут — це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що мають спільний початок. Встановимо інший погляд на кут як алгебраїчну величину.

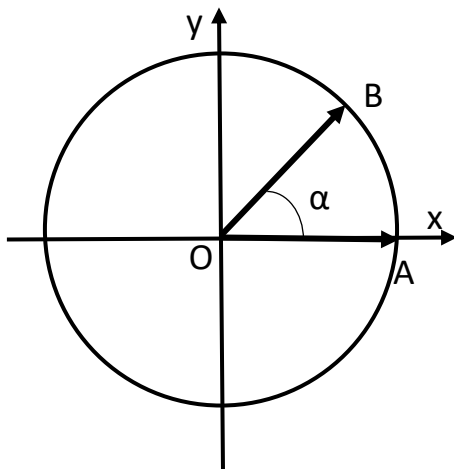


Рис.3

Нехай $\overrightarrow{OB}$ радіус-вектор, який обертається по колу. Точка О – початок координат і початок радіус-вектора. Точка В – кінець радіус-вектора і є точкою, що належить колу. $\angle AOB = \alpha$ – це додатний кут, який утворюється внаслідок обертання по колу проти годинникової стрілки, тоді від'ємним кутом будемо називати кут, який утворюється внаслідок обертання за годинниковою стрілкою.

Деякому положенню радіус-вектора буде відповідати безліч кутів, які можна задати формулою $\beta = \alpha + 360^\circ n$, де $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Радіанна міра кута – це деяке число a , що дорівнює відношенню довжини дуги кола, яка відповідає деякому центральному куту, до радіуса цього кола $\frac{l}{r} = a$.

Центральний кут, величина якого дорівнює довжині радіуса називається радіаном. Тобто, якщо $l = r$, то $a=1$ радіан.

Кут, заданий у радіанній мірі можна перевести у градусну і навпаки. Куту 1° відповідає дуга кола довжиною $\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{\pi r}{180^\circ}$, тоді куту α° - дуга довжиною $l = \frac{\pi r}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$. Якщо $\frac{l}{r} = a$, то $a = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$ або $\alpha^\circ = \frac{\pi a}{180^\circ}$. Отже, на один радіан припадає $\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3,14159\dots} = 57^\circ 18'$.

2⁰. Означення тригонометричних функцій будь-якого аргументу та знаки тригонометричних функцій

Синусом кута α називається відношення ординати вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ до довжини самого вектора $\vec{r}$: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

Косинусом кута α називається відношення абсциси вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ до довжини самого вектора $\vec{r}$: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ до довжини його абсциси: $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом кута α називається відношення абсциси вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ до довжини його ординати: $ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

Введемо поняття допоміжних тригонометричних величин, які широко використовуються в астрономії.

Обернена величина до косинуса називається секансом кута α : $seca = \frac{1}{\cos\alpha}$. Обернена величина до синуса називається косекансом кута α : $coseca = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Якщо кут α змінюється і синус, косинус, тангенс, котангенс змінюються, то координати вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ теж змінюються, тоді і $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$ теж будуть змінюватись.

Одиничне коло осями координат поділяється на чотири чверті (квадранти). При повному оберті радіуса-вектора $\vec{r}$ кут α змінюється від 0 до 2π . Тригонометричні функції у кожній чверті мають свої знаки.

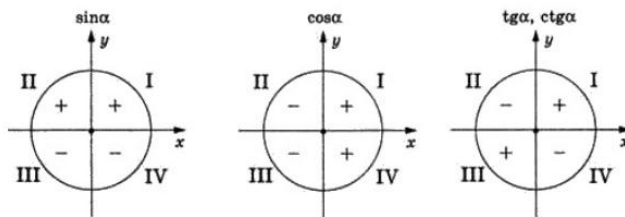


Рис.4

Змінна тригонометричних функцій при зміні кута α у межах першого кола

Зміна синуса

Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha$ зростає від 0 до 1;

Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha$ спадає від 1 до 0;

Якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha$ спадає від 0 до (-1);

Якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha$ спадає від (-1) до 0.

Зміна косинуса

Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha$ зростає від 1 до 0;

Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha$ спадає від 0 до -1;

Якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha$ спадає від -1 до 0;

Якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\cos \alpha$ спадає від 0 до 1.

Зміна тангенса

За означенням $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$. Для будь-якого кута α знайдемо на деякій осі відрізок, алгебраїчна величина якого дорівнює $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$.

Розглянемо $\triangle OBB_1$ та $\triangle ONA$: $\triangle OBB_1 \sim \triangle ONA$ за двома кутами. З означення $\frac{BB_1}{OB_1} = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{NA}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$ випливає $\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{NA}{OA}$.

Оскільки $OA = 1$, то $NA = \frac{BB_1}{OB_1} = \operatorname{tg} \alpha$.

Отже, відрізок алгебраїчна величина якого дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$, визначається на осі тангенсів (дотична кола в точці (1;0)).

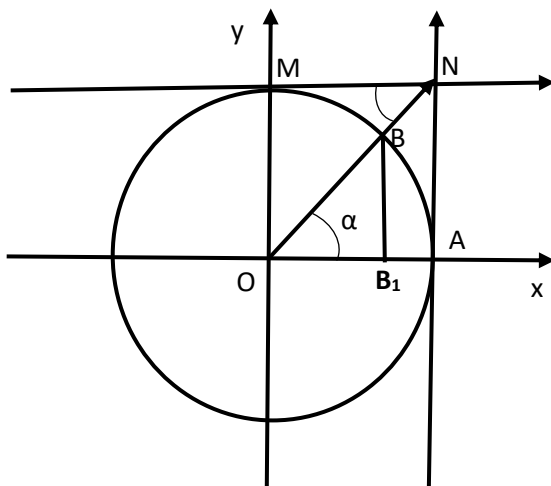


Рис.5

Зміна котангенса

За означенням $ctg\alpha = \frac{x}{y}$. Для будь-якого кута α знайдемо на деякій осі відрізок, алгебраїчна величина якого дорівнює $\frac{x}{y} = ctg\alpha$.

Розглянемо $\triangle OBB_1$ та $\triangle ONM$: $\triangle OBB_1 \sim \triangle ONM$ за двома кутами. З означення $\frac{OB_1}{BB_1} = tg\alpha$, $\frac{NM}{OM} = tg\alpha$ випливає $\frac{OB_1}{BB_1} = \frac{NM}{OM}$.

Оскільки $OM = 1$, то $NM = \frac{OB_1}{BB_1} = ctg\alpha$.

Отже, відрізок алгебраїчна величина якого дорівнює $ctg\alpha$, визначається на осі котангенсів (дотична кола в точці $(0;1)$).

3⁰. Побудова кута за значенням тригонометричної функції. Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

Необхідно побудувати кути α і α_1 , якщо $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Радіус кола $OM=1$ поділимо на три рівні частини і візьмемо таких дві частини та на відстані $\frac{2}{3}$ від точки O будуємо пряму, паралельну осі OX . Ця пряма перетне коло в точках B і B_1 . Таким чином, $\angle BOA = \alpha$, а $\angle B_1OA = \alpha_1$.

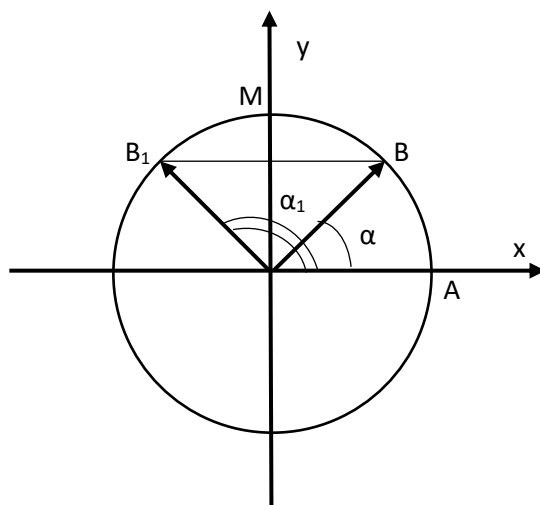


Рис.6

Таблиця 4

α	0°	0°	45°	60°	0°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			1	
$\cos \alpha$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$		1		
$\operatorname{tg} \alpha$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$				
$\operatorname{ctg} \alpha$		$\sqrt{3}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$				

Якщо $\alpha = 30^\circ$, то радіус-вектор $\overrightarrow{OB}$ одиничного кола утворює 30° з віссю OX ; координати x і y додатні й утворюють катети прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1. Отже, за теоремою Піфагора

$x^2 + y^2 = 1$. Навпроти кута 30° лежить катет у два рази менший за гіпотенузу, тоді $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Якщо $y = \frac{1}{2}$, то $x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідси

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4⁰. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж кута

Нехай α – будь-який кут, утворений при повороті радіус-вектора

$$\vec{r} = \{x; y\}, \text{ тоді } \sin \alpha = \frac{y}{r}; \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad (1).$$

Підносячи до квадрата рівності (1) і їх додавши, отримаємо:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} (2). \quad \text{Оскільки } x^2 + y^2 = r^2, \text{ то } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (3).$$

Так як $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4)$. Аналогічно

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (5).$$

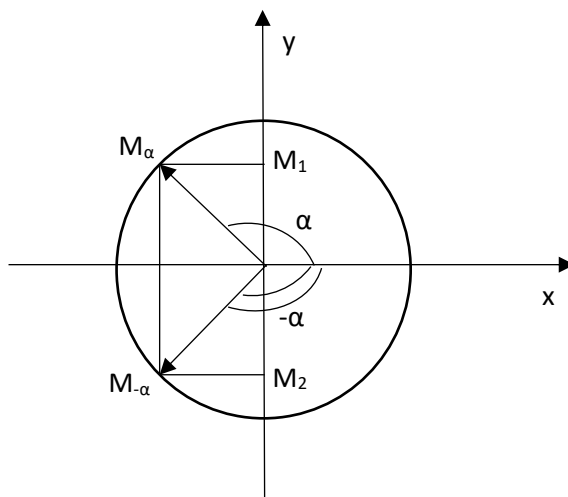
Помножимо тотожність (4) на (5): $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$ або $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad (6)$.

Якщо поділити рівність (3) спочатку на $\cos^2 x$, а потім на $\sin^2 x$, то отримаємо такі рівності:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (9) \text{ та}$$

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (10) \quad [8].$$

Зведення тригонометричних функцій від'ємного аргументу (кута) до функцій додатного аргументу



Нехай вектор $\overrightarrow{OM_\alpha}$ утворює з віссю OX кут α ; вектор $\overrightarrow{OM_{-\alpha}}$ – кут $(-\alpha)$. Тоді $\sin \alpha = OM_1$; $\sin(-\alpha) = OM_2$. За модулем (абсолютною величиною) проекції OM_1 та OM_2 рівні між собою, тому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Точки M_α та $M_{-\alpha}$ симетричні відносно OX , тому проекції векторів $\overrightarrow{OM_\alpha}$ і $\overrightarrow{OM_{-\alpha}}$ на вісь OX співпадають, тому $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= \\ \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} &= \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

5⁰. Парність та періодичність тригонометричних функцій

Функція називається **парною**, якщо виконується рівність: $f(-x) = f(x)$ для всіх x з області її визначення. Функція називається **непарною**, якщо виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$ для всіх x з області її визначення.

Оскільки $\cos(-x) = \cos x$, то функція $\cos x$ є парною функцією, а $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ – непарними функціями, тому що $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Отже, найменше додатне число, додавання (віднімання) до аргументу функції не змінює її значення, наз. **періодом функції** (T – період функції).

Всі тригонометричні функції періодичні. Період синуса, косинуса дорівнює 2π , період тангенса, котангенса – π . Отже, $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 1. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f , причому $T_1 + T_2$ є також періодом функції f .

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$: $f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2))$; $f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2))$. Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x + (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Отже, $T_1 + T_2$ є періодом функції f .

Теорема 2. Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$:

$$f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$f(kx + b) = f((kx + b) - T) = f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right)$$

Звідси для будь-якого $x \in D(y)$, де $y = f(kx + b)$ виконується:

$$f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right) = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{|k|}$ є періодом функції $y = f(kx + b)$.

6⁰. Формули зведення

Формули зведення – це формули, за допомогою яких значення тригонометричних функцій будь-якого аргументу можна подати через відповідні значення тригонометричних функцій гострого кута.

у

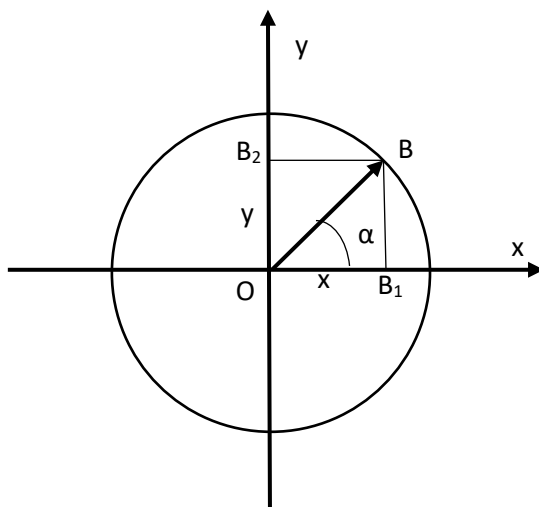


Рис.8

Кут, який закінчується у II чверті, можна подати як $90^\circ + \alpha$ або $180^\circ - \alpha$, відповідно у III чверті як $180^\circ + \alpha$ або $270^\circ - \alpha$, у IV чверті - $270^\circ + \alpha$ або $360^\circ - \alpha$.

Загальні правила для формул зведення:

1. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(180^\circ \pm \alpha)$, $(360^\circ \pm \alpha)$ або в радіанній мірі

$(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, не змінюється. Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті.

2. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(90^\circ \pm \alpha)$, $(270^\circ \pm \alpha)$ або в радіанній мірі $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, змінюється на кофункцію (синус на косинус і навпаки, тангенс на котангенс і навпаки). Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті.

Таблиця формул зведення

Таблиця 5

	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$

7⁰. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Теорема додавання

Виведемо формули косинуса суми і косинуса різниці. Розглянемо одиничне коло.

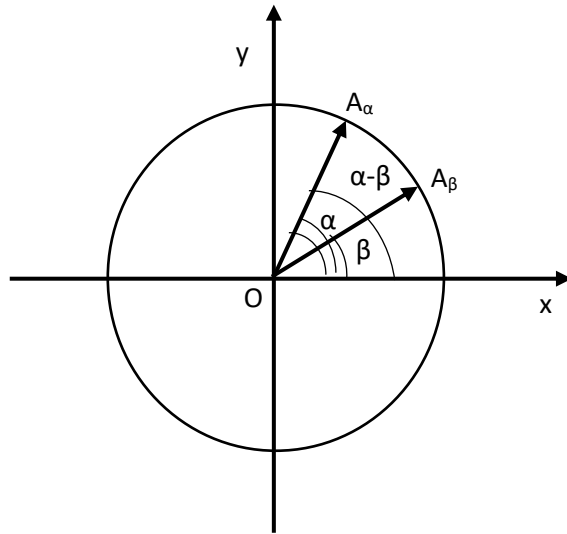


Рис.9

Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ утворюють кути α і β з додатним напрямком осі абсцис. Кут між векторами $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ дорівнює $\alpha - \beta$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів: $\overrightarrow{OA_\alpha} \cdot \overrightarrow{OA_\beta} = |\overrightarrow{OA_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{OA_\beta}| \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, оскільки $|\overrightarrow{OA_\alpha}| = |\overrightarrow{OA_\beta}| = 1$. Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ мають координати $\overrightarrow{OA_\alpha}(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $\overrightarrow{OA_\beta}(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді $\overrightarrow{OA_\alpha} \cdot \overrightarrow{OA_\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Таким чином, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Подамо суму $\alpha + \beta$ як $\alpha - (-\beta)$ і отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - (-\beta)) &= \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Таким чином, $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Виведемо формули синуса суми і синуса різниці.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Таким чином, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \\ &\cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Таким чином, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Виведемо формули для тангенса і котангенса суми і різниці.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на $\cos\alpha\cos\beta$, отримаємо:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}.$$

Тангенс різниці

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}.$$

$$\text{Отже, } tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}.$$

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на $\sin\alpha\sin\beta$ і отримаємо:

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}.$$

Котангенс різниці

$$ctg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}.$$

$$\text{Отже, } ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta}.$$

Тригонометричні функції подвійного, потрійного

половинного аргументу

Для виведення формул подвійного аргументу скористаємось формулами додавання.

Якщо $\alpha = \beta$, то $\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \alpha) &= \cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Виведемо формулу тангенса подвійного кута $tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\cos^2 \alpha$, отримаємо:

$$tg 2\alpha = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}.$$

Виведемо формулу котангенса подвійного кута.

$ctg 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\sin^2 \alpha$, отримаємо:

$$ctg 2\alpha = \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{ctg^2 \alpha - 1}{2ctg \alpha}.$$

Для виведення формул потрійного аргументу скористаємось формулами додавання, подвійного аргументу і врахувавши, що $\beta = 2\alpha$, маємо:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\alpha) &= \sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \cos \alpha 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos^2 \alpha - \\ &= \sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha + \\ &= 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha - \sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha + 2\sin \alpha - \\ &= 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Отже, $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos 3\alpha = \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha \\
 &= \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha 2 \sin\alpha \cos\alpha \\
 &= \cos^3\alpha - \cos\alpha \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha \cos\alpha \\
 &= \cos^3\alpha - \cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) \\
 &\quad - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) \\
 &= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\
 &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
 \end{aligned}$$

Отже, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Аналогічно доводимо формули потрійного кута для тангенса і котангенса. Таким чином, $tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$,
 $ctg 3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$.

Для виведення формул половинного аргументу скористаємося формулами: $1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ та $\cos\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Додамо ліві і праві частини цих рівностей:
 $1 + \cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ або $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Знайшовши різницю тотожностей $1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ та $\cos\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ отримаємо: $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ або $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Поділивши тотожність $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ на тотожність $1 + \cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ отримаємо $tg^2 \frac{\alpha}{2} =$

$\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \Rightarrow tg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$. Для тангенса половинного кута

можна скористатися і іншими, більш зручними формулами:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ або } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}.$$

Поділимо тотожність $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ на тотожність $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, отримаємо: $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}}.$

Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток і навпаки

За теоремами додавання $\sin(\gamma + \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi$ і $\sin(\gamma - \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi$. Додамо ці рівності і отримаємо: $\sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi + \sin \gamma \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi = 2 \sin \gamma \cos \varphi$.

Нехай $\gamma + \varphi = \alpha$, $\gamma - \varphi = \beta$. Розв'яжемо систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma + \varphi = \alpha \\ \gamma - \varphi = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}. \text{ Врахувавши результати}$$

цієї системи, маємо:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Віднявши рівності $\sin(\gamma + \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi$ і $\sin(\gamma - \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi$ і врахувавши $\begin{cases} \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$, отримаємо:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

За теоремами додавання $\cos(\gamma + \varphi) = \cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi$ і

$\cos(\gamma - \varphi) = \cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi$. Додавши ці рівності, маємо:

$$\cos(\gamma + \varphi) + \cos(\gamma - \varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi = 2\cos\gamma\cos\varphi. \quad \text{Врахувавши, що}$$

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}, \text{ маємо:}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Віднявши рівності $\cos(\gamma + \varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi$ та

$$\cos(\gamma - \varphi) = \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi \quad \text{і врахувавши,}$$

що $\begin{cases} \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}, \text{ маємо}$

$$\cos(\gamma + \varphi) - \cos(\gamma - \varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi - (\cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi) = -2\sin\gamma\sin\varphi.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким же чином і доводимо рівності $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ та

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Формули $\sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varphi) = 2\sin\gamma\cos\varphi$, $\cos(\gamma + \varphi) + \cos(\gamma - \varphi) = 2\cos\gamma\cos\varphi$, $\cos(\gamma + \varphi) - \cos(\gamma - \varphi) = -2\sin\gamma\sin\varphi$ можна прочитати зліва направо і навпаки. Якщо ці рівності поділити на 2 і переписати справа наліво, то отримаємо:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \quad [16].$$

Формули перетворення синуса і косинуса аргументу через тангенс половинного аргументу (універсальна заміна)

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Отже, $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$

Якщо поділити рівність $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ на рівність

$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$ отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Поділивши $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ на $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$ або

врахувавши, що $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ отримаємо: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$

**Основні співвідношення між оберненими
тригонометричними функціями**

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x, x \in [0; \pi];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in R.$$

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi];$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in [0; \pi].$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1; 1],$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, x \in R.$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \\ x \in [-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \\ x \in R.$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0; 1).$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0; 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \\ x \in (0; +\infty).$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \\ x \in (0; +\infty).$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1];$$

$$\begin{aligned} \sin(\arctg x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \cos(\arcctg x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in R. \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1; 1]; \\ \cos(\arctg x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arcctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ &x \in R. \\ tg(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1); \quad tg(\arccos x) \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\ &x \in [-1; 0) \cup (0; 1); \\ tg(\arcctg x) &= ctg(\arctg x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \\ ctg(\arccos x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1); \\ ctg(\arcsin x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1). \end{aligned}$$

Лекція 5. Функції та їх властивості

План

1. Поняття функції. Основні способи задання функції. Область визначення і область значень функції. Графік функції
2. Зростання і спадання функції
3. Періодичність функції
4. Парні та непарні функції
5. Графіки деяких функцій та їх основні властивості
6. Перетворення графіків функцій
7. Функція, обернена до даної

1⁰. Числовою функцією з областю визначення D називають залежність, згідно з якою кожному числу x із множини D відповідає за деяким правилом єдине число y із множини E .

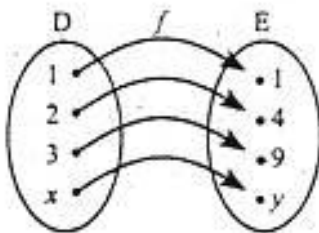


Рис.10

Змінну x називають *незалежною змінною* або *аргументом функції*, а змінну y – *залежною змінною* або *функцією*.

Функцію позначають латинськими буквами $f, g, h, \dots$ (або $f(x), g(x), h(x), \dots$) або рівностями $y=f(x), y=g(x), y=h(x), \dots$

Якщо задане конкретне значення незалежної змінної $x = x_0$, то $y_0 = f(x_0)$ називається *значенням функції f у точці x_0* .

Наприклад: якщо $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, то $f(1) = \frac{1^2}{1^2+1} = \frac{1}{2}$,
 $f(0) = \frac{0^2}{0^2+1} = 0, f(a) = \frac{a^2}{a^2+1}$.

Область визначення функції позначають $D(f)$. Множина, що складається з усіх чисел $f(x)$ таких, що x належить області визначення функції f , називається *областю значень функції* і позначається $E(f)$.

Наприклад. Результати вимірювання температури тіла хворого залежно від часу подано в таблиці:

Таблиця 6

Час		1	1	1	2
добы, x (год)	2	5	8	1	4

Темпе- ратура тіла, $y=f(x)$ (C°)	9	8,5	8,3	7,3	7,1	7
--	---	-----	-----	-----	-----	---

Залежність $y=f(x)$ є функцією, де x – незалежна змінна, y – залежна змінна.

$f(9)=39$; $f(12)=38,5$; $f(15)=38,3$; $f(18)=37,3$; $f(21)=37,1$; $f(24)=37$.

$D(f)=\{9; 12; 15; 18; 21; 24\}$.

$E(f)=\{39; 38,5; 38,3; 37,3; 37,1; 37\}$.

