

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання
Факультет математики та інформатики

**ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ**

Рівне 2026

УДК 51-028.31:512 (072)

Е 50

Елементарна математика. Алгебра. Контрольні роботи / укладачі: Н. О. Генсіцька-Антонюк, Н. В. Синіцька. Рівне: РДГУ. 2026. 52 с.

Укладачі:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Синіцька Н. В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рецензенти:

Гоменюк Г. В. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Сяська Н.А. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 8/а від 15.06.2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 6 від 15.06.2026 р.)

ЗМІСТ

1.	Вступ	4
2.	Контрольна робота №1. Тотожні перетворення алгебраїчних та трансцидентних виразів	6
3.	Контрольна робота № 2. Функції, рівняння, нерівності та їх системи	21
4.	Критерії оцінювання	50
5.	Список використаної літератури	52

ВСТУП

Опанування алгебраїчної лінії курсу елементарної математики передбачає не лише усунення можливих прогалин у знаннях здобувачів, а й формування здатності бачити логічну будову шкільного курсу алгебри та початків аналізу, володіти широким арсеналом стандартних і нестандартних методів розв'язування задач, а також здійснювати відбір найбільш раціональних прийомів їх пояснення учням.

Мета і завдання методичного видання.

Пропоноване методичне видання «Елементарна математика. Алгебра. Контрольні роботи» розроблено з метою організації системного модульного контролю навчальних досягнень здобувачів освіти, а також для ефективного супроводу їхньої самостійної та індивідуальної роботи (як денної, так і заочної форм здобуття освіти). Посібник містить 20 варіантів контрольних робіт, один з яких нумерується «варіант 0» розв'язаний як методичні рекомендації до розв'язування та оформлення.

Вимоги до виконання та оформлення контрольної роботи:

- Здобувач виконує варіант контрольної роботи, номер якого визначається викладачем (зазвичай відповідно до порядкового номера в журналі академічної групи або за останніми цифрами залікової книжки).
- Розв'язання кожного завдання має бути розгорнутим: після повного запису умови задачі подається покроковий хід міркувань із посиланням на застосовані формули, властивості чи теореми, вказується область допустимих значень змінних (за потреби) і чітко фіксується кінцева відповідь.
- Не допускається запис лише кінцевої відповіді без проміжних викладок або використання методів, не обґрунтованих у шкільному чи університетському курсі.

- Графіки функцій, числові осі для методу інтервалів та геометричні інтерпретації виконуються охайно з дотриманням масштабу та позначенням осей і характерних точок.

Видання призначене для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 «Середня освіта (Математика)», а також може бути корисним учителям математики для організації тематичного оцінювання та поглибленого вивчення алгебри в школі.

**Контрольна робота №1. Тотожні перетворення
алгебраїчних та трансцендентних виразів**

ВАРІАНТ 0

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1}$

Розв'язання: Згрупуємо доданки в чисельнику та застосуємо формулу різниці квадратів:

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x + 1} &= \frac{(x^2)^2 - (x + 1)^2}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x^2 - x - 1\end{aligned}$$

Відповідь: $x^2 - x - 1$

2. Спростіть: $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$

Розв'язання: Використаємо тотожність $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ для кожного дробу:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{x+4-x}{x(x+4)} \\ &= \frac{4}{x(x+4)}\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{4}{x(x+4)}$

3. Обчисліть: $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$

Розв'язання: Нехай $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Оскільки $\sqrt{4 + \sqrt{7}} > \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, то $A > 0$. Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} \right)^2 \\
 &= 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})} + 4 - \sqrt{7} \\
 &= 8 - 2\sqrt{16 - 7} = 8 - 2 \cdot 3 = 2
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що $A > 0$, отримуємо $A = \sqrt{2}$.

Відповідь: $\sqrt{2}$

4. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a - b} + \frac{\sqrt{b}}{1 - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, якщо $b = \frac{1}{4}$

Розв'язання: Підставимо $b = \frac{1}{4}$ у вираз:

$$\frac{\sqrt{a} + \frac{1}{2} - 1}{a - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{2}}{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{2}\right)} + 1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}}$$

Скоротимо перший дріб (при $a \neq \frac{1}{4}$) і зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt{a} + \frac{1}{2}}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{a} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{a} + 1}$$

Відповідь: $\frac{3}{2\sqrt{a} + 1}$

5. Спростіть вираз: $\left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} + \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

Розв'язання: Перейдемо до додатних показників степеня:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{-2} &= \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\right)^{-2} + \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\right)^{-2} \\
 &= \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \frac{ab}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}
 \end{aligned}$$

Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$ab \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{((\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}))^2}$$

$$= ab \cdot \frac{a - 2\sqrt{ab} + b + a + 2\sqrt{ab} + b}{(a - b)^2} = \frac{2ab(a + b)}{(a - b)^2}$$

Відповідь: $\frac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$

6. Обчисліть: $27^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{-0,5} \cdot 3^0$ (у записі $9^{-0,5}$ пропущено кому)

Розв'язання: Представимо числа як степені з основою 3:

$$(3^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (3^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = 3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 1 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

Відповідь: 3

7. Обчисліть: $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 9$

Розв'язання: Застосуємо формулу переходу до нової основи $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$: $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 9 = \log_3(3^2) = 2$

Відповідь: 2

8. Спростіть вираз: $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}$

Розв'язання: За формулою переходу до нової основи логарифма показник степеня можна записати як:

$$\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a} = \log_a(\log_b a)$$

Підставимо отриманий показник і застосуємо основну логарифмічну тотожність $a^{\log_a c} = c$:

$$a^{\log_a(\log_b a)} = \log_b a$$

Відповідь: $\log_b a$

9. Спростіть вираз: $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}$

Розв'язання: Використаємо формулу подвійного кута

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ (звідки $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$) та формулу суми косинусів $\cos \alpha + \cos 3\alpha = 2 \cos 2\alpha \cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \cos 2\alpha) + (\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{\cos \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1)} &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \cos 2\alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \cos \alpha\end{aligned}$$

Відповідь: $2 \cos \alpha$

10. Доведіть тотожність: $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

Розв'язання: Перетворимо ліву частину рівності, розписавши

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Ліва частина дорівнює правій:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \text{ Тотожність доведено.}$$

ВАРІАНТ 1

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$

2. Спростіть вираз: $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right)$

3. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

4. Спростіть вираз: $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}},$

$$\text{якщо } 1 \leq a \leq 2$$

5. Обчисліть: $\frac{2 \cdot 4^{-1} + \sqrt{27^{\frac{2}{3}}}}{(-2)^{-2} \cdot (0,25)^{-1} + 81^{\frac{1}{4}}}$

6. Спростіть вираз: $\frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{b}{a}} \right)^{-1}$

7. Обчисліть: $2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} + \log_4 125 \cdot \log_5 2$
8. Спростіть вираз: $\log_a b + \log_a (b^{\log_b a - 1})$
9. Спростіть: $\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$
10. Доведіть тотожність: $\frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1 - \operatorname{tg} \beta}$
(за умови $\cos 2\beta \neq 0, \tan \beta \neq 1$)

ВАРІАНТ 2

1. Спростіть вираз: $\frac{a^4 + 4}{a^2 - 2a + 2}$
2. Спростіть: $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$
3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$
4. Обчисліть: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$
5. Спростіть вираз: $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{2}}$
6. Обчисліть: $5^{\frac{1}{\log_7 5}} \cdot 3^{\log_3 2} - 2^{\log_2 5}$
7. Знайти значення виразу $\log_{a^2 b} a$, якщо $\log_a b = 5$
8. Спростіть вираз: $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$
9. Обчисліть без таблиць: $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$
10. Доведіть тотожність: $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

ВАРІАНТ 3

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 + 5x^2 + 9}{x^2 - x + 3}$
2. Спростіть вираз: $\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
3. Спростіть: $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$
4. Скоротіть дріб: $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - y + \sqrt{x^2 - y^2}}$

5. Обчисліть: $\left(\left(\frac{1}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot (a+b)^{-1} + (ab)^{-1} \cdot (a+b)^2$,

якщо $a = 0,2, b = 5$

6. Спростіть: $\frac{a-1}{\frac{3}{a^4+a^2} \cdot \frac{1}{a^2+1}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}+a^{\frac{1}{4}}}}{a^{\frac{1}{4}}}$

7. Обчисліть: $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

8. Спростіть: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1)$

9. Спростіть вираз: $\frac{1 - \cos 4\alpha}{\sec^2 2\alpha - 1} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{\csc^2 2\alpha - 1}$