Функцію можна задати за допомогою *таблиці, графіка, формули або словесно*.

Найчастіше функцію задають формулою, яка дає можливість одержати значення залежної змінної y , підставивши конкретне значення аргументу x .

Областю визначення функції $y=f(x)$, яка задана формулою, називають множину тих значень, яких може набувати x , тобто таких x , за яких формула має зміст (усі дії, указані формулою, можна виконати).

При знаходженні області визначення слід пам'ятати:

1. Якщо функція є многочленом $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty) = R$, $D(y) = (-\infty; +\infty) = R$.

2. Якщо функція має вигляд $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x), g(x)$ – многочлени, то слід вважати, що $g(x) \neq 0$.

3. Якщо функція має вигляд $y = \sqrt{f(x)}$, то слід вважати $f(x) \geq 0$.

4. Якщо функція має вигляд $y = \log_{g(x)} f(x)$, то

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область визначення функції $y = f(x)$, а друга – це відповідні значення функції у точці x .

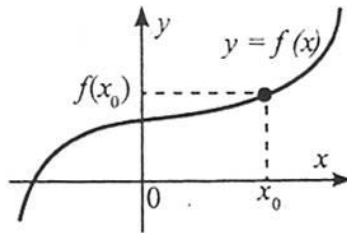


Рис.11

2⁰. Функція $y = f(x)$ є *зростаючою*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Тобто для будь-яких значень x_1, x_2 з області визначення функції як таких, $x_1 < x_2$, що виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (або $y_1 < y_2$), і навпаки, якщо $y = f(x)$ - зростаюча, то за умови $f(x_1) < f(x_2)$ виконується нерівність $x_1 < x_2$.

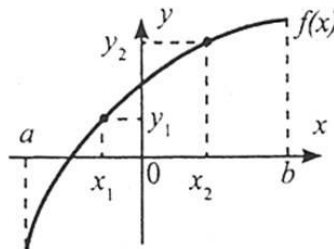


Рис.12

Функція $y = f(x)$ є *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тобто для будь-яких значень x_1, x_2 з області визначення функції як таких, $x_1 < x_2$, що виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ (або $y_1 > y_2$), і навпаки, якщо $y = f(x)$ - спадна, то за умови $f(x_1) > f(x_2)$ виконується нерівність $x_1 < x_2$.

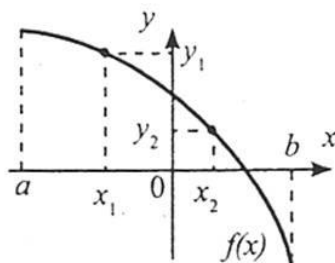


Рис.13

3⁰. Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення числа $x+T$ і $x-T$ також належать області визначення і виконується рівність: $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

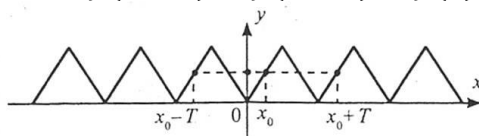


Рис.14

Якщо функція $y = f(x)$ - періодична з найменшим додатним періодом T , то функція $y = f(kx + b)$ теж періодична, і найменший додатний період її дорівнює $\frac{T}{|k|}$, ($k \neq 0$).

4⁰. Функція $y = f(x)$ є *парною*, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $-x$ також належить $D(y)$ і виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі ОУ.

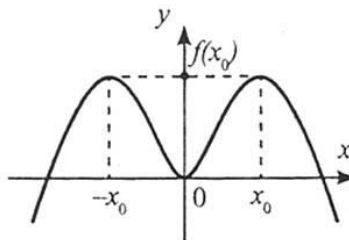


Рис.15

Наприклад. Чи є парною функція $f(x) = x^4 + x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$ то функція парна.

Функція $y = f(x)$ є *непарною*, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $x \in D(y)$ і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

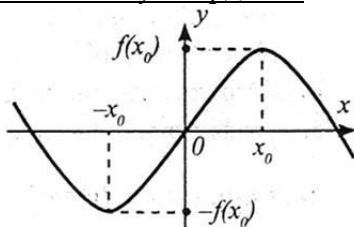


Рис.16

Наприклад. Чи є непарною функція $f(x) = x^3 - x^5$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$, то функція є непарною.

5⁰.

Функція $y = kx$

Властивості:

1. Область визначення: R .
2. Функція є непарною.
3. Для $x \in R$ функція зростає, якщо $k > 0$; спадає, якщо $k < 0$.
4. Область значень: R .
5. Графік – пряма, що проходить через початок координат.

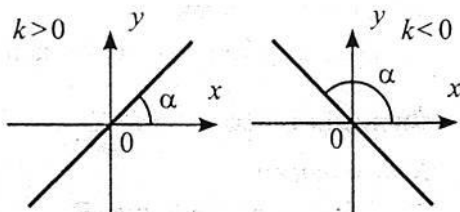
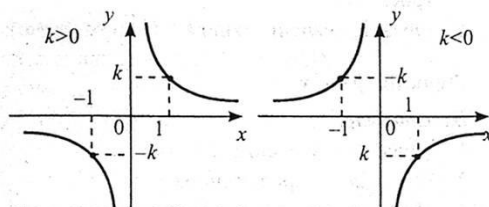


Рис.17

Функція $y = \frac{k}{x}$ ($y = \frac{k}{x^{2n+1}}, n \in \mathbb{N}, k \neq 0$)

Властивості

1. Область визначення: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Функція є непарною.
3. Якщо $k > 0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і на проміжку $(0; +\infty)$. Якщо $k < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і на проміжку $(0; +\infty)$.
4. Область значень: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
5. Графік функції – гіпербола.



Функція $y = ax^2$ ($y = ax^{2n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$)

Властивості

1. Область визначення: $\mathbb{R}$.
2. Функція є парною.
3. Якщо $a > 0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$.
4. Область значень: якщо $a > 0$, то $y \in [0; +\infty)$; якщо $a < 0$, то $y \in (-\infty; 0]$.
5. Графік функції – парабола.

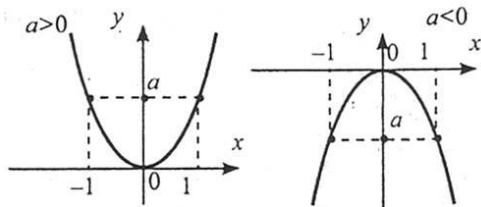


Рис.18

Функція $y = ax^3$ ($y = ax^{2n+1}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$)

Властивості

1. Область визначення: R .
2. Функція є непарною.
3. Для $x \in R$ функція зростає, якщо $a > 0$; спадає, якщо $a < 0$.
4. Область значень: R .
5. Графік функції – кубічна парабола.

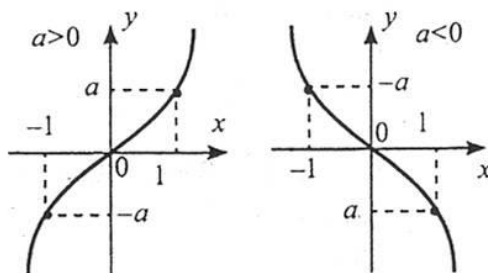


Рис.19

Функція $y = |x|$

Властивості

1. Область визначення: R .
2. Функція є парною.
3. На проміжку $(-\infty; 0]$ функція спадає; на проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає.
4. Область значень: $[0; +\infty)$.

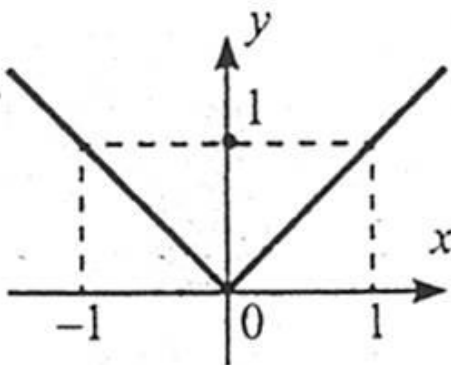


Рис.20

Функція $y = \frac{k}{x^{2n}}$ ($k \neq 0, n \in N$)

Властивості

1. Область визначення: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Функція є парною.
3. Якщо $k > 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0; +\infty)$. Якщо $k < 0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає на проміжку $(0; +\infty)$.
4. Область значень: якщо $k > 0$, то $y \in (0; +\infty)$; якщо $k < 0$, то $y \in (-\infty; 0)$.

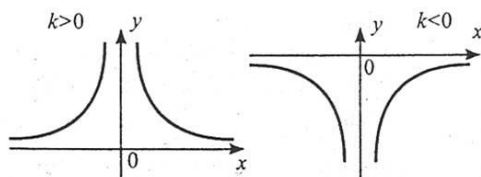


Рис.21

Функція $y = \sqrt{x}$ *Властивості*

1. Область визначення: $[0; +\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна.
3. На проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає.
4. Область значень: $[0; +\infty)$.

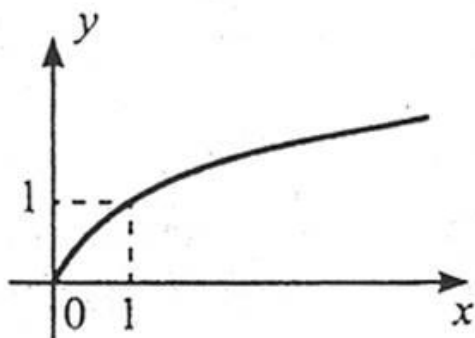


Рис.22

Функція $y = a^x$ (де $a > 0, a \neq 1$)
 (показникова функція)
Основні властивості

1. Область визначення – $\mathbb{R}$.
2. Область значень – $(0; +\infty)$.
3. Якщо $x=0$, то $y=1$.
4. Функція не є ні парною, ні не парною.
5. Якщо $a > 1$, тоді функція $y = a^x$ зростає; якщо $0 < a < 1$, то функція спадає.
6. При $a > 1$ і $x > 1$, $a^x > 1$; при $x < 0$, $a^x < 1$. При $0 < a < 1$ $a^x < 1$, якщо $x > 0$; $a^x > 1$ при $x < 0$.
7. Графік функції $y = a^x$

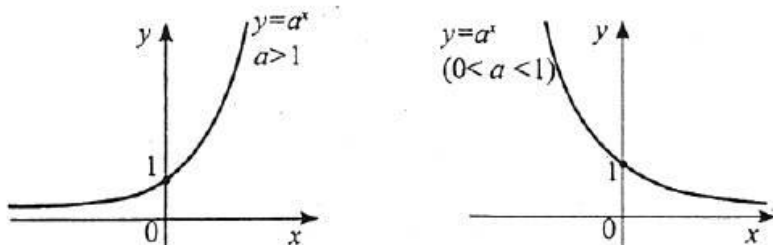


Рис.23

Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

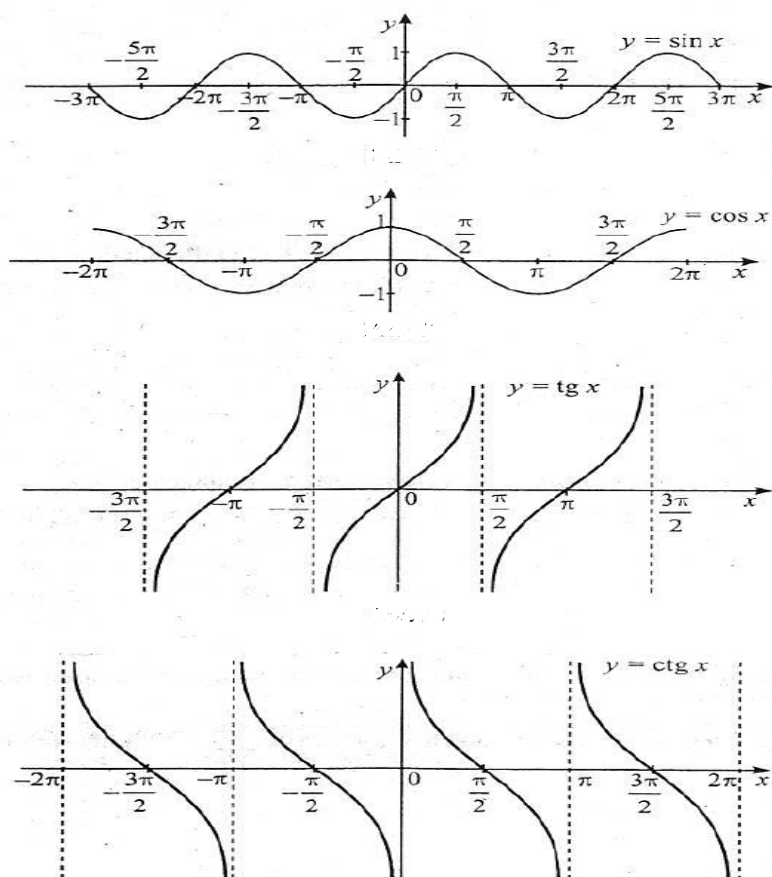


Рис.24

Властивості	Функції			
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Парність	непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	непарна $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	непарна $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
Періодичність, період	2π	2π	π	π
Нулі функції	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Якщо $x=0$	$\sin x=0$	$\cos x=1$	$\operatorname{tg} x=0$	не визначено
Проміжки, на яких $y>0$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Проміжки, на яких $y<0$	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Проміжки зростання	$[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	немає
Проміжки спадання	$[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$	немає	$(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Найменші значення	$y=-1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$y=-1$, якщо $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	немає	немає
Найбільші значення	$y=1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$y=1$, якщо $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	немає	немає

Обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x$$

Основні властивості функції $y = \arcsin x$:

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3. Графік симетричний відносно початку координат (функція непарна):

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

4. Функція зростаюча $x_1 > x_2$, то $\arcsin x_1 > \arcsin x_2$.

5. $y=0$, якщо $x=0$.

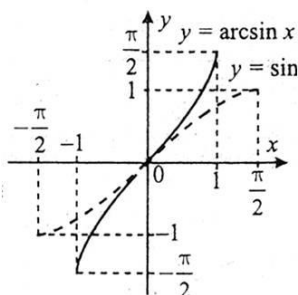


Рис.25

$y = \arccos x$

Основні властивості функції $y = \arccos x$:

1. $D(y) = [-1; 1]$.
2. $E(y) = [0; \pi]$.
3. Графік не симетричний ані відносно початку координат, ані відносно осі OY : $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
4. Функція спадна. Якщо $x_1 > x_2$, то $\arccos x_1 < \arccos x_2$.
5. $y=0$, якщо $x=1$.

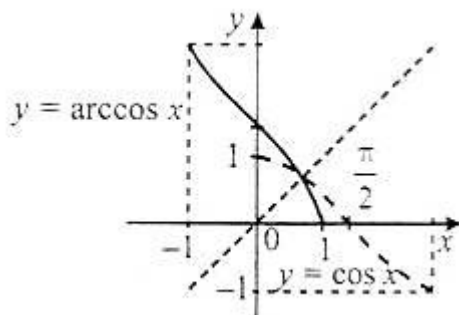


Рис.26

Функції $y = \arctg x$

Основні властивості функції $y = \arctg x$:

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

3. Графік симетричний відносно початку координат, функція непарна: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4. Функція зростаюча. Якщо $x_1 < x_2$, то $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$.

5. $y=0$, якщо $x=0$.

6. $y>0$, якщо $x>0$; $y<0$, якщо $x<0$.

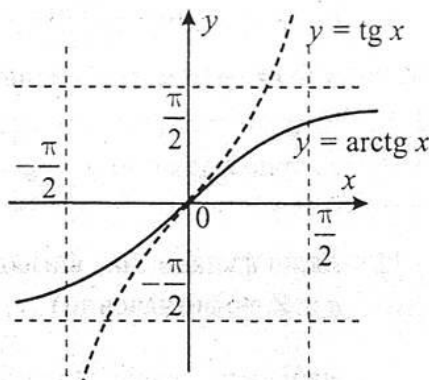


Рис.27

Функції $y = \operatorname{arcctg} x$

Основні властивості функції $y = \operatorname{arcctg} x$:

1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = (0; \pi)$.

3. Графік не симетричний ані відносно початку координат, ані відносно осі OY :

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

4. Функція спадна. Якщо $x_1 < x_2$, то $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$.

5. $x=0$, якщо $y = \frac{\pi}{2}$.

6. $y>0$ для всіх $x \in R$.

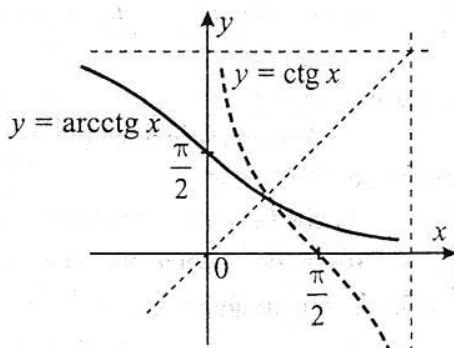


Рис.29

Функції з цілою і дробовою частиною числа

Цілою частиною дійсного числа x називається найбільше ціле число, що не більше за x . Позначають $[x]$.

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Дробовою частиною дійсного числа x називається різниця між числом та його цілою частиною. Позначають $\{x\}$.

Функція $y = [x]$

Функцію $y = [x]$ по іншому називають функцією антьє («антьє x » або «антьє від x »). Вона визначена на множині всіх дійсних чисел, тобто $D(y) = R$, а набуває лише цілих значень, тобто $E(y) = Z$.

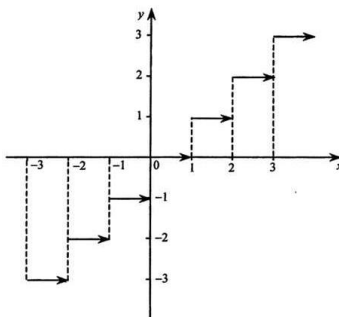


Рис.30

Функція $y = \{x\}$

Згідно з означення $y = \{x\} = x - [x]$. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел $D(y) = R$, а множиною значень $E(y) = [0; 1]$.

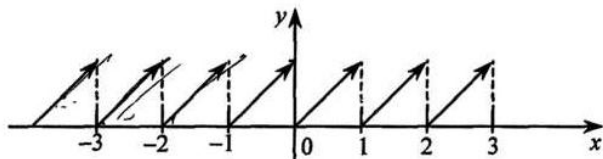


Рис.31

6 Перетворення графіків функцій

1. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + a)$, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць: вправо, якщо $a < 0$; вліво, якщо $a > 0$.

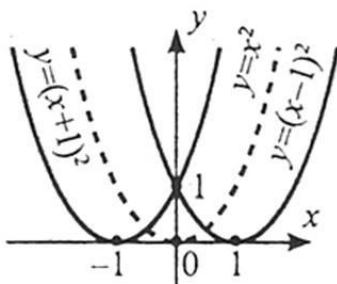


Рис.32

2. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + b)$, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць: вгору, якщо $b < 0$; вниз, якщо $b > 0$.

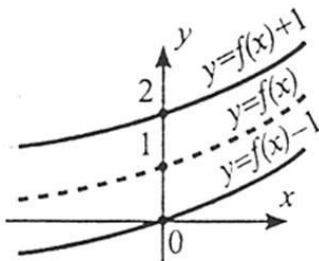


Рис.33

3. Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, слід графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно осі абсцис.

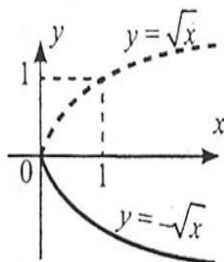


Рис.34

4. Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, слід графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно осі ординат.

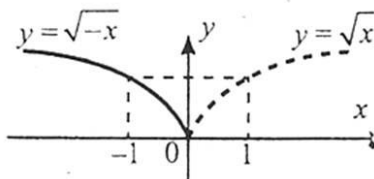


Рис.35

5. Щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, слід частину графіка функції $y = f(x)$ у верхній півплощині і на осі абсцис залишити без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі Ox .

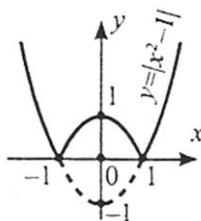


Рис.36

6. Щоб побудувати графік функції $y = f(|x|)$, слід частину графіка функції $y = f(x)$ у правій півплощині і на осі ординат залишити без змін, а замість частини графіка в лівій півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі Oy .

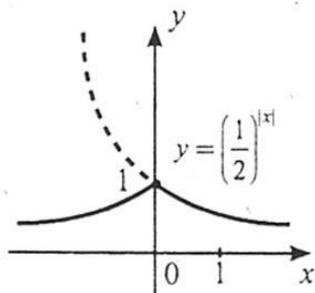


Рис.37

7. Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, $k > 0$, слід:

1) при $k > 1$ стиснути графік функції $y = f(x)$ до точки $(0;0)$ уздовж осі абсцис у k разів;

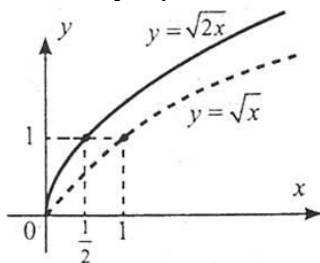


Рис.38

2) при $0 < k < 1$ розтягнути від точки $(0;0)$ графік функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів.

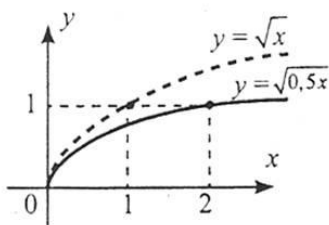


Рис.39

8. Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, $k > 0$, слід:

1) при $k > 1$ розтягнути графік функції $y = f(x)$ до точки $(0;0)$ уздовж осі ординат у k разів;

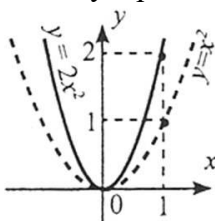


Рис.40

2) при $0 < k < 1$ стиснути від точки $(0;0)$ графік функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат у $\frac{1}{k}$ разів.

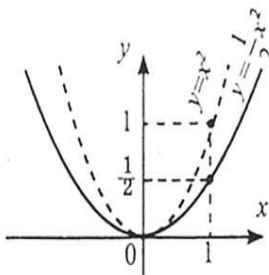


Рис.41

Побудова параболи двома способами:

1-й спосіб. Знаходження координат вершини параболу за формулами: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ та знаходження точок перетину параболу з осями координат.

Приклад 9. Побудувати графік функції $y = -3x^2 + 8x + 3$.

Розв'язання

Тут $a = -3$, $b = 8$, $c = 3$, тоді $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-3)} = 1\frac{1}{3}$,

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-3) \cdot 3 - 8^2}{4 \cdot (-3)} = 8\frac{1}{3}. \text{ Отже, точка } \left(1\frac{1}{3}; 8\frac{1}{3}\right) -$$

вершина параболу. Знаходимо точки перетину параболу $y = -3x^2 + 8x + 3$ з осями координат:

$$\text{з віссю } 0x: y = 0, \text{ тобто } -3x^2 + 8x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отже точка $(3; 0)$ і точка $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ – точки перетину параболу з віссю $0x$;

з віссю $0y: x = 0$, тобто $y = -3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 3 = 3$. Це точка $(0; 3)$.

Крім того, відмітимо, що коефіцієнт a – від'ємний, отже, парабола $y = -3x^2 + 8x + 3$ нахилена вітками донизу.

Відмічаємо на координатній площині знайдені точки і будуємо по них параболу (при потребі знаходимо додаткові точки).