10. Доведіть тотожність:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha + \beta)$$

ВАРІАНТ 4

1. Спростіть вираз: $\frac{x^5+x+1}{x^2+x+1}$

2. Скоротіть дріб: $\frac{a^4-3a^2+1}{a^4-a^2-2a-1}$

3. Обчисліть: $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

4. Спростіть вираз: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$,

якщо $4 \leq x \leq 8$

5. Обчисліть: $\frac{9^{\frac{1}{3} \cdot 27^{\frac{4}{3}}}}{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{9}$

6. Спростіть вираз: $\left(\frac{\frac{3}{a^2+b^2}}{a-b} - \frac{a-b}{\frac{1}{a^2+b^2}} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}+b^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{ab}}$

7. Спростіть: $\log_a \sqrt{ab} - \log_b \sqrt{ab} + \log_a \sqrt{\frac{a}{b}}$

8. Обчисліть: $a^{\frac{\log_2(\log_2 a)}{\log_2 a}}$, якщо $a > 1$

9. Спростіть вираз: $\sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} - \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{11\pi}{8} + \alpha \right)$

10. Доведіть тотожність: $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$

ВАРІАНТ 5

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1}$
2. Спростіть: $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
3. Обчисліть: $\sqrt{31 - 4\sqrt{21}} - \sqrt{31 + 4\sqrt{21}}$
4. Спростіть: $\sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a + 8 - 6\sqrt{a - 1}}$, якщо $2 \leq a \leq 5$
5. Спростіть вираз: $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}} \right)^{-1} - (a + b)$
6. Обчисліть: $4^{\log_2 3 + \log_4 5} \cdot 9^{\log_3 2}$
7. Знайти $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a, \log_{30} 5 = b$
8. Спростіть вираз: $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$
9. Обчисліть без таблиць: $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$
10. Доведіть тотожність:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2}$$

ВАРІАНТ 6

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 + 64}{x^2 + 4x + 8}$
2. Спростіть вираз: $\frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - xz}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$
3. Звільніться від ірраціональності: $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$
4. Доведіть, що значення виразу є цілим: $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$
5. Обчисліть: $\frac{25^{-0.5} \cdot c^{\frac{1}{3}}}{c^{-\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{-2}$, якщо $c = 0,01$
6. Спростіть вираз: $\frac{x-y}{\frac{3}{x^4 + x^2 y^4} - \frac{1}{x^2 y^4}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$
7. Обчисліть: $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

8. Спростіть вираз: $3^{\frac{2}{\log_5 3}} - \log_2 \left(\log_3 \sqrt[4]{2\sqrt{3}} \right)$
9. Спростіть: $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha}$
10. Доведіть тотожність: $\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

ВАРІАНТ 7

1. Спростіть вираз: $\frac{a^8 + a^4 + 1}{a^4 + a^2 + 1}$
2. Скоротіть дріб: $\frac{2a^3 - 7a^2 + 7a - 2}{4a^3 - 8a^2 + 5a - 1}$
3. Обчисліть: $\sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$
4. Спростіть: $\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$, якщо $2 \leq x \leq 4$
5. Спростіть вираз: $\left(\frac{a+1}{a-1} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1}}$
6. Обчисліть: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{6} - \log_3 2 + 5^{\log_5 2}$
7. Знайти $\log_a x$, якщо $\log_a b = 3, \log_b x = 2$
8. Спростіть: $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$
9. Обчисліть без таблиць: $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$
10. Доведіть тотожність: $\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3 = 8 \sin^4 \alpha$

ВАРІАНТ 8

1. Спростіть вираз: $\frac{a^4 + 3a^2 + 4}{a^2 + a + 2}$
2. Скоротіть дріб: $\frac{(x^2 + x + 1)^2 - 1}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 1}$
3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$
4. Спростіть вираз: $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} - \frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$
5. Обчисліть: $\left(2^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}} \right) \left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} \right) \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \right)$
6. Спростіть вираз: $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$

7. Обчисліть: $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

8. Спростіть вираз: $x^{\frac{\log_a(\log_a x)}{\log_a x}}$, де $x > 1, a > 1$

9. Спростіть вираз: $\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2 \alpha}$

10. Доведіть тотожність:

$$\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2 \alpha + 4 \operatorname{tg} 4 \alpha + 8 \operatorname{ctg} 8 \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$$