2-й спосіб. Виділення повного квадрата двочлена:

$$y = -3x^2 + 8x + 3 = -3\left(x^2 - \frac{8}{3}x - 1\right) = -3\left(x - 2 \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1\right) = -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$$

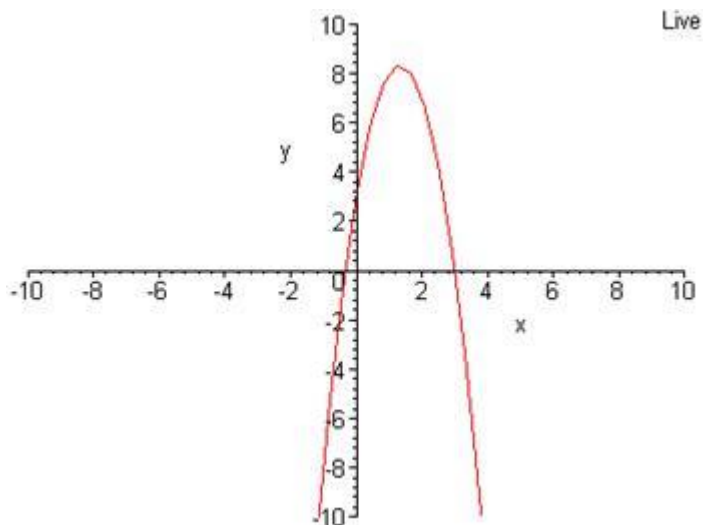


Рис.42

Приклади побудови графіків з модулями див.
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/7mihalevich_elementar_na_matematika_algebra_ch2/617.htm

приклади деяких елементарних перетворень функцій: https://www.youtube.com/watch?v=N6zTRBS0r_g

7⁰. Функцію, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називають *оборотною*.

Наприклад: функція $y=2x+1$ – оборотна, а функція $y = x^2$ (визначена на всій числовій осі) не є оборотною.

Якщо функція задана формулою $y = f(x)$, то для знаходження оберненої функції потрібно розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно x , а потім поміняти місцями x і y .

Графіки даної функції і оберненої до неї симетричні відносно прямої $y=x$.

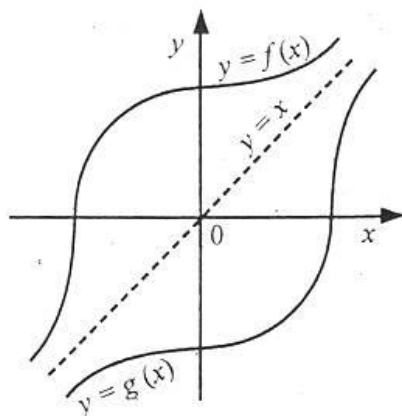


Рис. 43

Наприклад: функції $y = 2x + 1$, $y = x - 12$, графіки яких симетричні відносно прямої $y=x$, є оберненими.

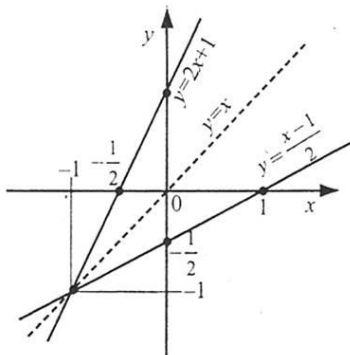


Рис.44

Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона оборотна. Функція, яка обернена до даної і визначена в області значень функції $y = f(x)$, також є зростаючою (спадною).

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на області визначення D і має область значень E , то обернена функція має область визначення E і область значень D .

Лекція 6. Методи розв'язування алгебраїчних рівнянь

План

1. Загальні положення
2. Лінійні рівняння.
3. Квадратні рівняння.
4. Рівняння вищих степенів.
5. Дробово-раціональні рівняння.
6. Деякі рівняння спеціального виду.
7. Рівняння, що містять знак модуля.
8. Ірраціональні рівняння.

1⁰. Рівність $f(x) = g(x)$, $f(x), g(x)$ – деякі функції, які визначенні на спільній області визначення, наз. *рівнянням з однією змінною*.

Корінь рівняння – це значення змінної, яке задовольняє рівняння на всій області визначення.

Розв'язати рівняння означає знайти такі значення невідомої, які при підстановці їх у дане рівняння перетворюють його на правильну числову рівність або довести, що коренів не існує.

Властивості відношення рівності:

1. Симетричність: $a = b \Leftrightarrow b = a$;
2. Транзитивність: $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$; (знак « $\wedge$ » означає «і»)
3. $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$;
4. Монотонність додавання: $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, c \in R$;
5. Адитивність: $(a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow a + c = b + d$,
 $a - c = b - d$;
6. Монотонність множення: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, c \in R$;
7. $(a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$;
8. $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, n \in N$.

$$9. \quad (a = b) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} = \frac{1}{b}\right), (a \neq 0 \wedge b \neq 0).$$

Врахувавши ці відношення, запишемо правила перетворення рівнянь:

1. Якщо вираз $\varphi(x)$ визначений при всіх значеннях x , при яких визначені вирази $f(x)$ і $g(x)$, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$. на основі цього правила будь-який доданок можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, при цьому змінивши знак на протилежний.

2. Якщо вираз $\varphi(x)$ визначений при всіх значеннях x , при яких визначені вирази $f(x)$ і $g(x)$, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ ($\varphi(x) \neq 0$).

3. Рівняння виду $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

4. Рівняння виду $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n = (g(x))^n, n \in N$.

2⁰. Лінійні рівняння

Лінійні рівняння з однією змінною – рівняння, обидві частини якого визначаються лінійними функціями. Найпростіший випадок має вигляд $a \cdot x = b$, числа a і b є коефіцієнтами лінійного рівняння: a – коефіцієнт при змінній, b – вільний член.

Рівняння отримали назву лінійних через те, що визначають лінію на площині або в просторі.

Властивості лінійних рівнянь:

Якщо $a \neq 0$ – рівняння має єдиний розв’язок.

Якщо тільки $a = 0$ – рівняння не має жодного кореня.

Якщо ж і $a = 0$ і $b = 0$, рівняння має безліч коренів.

Отже, для того, щоб розв'язати лінійне рівняння необхідно його привести до виду $a \cdot x = b$.

Приклад. Розв'язати рівняння $4(x - 3) - 12x = 3(2 - x) + 7$.

Розв'язання. Спочатку розкриємо дужки: $4x - 12 - 12x = 6 - 3x + 7$.

Зведемо подібні доданки: $-8x - 12 = 13 - 3x$.

Перенесемо невідомі доданки в одну частину, відомі – в іншу: $-8x + 3x = 13 + 12$.

Зведемо подібні доданки: $-5x = 25$.

Знайдемо корінь рівняння: $x = 25 : (-5)$, $x = -5$.

Відповідь: -5 .

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a , b і c називають коефіцієнтами рівняння. Наприклад $x + y^2 = 17$. [12]

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Рівняння з двома змінними мають ті самі властивості, що й рівняння з однією змінною:

- 1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо рівняння, рівносильне даному;
- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Лінійні рівняння з параметрами. Рівнянням з параметрами називається рівняння виду $f(x; a_1; a_2; \dots; a_n) = 0$, де x – невідоме, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – змінні параметри. Значення параметрів $a_1, a_2, \dots, a_n$, при яких

вираз має зміст при деяких значеннях x , називаються доступними. Розв'язати рівняння з параметрами – це означає знайти всі його корені для кожного з допустимих значень параметрів.

При розв'язуванні рівняння з параметрами межі зміни параметрів можуть бути заданими. Якщо не вказані межі змін параметрів, то параметри набувають усіх своїх допустимих значень. [16]

Парметри позначають, як правило, першими буквами латинського алфавіту ($a, b, c, \dots$), а невідомі – останніми буквами ($\dots, x, y, z$). [16]

Лінійне рівняння з параметром виду $ax + b = 0$, рівносильне рівнянню $ax = -b$.

Схема дослідження лінійного рівняння з параметром:

1. Якщо $a \neq 0, b \neq 0$, то рівняння $ax = -b$ має єдиний корінь: $x = -\frac{b}{a}$.

2. Якщо $a = 0, b = 0$, то рівняння $ax = -b$ має вигляд: $0 \cdot x = 0$, тоді x – будь-яке число. Отже, рівняння має безліч коренів.

Якщо $a = 0, b \neq 0$, то рівняння $ax = -b$ має вигляд: $0 \cdot x = -b$, що неможливо. Рівняння коренів немає.

Приклад. При якому значенні параметра a рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 2a - 3$ має безліч коренів?

Розв'язання. За схемою дослідження лінійного рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a^2 + 2a - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 1, \\ a = 1, \\ a = -3 \end{cases}$$

$a = 1$.

Відповідь: 1.

3⁰. Квадратні рівняння.

Квадратним рівнянням (рівнянням другого степеня з однією змінною) називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a , b , і c – деякі числа, причому $a \neq 0$. Якщо ж $b \neq 0$, $c \neq 0$, то квадратне рівняння називають повним.

Числа a , b , і c називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число a називають першим коефіцієнтом, число b – другим коефіцієнтом, число c – вільним членом.

Квадратне рівняння перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

1) $c = 0$, $b \neq 0$. Тоді одержимо рівняння

$$ax^2 + bx = 0; x(ax + b) = 0; x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}.$$

2) $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння

$$ax^2 + c = 0; ax^2 = -c; x^2 = -\frac{c}{a}.$$

а) $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, якщо $-\frac{c}{a} > 0$, тобто $\frac{c}{a} < 0$;

б) якщо $-\frac{c}{a} < 0$, тобто $\frac{c}{a} > 0$, то рівняння коренів не має.

3) $b = 0$, $c = 0$. Тоді одержимо рівняння

$$ax^2 = 0; x^2 = 0.$$

4) $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають дискримінантом квадратного рівняння і позначають літерою D . Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта:

1) Якщо $D < 0$, то рівняння дійсних коренів не має;

2) Якщо $D = 0$, то $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$, рівняння має два однакових корені;

3) Якщо $D > 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Вієта. Якщо корені квадратного рівняння існують, то їх сума дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток $-\frac{c}{a}$.

Обернена теорема Вієта: Довільні числа є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо:
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Приклад. Знайти суму квадратів і суму кубів коренів рівняння: $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Розв'язання. $D = 25 - 2 \cdot 4 = 17 > 0$, рівняння має два різних корені.

$$\text{За оберненою т. Вієта: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Приклад. Знайти суму квадратів і суму кубів коренів рівняння: $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Розв'язання. $D = 25 - 2 \cdot 4 = 17 > 0$, рівняння має два різних корені.

$$\text{За оберненою т. Вієта: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 0,5 =$$

$$\frac{21}{4},$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{21}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{95}{8}.$$

Відповідь: $\frac{21}{4}; \frac{95}{8}$.

Квадратні рівняння з параметрами. Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – шукане невідоме, a, b, c – параметри, причому $a \neq 0$ називається квадратним рівнянням з параметрами.

Схема дослідження квадратного рівняння з параметром:

1) Якщо ж $a = 0$, то рівняння перетворюється на лінійне і набуває вигляду: $ax + b = 0$.

Обчислити дискримінант за такою формулою: $D = b^2 - 4ac$.

2) Якщо $a \neq 0$, $D < 0$, то рівняння дійсних коренів не має;

3) Якщо $a \neq 0$, $D = 0$, то $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$, рівняння має два однакових корені;

4) Якщо $a \neq 0$, $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Приклад. Знайти всі значення параметра a , для яких квадратне рівняння $(a + 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$:

а) має два різних корені;

б) не має коренів;

в) має один корінь.

Розв'язання. Оскільки за умовою дане рівняння квадратне, то $a \neq -1$. Знайдемо дискримінант рівняння: $D = 4(a + 1)^2 - 4(a + 1)(a - 2) = 12(a + 1)$.

а) Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні корені. $12(a + 1) > 0 \rightarrow a > -1$.

б) Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має: $12(a + 1) < 0 \rightarrow a < -1$.

в) Якщо $D = 0$, то рівняння має два рівних корені, але якщо $D = 0$, то $a = -1$, що за умовою неможливо.

Відповідь: а) при $a > -1$ рівняння має два різних корені; б) при $a < -1$ рівняння не має коренів; в) рівняння не може мати два однакових корені.

4⁰. Кубічні рівняння і рівняння вищих степенів.

Біквдратним рівнянням називається рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$,

де x – змінна, a, b і c – відомі числа, до того ж $a \neq 0$.
Заміною $x^2 = t$ біквдратне рівняння зводять до квадратного.

Рівняння виду $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, де $n \geq 3$, $n \in N$, $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – задані числа, x – невідома, називають рівняннями n -го степеня. [16, с. 76]

Для того, щоб розв'язати таке рівняння, потрібно розкласти многочлен на множники. Для цього використовують методи розкладу многочленів на множники. Після розкладу потрібно скористатися такими властивостями: якщо $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, то рівняння виду $P(x) \cdot Q(x) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)=0 \end{cases}$.

При розв'язуванні рівнянь n -го степеня використовується теорема Безу та теорема про раціональні корені многочлена.

Для організації перебору при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами використовується теорема: якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем рівняння $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ з цілими коефіцієнтами, то для будь-якого цілого числа m число $P(m)$ ділиться на число $p - tq$, де $P(m)$ – значення многочлена рівняння при $x = m$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$.

Розв'язання. Заміною $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$.
Отримаємо квадратне рівняння: $t^2 - 6t - 7 = 0$. За т. Вієта коренями даного рівняння будуть $t_1 = 7$, $t_2 = -1$. Тоді повертаємося до змінної x : $x^2 = 7$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ або $x^2 = -1$ – рівняння коренів немає.

Відповідь: $-\sqrt{7}; \sqrt{7}$. [17]

Приклад. Знайти всі раціональні корені рівняння: $2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$.

Розв'язання. Раціональними коренями даного рівняння можуть бути тільки числа: $\frac{p}{q} = \left\{ \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{21}{2} \right\}$, p – дільники вільного коефіцієнта, q – дільники старшого коефіцієнта.

При $x = 1$ отримаємо: $P(1) = -20$. Тому $x = 1$ не є коренем рівняння. За теоремою якщо $\frac{p}{q}$ – корінь рівняння, то число $P(1) : (p - q)$. Число (-20) ділиться на $3 - 1 = 2$, тому число 3 залишається для подальшої перевірки, але число (-20) не ділиться на $7 - 1 = 6$, тому число 7 не може бути коренем рівняння. Число (-20) не ділиться на $-7 - 1 = -8$, тому число -7 не може бути коренем рівняння. Аналогічно отримаємо, що числа $-21, -\frac{21}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{21}{2}$ не є коренями даного рівняння. Для перевірки залишаються і тільки числа: 3, 21, $-1, -3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}$.

При $x = 3$ отримаємо: $P(3) = 150$. Тому $x = 3$ не є коренем рівняння. За теоремою якщо $\frac{p}{q}$ – корінь рівняння, то число $P(3) : (p - 3q)$. Число 150 не ділиться на $21 - 3 = 18$, тому число 21 не є коренем рівняння. Оскільки 150 не ділиться на 4 і 9, то числа $-1, -\frac{3}{2}$ також не можуть бути коренями.

Для перевірки залишаються тільки числа: $-3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}$.

$$P(-3) = 0, P\left(\frac{1}{2}\right) = 0, P\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0, P\left(\frac{7}{2}\right) \neq 0.$$

Отже, раціональні корені даного рівняння – числа -3 і $\frac{1}{2}$.

Відповідь: $-3, \frac{1}{2}$.

5⁰. Дробово-раціональні рівняння

Рівняння виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, де $P(x), Q(x)$ – многочлени, називається *дробово-раціональним*.

Для його розв'язування використовують теорему:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 2 \neq 0. \end{cases}$ Легко встановити, що розв'язком цієї системи є число 2. Оскільки ця система рівносильна рівнянню, то, не виконуючи перевірки, можна стверджувати, що число 2 – єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: 2.

Рівняння виду $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = C$, де $ABC \neq 0$, $ac \neq 0$, розв'язується за допомогою заміни: $y = ax + \frac{c}{x}$, тобто зводиться до вигляду: $\frac{A}{y+b_1} + \frac{B}{y+b_2} = C$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $x = 0$ не є коренем даного рівняння, то можна розділити чисельник і знаменник кожного дробу в лівій частині на x і отримаємо: $\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1} + \frac{5}{x+\frac{3}{x}-5} = -\frac{3}{2}$.

Нехай $y = x + \frac{3}{x}$, тоді рівняння набуде вигляду: $\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{y^2+2y-15}{(y+1)(y-5)} = 0 \rightarrow y_1 = -5, y_2 = 3$.

Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{x} = -5, \\ x + \frac{3}{x} = 3. \end{cases}$$

Друге рівняння сукупності коренів не має, корені першого рівняння: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$.

Відповідь: $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$.

Для спрощення обчислень при розв'язуванні раціональних рівнянь використовується метод розкладання на простіші дробі.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4$.

Розв'язання. $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $\frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$, $\frac{x-3}{x+3} = 1 - \frac{6}{x+3}$, $\frac{x+4}{x-4} = 1 + \frac{8}{x-4}$.

Тоді задане рівняння набуде вигляду: $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x-4} = 0$.

Виконавши групування, отримаємо: $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$, $\frac{5x-8}{(x-1)(x-4)} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$.

Скориставшись основною властивістю пропорції, отримаємо рівняння $x^2 + x - \frac{15}{6} = 0$, корені якого задовольняють ОДЗ рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{\frac{69}{5}} \right), \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{69}{5}} \right)$.

При розв'язуванні раціональних рівнянь використовуються методи:

- Виділення повного квадрата;
- Однорідність рівнянь щодо деяких виразів;
- Зведення рівнянь до системи рівнянь;
- Зведення до рівнянь спеціального вигляду.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$.

Розв'язання. У лівій частині рівняння маємо квадрати чисел x і $\frac{2x}{x+2}$. Додамо до лівої і правої частин рівняння вираз:

$-2x \cdot \frac{2x}{x+2}$, отримаємо: $\left(x - \frac{2x}{x+2} \right)^2 = 5 - \frac{2x \cdot 2x}{x+2}, \left(\frac{x^2}{x+2} \right)^2 +$

$4 \cdot \frac{x^2}{x+2} - 5 = 0$. Введемо заміну: $t = \frac{x^2}{x+2}$, отримаємо рівняння: $t^2 + 4t - 5 = 0$ коренями якого є числа -5 і 1 . Повертаємося до заміни: $\frac{x^2}{x+2} = -5$ або $\frac{x^2}{x+2} = 1$. Розв'язавши отримані рівняння, отримаємо розв'язки даного рівняння: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Відповідь: $-1; 2$.

Рівняння виду $a_n p^n(x) + a_{n-1} p^{n-1}(x) q(x) + \dots + a_1 p(x) q^{n-1}(x) + a_0 q^n(x) = 0$, де $n > 1, a_0 \neq 0, a_n \neq 0, p(x), q(x)$ – деякі функції, називається *однорідним рівнянням*.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x^2 + x + 4)^2 + 3x(x^2 + x + 4) + 2x^2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x^2 + x + 4 = y$, тоді рівняння набуде вигляду: $y^2 + 3xy + 2x^2 = 0$, яке розв'яжемо як квадратне відносно змінної y .

$$D = 9x^2 - 8x^2 = x^2, \quad y_1 = \frac{-3x-x}{2} = -2x, \quad y_2 = \frac{-3x+x}{2} = -x.$$

Повертаємося до заміни: $\begin{cases} x^2 + x + 4 = -2x, \\ x^2 + x + 4 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 4 = 0, \\ x^2 + 2x + 4 = 0. \end{cases}$

Дискримінант кожного рівняння в сукупності від'ємний, тому сукупність коренів не має. Отже, задане рівняння також не має коренів.

Відповідь: не має коренів.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{5+x^2+5x}{x+5}$.

Розв'язання. $x = 0$ не є коренем рівняння. Нехай $x = x_0$ – корінь рівняння, тоді виконується рівність: $\frac{x_0^2-2x_0+4}{x_0-2} = \frac{5+x_0^2+5x_0}{x_0+5}$, яка є пропорцією.

Запишемо для цієї пропорції її похідну (при $x_0 \neq 0$):

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 + 4 - (x_0 - 2)x_0}{x_0 - 2} = \frac{5 + x_0^2 + 5x_0 - (x_0 + 5)x_0}{x_0 + 5}, \quad \frac{4}{x_0 - 2} = \frac{5}{x_0 + 5} \rightarrow x_0 = 30.$$

Перевіркою можна переконатися, що $x = 30$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: 30.

6⁰. Деякі рівняння спеціального виду

1. Рівняння виду $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = A$, де $a < b < c < d$, $b - a = d - c$, A – деяке число, можна розв'язати, використавши заміну змінної (симетризацію рівняння):

$$y = \frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4} = x - \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0,5625$.

Розв'язання. Знайдемо добутки $x(x + 3)$ і $(x + 2)(x + 1)$, отримаємо: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 0,5625$.

Введемо нову змінну $y = x^2 + 3x$, отримаємо рівняння: $y^2 + 2y - 0,5625 = 0 \rightarrow y_1 = 0,25; y_2 = -2,25$.

Повернемося до початкової змінної:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 0,25 = 0, \\ x^2 + 3x + 2,25 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності має корені: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}$,
 $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{10}}{2}$.

Друге рівняння має один корінь: $x = -\frac{3}{2}$.

Відповідь: $\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{10}}{2}; -\frac{3}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$.

Розв'язання. З кожної дужки винесемо множник біля змінної x за дужки. Тоді задане рівняння запишемо у вигляді: $\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12}$.

Оскільки $\frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ і $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, то введемо нову змінну $y = \frac{1}{4} \left[\left(x - \frac{1}{12} \right) + \left(x - \frac{1}{6} \right) + \left(x - \frac{1}{4} \right) + \left(x - \frac{1}{3} \right) \right] = x - \frac{5}{24}$.

Отже, $x = y + \frac{5}{24}$. Підставимо знайдений вираз для змінної x у рівняння $\left(x - \frac{1}{12} \right) \left(x - \frac{1}{6} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12}$ отримаємо: $\left(y + \frac{3}{24} \right) \left(y + \frac{1}{24} \right) \left(y - \frac{1}{24} \right) \left(y - \frac{3}{24} \right) = \frac{5}{12 \cdot 6 \cdot 12}$;
 $\left(y^2 - \left(\frac{1}{24} \right)^2 \right) \cdot \left(y^2 - \left(\frac{3}{24} \right)^2 \right) = \frac{5}{12 \cdot 6 \cdot 12} \Leftrightarrow y^4 - \frac{10}{24^2} y^2 + \frac{9}{24^4} = \frac{5}{864}$.

Розв'язавши бікватратне рівняння, отримаємо: $y^2 = \frac{49}{24^2} \rightarrow y_1 = -\frac{7}{24}, y_2 = \frac{7}{24}$.

Відповідь: $-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}$.

2. Рівняння виду $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = Ax^2$, де $ab = cd$, зводиться до сукупності двох квадратних рівнянь за допомогою заміни: $y = x + \frac{ab}{x}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$.

Розв'язання. Оскільки $(-2) \cdot (-12) = (-3) \cdot (-8)$, то помножимо в лівій частині заданого рівняння першу і четверту дужки, а також другу і третю, отримаємо: $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$.

Оскільки $x = 0$ не є коренем отриманого рівняння, то поділимо обидві частини рівняння на x^2 . Отримаємо рівняння: $\left(x + 14 + \frac{24}{x} \right) \left(x + 11 + \frac{24}{x} \right) = 4 \Leftrightarrow (x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$.

Введемо нову заміну $x + \frac{24}{x} = y$, отримаємо: $(y + 14)(y + 11) = 4$, або $y^2 + 25y + 150 = 0 \rightarrow y_1 = -15, y_2 = -10$.

Отже, $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + \frac{24}{x} = -15, \\ x + \frac{24}{x} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 15x + 24 = 0, \\ x^2 + 10x + 24 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши сукупність двох квадратних рівнянь, отримаємо корені рівняння: $x_1 = \frac{-15+\sqrt{129}}{2}$, $x_2 = \frac{-15-\sqrt{129}}{2}$, $x_2 = -6$, $x_2 = -4$.

Відповідь: $\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$; $\frac{-15-\sqrt{129}}{2}$; -6 ; -4 .

3. Рівняння виду $(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$ можна розв'язати, використовуючи метод симетризації, тобто введення нової змінної $y = x - \frac{a+b}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(6-x)^4 + (8-x)^4 = 16$.

Розв'язання. Введемо нову змінну $y = \frac{6-x+8-x}{2} = 7-x$. Тоді задане рівняння набуде вигляду: $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16 \rightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0$.

Отримали бікватратне рівняння, яке має корені: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. Оскільки $y = 7-x$, то коренями рівняння є числа: $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

Відповідь: 6 ; 8 .

4. Симетричні та кососиметричні рівняння

Рівняння степеня n $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ (1) називається *симетричним*, якщо $a_k = a_{n-k}$ для всіх $k = 0, 1, \dots, n$.

Якщо $n = 2l$, то діленням обох частин вище вказаного рівняння на x^l перейдемо до еквівалентного рівняння: $a_n x^l + a_{n-1} x^{l-1} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{l-1}} + a_0 \frac{1}{x^l} = 0$, і рівняння (1) зводиться до рівняння степеня l введенням нової змінної $z = x + \frac{1}{x}$.

Якщо $n = 2l + 1$, то безпосередня перевірка показує, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Тоді діленням (1) на $x + 1$ рівняння (1) зводиться до симетричного, степінь якого $n = 2l$.

Рівняння степеня $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, де $a_k = (-1)^k a_{n-k}$, називається *кососиметричним*.

До цього рівняння можна застосувати всі попередні міркування з урахуванням таких змін: при $n = 2l$ вводим нову змінну $z = x - \frac{1}{x}$, а при $n = 2l + 1$ одним з коренів рівняння є $x = 1$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $x = 0$ не є коренем рівняння, то поділимо обидві частини рівняння на x^2 , отримаємо: $x^2 - 2x - 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$.

Введемо заміну: $x + \frac{1}{x} = y$, отримаємо: $y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3$.

Повертаємося до заміни:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -1, \\ x + \frac{1}{x} = 3. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності коренів не має. Коренями другого рівняння є числа $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

7⁰. При розв'язуванні рівнянь з одним модулем використовується означення модуля: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ якщо } f(x) < 0. \end{cases}$

Рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $|4x - 7| = 7 - 4x$.

Розв'язання. За вказаною вище системою можна записати:

$$|4x - 7| = 7 - 4x \leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{4}, \\ 4x - 7 = 7 - 4x, \\ 4x - 7 = 4x - 7. \end{cases}$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x \leq \frac{7}{4} \\ 4x - 7 = 7 - 4x \\ 4x - 7 = 4x - 7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{4} \\ 8x = 14 \\ 0x = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{4}, \\ x = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$.

Рівняння другого класу або з декількома модулями розв'язують методом інтервалів, суть якого полягає в тому, що:

1. Знайти нулі (корені кожного модуля).
2. Отримані корені відмічаємо на числовій осі і розв'язуємо дане рівняння на кожному з інтервалів, розкриваючи знаки модуля.
3. Об'єднуємо отримані розв'язки.

Приклад. Розв'язати рівняння $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

Розв'язання. Корені модулів: 2; 3; 4.

1) При $x \leq 2$ отримаємо рівняння: $-(x - 2) - (x - 3) - (2x - 8) = 9$. Вирази, що стоять під знаками модулів набувають від'ємних значень, тому розкриваємо знак модуля, перед дужками ставимо «-». Розв'яжемо рівняння: $-(x - 2) - (x - 3) - (2x - 8) = 9$. Отримаємо корінь $x =$

1, який задовольняє умову $x \leq 2$. Отже $x = 1$ – корінь рівняння.

2) При $2 < x \leq 3$, отримаємо рівняння: $(x - 2) - (x - 3) - (2x - 8) = 9$, корінь якого $x = 0$ не задовольняє умову $2 < x \leq 3$. Отже $x = 0$ не є коренем рівняння.

3) При $3 < x \leq 4$, отримаємо рівняння: $(x - 2) + (x - 3) - (2x - 8) = 9$ при розв'язанні якого маємо неправильну рівність: $3 = 9$. Отже, рівняння $(x - 2) + (x - 3) - (2x - 8) = 9$, коренів не має. Тому початкове рівняння при $3 < x \leq 4$ також не має коренів.

4) При $x > 4$ отримаємо рівняння $(x - 2) + (x - 3) + (2x - 8) = 9$, корінь якого $x = 5,5$ задовольняє умову $x > 4$. Отже, $x = 5,5$ є коренем рівняння.

Відповідь: 1; 5,5.

При розв'язуванні рівнянь з двома модулями доцільно використовувати теорему: рівняння виду $|f(x)| = |g(x)|$ рівносильне рівнянню $f^2(x) = g^2(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння $2|x + 1| = |x - 3|$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $4(x + 1)^2 = (x - 3)^2$.

Отримаємо квадратне рівняння $3x^2 + 14x - 5 = 0$, корені якого $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -5$.

Відповідь: $-5; \frac{1}{3}$.

При розв'язуванні рівнянь третього класу потрібно розкривати знаки модуля послідовно – або зсередини, або ззовні.

Приклад. Розв'язати рівняння $|2|x - 1| + 3x - 4| = x - 2$.

Розв'язання. Можна розкрити внутрішній модуль, тоді отримаємо сукупність:

$$\left\{ \begin{array}{l} |5x - 6| = x - 2, \\ x \geq 1, \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |5x - 6| = x - 2, \\ x < 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ \begin{cases} 5x - 6 = x - 2, \\ 5x - 6 = 2 - x, \end{cases} \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ 4x = 4, \\ 6x = 8 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ x = 1, \\ x = \frac{4}{3} \end{array} \right. \rightarrow \emptyset.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ \begin{cases} x - 2 = x - 2, \\ x - 2 = 2 - x \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\emptyset$.

8⁰. Ірраціональні рівняння

Ірраціональними наз. рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком корення або під знаком дії піднесення до дробового показника степеня.

Основним методом розв'язування ірраціональних рівнянь є перетворення їх на раціональні. Ці перетворення виконуються за допомогою:

- 1) піднесення обох частин рівняння до одного степеня;
- 2) введення нових невідомих;
- 3) штучні методи.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть виникнути сторонні корені. Тому необхідною складовою розв'язання ірр. рівняння є перевірка знайдених коренів.

При розв'язуванні ірр. рівнянь використовуються теореми:

1. $\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$, якщо $a > 0$; $x \in \emptyset$, якщо $a < 0$.

$$2. \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Примітка. З двох систем вибирається та, яка простіше розв'язується.

3. Теорема про корінь парного степеня ($n \in N$):

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

4. Теорема про корінь непарного степеня ($n \in N$):

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}.$$

5. Теорема про добуток $\sqrt[n]{f(x)} \cdot g(x)$, $n \in N$:

$$\sqrt[n]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ x \in D(g). \end{cases}$$

6. Теорема про частку $\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)}$, $n \in N$:

$$\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

7. Теорема про частку $\frac{g(x)}{\sqrt[n]{f(x)}}$, $n \in N$:

$$\frac{g(x)}{\sqrt[n]{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Методи розв'язування ірраціональних рівнянь

1. Метод піднесення обох частин рівняння до одного степеня

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата.

$$2x + 5 + 2\sqrt{(2x + 5)(x - 1)} + x - 1 = 64.$$

$$2\sqrt{(2x + 5)(x - 1)} = 60 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60 - 3x \geq 0, \\ 4(2x + 5)(x - 1) = (60 - 3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 20, \\ x^2 - 372x + 3620 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 20, \\ \begin{cases} x = 10 \Rightarrow x = 10. \\ x = 362 \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. 10

2. Метод введення нових змінних (Метод заміни)

Одним з методів спрощення ірраціональних рівнянь, особливо тих, які містять корені вищих степенів, є метод заміни.

Приклад. Розв'язати рівняння $3 \cdot \sqrt[10]{x^2 - 3} + \sqrt[5]{x^2 - 3} = 4$.

Розв'язання. $\sqrt[10]{x^2 - 3} = t$, $t > 0$, тоді $\sqrt[5]{x^2 - 3} = t^2$.
Тоді $3t + t^2 = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$, $t_2 = 1$.

Враховувавши, що $t > 0$ маємо $\sqrt[10]{x^2 - 3} = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Відповідь. ± 2

3. Рівняння виду $ax^2 + bx \pm$

$$\sqrt{kax^2 + kbx + d} = c \quad \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} + \sqrt[n]{\frac{g(x)}{f(x)}} = m$$

Рівняння виду $ax^2 + bx \pm \sqrt{kax^2 + kbx + d} = c$ розв'язується методом заміни. Для цього потрібно помножити обидві частини рівняння на k : $kax^2 + kbx \pm k\sqrt{kax^2 + kbx + d} = kc$. Введемо заміну $\sqrt{kax^2 + kbx + d} = y \geq 0$. Тоді $kax^2 + kbx = y^2 - d$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1,5(x + 4)$.

Розв'язання. Помножимо дане рівняння на 2, отримаємо:

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12,$$

$$2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0.$$

Нехай $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t \geq 0$, тоді рівняння набуде вигляду: $t^2 - 2t - 8 = 0$. Розв'язавши рівняння і підставивши в заміну, отримаємо $x_1 = -2, x_2 = \frac{7}{2}$.

Відповідь. $-2; \frac{7}{2}$.

Лекція 7. Системи алгебраїчних рівнянь

План

1. Метод послідовного виключення невідомих.
2. Метод заміни
3. Метод частинної заміни.
4. Метод почленного додавання, віднімання, множення і ділення рівнянь системи.
5. Однорідні системи рівнянь.
6. Симетричні системи рівнянь

У загальному випадку система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \text{ де } x, y - \text{невідомі, } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 - \text{числа.}$$

Графіками рівнянь цієї системи є прямі лінії.

Розв'язати систему рівнянь з двома невідомими означає знайти множину пар чисел, які перетворюють рівняння системи на правильні рівності. Знайдені пари чисел є координатами точок перетину графіків рівнянь

системи. При розв'язуванні систем рівнянь використовують методи:

1. Метод послідовного виключення невідомих (метод підстановки).
2. Метод заміни.
3. Метод частинної заміни.
4. Метод додавання, віднімання, множення і ділення рівнянь системи.
5. Використання однорідності та симетричності рівнянь системи.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь з трьома невідомими використовується метод Гауса. Суть методу полягає у послідовному виключенні невідомих з третього та другого рівнянь системи.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь можливі три випадки:

1) якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок, тобто графіки рівнянь системи мають одну спільну точку, координати якої є розв'язком системи.;

2) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язку, тобто графіки рівнянь є паралельними прямими;

якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків, тобто графіки рівнянь збігаються.

Розглянемо методи розв'язування систем рівнянь.

1⁰. Метод послідовного виключення невідомих.

Метод послідовного виключення невідомих ефективно використовувати у випадках, коли одне з рівнянь системи лінійне. Тоді в цьому рівнянні потрібно виразити одне невідоме через інше, підставити отриманий вираз у

друге рівняння та розв'язати його як рівняння з одним невідомим.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = -8, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. $\begin{cases} y = -8 - x, \\ x^2 + (-8 - x)^2 + 6x + 2(-8 - x) = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$x^2 + 64 + 16x + x^2 + 6x - 16 - 2x = 0,$$

$$2x^2 + 20x + 48 = 0,$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0,$$

$$x_1 = -6, x_2 = -4.$$

За допомогою першого рівняння системи знаходимо:

$$y_1 = -2, y_2 = -4.$$

Відповідь: $(-6; -2)$, $(-4; -4)$.

2⁰. Метод заміни.

Використання методу заміни розглянемо у поданому нижче завданні.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо заміну:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = a, \\ \frac{1}{x-y} = b. \end{cases}$$

Тоді система набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + 4b = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b, \\ 3(2 - b) + 4b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b, \\ 6 - 3b + 4b = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Повертаємося до заміни й отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1, \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ 1 - y - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 0).

3⁰. Метод частинної заміни.

Використання методу частинної заміни розглянемо у поданому нижче завданні.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\frac{x+y}{x-y} = t$, тоді перше рівняння системи набуде вигляду: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

$$t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 2 - 5t}{2t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + 2 - 5t = 0, \\ t \neq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, t_1 = 2.$$

Повернемося до заміни і, враховуючи друге рівняння системи, отримаємо дві системи:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y, \\ 9y^2 + y^2 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + y^2 = 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y, \\ y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 2. \end{cases}$$

Далі розв'язання є очевидним.

Відповідь: $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}; \sqrt{2}),$
 $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (3\sqrt{2}; \sqrt{2}).$

4⁰. Метод почленного додавання, віднімання, множення і ділення рівнянь системи.

За допомогою поданих нижче правил 1 – 3 рівняння у системах можна додавати, віднімати, множити та ділити з метою спрощення одного з рівнянь системи.

1. $\begin{cases} A = B, \\ C = D \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A \pm C = B \pm D, \\ A = B \text{ або } C = D. \end{cases}$
2. $\begin{cases} A = B, \\ C = D \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} AC = BD, \\ C = D \neq 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} A = B, \\ C = D \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{C} = \frac{B}{D}, \\ C = D \neq 0. \end{cases}$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y - xy = 4, \\ 3x + y + 3xy = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } & \begin{cases} 2x - 3y - xy = 4, \\ 3x + y + 3xy = 3 \end{cases} \leftrightarrow \\ & \begin{cases} 6x - 9y - 3xy = 12, \\ 3x + y + 3xy = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 9x - 8y = 15, \\ 3x + y + 3xy = 3 \end{cases} \leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = \frac{8y+15}{9}, \\ \frac{8y+15}{3} + y + \frac{8y+15}{3}y - 3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8y+15}{9}, \\ 4y^2 + 13y + 3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Коренями квадратного рівняння є числа $y_1 = -3$, $y_2 = -\frac{1}{4}$. Тоді з першого рівняння системи отримаємо: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{13}{9}$.

Відповідь: $(-1; -3)$, $(\frac{13}{9}; -\frac{1}{4})$.

5⁰. Однорідні системи рівнянь.

Рівняння з двома невідомими $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n = 0$ називається однорідним рівнянням.

В однорідному рівнянні кожний доданок містить добуток степенів x і y , сума показників яких стала. Якщо одне з двох рівнянь системи (або обидва) однорідні, то при $y = 0$ отримаємо: $x = 0$, тобто пара $(0;0)$ – розв'язок.

Якщо $y \neq 0$, то $x \neq 0$, тоді потрібно розділити ліву і праву частини рівняння на найбільший степінь відомих x або y .

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{5y}{x} + \frac{6y^2}{x^2} = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Вказівка. Використати метод частинної заміни. Пара чисел $(0; 0)$ не задовольняє друге рівняння системи, тому не є розв'язком системи рівнянь.

Відповідь: $(3; 1); (-3; -1); (2\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

6⁰. Симетричні системи рівнянь.

Система рівнянь з n невідомими називається симетричною, якщо вона не змінюється при перестановці невідомих.

Якщо невідомих два (x і y), то такі системи можна розв'язувати за допомогою введення нових невідомих: $u = x + y$, $v = xy$.

При цьому використовуються такі рівності:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv,$$

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$, за допомогою яких можна виразити комбінації невідомих $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ через відомі u і v .

Симетричні системи трьох рівнянь з трьома невідомими x , y і z розв'язуються за допомогою введення

нових невідомих: $x + y + z = u$, $xy + yz + xz = v$, $xyz = w$.

При цьому використовуються такі рівності:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + xz) + 3xyz = u^3 - 3uv + 3w.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x + y = u$, $xy = v$, $(x + y)^2 = u^2$, $x^2 + 2xy + y^2 = u^2$, $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, тоді дана система набуде вигляду:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 12, \\ u = 7. \end{cases}$$

Повертаємося до заміни $\begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 7 \end{cases}$, розв'язавши отриману систему рівнянь, дістанемо корені (3; 4), (4; 3).

Відповідь: (3; 4), (4; 3).

Лекція 8. Алгебраїчні нерівності та їх системи

План

1. Загальні положення
2. Лінійні нерівності
3. Квадратичні нерівності
4. Дробово-раціональні нерівності та нерівності вищих степенів
5. Нерівності з модулями
6. Системи алгебраїчних рівностей
7. Ірраціональні нерівності

1⁰. Загальні положення

Нерівності розрізняють числові та умовні (із змінною). Для запису нерівності використовують знаки

строї нерівності: менше «<», більше «>» та нестрогої: менше рівне (небільше) «≤», більше рівне (неменше) «≥».

Вираз, який записано зліва від знака нерівності, називають лівою частиною нерівності, а вираз, який записано справа – правою частиною нерівності. Нерівність, обидві частини якої – числа, називають числовою нерівністю.

При вивченні властивостей числових нерівностей доцільно скористатися властивостями числових нерівностей:

1. Число a називається більшим за число b , якщо різниця $a - b$ – додатне число.
2. Число a називається меншим від числа b , якщо різниця $a - b$ – від’ємне число.
3. При будь-яких a і b , якщо $a < b$, то $b > a$ і, навпаки, якщо $a > b$, то $b < a$.
4. При будь-яких a , b і c якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$; якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$ (властивість транзитивності нерівностей).
5. Якщо $a > b$ і c – будь-яке число, то $a + c > b + c$; якщо $a < b$ і c – будь-яке число, то $a + c < b + c$.
6. Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.
7. Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.
8. Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$.
9. Якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$.
10. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.
11. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.
12. Якщо $a < b$ і $c < d$, (a , b , c – додатні числа) то $ac < bd$.
13. Якщо $a < b$, $a > 0$, $b > 0$ то $a^2 < b^2$.
14. Якщо $a < b$ (a і b – числа одного знака), то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

15. Якщо $a > b$ (a і b – числа одного знака), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Множина розв'язків нерівності або системи нерівностей позначається на числових осях. При цьому потрібно запам'ятати правило позначень на числовій осі: для знаків $<$, $>$ число позначається «виколотою» точкою та круглою дужкою; для знаків $\leq$, $\geq$ число позначається зафарбованою точкою та квадратною дужкою.

При розв'язуванні нерівностей знаходження ОДЗ є необхідною складовою розв'язку. Всі перетворення нерівностей мають бути рівносильними, тому що за наявності нескінченної множини розв'язків перевірка неможлива. Кожне значення x з ОДЗ називається розв'язком нерівності, якщо при підстановці його у нерівність отримаємо правильну числову нерівність. Всі розв'язки нерівності утворюють деяку множину X , що є підмножиною ОДЗ. Нерівність може не мати розв'язків $X = \emptyset$, мати множину розв'язків (інтервал, відрізок) або виконуватися при всіх $x \in R$.

2°. Лінійні нерівності

Лінійні нерівності – нерівності виду $ax <> b$, де a , b – числа, x змінна.

Розглянемо нерівність $ax > b$. Якщо $a > 0$, то $ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$; якщо $a < 0$, то $ax > b \Rightarrow x < \frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$; якщо $a = 0$, то $0x > b$ правильна за будь-якого значення x , якщо b – від'ємне число ($b < 0$), і не має розв'язків, якщо b – невід'ємне число ($b \geq 0$).

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує.

Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають рівносильними. Нерівності, що не мають розв'язків, також є рівносильними.

Нерівності зі змінними мають такі властивості:

- 1) Якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 2) Якщо в нерівності перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 3) Якщо обидві частини нерівності поділити або помножити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 4) Якщо обидві частини нерівності поділити або помножити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Приклад. Розв'язати нерівність $1 + 2x > 7$

Розв'язання. Використовуючи вказані вище властивості, отримаємо:

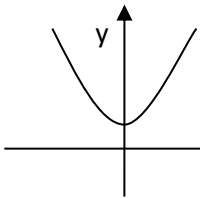
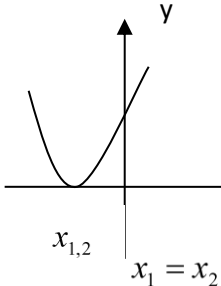
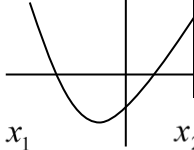
$$2x > 6, x > 3.$$

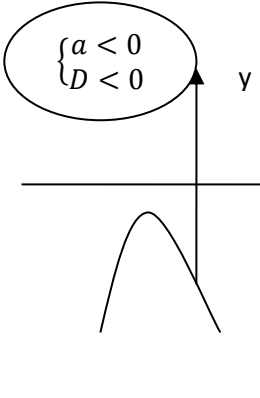
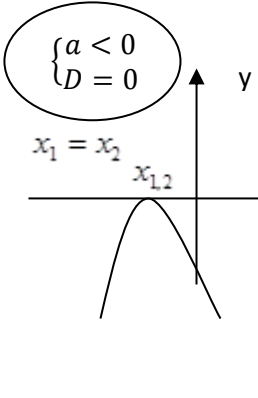
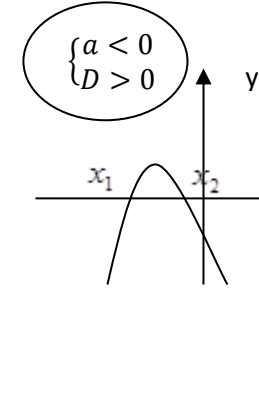
Відповідь: $(3; +\infty)$.

3⁰. Квадратні нерівності

Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a , b , і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною).

При розв'язуванні квадратних нерівностей корисно уявити собі ескіз графіка лівої частини нерівності залежно від значення дискримінанта D .

 $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \end{cases}$ $x_{1,2}$ $x_1 = x_2$	 $\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \end{cases}$ $x_1 \neq x_2$
$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in R \setminus \{x_b\}$ $(x_b = x_{1,2} = \frac{-b}{2a})$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x_b = x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in [x_1; x_2]$

		
$\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \end{cases}$
$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_b\}$ $(x_b = x_{1,2} = \frac{-b}{2a})$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x_b = x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in [x_1; x_2]$

Розв'язки квадратних нерівностей можна розглядати як проміжки, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних (для нерівності $ax^2 + bx + c > 0$), невід'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$), від'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c < 0$) і недодатних (для нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$) значень. Отже, щоб розв'язати квадратичну нерівність, достатньо знайти відповідні проміжки знакосталості квадратичної функції.

Приклад. Розв'язати нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^2 + 3x - 4$. Графіком якої є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Щоб знайти нулі функції, обчислимо дискримінант: $D = 9 + 16 = 25$; $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

Отже, парабола перетинає вісь x у точках 1 і -4 . Будуємо схематично графік функції $y = x^2 + 3x - 4$. За графіком бачимо, що дана функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (-4; 1)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 < 0$ є проміжок $(-4; 1)$.

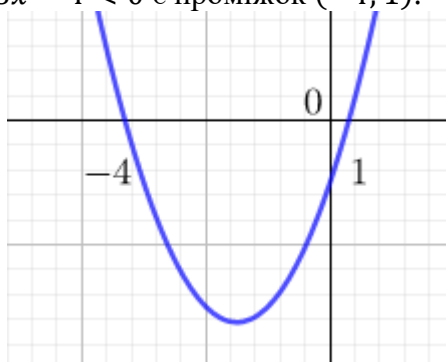


Рис.46

Відповідь: $(-4; 1)$.