ВАРІАНТ 9

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2}$

2. Скоротіть дріб: $\frac{a^3 - 3a + 2}{a^4 - 4a^2 + 4a - 1}$

3. Обчисліть: $\sqrt{13 + 3\sqrt{12}} - \sqrt{13 - 3\sqrt{12}}$

4. Спростіть вираз: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, якщо $2 < x < 3$

5. Обчисліть: $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 81^{0,25} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

6. Спростіть вираз: $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \frac{1}{a-b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

7. Обчисліть: $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

8. Знайти значення виразу $\log_a(a^3 b^2)$, якщо $\log_a b = 2$

9. Спростіть вираз: $\frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}$

10. Доведіть тотожність: $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

ВАРІАНТ 10

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 - 2x^3 - x + 2}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}$

2. Спростіть вираз: $\frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

3. Обчисліть: $\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2}$

4. Спростіть вираз: $\sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} - \sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}}$,

якщо $9 \leq x \leq 18$

5. Обчисліть: $\frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{9}}$

6. Спростіть вираз: $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b)$

7. Обчисліть: $10^{1+\log_{10} 5} + 100^{\frac{1}{2} \log_{10} 4 - 1}$

8. Спростіть вираз: $\log_a b + \log_{a^2} b^2 + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$

9. Спростіть вираз: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$

10. Доведіть тотожність: $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2 \alpha - 4 \operatorname{tg} 4 \alpha = 8 \operatorname{ctg} 8$

ВАРІАНТ 11

1. Спростіть вираз: $\frac{a^4 + a^2 v^2 + v^4}{a^3 + v^3} \cdot \frac{a^2 - av + v^2}{a^2 + av + v^2}$

2. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15}{x^2 + 2x + 5}$

3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

4. Спростіть вираз: $\sqrt{4x + 4\sqrt{4x - 1}} - \sqrt{4x - 4\sqrt{4x - 1}}$,
якщо $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$

5. Обчисліть: $\left(\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right)^6 : x^3$, якщо $x = 2026$

6. Спростіть вираз: $\frac{\frac{a-b}{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}}{\frac{a+b}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}}$

7. Обчисліть: $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

8. Спростіть: $\log_2 \cos 20^\circ + \log_2 \cos 40^\circ + \log_2 \cos 80^\circ$

9. Спростіть вираз: $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

10. Доведіть тотожність: $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$

ВАРІАНТ 12

1. Спростіть вираз: $\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^3 - 1} : \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - 1}$

2. Спростіть: $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$

3. Обчисліть: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
4. Спростіть: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$, якщо $x > 2$
5. Обчисліть: $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + 16^{0,75} - 25^{0,5}$
6. Спростіть вираз:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} \cdot (a^{-1} + b^{-1}) + \frac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^3} \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)$$
7. Обчисліть: $3^{\log_3^2 5} - 5^{\log_3 5}$
8. Спростіть вираз: $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_n(n - 1)$
9. Спростіть вираз: $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}$
10. Доведіть тотожність:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ВАРІАНТ 13

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2}$
2. Скоротіть дріб: $\frac{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^3 - 1}$
3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}$
4. Обчисліть значення виразу: $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$
5. Обчисліть: $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$, якщо $a = 01, b = 10$
6. Спростіть вираз: $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1}$
7. Обчисліть: $\log_2 5 - \log_4 25 + \log_8 64$
8. Спростіть: $\log_a \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2} + a}{x}\right) + \log_a \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2} + a}{x}\right)^{-1}$

9. Спростіть вираз: $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$
10. Доведіть тотожність: $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1+\sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$

ВАРІАНТ 14

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$
2. Спростіть: $\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$
3. Обчисліть: $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{17+12\sqrt{2}}$
4. Спростіть вираз:

$$\sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}} + \sqrt{a+5-4\sqrt{a+1}}, \quad \text{якщо } -1 \leq a \leq 0$$
5. Обчисліть: $\left(3^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right) \left(3^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{15} + 5^{\frac{2}{3}}\right)$
6. Спростіть вираз: $\left(\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$
7. Обчисліть: $2^{\frac{4}{\log_5 2}} + 8^{\frac{1}{\log_3 2}}$
8. Спростіть вираз: $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$
9. Спростіть: $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$
10. Доведіть тотожність: $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