Для запропонованого способу розв'язування не мають значення положення вершини параболи або розташування параболи відносно осі y . Важливо лише знати абсиси точок перетину параболи з віссю x (нули функції) і напрям віток параболи (угору чи вниз).

Схема дослідження квадратних нерівностей:

1. Знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують). (Якщо ж не існують схематично побудуємо графік і врахувавши знак нерівності вкажемо розв'язки. **Важливо, не завжди якщо дискримінант від'ємний не існує розв'язків нерівності (дивись таблицю вище))**)
2. Якщо нерівність має строгий знак ($>$ або $<$), то корені квадратного тричлена позначити на осі x

«виколотими» точками (вони виключатимуться з множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\leq$ або $\geq$), то корені позначаються зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків).

3. Схематично зобразити графік функції $y = ax^2 + bx + c$, враховуючи напрям віток параболи та точки її перетину з віссю x , (якщо вони існують).

4. Знайти на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність.

5. Записати відповідь.

Приклад. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 < 0$.

Розв'язання. Обчислимо дискримінант рівняння $-x^2 + 2x - 7 = 0$. $D = 4 - 28 = -24$. Оскільки $D < 0$, відповідно, парабола $y = -x^2 + 2x - 7$ вісь x не пертинає, а її вітки напрямлені вниз: $a < 0$.

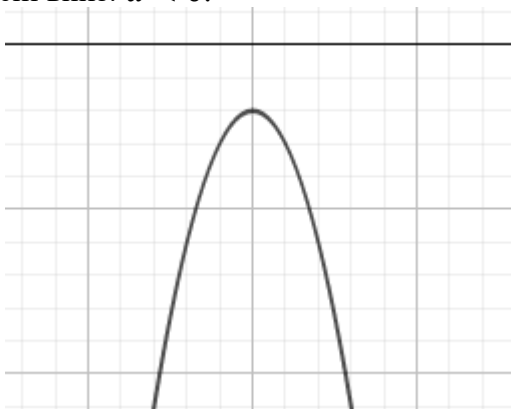


Рис.47

З малюнка видно, що всі точки параболи лежать нижче осі x , то множиною розв'язків нерівності $-x^2 + 2x - 7 < 0$ є множина всіх чисел $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

Вище розглянутий спосіб розв'язування квадратних рівнянь є графічним способом, тобто за допомогою графіка.

Розглянемо аналітичний спосіб (Метод систем).

Нехай маємо квадратні нерівності:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Оскільки x_1 та x_2 корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то нерівність можемо переписати так:

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Добуток двох виразів більший нуля тоді коли:

$$\begin{cases} (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases}.$$

Розглянемо тепер нерівність

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Тоді, якщо x_1 і x_2 корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то нерівність можна записати таким чином:

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

Добуток двох виразів менший нуля, тоді коли один з них від'ємний, а інший додатний.

Матимемо:

$$\begin{cases} (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2 \end{cases}.$$

Нерівності виду:

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

розв'язуються аналогічно.

Приклад. Розв'яжіть квадратну нерівність методом систем

$$x^2 - 25x + 150 \leq 0.$$

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $x^2 - 25x + 150 = 0$ за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 25 \\ x_1 \cdot x_2 = 150 \end{cases}$$

Маємо що $x_1 = 10$, $x_2 = 15$.

Перепишемо тоді нерівність таким чином:

$$(x - 10)(x - 15) \leq 0.$$

Добуток двох виразів менший або рівний нуля, тоді коли один з них від'ємний, а інший додатний. Матимемо:

$$\begin{cases} (x - 10) \leq 0 \\ (x - 15) \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x - 10) \geq 0 \\ (x - 15) \leq 0 \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 15 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 15 \end{cases}$$

Як бачимо перша система немає розв'язків, а друга система має розв'язки: $10 \leq x \leq 15$.

Відповідь: $x \in [10; 15]$.

4°. Дробово-раціональні нерівності та нерівності вищих степенів

Дробово-раціональною нерівністю називається нерівність виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > \text{ або } < 0, \text{ де } P(x) \text{ і } Q(x) - \text{многочлени.}$$

Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність можна звести до раціональної.

- 1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0;$
- 2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0;$
- 3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$
- 4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

Дробово-раціональні нерівності розв'язуються методом інтервалів так і методом систем. Розглянемо

простіший метод, а саме метод інтервалів, суть якого полягає в насуپному:

1. Знаходимо корені чисельника і знаменника лівої частини $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Для цього прирівнюємо многочлени чисельника та знаменника до нуля: 1) $P(x) = 0$; 2) $Q(x) = 0$.

Всі знайдені корені чисельника та знаменника позначаємо на одній числовій осі. При цьому корені знаменника завжди позначаємо «виколотою» точкою.

Розв'язувати рівняння $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ потрібно з урахуванням **кратності коренів!**

Кратність коренів – це кількість однакових коренів рівняння.

Кратність коренів може виникнути при розв'язуванні рівнянь двох видів:

а) квадратного рівняння, дискримінант якого дорівнює 0, у цьому випадку рівняння має один корінь кратності 2;

б) рівняння виду $(ax + b)^n = 0$, це рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{a}$ кратності n .

2. Будуємо криву знаків для лівої частини нерівності $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Побудова кривої знаків (кажуть «пускаємо змійку») починається з крайнього інтервалу – правого. Для побудови кривої знаків потрібно визначити знак, якого набуває нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ на кожному з проміжків числової осі.

(Примітка, якщо кратність кореня парна, то при переході через цей корінь змійка знаку не змінює, якщо непарна, то при переході змійка змінює свій знак на протилежний)

3. На отриманому малюнку штрихами відмічаємо ті проміжки, що відповідають знаку нерівності, який має нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Якщо нерівність нестрога, то потрібно замалювати ті корені чисельника, яких немає в знаменнику.

4. З отриманого малюнка виписати відповідь у вигляді об'єднання заштрихованих інтервалів.

Нерівність виду $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) <> 0$ також розв'язуються методом інтервалів [10].

Приклад. Розв'язати нерівність $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Винесемо спільний множник x^2 за дужки: $x^2(x^2 + 8x + 12) \geq 0$, шляхом перетворення знайдемо корені лівої частини нерівності:

$$x^2(x^2 + 8x + 12) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0, \\ x^2 + 8x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 0, \\ x_3 = -6, x_4 = -2. \end{cases}$$

Запишемо дану нерівність у вигляді $x^2(x+6)(x+2) \geq 0$. Знайдені корені позначаємо на числовій осі і будуємо криву знаків, попередньо врахувавши, що корінь $x = 0$ має кратність кореня 2 (парну), тобто змійка при проходженні через цю точку свого знаку не змінить (з яким знаком прийшла, з таким знаком і піде):

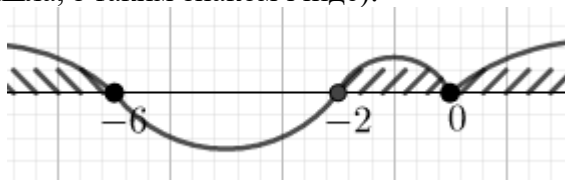


Рис.48

Отже, $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

Таким чином, для розв'язання таких нерівностей використовують загальний метод інтервалів.

1. Привести раціональну нерівність до виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_m}$, $k_m \geq 1$, $k_m \in \mathbb{N}$.

2. Розташувати нулі множників на осі x у відповідному порядку.

3. Над проміжком праворуч, починаючи від найбільшого нуля многочлена $P(x)$ поставити знак «+». Потім, рухаючись справа наліво, при переході через черговий нуль змінювати знак на протилежний, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у непарному степені, і зберігати знак, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у парному степені.

Приклад. Розв'язати нерівність $(x + 7)^4(x + 4)^3(x - 2)^2(x - 3) < 0$.

Розв'язання. Розташуємо нулі множників -7 , -4 , 2 , 3 на осі x . Позначимо знаки $P(x)$.

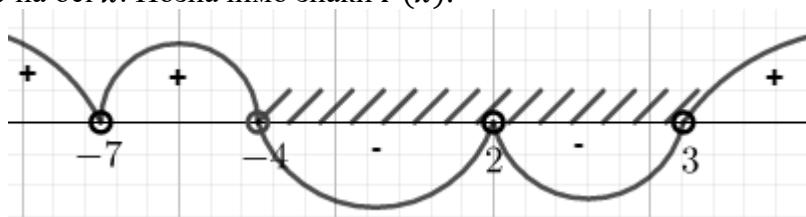


Рис.49

За малюнком добре видно, що $(x + 7)^4(x + 4)^3(x - 2)^2(x - 3) < 0$ якщо $x \in (-4; 2) \cup (2; 3)$.

Відповідь: $(-4; 2) \cup (2; 3)$.

5°. Нерівності з модулями

Нерівності з модулями поділяються на класи:

- 1) З одним модулем;
- 2) З кількома модулями;
- 3) З модулем всередині модуля.

Розглянемо нерівність $|x| < a$, де $a > 0$. Скориставшись геометричним змістом модуля числа.

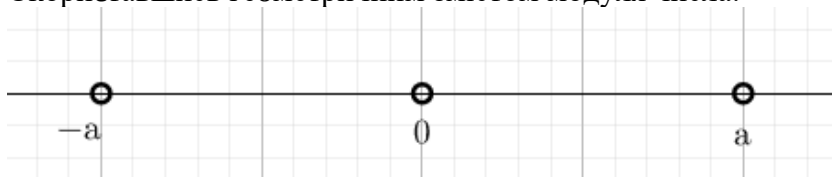


Рис.50

Нерівність виду $|x| < a$ задовольнятимуть координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань меншу, ніж a , тобто $-a < x < a$, $x \in (-a; a)$. Якщо ж $a \leq 0$ то дана нерівність розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати нерівність $|5q - 1| < 9$.

Розв'язання. Розкривши модуль, отримаємо:
 $\begin{cases} 5q - 1 < 9, \\ 5q - 1 > -9, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5q < 10; \\ 5q > -8; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q < 2; \\ q > -1,6. \end{cases}$

Отже, $q \in (-1,6; 2)$.

Відповідь: $(-1,6; 2)$.

Нерівність виду $|x| > a$, де $a > 0$ задовольнятимуть координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a , тобто нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases} x > a; \\ x < -a. \end{cases}$

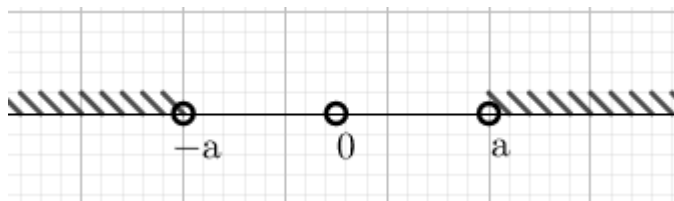


Рис.60

Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| > a$ є множина $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| > a$ є множина $x \in (-\infty; +\infty)$, оскільки модуль числа завжди більший за від'ємне число.

Приклад. Розв'язати нерівність $|4c - 5| > 7$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases} 4c - 5 > 7; \\ 4c - 5 < -7, \end{cases}$ виконавши перетворення, отримаємо:
 $\begin{cases} c > 3; \\ c < -0,5. \end{cases}$ Отже, $c \in (-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$.



Рис.51

Відповідь: $(-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$.

Щоб розв'язати нерівність $|f(x)| < |g(x)|$, можна застосувати піднесення обох частин нерівності до квадрата [15, с. 80].

Приклад. Розв'язати нерівність $|2x - 1| \leq |3x + 1|$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата: $(2x - 1)^2 \leq (3x + 1)^2$; виконавши деякі перетворення, отримаємо: $5x^2 + 10x \geq 0$; $x(x + 2) \geq 0$;

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{Розв'язком сукупності є: } x \in (-\infty; -2) \cup$$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x + 2 \leq 0. \end{cases}$$

$$(0; +\infty).$$

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Якщо нерівності містять під знаком модуля кілька виразів, то для їх розв'язування можна застосовувати метод інтервалів.

Приклад. Розв'язати нерівність $|2x + 6| + |x - 4| > 10$.

Розв'язання. Позначимо на координатній прямій точки -3 і 4 , які перетворюють модулі в нуль. Тепер розглянемо нерівність на кожному з утворених проміжків.

1) Якщо $x < -3$; то дане рівняння набуде вигляду: $-2x - 6 - x + 4 > 10$; $-3x > 12$; $x < -4$. Отож, $x \in (-\infty; -4)$.



Рис.52

2) Якщо $-3 \leq x \leq 4$; матимемо: $2x + 6 - x + 4 > 10$; $x > 0$. Отже, $x \in (0; 4)$.

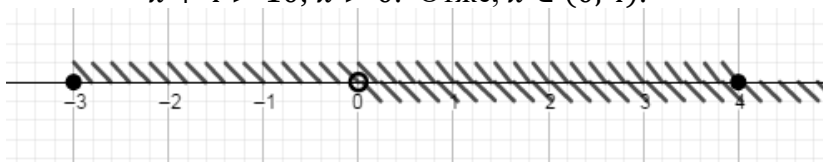


Рис.53

3) Якщо $x > 4$; то дане рівняння матиме вигляд: $2x + 6 + x - 4 > 10$; $3x > 8$; $x > 2\frac{2}{3}$.
Отже, $x \in (4; +\infty)$.

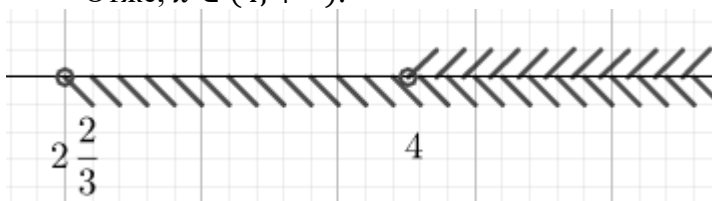


Рис.54

Об'єднавши всі отримані розв'язки, отримаємо розв'язок нерівності: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

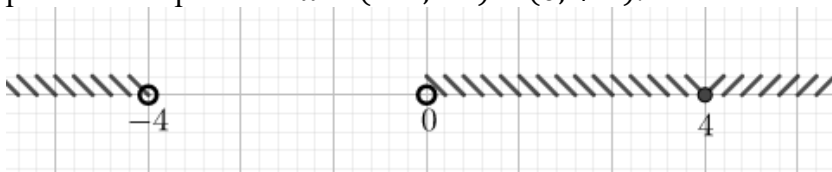


Рис.55

Відповідь: $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

6°. Системи алгебраїчних нерівностей

При розв'язуванні системи нерівностей з одним невідомим необхідно розв'язати кожен з нерівностей системи і знайти перетин множин отриманих розв'язків.

Для цього для кожної нерівності системи необхідно побудувати числову вісь, показати на осі множину розв'язків нерівності, знайти перетин множин розв'язків всіх нерівностей, що входять до системи. Якщо всі нерівності, що входять до системи, лінійні, то множину розв'язків такої системи можна будувати на одній числовій осі.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x + 3 < 12 + 5x, \\ 2x + 2 < 22 - 3x. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо обидві нерівності окремо. З першої нерівності отримаємо рівносильну нерівність $3x > -9 \rightarrow x > -3$. З другої нерівності маємо $5x < 20 \rightarrow x < 4$. Отже дану систему можна замінити рівносильною $\begin{cases} x > -3, \\ x < 4. \end{cases}$

Зобразимо на координатній прямій множини розв'язків кожної нерівності отриманої системи і позначимо їх штриховими лініями різного нахилу. Множина розв'язків системи утвориться в результаті перетину цих ліній.

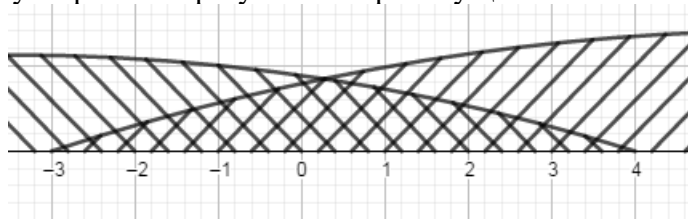


Рис.56

Відповідь: $(-3; 4)$.

Подвійні нерівності також можна записати як систему нерівностей

Подвійні нерівності – це нерівності виду $a < f(x) < b$. При їх розв'язуванні використовується правило: $a < f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < b \end{cases}$.

Приклад. Розв'язати нерівність $5 < 2b - 7 \leq 9$.

Розв'язання. Запишемо дану нерівність у вигляді системи нерівностей: $\begin{cases} 2b - 7 > 5, \\ 2b - 7 \leq 9. \end{cases}$ Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 2b > 12, \\ 2b \leq 16; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b > 6, \\ b \leq 8; \end{cases} \text{ отже, } 6 < b \leq 8, \text{ тобто } b \in (6; 8].$$

Відповідь: $(6; 8]$.

7°. Ірраціональні нерівності

Теорема, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних нерівностей

Теорема 1. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}.$$

Теорема 2. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}.$$

Теорема 3. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

Теорема 4. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}.$$

Теорема 5. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}.$$

Теорема 6. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}.$$

Теорема 7. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}.$$

Теорема 8. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}.$$

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2 - 3x} < x + 7$.

Розв'язання: $\sqrt{-x^2 - 3x} < x + 7 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 7 > 0 \\ -x^2 - 3x \geq 0 \\ -x^2 - 3x < (x + 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 0].$$

Відповідь. $x \in [-3; 0]$

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{2x^2 + 6x} \leq 0$.

Розв'язання: $\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{2x^2 + 6x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 6x < 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{cases}$

Розв'язавши кожену нерівність окремо і наклавши розв'язки, отримаємо $(-3; 0) \cup \{0,5; 2\}$.

Відповідь. $(-3; 0) \cup \{0,5; 2\}$

Лекція 9. Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності

План

1. Показникові рівняння
2. Показникові нерівності

3. Логарифмічні рівняння
4. Логарифмічні нерівності

1⁰. Показникові рівняння

Показникові рівняння відносяться до трансцендентних рівнянь. Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме входить тільки до показників степенів при сталих основах.

Перерахуємо *основні види рівнянь*, які прийнято називати позакниковими. Для будь-яких $a > 0, b > 0, a \neq 1$:

1. $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$.
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
3. $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$.
4. $f(a^x) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$, якщо $a^x = t, t > 0$.
5. $g(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow g(y) = 0$, якщо $a^{f(x)} = y, y > 0$.
6. Показниково – степеневі рівняння $[u(x)]^{f(x)} = [u(x)]^{g(x)}$.

До *методів* розв’язування показникових рівнянь належать:

1. Розв’язування показникових рівнянь на основні властивостей степенів.
2. Метод заміни змінних.
3. Метод розкладання рівняння на множники.
4. Штучні методи.

Розглянемо кожний метод окремо.

Розв’язування показникових рівнянь на основні властивостей степенів: два степеня з однією і тією ж додатньою і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх показники.

Теорема: Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Доведення: Доведемо, що якщо $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$. Дійсно, так як показникова функція строго

монотонна, то з рівності її значень $a^c = a^d$, слідує рівність показників $c = d$. Навпаки: якщо $f(x) = g(x)$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Використовуючи властивості степеня, рівняння

$$a^x = b, \text{ де } a > 0, a \neq 0, b > 0,$$

(1)

потрібно

розв'язувати

так:

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція $f(x)$, тобто рівняння має вигляд

$$a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0,$$

(2)

то за допомогою логарифмування обох частин цього рівняння (це можливо, коли обидві частини рівняння додатні), приходимо до еквівалентного рівняння

$$f(x) = \log_a b.$$

Деякі показникові рівняння зводяться до виду (1) або (2) за допомогою рівностей:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $4^x = 8^{2x-3}$.

Розв'язання: Оскільки

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}, \quad 8^{2x-3} = (2^3)^{2x-3} = 2^{6x-9}, \text{ то}$$

$$2^{2x} = 2^{6x-9} \Leftrightarrow 2x = 6x-9 \Leftrightarrow x = 9/4.$$

Рівняння виду $a^{f(x)} = 1, a > 0, a \neq 1$, рівносильно рівнянню $f(x) = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $10^{x^2+x-2} = 1$.

Розв'язання: Дане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 + x - 2 = 0$. З цього дане рівняння має два корня: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Приклад. Розв'язати рівняння $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язання: Перепишемо дане рівняння у вигляді
 $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Використовуючи властивості членів пропорції, маємо

$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}},$$

після спрощення $3^{4-x} = 2^{4-x}$. Перетворивши дане рівняння до виду $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} = 1$, отримуємо $4-x=0$, звідки слідує, що $x=4$.

Розв'язування показникових рівнянь, які зводяться заміною змінних до алгебраїчного рівняння.

Якщо показникове рівняння має вигляд

$$g(a^{f(x)}) = 0,$$

(3)

то заміною $a^{f(x)} = y$ рівняння зводиться до виду $a^{f(x)} = y_i$, де y_i - корені рівняння $g(y) = 0$. Так, наприклад, рівняння $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$, де A, B, C - деякі числа, $a > 0, a \neq 1$, зводиться до розв'язування рівносильної йому сукупності рівнянь $\begin{cases} a^x = y_1 \\ a^x = y_2 \end{cases}$, де y_1, y_2 - корені рівняння $Ay^2 + By + C = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння
 $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

Розв'язання: Позначимо $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = y$ і роблячи заміну змінних, отримуємо квадратне рівняння

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0, \text{ корнями якого будуть } y_1 = 4, y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Таким чином розв'язання даного рівняння звелось до розв'язування рівнянь

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4, \quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -\frac{3}{2}$$

Друге рівняння розв'язків не має, тому що $2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$ при всіх допустимих значеннях x . З першого рівняння отримаємо $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$.

$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$, підносимо обидві частини рівняння до квадрата, маємо $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$. Зведемо подібні доданки, отримаємо єдиний корінь $x = \frac{3}{2}$.

Перевіркою переконуємося, що цей корінь задовольняє початкове рівняння.

Показникові рівняння, основи степенів яких є послідовними членами геометричної прогресії, а показники степеня однакові, зводяться до рівнянь виду (3) діленням на будь-який з крайніх членів.

Приклад. Розв'язати рівняння
 $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0.$

Розв'язання: Розділимо обидві частини рівняння на 9^x . Маємо

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0.$$

Позначаючи $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ і виконуючи заміну змінних, отримуємо рівняння $6y^2 - 13y + 6 = 0$, коренями якого будуть $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{2}{3}$. Таким чином розв'язок рівняння зводиться до розв'язування двох простіших показникових рівнянь

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Рівняння виду $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$, де α, β - дійсні числа, а основи a та b є взаємооберненими додатніми числами ($ab=1$), можна розв'язувати наступним чином. Ввести змінну $t = a^{f(x)}$ та, використовуючи рівність ($ab=1$), перейти від рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ до рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$

Тоді рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ буде рівносильне сукупності двох показникових рівнянь: $\begin{cases} a^{f(x)} = t_1 \\ a^{f(x)} = t_2 \end{cases}$, де t_1, t_2 - корені рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$, якщо це рівняння немає розв'язків, то і рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ також не має розв'язків.

Рівняння виду $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$, де $f(x), \varphi(x), p(x)$ - функції невідомого x , називаються степеневопоказниковими рівняннями. Еквівалентні цьому

рівнянню $f(x)=1$ та системі $\begin{cases} f(x)>0 \\ \varphi(x)=p(x). \end{cases}$ Тобто

розв'язуються наступним чином:

1. Перевіряємо, чи не будуть для $f(x)>0$ корені рівняння $f(x)=1$ коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$;

2. Перевіряємо, якщо при $f(x)=-1$, функції $\varphi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корені рівняння $f(x)=-1$, будуть і коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$.

3. Тоді для $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$ рівняння

$(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$ еквівалентно рівнянню $\varphi(x)=p(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(1+x^2)^{1+\sqrt{x}} = (1+x^2)^{2+\sqrt{x}}.$$

Розв'язання: $D(f): x \geq 0$.

1) Знаходимо корені початкового рівняння серед розв'язків рівняння

$$(1+x^2=1) \Leftrightarrow (x^2=0) \Leftrightarrow (x=0).$$

Перевіркою переконаємось, що $x=0$ належить області допустимих значень та зодовольняє початкове рівняння, тобто є коренем рівняння.

2) Для $\begin{cases} 1+x^2 > 0, \\ 1+x^2 \neq 1 \end{cases}$ данне рівняння

еквівалентне рівнянню

$$(1+\sqrt{x}=2+\sqrt{x}) \Leftrightarrow (1=2)$$

Отримуємо неправильну числову рівність. Це говорить про те, що у данному випадку рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x=0$.

Приклад:

Розв'язати

рівняння

$$(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}.$$

Розв'язання: $D(f): (x > 2)$

1) $x-2=1 \Leftrightarrow x_1=3$. Бачимо, що $x_1 \in D(f)$ задовільняє дане рівняння, тобто є його коренем.

2) $x-2=-1 \Leftrightarrow x_2=1$. Перевіряємо значення $\varphi(x)$, $p(x)$ при $x_2=1$, $\varphi(x)=x^2+2x$, $\varphi(1)=1+2=3$; $p(x)=11x-20$, $p(1)=11-20=-9$. Отримали, що функції набувають одночасно непарні значення. Тобто $x_2=1$ є коренем рівняння.

3) для $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$ початкове рівняння еквівалентне рівнянню

$$(x^2+2x=11x-20) \Leftrightarrow (x^2-9x+20=0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=4, \\ x_4=5. \end{cases}$$

Відповідь: $\{1, 3, 4, 5\}$

Тобто коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$, вважаються тільки розв'язки змішаної системи $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = p(x) \end{cases}$

і ті значення x , для яких $f(x)=1$, якщо при цих значеннях визначені $\varphi(x)$ та $p(x)$. Також додатково перевіряють: якщо при $f(x)=-1$, функції $\varphi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корені рівняння $f(x)=-1$, будуть і коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$.

Функція виду $(f(x))^{\varphi(x)}$ визначена тільки при $f(x) > 0$,

тому те значення x , яке формально задовольняє рівність $(f(x))^{p(x)} = (f(x))^{p(x)}$, але при яких $f(x) \leq 0$, не є коренем рівняння $(f(x))^{p(x)} = (f(x))^{p(x)}$.

Штучні або спеціальні методи розв'язування показникових рівнянь

Деякі рівняння зводяться до розглянутих вище, якщо перетворити окремі члени рівняння, використавши основну логарифмічну тотожність.

Приклад. Розв'язати рівняння $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

Розв'язання: Перетворимо другий доданок у лівій частині рівняння:

$$x^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}.$$

Підставляючи одержаний вираз в початкове рівняння, отримаємо

$$2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162.$$

Рівняння $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162$ еквівалентне рівнянню $\log_3^2 x = 4$, яке, в свою чергу, еквівалентне двом рівнянням

$$\log_3 x = 2, \quad \log_3 x = -2.$$

Розв'язуючи останні рівняння, отримуємо $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}$.

$$\text{Відповідь: } x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$$

Деякі рівняння, які містять невідоме у показнику степеня, вдається розв'язати за допомогою дослідження функції, які входять до лівої та правої частини рівняння. Монотонність функції часто дозволяє визначити число коренів рівняння, а іноді і знайти значення.

Приклад. Розв'язати рівняння $7^{6-x} = x + 2$.

Розв'язання: Корінь $x=5$ може бути знайдений підбором. Інших розв'язків рівняння не має, так як функція $f(x)=7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x)=x+2$ монотонно зростає, тобто графіки цих функцій можуть перетинатися не більше ніж один раз.

Тобто графічним способом не важко знайти наближенні розв'язки рівнянь такого виду $a^{f(x)} = \varphi(x)$. Знання графіків функції $y = a^{f(x)}$ та $y = \varphi(x)$ не рідко дозволяє визначити число розв'язків рівняння та їх наближені, а іноді і точні значення.

2⁰. Показникові нерівності

Означення: Нерівності, де хоча б одна з функцій показникова, називаються показниковими нерівностями.

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей базується на використанні властивостей монотонності показникової функції.

При розв'язуванні показникових нерівностей виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$, $f(x), g(x)$ - деякі функції відносно змінної x , використовуються дві теореми:

Теорема 1. Якщо $a > 1$, то нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$.

Теорема 2. Якщо $0 < a < 1$, то нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Використанням теорем називають логарифмуванням нерівності.

Приклад. Розв'язати нерівність $1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25$

Розв'язання. Оскільки $5^0 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 5^2$, то $0 < 1 - \frac{1}{2}x < 2$,

$$-2 < \frac{1}{2}x - 1 < 0, \quad -1 < \frac{1}{2}x < 1, \text{ і, звідси } -2 < x < 2$$

Відповідь: $-2 < x < 2$.

Приклад. Розв'язати нерівність $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leq (0,1)^{2x-3}$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності $4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$.

Таким чином, початковій нерівності задовольняють всі дійсні числа.

Відповідь. $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язування будь-якої нестрогої показникової нерівності відрізняється від розв'язування відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв'язків коренів відповідного рівняння.

Нерівність виду $a^{f(x)} \geq b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, може бути розв'язана за допомогою логарифмування обох частин (це можливо, тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \leq 0$ нерівність справедлива для будь-якого x з ОДЗ нерівності. А нерівність $a^{f(x)} \leq b$ при $b \leq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати нерівність $3^{2x-1} < 11^{3-x}$.

Розв'язання: Обидві частини нерівності додатні при будь-якому значенні x . Прологарифмувавши обидві частини нерівності за основою 3, отримаємо нерівність $2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x)$ рівносильну початковій.

Таким чином $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Звідси з врахуванням того, що $2 + \log_3 11 > 0$, знаходимо всі розв'язки початкової нерівності - проміжок

$$\text{Відповідь. } -\infty < x < \frac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}.$$

Розглянемо деякі спеціальні методи розв'язування показникових нерівностей.

Метод розкладання на множники та ділення нерівності на множник виду $a^{f(x)} > 0$

Приклад. Розв'язати нерівність: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Розв'язання. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$
 $\Leftrightarrow 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$, $(-20) \cdot 2^x >$
 $(-20) \cdot 5^x$, поділимо нерівність на (-20) , при цьому не забуваємо знак нерівності поміняти на протилежний, отримаємо: $2^x < 5^x$.

Оскільки $2^x > 0$, $5^x > 0$, при будь-яких $x \in \mathbb{R}$, то поділимо ліку і праву частини нерівності на 2^x або 5^x .

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1, \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x > 0.$$

Відповідь. $(0; +\infty)$.

Метод заміни

Приклад. Розв'язати нерівність: $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \geq 0$.

Розв'язання. Введемо заміну $7^x = t > 0$, отримаємо
 $t^2 - 8t + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 7) \geq 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Повертаємося до заміни, отримаємо: $\begin{cases} 7^x \leq 1 \\ 7^x \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Відповідь. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Нерівності, основою степеня яких є функції змінної x

Нерівності виду $\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)}$ ($>$, $\geq$, $\leq$), основою степеня яких є функції змінної x , розв'язуються за допомогою теорем 3 і 4.

Теорема 3. Якщо $\varphi(x) > 0$, то $\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \\ 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Для нерівності $\varphi(x)^{f(x)} > \varphi(x)^{g(x)}$ другий рядок першої системи сукупності буде: $f(x) > g(x)$, другий рядок другої системи сукупності буде: $f(x) < g(x)$.

Теорема 4. Якщо $\varphi(x) > 0$, то $\varphi(x)^{f(x)} \leq \varphi(x)^{g(x)}$
 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) \leq g(x) \\ 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ \varphi(x) = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $|x - 3|^{2x^2 - 7x} > 1$.

Розв'язання. $|x - 3|^{2x^2 - 7x} > |x - 3|^0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x - 3| > 1 \\ 2x^2 - 7x > 0 \\ 0 < |x - 3| < 1 \\ 2x^2 - 7x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \\ x(2x - 7) > 0 \\ \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases} \\ x(2x - 7) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \\ x \in (2; 3) \cup (3; 3,5). \end{cases}$$

Відповідь. $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3,5) \cup (4; +\infty)$.

Метод інтервалів для складної експоненти

Функція виду $y = g(x)^{f(x)}$ називається складною експонентою.

Теорема 5. Знак різниці $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ збігається зі знаком добутку

$(a - 1)(f(x) - g(x))$ на ОДЗ нерівності, тобто:
 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \end{cases}$

1) Якщо $a > 1$, то $f(x) > g(x)$, тобто
 $(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.

2) Якщо $a < 1$, то $f(x) < g(x)$, тобто
 $(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Теорема 6.

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ ((a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \end{cases}$$

Теорема 6.

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ ((a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $(x - 2)^{x^2 - 6x + 8} \geq 1$.

Розв'язання. $(x - 2)^{x^2 - 6x + 8} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ (x - 3)(x^2 - 6x + 8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ (x - 3)(x - 2)(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 3] \cup [4; +\infty).$$

Відповідь. $(2; 3] \cup [4; +\infty)$.

3⁰. Логарифмічні рівняння

Логарифмічними рівняннями називаються рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком логарифма.

Елементарними логарифмічними рівняннями, для яких $a > 0, a \neq 1$ є такі рівняння:

$$1. \quad \log_a f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

$$2. \quad \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

Примітка. Рівносильні перетворення в рівняннях 1 і 2 виконуються при $f(x) > 0$.

$$3. \quad \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0. \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$4. \quad f(\log_a x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \quad \text{якщо} \\ \log_a x = t.$$

$$5. \quad f(\log_a g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0, \quad \text{якщо} \\ \log_a g(x) = y.$$

Використання теорем 1, 2, 3, називається потенціюванням рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\log_3(7 - 2x) = \log_3(x^2 - 3x - 5)$.

$$\text{Розв'язання:} \quad \log_3(7 - 2x) = \log_3(x^2 - 3x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 2x = x^2 - 3x - 5 \\ 7 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x < \frac{7}{2} \\ x \in (-\infty; 1,5 - 0,5\sqrt{29}] \cup (1,5 + 0,5\sqrt{29}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -3.$$

Відповідь. -3

Метод заміни

Приклад. Розв'язати рівняння: $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0$.

Розв'язання. Введемо заміну $\log_2 x = t$, тоді рівняння набуде вигляду

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}. \quad \text{Повертаємось до}$$

$$\text{заміни} \quad \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 8 \end{cases}.$$

Відповідь. 4; 8.

Показникові рівняння, в яких показником степеня є логарифми, розв'язуються логарифмуванням, використанням основної логарифмічної тотожності та методом заміни. При цьому логарифмувати рівняння можна за будь-якою основою: $a > 0, a \neq 1$. Якщо в рівняння входять логарифми з різною основою, то потрібно звести їх до однієї основи.

Приклад. Розв'язати рівняння: $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x+1} = 1$.

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння за основою 15:

$$\begin{aligned}\log_{15}(15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x} \cdot x^1) &= \log_{15} 1, \\ \log_{15} 15^{\log_5 3} + \log_{15} x^{\log_5 9x} + \log_{15} x &= 0, \\ \log_5 3 + \log_5 9x \cdot \log_{15} x + \log_{15} x &= 0, \\ \log_5 3 + (\log_5 9 + \log_5 x) \cdot \log_{15} x + \log_{15} x &= 0, \\ \text{подамо } \log_{15} x &= \frac{\log_5 x}{\log_5 15}; \\ \log_5 3 + (2 \log_5 3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 15} + \frac{\log_5 x}{\log_5 15} &= 0, \\ \log_5 3 + (2 \log_5 3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 3 + 1} + \frac{\log_5 x}{\log_5 3 + 1} &= 0.\end{aligned}$$

Введемо заміну: $\log_5 x = t, \log_5 3 = b$.

Змінну b можна було не вводити, це тільки для зручності.

$$\begin{aligned}\text{Маємо:} \quad b + \frac{(2b+t)t}{b+1} + \frac{t}{b+1} &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} b^2 + b + 2bt + t^2 + t = 0 \\ b \neq -1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно t .

$$\begin{aligned}D = (2t + 1)^2 - 4(b^2 + b) &= 4b^2 + 4b + 1 - 4b^2 - 4b = 1, \\ \begin{cases} t_1 = -b - 1, \\ t_2 = -b. \end{cases}\end{aligned}$$

Повертаємось до заміни: $\begin{cases} \log_5 x = -\log_5 3 - 1 \\ \log_5 x = -\log_5 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \log_5 x = \log_5 \frac{1}{15} \\ \log_5 x = \log_5 \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{15} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Знайдені корені задовольняють ОДЗ}$$

рівняння.

Відповідь. $\frac{1}{15}; \frac{1}{3}$

Рівняння, які містять невідому в основі логарифма

При розв'язуванні рівнянь, які містять невідому в основі логарифма (за умови, що основа логарифма однакова функція $a(x)$) використовується подана нижче теорема.

Теорема 6. Рівняння виду $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

$$\text{рівносильне системі } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}.$$

Якщо основою логарифмів є різні вирази $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ відносно невідомої x , то потрібно подати логарифми за однією числовою основою.

Теорема 7. Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x)$

$$\text{рівносильне рівнянню } \frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} = \frac{\log_a g(x)}{\log_a \psi(x)}$$

$$\text{при} \begin{cases} \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1 \\ \psi(x) > 0, \psi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Розв'язання. $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо єдиний корінь $x=2$.

Відповідь. 2

Рівняння, які містять невідому в основі степеня і в показнику степеня

Це рівняння виду $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)^{\psi(x)}$. В цьому рівнянні $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ на ОДЗ рівняння. За цієї умови дане рівняння рівносильне

$$\varphi(x) \log_a f(x) = \psi(x) \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x - 5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$.

Вказівка.

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)^{\frac{1}{2}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)} \\ 3x-5 > 0 \\ 3x-5 \neq 1 \\ 2+5x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

4⁰. Логарифмічні нерівності

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, де $a > 0, a \neq 1$, користуємось теоремами:

Теорема 1. Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 0$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Теорема 2. Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $0 < a < 1$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Використання цих теорем називається потенціюванням нерівностей.

Примітка. Умови $f(x) > 0$ для теореми 1 та $g(x) > 0$ для теореми 2 непотрібно включати у відповідні системи.

Розв'язування нерівностей за теоремами 1 і 2

Приклад. Розв'язати нерівність: $\lg(2x^2 + 4x + 10) > \lg(x^2 - 4x + 3)$.

Вказівка. $\lg(2x^2 + 4x + 10) > \lg(x^2 - 4x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 2x^2 + 4x + 10 > x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

Відповідь. $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовуються всі властивості логарифмів. Використання властивостей логарифмів веде до зміни ОДЗ

нерівності, тому ОДЗ потрібно визначати за початковою нерівністю.

Метод заміни

Приклад. Розв'язати нерівність: $\log_2^2(x-1)^2 + 5 \log_{0,5}(x-1) > -1$.

Розв'язання. $\log_2(x-1)^2 = 2 \log_2|x-1| = 2 \log_2(x-1)$, оскільки ОДЗ $x > 1$; $\log_{0,5}(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 0,5} = -\log_2(x-1)$. Врахувавши заміну $\log_2(x-1) = t$, нерівність набуде вигляду $4t^2 - 5t + 1 > 0, (t-1)(t-\frac{1}{4}) > 0$,

$t \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$. Повернемося до заміни

$$\begin{cases} \log_2(x-1) < \frac{1}{4} \\ \log_2(x-1) > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2(x-1) < \log_2 \sqrt[4]{2} \\ \log_2(x-1) > \log_2 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 + \sqrt[4]{2}) \\ x \in (3; +\infty) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (1; 1 + \sqrt[4]{2}) \\ x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

Відповідь. $(1; 1 + \sqrt[4]{2}) \cup (3; +\infty)$

Нерівності виду $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$

Теорема 3. Нерівність виду $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}.$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $\log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2 < 0$.

Вказівка. $\log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2 < 0 \Leftrightarrow \log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2 < \log_{x+\frac{5}{2}} 1$. Розглянути два випадки: $0 < x + \frac{5}{2} < 1$ та $x + \frac{5}{2} > 1$.

Відповідь. $(-2; -1,5) \cup (\frac{8}{3}; 5) \cup (5; +\infty)$

Лекція 10. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей

План

1. Найпростіші тригонометричні рівняння
2. Найпростіші тригонометричні нерівності
3. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь
4. Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції.

Розв'язати тригонометричне рівняння — означає знайти множину значень невідомого, що задовольняють його.

Найпростіші тригонометричні рівняння.

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$, де x — невідома величина, a — довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Рівняння $\sin x = a$.

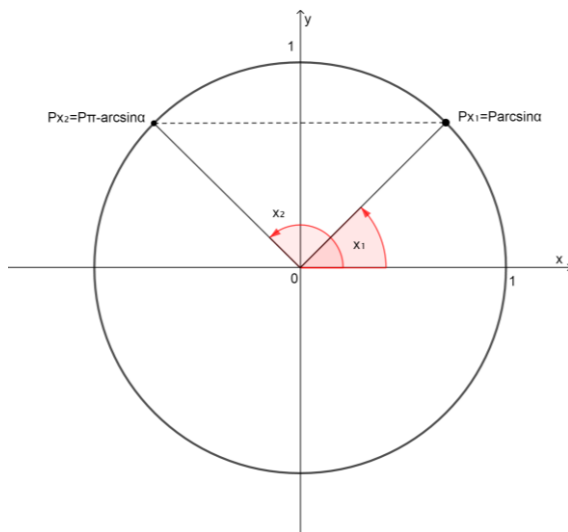


Рис.57

Якщо $|a| \leq 1, \sin x = a \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|\sin x| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a = -1, \sin x = -1$.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 0, \sin x = 0$.

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 1, \sin x = 1$.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження:

$$1) \quad \arcsin(-\alpha) = -\arcsin \alpha.$$

2) Якщо $0 < \alpha < 1$, то рівняння $\sin x = -\alpha$ має таку множину розв'язків:

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1.1. $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}.$

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 1.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Тоді:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Приклад 1.3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1.$

Розв'язання.

За формулою коренів рівняння $\sin a = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 1.4. $\sin \frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}.$

Розв'язання.

$$\sin \frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z;$$

$$x = \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z;$$

$$x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$

Приклад 1.5. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$.

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin \frac{\pi}{3}\cos x + \cos \frac{\pi}{3}\sin x = 2.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рівняння $\cos x = a$.

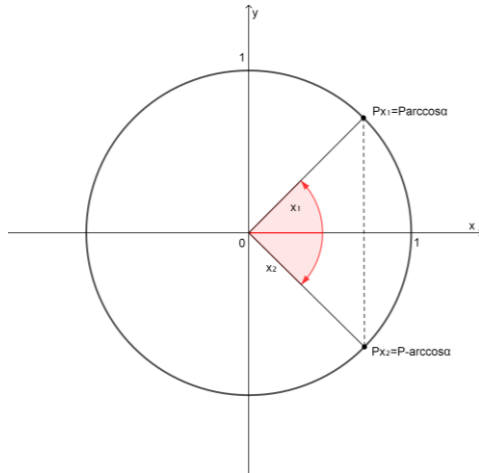


Рис.58

$$\begin{aligned} &\text{Якщо} && |a| \leq 1, \cos x = a \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x_1 = \arccos a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|\cos x| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $\cos x = -1$.

$$x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 0$, $\cos x = 0$.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 1$, $\cos x = 1$.

$$x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Приклад 1.6. $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = \pm \arccos(b) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, можемо записати:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримаємо:

$$4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1.7. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 1.8. $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0.$

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.$

Отримаємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \arccos 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$7x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$7x = \pm \frac{7\pi}{10} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 1.9. $\cos \pi x^2 = 1.$

Розв'язання.

Маємо:

$$\pi x^2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x^2 = 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$.

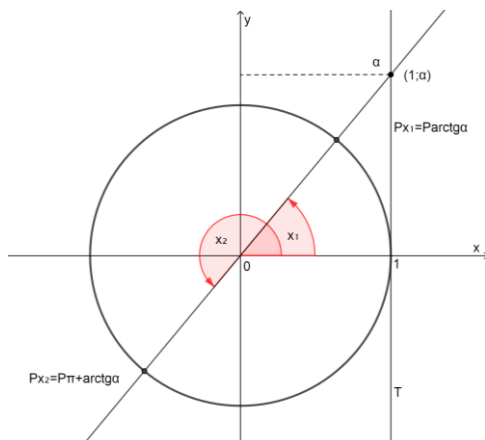


Рис.59

Рівняння $tg x = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут α такий, що $tg x = a$. Це кут $\alpha = arctga$. Враховуючи періодичність функції $y = tg x$, одержуємо формулу коренів рівняння $tg x = a$: $x = arctga + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

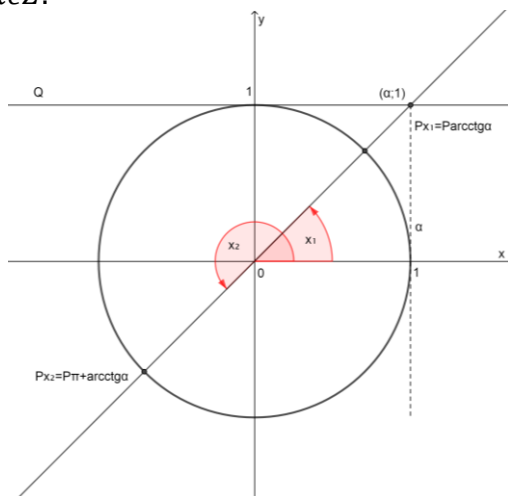


Рис.60

Рівняння $ctgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(0; \pi)$ існує тільки один кут α такий, що $ctgx = a$. Це кут $\alpha = arcctga$. Враховуючи періодичність функції $y = ctgx$, одержуємо формулу коренів рівняння $ctgx = a$: $x = arcctga + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Окремі випадки

Якщо $tgx = 0$, то

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $ctgx = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження:

$$1) \quad arctg(-\alpha) = -arctg\alpha,$$

$$2) \quad arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha.$$

$$\text{Приклад 1.10. } tg \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = arctg(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Приклад 1.11. } ctg\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -1.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$ctg\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = arcctg 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$

Приклад 1.12. $tg 2x = 5.$

Розв'язання.

$$2x = atctg 5 + \pi k, k \in Z;$$

$$x = 0,5arctg 5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Відповідь. $0,5arctg 5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Приклад 1.13. $ctg x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Розв'язання.

За формулою $x = arcctg a + \pi k, k \in Z.$ маємо:

$$x = arcctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

2. Найпростіші тригонометричні нерівності

Нерівності, які містять змінну під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними.

Наприклад, $\cos x \leq \frac{1}{3}; 5\sin^2 x + 3 \cos x > 6$ тощо.