ВАРІАНТ 15

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$
2. Спростіть вираз: $\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$
3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
4. Обчисліть: $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$
5. Обчисліть: $\left(\frac{c^{-0,5} \cdot c^{\frac{1}{3}}}{c^{-\frac{1}{6}}}\right)^{-3}$, якщо $c = 5$

6. Спростіть вираз: $\frac{x-y}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$
7. Обчисліть: $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$
8. Відомо, що $\log_2 5 = a$. Виразіть через a число $\log_{25} 16$
9. Спростіть вираз: $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}$
10. Доведіть тотожність:
- $$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ВАРІАНТ 16

1. Спростіть вираз: $\frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{x^4 + 2x^3 y + 2x^2 y^2 + 2xy^3 + y^4}$
2. Спростіть: $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$
3. Обчисліть: $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$
4. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$, якщо $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ ($a > 0, 0 < b < 1$)
5. Обчисліть: $81^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^{1,5}$
6. Спростіть вираз: $\frac{a-b}{\frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^3} \frac{1}{b^3} + \frac{2}{b^3}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}$
7. Обчисліть: $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8$
8. Спростіть вираз: $\log_a (a^2 \cdot \sqrt[3]{b}) - \frac{1}{3} \log_a b$
9. Спростіть: $\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)}$
10. Доведіть тотожність: $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} 2^n \alpha$

ВАРІАНТ 17

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4+x^3-4x^2-5x-5}{x^2+x+1}$
2. Спростіть вираз: $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$
3. Обчисліть: $\sqrt[4]{41-24\sqrt{2}}$
4. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{4x}\right)^2-1}}{\frac{x^2-4}{4x}}$, якщо $0 < x < 2$
5. Спростіть вираз: $\left(a^{\frac{4}{3}}b^{-2}c^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (a^2b^{-3}c)$
6. Обчисліть: $\left(5^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \sqrt{40}$
7. Обчисліть: $3^{\frac{4}{\log_7 9}} + \log_2(\log_4 16)$
8. Спростіть вираз: $\log_x(xy) - \log_y(xy) + \log_x\left(\frac{x}{y}\right)$
9. Спростіть вираз: $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$
10. Доведіть тотожність: $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha = 1$

ВАРІАНТ 18

1. Спростіть вираз: $\frac{a^4+a^2+1}{a^2+a+1}$
2. Скоротіть дріб: $\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x-15}{x^2+2x+5}$
3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$
4. Спростіть вираз: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{a+b}{a-b}$
5. Обчисліть: $0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$
6. Спростіть вираз: $\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$
7. Обчисліть: $49^{\log_7 3} + \log_5 2 \cdot \log_2 125$

8. Спростіть: $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a$

9. Спростіть вираз: $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} \cdot (1 - \cos 4\alpha)$

10. Доведіть тотожність: $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$ (за умови коректності виразів)

ВАРІАНТ 19

1. Скоротіть дріб: $\frac{x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2}$

2. Спростіть вираз: $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)(1+x^2)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)(1+y^2)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)(1+z^2)}$

3. Спростіть: $\sqrt{x + v - 2\sqrt{xv}} + \sqrt{x + v + 2\sqrt{xv}}$, якщо $0 \leq x \leq v$

4. Обчисліть значення виразу: $x^3 + 3x - 14$,

$$\text{якщо } x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$$

5. Обчисліть: $\frac{64^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-2}}{16^{-\frac{1}{2}}}$

6. Спростіть вираз: $\frac{a-1}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1} : \frac{a^{\frac{1}{3}}-1}{a^{\frac{1}{3}}+1}$

7. Обчисліть: $5^{\log_{\sqrt{5}} 4} + \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}}$

8. Спростіть вираз: $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b + \log_a \frac{1}{b}$

9. Спростіть: $\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}$

10. Доведіть тотожність: $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

Контрольна робота №2. Функції, рівняння, нерівності та їх системи.

ВАРІАНТ 0

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5.$$

Згорнемо вирази під коренями за формулами повного квадрата:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2} &= 5 \\ |x-3| + |x+2| &= 5\end{aligned}$$

Геометричний зміст модуля: сума відстаней від точки x координатної прямої до точок 3 та -2 дорівнює 5. Оскільки відстань між точками -2 та 3 точно дорівнює 5, розв'язком є будь-яка точка x , що належить відрізку $[-2, 3]$.

Відповідь: $x \in [-2, 3]$.