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a, \cos x <> a, tg x <> a, ctg x <> a.$

1. Нерівності $\sin x > a; \sin x < a.$
 $\sin x > a$

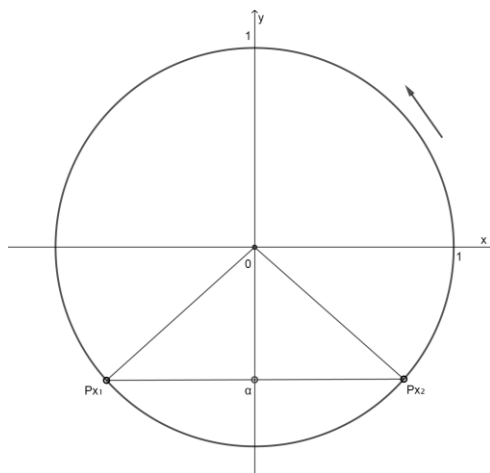


Рис.61

Нерівність $\sin x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arcsin a, x_2 = \pi - \arcsin a, x_1 < x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

$$\sin x < a$$

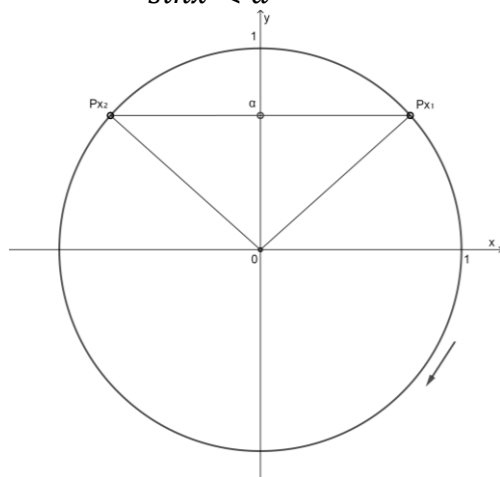


Рис.62

Нерівність $\sin x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arcsin a, x_2 = -\pi - \arcsin a, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a \geq 1$, то $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.14. $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{3}$

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left| \frac{\sqrt{2}}{3} \right| \leq 1$, отже розв'язок нерівності існує.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{\sqrt{2}}{3}$, другій дуги – меншу.

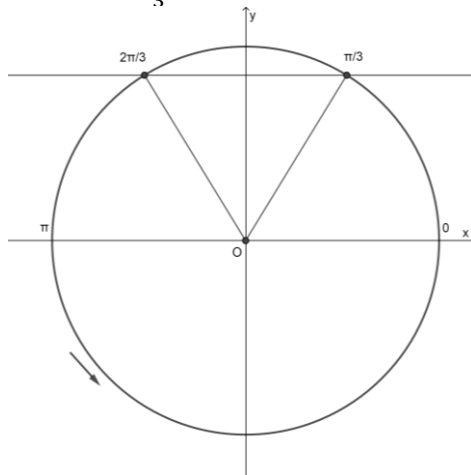


Рис.63

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

2. Нерівності $\cos x < a; \cos x > a$

$$\cos x < a$$

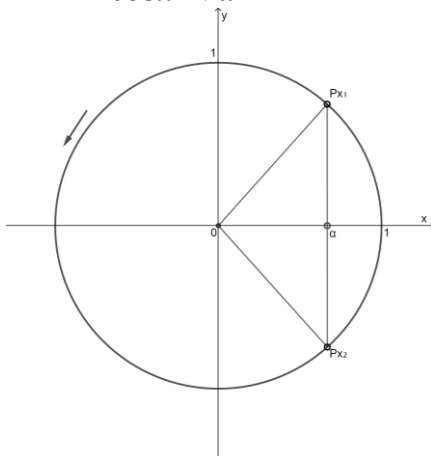


Рис.64

Нерівність $\cos x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arccos a, x_2 = 2\pi - \arccos a, x_1 < x_2.$$

Якщо $a \leq -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Якщо $a > 1$, то $x \in \mathbb{R}.$

$$\cos x > a$$

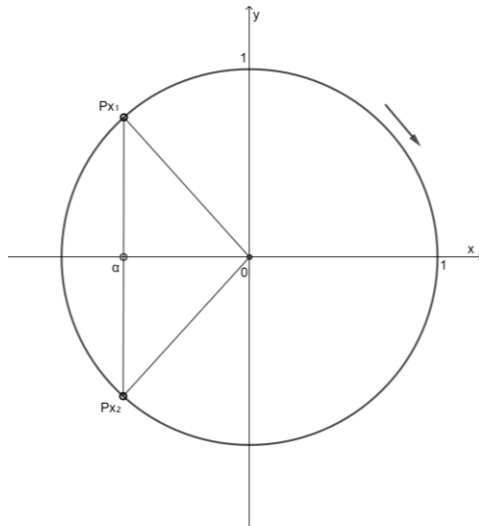


Рис.65

Нерівність $\cos x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arccos a, x_2 = -\arccos a, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

Приклад 1.15. $\cos x \geq \frac{1}{2}$

Розв'язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\arccos \frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-\arccos \frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу.

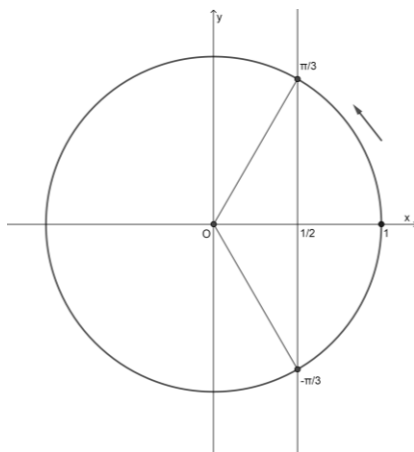


Рис.66

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$

3. Нерівність $\operatorname{tg} x > a; \operatorname{tg} x < a$.
 $\operatorname{tg} x > a$

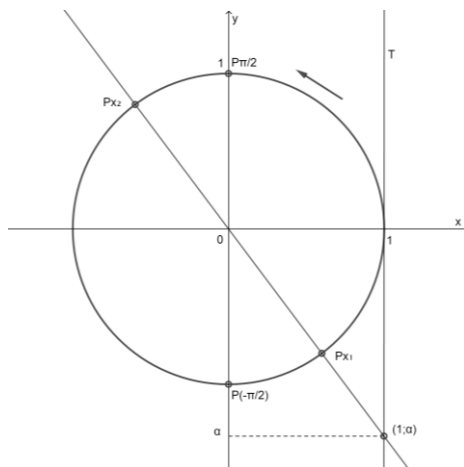


Рис.67

Нерівність $\operatorname{tg} x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arctg a, x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\arctg a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$\mathbb{Z}.$

$$\operatorname{tg} x < a$$

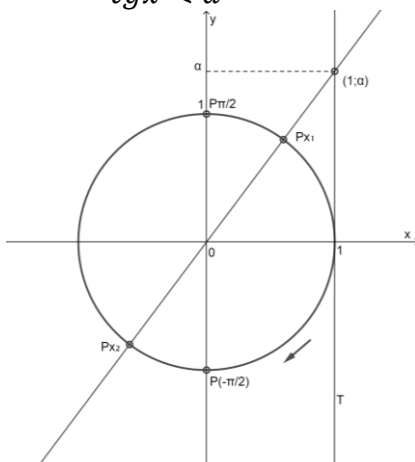


Рис.68

Нерівність $\operatorname{tg} x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arctg} a, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 1.16. $\operatorname{tg} x \geq 2$

Розв'язання.

Враховуючи, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z},$$

отримаємо:

$$\operatorname{arctg} 2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\operatorname{arctg} 2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. Нерівність $\operatorname{ctg} x > a; \operatorname{ctg} x < a.$

$$\operatorname{ctg} x < a$$

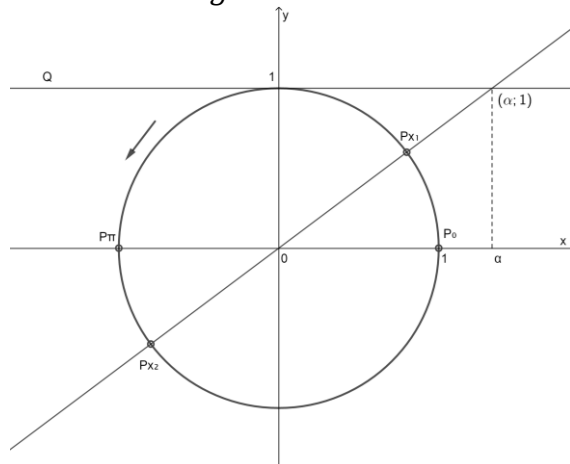


Рис.69

Нерівність $\operatorname{ctg} x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arcc} t g a, x_1 < \pi.$$

Множина розв'язків: $\operatorname{arcc} t g a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$\operatorname{ctg} x > a$$

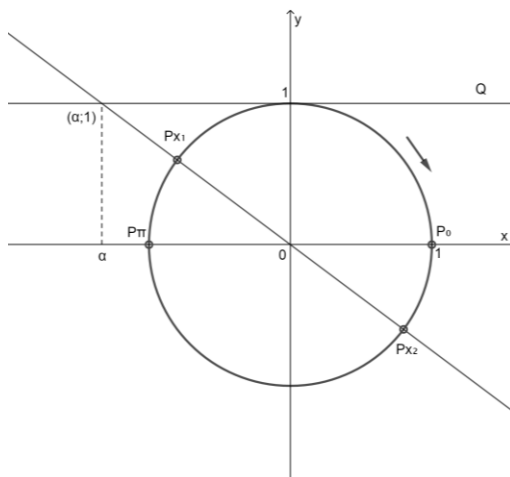


Рис.70

Нерівність $\operatorname{ctgx} > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arccctg} a, x_1 > 0.$$

Множина розв'язків: $\pi n < x < \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь

I. Рівняння, що зводяться до алгебраїчних

Це рівняння, до складу яких входять однакові або різні тригонометричні функції одного й того самого аргументу. Це, наприклад, рівняння виду:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0; a \cdot \cos^3 x + b \cdot \cos x + c = 0;$$

$$a \cdot \operatorname{tg}^4 3x + b \cdot \operatorname{tg}^2 3x + c = 0; a \cdot \operatorname{ctg}^2 2x + b \cdot \operatorname{ctg} 2x + c = 0;$$

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos x + c = 0; a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x + c = 0;$$

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b \cdot \operatorname{ctg} x = 0.$$

Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції.

Приклад 2.1. $\cos^2 x - 5 \cos x = 6$.

Розв'язання.

$$\cos^2 x - 5\cos x - 6 = 0.$$

Нехай $\cos x = t$, де $|t| \leq 1$, тоді маємо:

$$t^2 - 5t - 6 = 0;$$

$$t_1 = -1, t_2 = 6.$$

Корінь $t_2 = 6$ не задовольняє умову $|t| \leq 1$.

Повернемося до заміни:

$$\cos x = -1;$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.1. $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Розв'язання.

$$\operatorname{tg} x - 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0.$$

Нехай $\operatorname{tg} x = a$, тоді маємо рівняння:

$$a - \frac{2}{a} + 1 = 0; \quad \frac{a^2 + a - 2}{a} = 0;$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2, \\ a = 1, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

$$1) \quad \operatorname{tg} x = -2;$$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad \operatorname{tg} x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. 1) $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.2. $2\sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0$.

Розв'язання.

Можна записати: $1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0$.

Звідси $2\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $\cos 2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши його, отримаємо:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{17}}{4} \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.3. $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$

$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримаємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$.

$$\text{Звідси } t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}.$$

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

II. Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до них Рівняння виду:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0;$$

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0;$$

$$a \cdot \sin^3 x + b \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + c \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + d \cdot \cos^3 x = 0.$$

також називають однорідними відносно $\sin x$ і $\cos x$. Сума показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$ у всіх членів такого рівняння однакова. Ця сума називається степенем однорідності рівняння або показником однорідності.

У загальному випадку однорідне рівняння можна записати так:

$$a_0 \cdot \sin^n x + a_1 \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \dots + a_n \cdot \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – дані числа, $a_0 \neq 0$, n – натуральне число.

Розв'язують однорідні рівняння n -го степеня шляхом ділення обох частин на $\cos^n x \neq 0$ (або $\sin^n x \neq 0$) і зведенням його до цілого алгебраїчного відносно функції $\operatorname{tg} x$ (або $\operatorname{ctg} x$):

$$a_0 \cdot \operatorname{tg}^n x + a_1 \cdot \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \cdot \operatorname{tg}^{n-2} x + \dots + a_n = 0;$$

$$(\text{або } a_n \cdot \operatorname{ctg}^n x + a_{n-1} \cdot \operatorname{ctg}^{n-1} x + a_{n-2} \cdot \operatorname{ctg}^{n-2} x + \dots + a_0 = 0);$$

при цьому область визначення рівняння звужується на значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (або $x = \pi n$), де $n \in \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що попередньо перед діленням слід довести, що $\cos^n x \neq 0$ (або $\sin^n x \neq 0$).

До вигляду однорідних можна звести деякі рівняння, що не є однорідними, шляхом множення на тригонометричну одиницю $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так, до вигляду однорідного можна звести рівняння виду $a_0 \cdot \cos^{2n} x + a_1 \cdot \cos^{2n-1} x \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos^{2n-2} x \cdot \sin^2 x + \dots + a_n \cdot \sin^{2n} x = b$. Для цього необхідно помножити b на тригонометричну одиницю $b = b \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, підібравши показник k так, щоб рівняння стало однорідним.

Зауваження. Іноді, під час розв'язання неповних однорідних рівнянь, необхідно звертати увагу на яку з функцій $\cos^n x$ або $\sin^n x$ можна ділити. Так, наприклад, в рівнянні $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$, не можна ділити на $\cos^n x \neq 0$, бо можемо загубити множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні $\cos x$ може дорівнювати нулю. Отже, дане рівняння можна розв'язати, поділивши його обидві частини на $\sin^n x \neq 0$ або способом розкладання на множники його лівої частини.

Приклад 2.4. $\sin x - \cos x = 0$.

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $\cos x = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $\sin x = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - 1 &= 0; \\ \operatorname{tg} x &= 1; \\ x &= \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.5. $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Значення x , при яких $\cos x = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $\cos x = 0$, то мала б виконуватись рівність $3\sin^2 x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 24 = 25; \sqrt{D} = 5;$$

$$a_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}; a_2 = \frac{-1 - 5}{6} = -1.$$

Повернемось до заміни:

$$1) \quad tgx = \frac{2}{3};$$

$$x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \quad tgx = -1;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.6. $\sin^3 x = \cos x$.

Розв'язання.

Помножимо праву частину на рівняння на тригонометричну одиницю $\sin^2 x + \cos^2 x$, отримаємо:

$$\sin^3 x = \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^3 x = \cos x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x;$$

$$\sin^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Дістали однорідне рівняння третього степеня, відносно $\sin x$ і $\cos x$. У випадку $\cos x = 0$, розв'язків, очевидно, немає.

Поділивши обидві частини останнього на $\cos^3 x \neq 0$, отримаємо:

$$tg^3 x - tg^2 x - 1 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді маємо:

$$y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи штучний спосіб:

$$\begin{aligned}y^3 - y^2 + y^3 - 1 &= 0; \\y^2(y - 1) + (y - 1) \cdot (y^2 + y + 1) &= 0; \\(y - 1) \cdot (2y^2 + y + 1) &= 0; \\y - 1 &= 0; \\y &= 1;\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}2y^2 + y + 1 &= 0; \\D &= 1 - 8 = -7 < 0.\end{aligned}$$

Отже, $2y^2 + y + 1 > 0$ для будь-якого $y \in R$.
Рівняння дійсних коренів немає.

Повернемося до заміни:

$$\begin{aligned}tgx &= 1; \\x &= \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.\end{aligned}$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.7. $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$.

Розв'язання.

Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x , при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7tg^2 x - 8tgx - 15 = 0.$$

Звідси

$$\begin{cases} tgx = 1, \\ tgx = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg \frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg \frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{array} \right.$

III. Рівняння, що розв'язуються способом розкладання на множники

Під час розв'язання тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівнянь переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку, використовуючи всі відомі способи розкладання на множники, а саме: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення, штучні способи та використання тригонометричних формул. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток кількох співмножників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають силу.

Приклад 2.8. $\sin 2x - \cos x = 0$.

Розв'язання.

$$\sin 2x - \cos x = 0;$$

$$2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0;$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.9. $\cos^2 2x - \cos 2x = 0$

Розв'язання.

$$\cos^2 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x = 1; \end{cases} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.10. $tg^3 x = tg x$.

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$.

$$\begin{aligned} tg^3 x &= tg x; \\ tg^3 x - tg x &= 0; \\ tg x (tg^2 x - 1) &= 0; \\ tg x (tg x - 1)(tg x + 1) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} tg x = 0, \\ tg x = 1, \\ tg x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z; \end{cases}$$

Об'єднавши множини розв'язки другого і третього рівнянь сукупності, остаточно отримаємо розв'язки вихідного рівняння:

$$x_1 = \pi n, n \in Z; x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z.$$

Відповідь. $\pi n, n \in Z; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z$.

IV. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад 2.11. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) &= 1; \\ 2 \sin \frac{15^\circ + x + 45^\circ - x}{2} \cdot \cos \frac{15^\circ + x - 45^\circ + x}{2} &= 1; \\ 2 \sin 30^\circ \cdot \cos(x - 15^\circ) &= 1; \end{aligned}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15^\circ) = 1;$$

$$\cos(x - 15^\circ) = 1;$$

$$x - 15^\circ = 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = 15^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $15^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.12. $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$.

Розв'язання.

$$\sin 7x - \sin x = \cos 4x;$$

$$2 \sin \frac{7x - x}{2} \cdot \cos \frac{7x + x}{2} = \cos 4x;$$

$$2 \sin 3x \cdot \cos 4x - \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x (2 \sin 3x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0, & \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin 3x = \frac{1}{2}; & \begin{cases} 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

V. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад 2.13. $\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$.

Розв'язання.

$$\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1 + \cos 3x}{2} = \frac{1}{4};$$

$$1 + \cos 3x = \frac{1}{2};$$

$$\cos 3x = -\frac{1}{2};$$

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 2.14. $0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

Розв'язання.

$$0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0;$$

$$0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 0;$$

$$2\cos 6x \cdot \cos x - \cos 4x - \cos 6x = 0;$$

$$2\cos 6x \cdot \cos x - 2\cos 5x \cdot \cos(-x) = 0;$$

$$2\cos 6x \cdot \cos x - 2\cos 5x \cdot \cos x = 0;$$

$$2\cos(\cos 6x - \cos 5x) = 0;$$

$$-4\cos x \cdot \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin \frac{11x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{2} = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{11x}{2} = \pi k, \\ \frac{x}{2} = \pi t; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оскільки корені третього рівняння сукупності містяться серед коренів другого рівняння, то остаточно розв'язком даного рівняння будуть групи коренів:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}.$

VI. Рівняння, що розв'язуються за допомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Деякі тригонометричні рівняння під час перетворень можуть бути зведені до рівності тригонометричних функцій. Такі рівняння розв'язуються на основі рівності однойменних тригонометричних функцій.

1) Для того, щоб синуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\sin x = \sin y \leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) Для того, щоб косинуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\cos x = \cos y \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3) Для того, щоб тангенси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо одночасне виконання двох умов:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - y = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Приклад 2.15. $\sin 4x = \sin 3x$.

Розв'язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\begin{cases} 4x + 3x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 4x - 3x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} 7x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Приклад 2.16. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$.

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $\operatorname{tg} 3x$.

Це можливо, бо з умови слідує, що $\operatorname{tg} 3x \neq 0$.

Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}; \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} 3x; \\ \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) (*) \end{aligned}$$

На основі умови рівності тангенсів двох кутів, отримаємо:

$$\begin{aligned} 5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x &= \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ 8x &= \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

При кожному значенні x з цієї множини розв'язків кожна з частин рівняння (*) існує.

Відповідь. $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

VII. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад 2.17. $\sin 6x \cdot \sin x - \cos 6x \cdot \cos x = 0$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin 6x \cdot \sin x - \cos 6x \cdot \cos x &= 0; \\ -(\cos 6x \cdot \cos x - \sin 6x \cdot \sin x) &= 0; \\ -\cos 7x &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x &= \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.18. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0; \\ \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$2\cos x + 2\sin x = 0; \cos x + \sin x = 0.$$

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $\cos x = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $\sin x = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$, отримаємо:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0; \operatorname{tg} x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

VIII. Рівняння, що розв'язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад 2.19. $\sin 2x \cdot \sin 6x = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x);$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x;$$

$$\cos 4x - \cos 2x = 0;$$

$$-2 \cdot \sin 3x \sin x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin x = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оскільки множина розв'язків другого рівняння сукупності включається в множину розв'язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.20. $8\sin 5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) =$

1.

Розв'язання.

$$\sin 5x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - 5x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + 5x \right) = \frac{1}{8};$$

$$\sin 5x \cdot \frac{1}{2} (\cos 10x - \cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{8};$$

$$\sin 5x \cdot (\cos 10x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4};$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos 10x + \sin 5x = \frac{1}{2};$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin 15x - \sin 5x) + \sin 5x = \frac{1}{2};$$

$$\sin 15x = \frac{1}{2};$$

$$15x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } (-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in \mathbb{Z}.$$

IX. Рівняння виду $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$

В рівнянні $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$; a, b і c – будь-які дійсні числа.

Якщо $a = b = 0$, а $c \neq 0$ то рівняння розв'язків не має.

Якщо $a = b = c$, то рівняння має безліч розв'язків, тобто рівняння перетворюється у тотожність.

Якщо a, b і c – довільні дійсні числа, то рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ можна розв'язати різними способами. Розглянемо деякі з них.

Перший спосіб – введення допоміжного кута

Для розв'язання рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ с винесемо за дужки вираз $\sqrt{a^2 + b^2}$, отримаємо:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x \right) = c.$$

Так як $\left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| < 1, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| < 1$ і $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 = 1$, то можна підібрати такий кут φ , щоб $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x); \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\varphi) = c,$$

$$\text{звідки } \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Це рівняння має розв'язки, якщо $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \leq 1$, тобто $a^2+b^2 \geq c^2$, тоді

$$x+\varphi = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

Кут φ можна знайти з рівності $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}$,
звідки $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Якщо ж $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| > 1$, тобто $a^2+b^2 < c^2$, тоді рівняння розв'язків не має.

Відповідь. $(-1)^k \cdot \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.21. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Розв'язання.

$$a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, a^2+b^2 = 4, c^2 = 1, a^2+b^2 > c^2.$$

Отже, рівняння має розв'язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ за дужки і отримаємо:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 1; \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Використаємо заміну } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}.$$

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Другий спосіб – метод раціоналізації

Цей метод полягає у застосуванні універсальної підстановки, тобто формул, що виражають $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тому рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ завжди може бути зведене до раціонального алгебраїчного рівняння відносно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ за допомогою формул.

При такій заміні область визначення рівняння звужується на значення $x = \pi(2n + 1), n \in \mathbb{Z}$. Тому під час розв'язування рівнянь цим способом слід перевірити додатково, чи не має серед значень $x = \pi(2n + 1), n \in \mathbb{Z}$ розв'язків даного рівняння.

Зауваження! Цей метод розв'язування рівнянь використовують у крайніх випадках, коли не можна знайти більш простіший спосіб розв'язування, тому що під час здійснення заміни можна отримати алгебраїчні рівняння високих степенів.

Приклад 2.22. $5 \sin x - \cos x = 5$.