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність

$$\sqrt{x^2 - x - 12} > 7 - x.$$

Вона рівносильна сукупності двох систем:

1. Перша система (коли права частина від'ємна):

$$\begin{cases} 7 - x < 0 \\ x^2 - x - 12 \geq 0 \end{cases}$$

З першої нерівності отримуємо $x > 7$. Корені квадратного тричлена в другій: -3 та 4, розв'язок: $x \in (-\infty; -3) \cup (4, +\infty)$. Перетин для першої системи: $x \in (7, +\infty)$.

2. Друга система (коли права частина невід'ємна):

$$\begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 > (7 - x)^2 \end{cases}$$

$$13x > 61 \Rightarrow x > \frac{61}{13}. \text{ Перетин з умовою } x \leq 7: x \in \left(\frac{61}{13}, 7\right].$$

Об'єднуємо розв'язки обох систем: $x \in \left(\frac{61}{13}, +\infty\right)$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{61}{13}, +\infty\right)$.

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 14 \end{cases}$$

Розкладемо перше рівняння на множники:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2xy + xy - y^2 = 0 &\Rightarrow 2x(x - y) + y(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow (2x + y)(x - y) = 0. \end{aligned}$$

Випадок 1: $y = x$. Підставляємо в друге рівняння:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 14 &\Rightarrow \\ x^2 = 14 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Пари розв'язків: $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

Випадок 2: $y = -2x$. Підставляємо в друге рівняння:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x(-2x) + 3(-2x)^2 = 14 &\Rightarrow x^2 - 4x^2 + 12x^2 = \\ 14 &\Rightarrow 9x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = \frac{14}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{14}}{3}. \end{aligned}$$

Пари розв'язків: $\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{2\sqrt{14}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{2\sqrt{14}}{3}\right)$.

Відповідь: $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{2\sqrt{14}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{2\sqrt{14}}{3}\right)$.

4. Розв'яжіть показникове рівняння $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14$.

Зауважимо, що $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, тому $(2 - \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{-x}$.

Зробимо заміну $t = (2 + \sqrt{3})^x$, де $t > 0$:

$$t + \frac{1}{t} = 14 \Rightarrow t^2 - 14t + 1 = 0.$$

Дискримінант: $\frac{D}{4} = 49 - 1 = 48$.

$$t_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Оскільки $(2 \pm \sqrt{3})^2 = 4 \pm 4\sqrt{3} + 3 = 7 \pm 4\sqrt{3}$, отримуємо:

$$1. \quad (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 2.$$

$$2. \quad (2 + \sqrt{3})^x = (2 - \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^{-2} \Rightarrow x = -2.$$

Відповідь: $x = \pm 2$.

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність

$$\text{Нерівність: } \frac{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}{x^2 - 5x + 6} \leq 0.$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$\text{Чисельник: } (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = (3^x - 1)(3^x - 9) = (3^x - 3^0)(3^x - 3^2).$$

$$\text{Знаменник: } x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Застосуємо метод раціоналізації: оскільки функція $f(x) = 3^x$ монотонно зростає, різниця $3^x - 3^a$ збігається за знаком з різницею $x - a$. Замінімо множники:

$$\frac{(x-0)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \leq 0.$$

ОДЗ: $x \neq 2, x \neq 3$. Множник $(x - 2)$ скорочується (але при переході через точку $x = 2$ знак виразу не змінюється, точка залишається виколотою). Нерівність зводиться до $\frac{x}{x-3} \leq 0$ при $x \neq 2$.

Розв'язуючи методом інтервалів, отримуємо $x \in [0, 3)$, виключаючи $x = 2$.

Відповідь: $x \in [0, 2) \cup (2, 3)$.

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння

$$\log_2^2 x - 3 \log_2 \left(\frac{x}{2} \right) = 1.$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

За властивістю логарифма частки: $\log_2 \left(\frac{x}{2} \right) = \log_2 x - 1$.

Підставляємо в рівняння: $\log_2^2 x - 3(\log_2 x - 1) - 1 = 0$

$$\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0.$$

Нехай $\log_2 x = t$. Розв'язуємо квадратне рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$, корені якого $t = 1$ та $t = 2$.

$$1. \quad \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2.$$

$$2. \quad \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Обидва значення входять до ОДЗ.

Відповідь: $x \in \{2, 4\}$.