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях x . Здійснюючи заміну за допомогою формул 81, 82, отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5;$$

яке визначено при $x \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$, тобто при переході від $\sin x$ і $\cos x$ до $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тоді отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} &= 5; \\ 10t - 1 + t^2 &= 5 + 5t^2; 4t^2 - 10t + 6 = 0; \\ 2t^2 - 5t + 3 &= 0; t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= 1, \left[\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{3}{2}; \left[\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k; \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x &= 2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.

Так як 2π – період $\sin x$ і $\cos x$, то достатньо перевірити значення $x = \pi$:

$$5\sin\pi - \cos\pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n+1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Третій спосіб – зведення до однорідного відносно $\sin x$ та $\cos x$.

Використовуючи формули подвійного аргументу, перепишемо рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ у вигляді:

$$a \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) + b \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = c \cdot 1;$$

$$2a \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + b \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \\ = c \cdot \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right);$$

тобто отримаємо однорідне рівняння другого порядку відносно $\sin \frac{x}{2}$ та $\cos \frac{x}{2}$:

$$(c + b) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + (c - b) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

розв'язання якого розглядалося у пункті II.

Четвертий спосіб – піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Можна піднести обидві частини рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ до квадрату і звести його до однорідного:

$$(a \cdot \sin x + b \cdot \cos x)^2 = c^2; \\ a^2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot a \sin x \cdot b \cos x + b^2 \cdot \cos^2 x = c^2 \\ \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x); \\ (a^2 - c^2) \cdot \sin^2 x + 2 \cdot a \sin x \cdot b \cos x + (b^2 - c^2) \cdot \cos^2 x = 0.$$

Цей спосіб розв'язання неприйнятний, бо отримаємо сторонні корені.

П'ятий спосіб – графічний.

Можна переписати рівняння $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ у вигляді:

$$a \cdot \sin x = c - b \cdot \cos x.$$

Побудуємо графіки функцій $y_1 = a \cdot \sin x$; $y_2 = c - b \cdot \cos x$.

Абсиси точок перетину цих графіків будуть розв'язками даного рівняння. Цей спосіб розв'язування розглянуто в пункті XIII.

X. Рівняння, раціональні відносно виразів $\sin x \neq \cos x$ та $\sin x \cdot \cos x$

Під час розв'язування рівнянь виду $F(\sin x \neq \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$ доцільно застосовувати підстановку

$\sin x \pm \cos x = t$, тоді після піднесення останньої рівності до квадрата отримаємо:

$$2\sin x \cdot \cos x = \pm(t^2 - 1),$$

а саме рівняння після підстановки змінних зведеться до алгебраїчного.

Приклад 2.23. $\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \cos x$.

Розв'язання.

$$\sin x + \cos x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 = 0.$$

Нехай $\sin x + \cos x = t$, де $|t| \leq \sqrt{2}$, тоді

$$2\sin x \cdot \cos x = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0; \quad t^2 - t = 0;$$

$$t^2(t - 1) = 0;$$

$$t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, & \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin x + \cos x = 1; & \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, & \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.24. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x$.

Розв'язання.

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x;$$

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x.$$

Нехай $\sin 2x \cdot \cos 2x = t$, Зрозуміло, що $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Отримаємо:

$$1 - 2t^2 = t; \quad 2t^2 + t - 1 = 0;$$

$$= 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9; \sqrt{D} = 3;$$

$$t_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1.$$

Корінь $t_2 = -1$ не задовольняє умову $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Отже, повернемося до заміни:

$$\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$\sin 4x = 1;$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

XI. Дробово-раціональні рівняння
відносно тригонометричних функцій

Приклад 2.25. $\frac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0$.

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x = 0, \\ 1 - \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x(\sin x + 1,5) = 0, \\ \cos x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -1,5, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками рівняння $\sin x = 0$ системи. Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

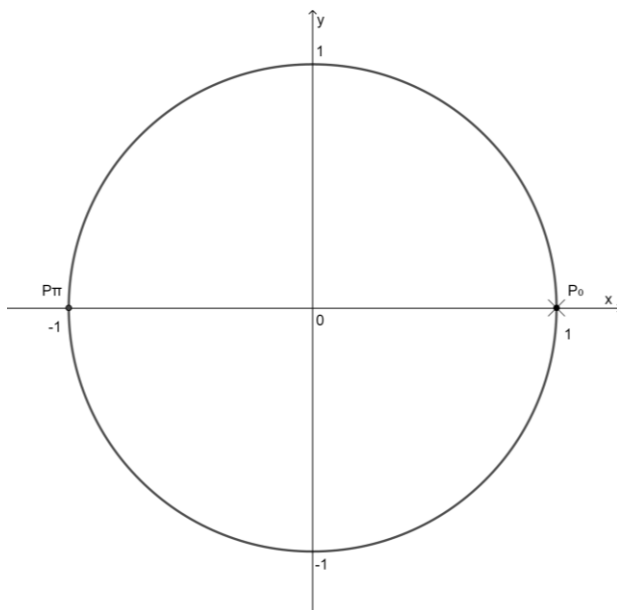


Рис.71

Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.26. $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$ [53].

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $\cos x \neq 0; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin^4 x - 1 = \cos^4 x;$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 1;$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1;$$

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1;$$

$$\cos 2x = -1;$$

$$2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки множина розв'язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

ХІІ. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад 2.27. $4\arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$.

Розв'язання.

$$4\arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0;$$

$$\arctg(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$$x^2 - 3x - 3 = 1;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

Приклад 2.28. $\arcsin 4x + \arcsin(1 - 4x) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1 - 4x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin 4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1 - 4x = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos(\arcsin 4x) - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\arcsin 4x);$$

$$1 - 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - 16x^2} - \frac{1}{2} \cdot 4x;$$

$$2 - 4x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - 16x^2};$$

$$4 - 16x + 16x^2 = 3 - 48x^2;$$

$$64x^2 - 16x + 1 = 0; (8x - 1)^2 = 0; x = 0,125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x = 0,125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. $0,125$

ХІІІ. Розв'язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Іноді під час розв'язування практичних задач, доводиться стикатися з такими рівняннями, для

розв'язування яких іноді неможливо взагалі вказати способу, який би дозволив знайти корені абсолютно точно. В таких випадках обмежуються знаходженням лише наближених значень коренів. Одним з таких способів є – графічний.

Приклад 2.29. $\sin x = 1 - x$.

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $1 - x$.

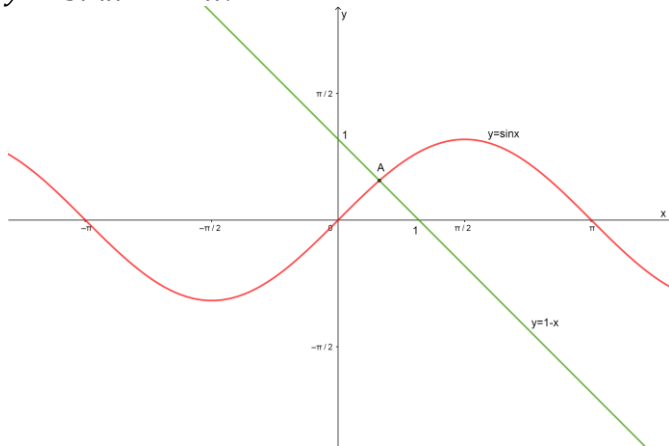


Рис.72

Ці графіки перетинаються в одній точці A . Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0,5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0,5 \rightarrow \sin x \approx 0,4794$, $1 - 0,5 = 0,5$. Отже, $\sin x < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $\sin x = 1 - x$ буде більший ніж $0,5$.

Перевіримо значення $x = 0,6$. Маємо: $\sin x \approx 0,5446$, $1 - x = 0,4$. Отже,

$\sin x > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь x_0 повинен бути менший, ніж $0,6$.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0,5; 0,6]$. Тому з точністю до 0,1:

$x_0 \approx 0,5$ (з нестачею), $x_0 \approx 0,6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0,5$

XIV. Розв'язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад 2.20. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$ [53].

Розв'язання.

Оскільки $|\cos 3x| \leq 1$ і $|\cos \frac{5x}{2}| \leq 1$, то

$$\left| \cos 3x + \cos \frac{5x}{2} \right| \leq 2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos \frac{5x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$;

$$5\pi n = 6\pi k; 5n = 6k.$$

Маємо: $n = 6t; k = 5t, t \in \mathbb{Z}$.

Отже, $x = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $4\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.31. $\sin^n x + \cos^n x = 1, n \in \mathbb{Z}$.

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то рівняння зводиться до вигляду $\sin x + \cos x = 1$ (IX тип)

Якщо $n = 2$ маємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, де x – будь-яке дійсне число.

При $n \geq 3$, якщо $|\sin x| \neq 1$ і $|\cos x| \neq 1$, маємо

$$\begin{cases} \sin^n x < \sin^2 x, \\ \cos^n x < \cos^2 x, \end{cases}$$

бо показникова функція з основою, меншою за одиницю, спадна. Додавши почлено отримані нерівності, знайдемо, що:

$\sin^n x + \cos^n x < 1, n \geq 3$, при всіх x , для яких $|\sin x| \neq 1$ і $|\cos x| \neq 1$. Таким чином:

а) Якщо n – непарне число, то можливі випадки
 $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$

з яких відповідно отримаємо розв'язки даного рівняння $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ або $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) Якщо n – парне число, то можливі випадки
 $\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{cases}$

з яких отримуємо розв'язки даного рівняння у вигляді $x = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$.

XV. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами

Приклад 2.32. $\cos 3x = m \cdot \cos x$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу, отримаємо:

$$4\cos^3 x - 3\cos x - m\cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (4\cos^2 x - 3 - m) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ або } 4\cos^2 x - 3 - m = 0.$$

$$1) \quad \cos x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad 4\cos^2 x - 3 - m = 0;$$

$$4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 - m = 0;$$

$$2 + 2\cos 2x - 3 - m = 0;$$

$$2\cos 2x = m + 1;$$

$$\cos 2x = \frac{m + 1}{2}.$$

$2x = \pm \arccos \frac{m+1}{2} + 2\pi n, n \in Z$, якщо $-1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1$;

$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z$, якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z$,
якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1$.

Приклад 2.33. Для кожного значення параметра a
розв'язати рівняння
 $\sin^6 x + \cos^6 x = a$.

Розв'язати.

Здійснюючи перетворення виразу, що стоїть у лівій частині рівняння:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3(1 - \cos 4x)}{8} = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}. \end{aligned}$$

Отже, $\frac{5+3\cos 4x}{8} = a$;

$$\begin{aligned} 3\cos 4x &= 8a - 5; \\ \cos 4x &= \frac{8a - 5}{3}. \end{aligned}$$

Це рівняння має розв'язки:

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a - 5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

якщо $-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1$, тобто $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

При інших значеннях параметра a розв'язки немає.
Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$, то розв'язків немає;

якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, то $x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

2⁰. Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

I. Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Приклад 2.34. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

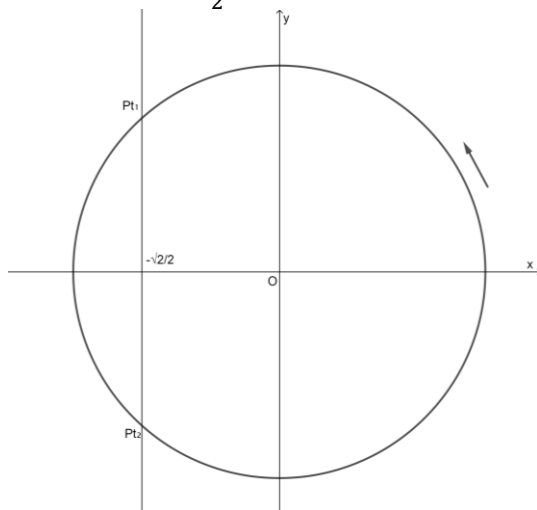


Рис.73

Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

Запишемо умову, за якої точка t належить дузі P_1P_2 :
 $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Повернемося до

початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 $-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.

II. Подвійні тригонометричні нерівності

Приклад 2.35. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < \sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).

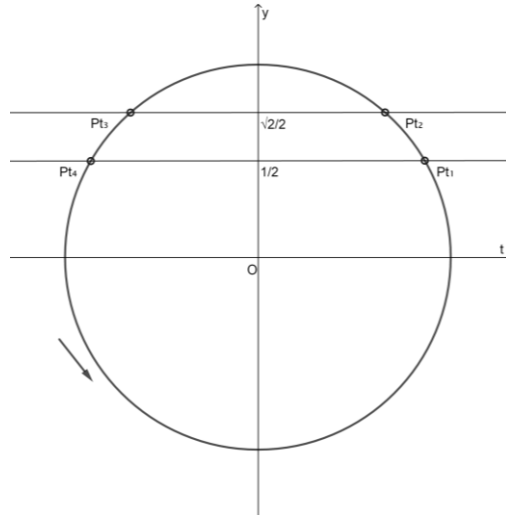


Рис.74

Знайдемо значення t_1, t_2, t_3, t_4 , здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2, t_3 < t_4$.

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad t_3 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \\ = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно x : $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

III. Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Приклад 2.36. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).

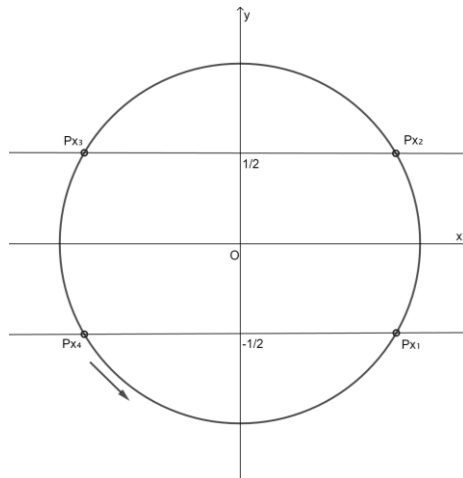


Рис. 75

Знайдемо значення x_1, x_2, x_3, x_4 , виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2, x_3 < x_4, x_1 =$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}; x_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad x_3 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}; x_4 = \pi + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}.$$

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

а. Системи тригонометричних рівнянь

Приклад 2.48. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Скористаємось формулою перетворення суми тригонометричних функцій у добуток, отримаємо:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

Врахувавши, що $x + y = \frac{\pi}{3}$, маємо:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ x - y = 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} - 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 2.49. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Враховувавши, що $x - y = \frac{\pi}{6}$, маємо:

$$\frac{1}{2}(\sin(y - x) + \sin(y + x)) = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(y + x)\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(y + x) = 1; \quad y + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ y + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 2.50. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Перетворимо друге рівняння до вигляду $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$. Оскільки $x + y = \frac{\pi}{4}$, то маємо: $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Перетворимо добуток у суму, отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos(x-y)\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y) &= \sqrt{2}; \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2};\end{aligned}$$

$$x - y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Перепишемо дане рівняння у вигляді системи з двох сукупностей:

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \\ &\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \end{aligned} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y = -\pi k \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} - \pi k \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; -\pi k\right), \left(\pi k; \frac{\pi}{4} - \pi k\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 2.51. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25 \\ \cos x \sin y = 0,75 \end{cases}$$

Розв'язання.

Додамо і віднімемо рівняння системи і отримаємо:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -0,5 \end{cases};$$

Для того, щоб не втратити розв'язки використаємо два параметри, n і k .

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(k + n) \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(k - n) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(k + n) \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(k - n) \end{cases} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{cases},$$

Бачимо, що розв'язки отриманої сукупності є підмножиною множини розв'язків вихідної системи. Так, наприклад, пара $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком системи рівнянь, проте не є розв'язком отриманої сукупності.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); \frac{\pi}{3} + \pi(k - n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); \frac{2\pi}{3} + \pi(k - n)\right)$, $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ (Мерзляк, 2010).

Приклад 2.52 Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1 \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$$

має розв'язки. Знайти ці розв'язки (Ясінський,).

Розв'язання.

Якщо $a \neq 0$, то перше рівняння системи не має розв'язків, оскільки $a^2 + 1 > 1$, $a \sin x \cos 2y \leq 1$. Знайдемо розв'язки системи, якщо $a = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x \cos 2y = 1 \\ \cos x \sin 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \cos 2y = 1 \\ \sin 2y = 0 \\ \sin x \cos 2y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ (-1)^k \cos 2y = 1 \\ y = \frac{\pi k}{2} \\ (-1)^k \sin x = 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Рівняння $\cos 2y = (-1)^k$ має розв'язки $2y = \pi n + 2\pi l, y = \frac{\pi n}{2} + \pi l, n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$.

Рівняння $\sin x = (-1)^k$ має розв'язки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$.

Розв'язки обох систем рівнянь збігаються.

Відповідь: $a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, y = \frac{\pi n}{2} + \pi l, n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.53 Вилучити α і β з системи рівностей

$$\begin{cases} m \cos^2 \alpha + n \cos^2 \beta = 1 \\ m \sin \alpha = n \sin \beta \\ m \operatorname{ctg}^2 \alpha + n \operatorname{ctg}^2 2\beta = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Загальний метод вилучення параметрів із системи двох рівнянь полягає в тому, що розв'язують одне з даних рівнянь відносно параметра (якщо це можливо) і знайдене для нього значення підставляють в друге з даних рівнянь. Але застосування деяких штучних прийомів дає іноді можливість отримати результат набагато простіше.

При вилучення параметрів з даної системи рівнянь ми отримуємо необхідні (але не достатні) умови сумісної даної системи, тому цілком допустимими є такі перетворення, що можуть дати сторонні корені (наприклад, піднесення обох частин рівняння до квадрату).

Запишемо рівняння системи у вигляді

$$\begin{cases} m(1 - \sin^2 \alpha) + n(1 - \sin^2 \beta) = 1 \\ m^2 \sin^2 \alpha = n^2 \sin^2 \beta \\ m \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + n \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m \sin^2 \alpha + n \sin^2 \beta = m + n - 1 \\ m^2 \sin^2 \alpha - n^2 \sin^2 \beta = 0 \\ \frac{m(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{n(1 - \sin^2 \beta)}{\sin^2 \beta} = 1 \end{cases}. \quad \text{Виключивши з}$$

перших рівнянь системи спочатку $\sin^2 \alpha$, а потім $\sin^2 \beta$, отримаємо:

$$\begin{aligned} n(m + n) \sin^2 \beta &= m(m + n - 1), \\ m(m + n) \sin^2 \alpha &= n(m + n - 1), \quad \text{звідки} \quad \sin^2 \beta = \frac{m(m+n-1)}{n(m+n)} \quad \text{і} \quad \sin^2 \alpha = \frac{n(m+n-1)}{m(m+n)}. \end{aligned}$$

Підставляючи у третє рівняння, отримаємо: $(m^2 - n^2)^2 = -mn$.

$$\text{Відповідь: } (m^2 - n^2)^2 = -mn.$$

Методи розв'язування систем тригонометричних нерівностей

Приклад 3.10. Знайти найбільше від'ємне значення x , для якого виконується система нерівностей $\begin{cases} 2 \sin x \geq 1 \\ 2 \cos x \leq -1 \end{cases}$,

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Для візуалізації розв'язання даної системи тригонометричних нерівностей зручно скористатися

одиничним тригонометричним колом. Для цього розв'язки двох нерівностей будемо на одному колі і накладання розв'язків будуть розв'язками системи нерівностей.

Розв'язками першої нерівності, як видно з рис. 3.15 є проміжок $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$, а другої - $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$. Таким чином системою нерівностей буде перетин розв'язків: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

Для знаходження найбільшого від'ємного значення підставимо у праву межу розв'язку $n = -1$, отримаємо $x = \frac{-7\pi}{6}$.

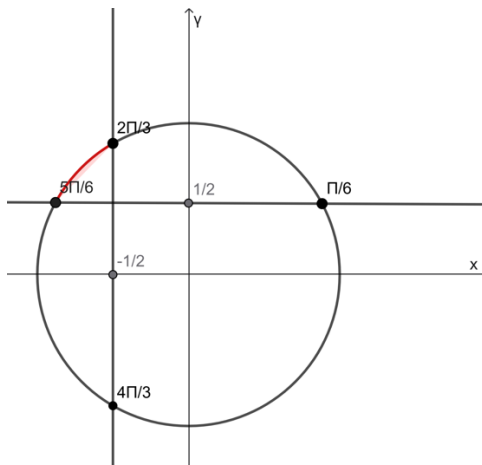


Рис.76

Відповідь: $x = \frac{-7\pi}{6}$.

Приклад.3.11 Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} 6 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2 \\ 2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x > 0 \end{cases}$$

Зведемо першу нерівність до однорідної та отримаємо:

$$\begin{cases} 4 \sin^2 x - \sin x \cos x - 3 \cos^2 x > 0 \\ 2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x > 0 \end{cases}$$

Поділимо першу і другу нерівність на $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 9 > 0 \\ 4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 > 0 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки кожної нерівності:

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x - 1) \left(\operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \right) > 0 \\ \operatorname{tg} x \in R \end{cases} \quad \text{Скористаємось методом}$$

інтервалів для знаходження розв'язків першої нерівності:

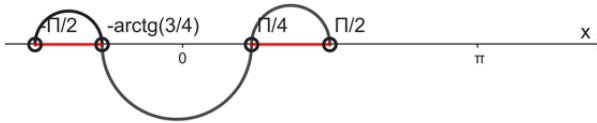


Рис.77

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z \\ x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}, n \in Z \end{cases}$$

$$\text{Отже, } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z.$$

Приклад. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x \leq \frac{5}{8} \\ \cos^4 2x + 6 \cos^2 2x \leq \frac{25}{18} \end{cases}$$

Виділимо квадрат суми двочлена у лівій частині першої нерівності, а другу нерівність розვაжимо заміною.

$$1. \quad (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq \frac{5}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq \frac{5}{8} - 1$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq -\frac{3}{8}$$

$$\sin^2 2x \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\cos 4x \leq -\frac{1}{2}$$

$$2. \quad \cos^4 2x + 6 \cos^2 2x \leq \frac{25}{18}$$

$$\cos^2 2x = t, 0 \leq t \leq 1$$

$$t^2 + 6t - \frac{25}{16} \leq 0$$

$$\left\{ \left(t - \frac{1}{4} \right) \left(t + \frac{25}{4} \right) \leq 0 \right.$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$t \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$$

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2 2x \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1 + \cos 4x}{2} \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos 4x \leq 1$$

Отже, система рівнянь звелася до системи найпростіших нерівностей $\left\{ \begin{array}{l} \cos 4x \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \cos 4x \leq 1 \end{array} \right.$. Звідси $x \in \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right\}$.

Відповідь: $x \in \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right\}$.

Список використаної літератури

1. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
2. Алгебра і початки аналізу. 11 клас : профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики : навч. посіб. Київ : Либідь, 2001. 328 с.
4. Гальперіна А. Р. Математика. Типові тестові завдання. Київ : Літера ЛТД, 2021. 112 с.
5. Ключко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Ч. 1. Алгебра. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013. 320 с.
6. Ключко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Ч. 3. Алгебра і початки аналізу. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013. 336 с.
7. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / А. М. Капіносов [та ін.]. Тернопіль : Підручники і посібники, 2022. 480 с.
8. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 8 клас : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти з поглибл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2021. 384 с.
9. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 9 клас : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти з поглибл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
10. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу в таблицях і схемах. Харків : Ранок, 2020. 128 с.

11. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 272 с.
12. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас : профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2019. 240 с.
13. Ушаков Р. П. Елементарна математика : навч. посіб. / за ред. В. О. Тадеєва. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2015. 416 с.
14. Ясінський В. В. Математика : навч. посіб. для слухачів підготов. курсів. Київ : НТУУ «КПІ», 2005. 376 с.