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність

$$\log_{x-1}(x^2 - 4x + 3) > 1.$$

Знайдемо ОДЗ:

$$1. \quad x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1;$$

$$2. \quad x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2;$$

$$3. \quad x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty). \text{ Спільна область допустимих значень: } x \in (3, +\infty).$$

Оскільки $x > 3$, основа логарифма $x - 1 > 2$, тобто строго більша за одиницю. Отже, при переході до аргументів знак нерівності зберігається:

$$x^2 - 4x + 3 > (x - 1)^1 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) > 0.$$

Розв'язок квадратної нерівності: $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

Перетинаючи з ОДЗ ($x > 3$), отримуємо $x \in (4, +\infty)$.

Відповідь: $x \in (4, +\infty)$.

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння

$$\cos(2x) = \sqrt{2} \sin x + 1.$$

Застосуємо формулу косинуса подвійного кута через синус: $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$.

$$1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{2} \sin x + 1 \Rightarrow$$

$$-2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0.$$

Винесемо спільний множник: $-\sqrt{2} \sin x (\sqrt{2} \sin x + 1) = 0$

$$1. \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x = \pi k, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$, де $k, n \in \mathbb{Z}$.

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x - \cos y = 1 \end{cases}$$

Додамо обидва рівняння почленно: $\sin^2 x + \sin x = 2 \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно $\sin x$: корені 1 та -2 . Оскільки $\sin x \in [-1, 1]$, корінь -2 не підходить.

Залишається $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Підставимо знайдене значення $\sin x$ у перше рівняння системи:

$$1 + \cos y = 1 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, де $k, n \in \mathbb{Z}$.

10. Побудуйте графік функції $y = ||x - 1| - 2|$ методом послідовних геометричних перетворень.

Для побудови графіка функції $y = ||x - 1| - 2|$ методом послідовних геометричних перетворень необхідно виконати такі кроки:

Базова функція: Побудуйте графік функції $y = |x|$ (бісектриси першої та другої координатних чвертей).

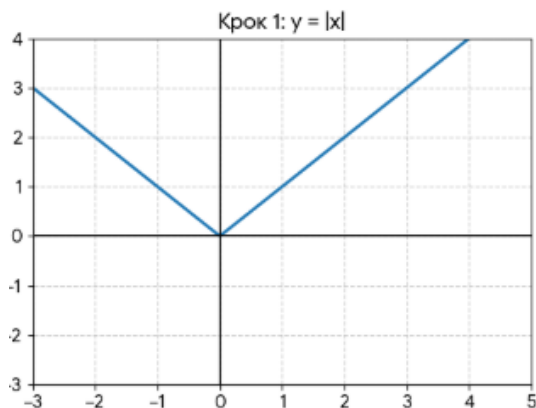


Рис.1

Зсув вправо (вздовж осі абсцис): Виконайте паралельне перенесення графіка $y = |x|$ на 1 одиницю вправо вздовж осі Ox . Отримаєте графік функції $y = |x - 1|$. Вершина кута зміститься у точку $(1, 0)$.

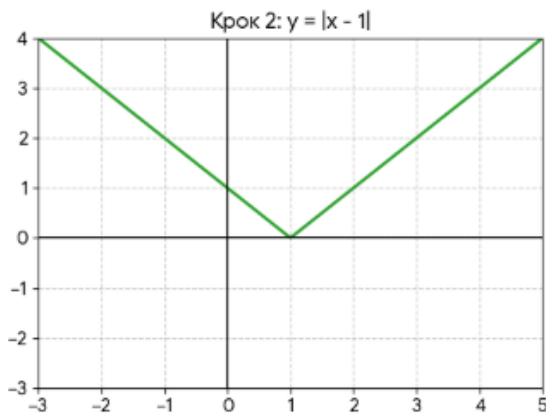


Рис.2

Зсув вниз (вздовж осі ординат): Виконайте паралельне перенесення отриманого графіка на 2 одиниці вниз вздовж осі Oy . Отримаєте графік функції $y = |x - 1| - 2$. Тепер вершина знаходиться у точці $(1, -2)$, а сам графік перетинає вісь Ox у точках $(-1, 0)$ та $(3, 0)$.

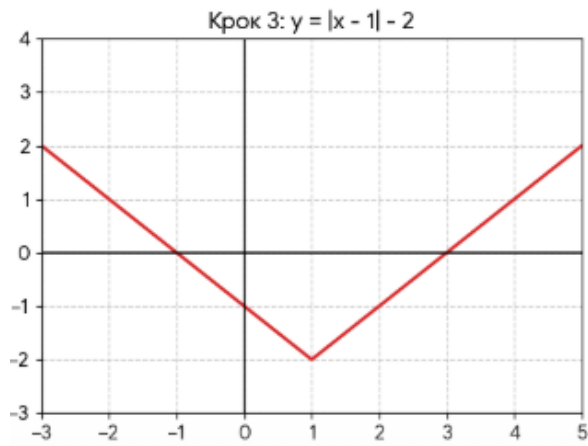


Рис.3

Симетричне відображення (застосування зовнішнього модуля): Ту частину графіка $y = |x - 1| - 2$, яка лежить нижче осі Ox (від'ємні значення), симетрично відобразіть відносно цієї осі у верхню півплощину. Частину графіка, що лежить на осі Ox та вище неї, залиште без змін.

У результаті ви отримаєте шуканий графік функції

$y = ||x - 1| - 2|$, який нагадує літеру "W". Його точки мінімуму лежать на осі абсцис — це $(-1, 0)$ та $(3, 0)$, а точка локального максимуму знаходиться у координатах $(1, 2)$.

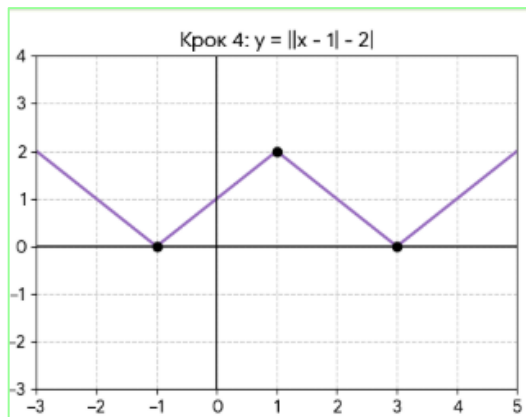


Рис.4

ВАРІАНТ 1

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулями:

$$\frac{|x^2 - 4x| - 3}{x^2 - |x - 5| - 5} \geq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x + 1)(y + 1) = 72 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1}$$

5. Розв'яжіть показниково-степеневу нерівність:

$$x^{x^2 - 5x + 6} > 1$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння:

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою:

$$\log_x(x^2 - 3x + 2) \geq 2$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0,75 \\ \sin y \cos x = 0,25 \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції $y = ||x - 2| - 3| - 1$ методом геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 2

1. Розв'яжіть зворотне алгебраїчне рівняння 4-го степеня:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

2. Розв'яжіть нерівність ірраціонального типу (зверніть увагу на ОДЗ):

$$\frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{2x - 5} \leq \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x - 2}$$

3. Розв'яжіть однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x^2y - xy^2 = 6 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння:

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x = 4$$

5. Розв'яжіть систему показниково-логарифмічних рівнянь:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (застосуйте логарифмування обох частин):

$$x^{\log_3 x} = 9x$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність методом раціоналізації (або еквівалентних переходів):

$$\log_{\frac{x+1}{2}}(x^2 - 5x + 6) \leq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (застосуйте формули перетворення суми/різниці в добуток):

$$\cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x) = 0$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність методом допоміжного кута:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x \geq 1$$

10. Не будуючи графік, знайдіть область значень (множину значень) функції $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 4)$. Відповідь обґрунтуйте.

ВАРІАНТ 3

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (застосуйте метод введення нової змінної):

$$x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (зверніть увагу на умови переходу до системи):

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (використайте властивості симетричних систем):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ xy = 12 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведіть його до однорідного рівняння 2-го степеня):

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

5. Розв'яжіть показникову нерівність:

$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння:

$$\log_2(x^2 + 3) + \log_{0.5}(5) = 2 \log_{0.25}(x - 1) - \log_2(x + 1)$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (скористайтесь методом раціоналізації або розгляньте два випадки):

$$\log_{2x-3}(x^2 - 5x + 6) < 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (зведення до однорідного):

$$3 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin(2x) = 2$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції $y = x|x - 4|$.

ВАРІАНТ 4

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння вищих степенів (зробіть заміну, виділивши спільний вираз):

$$(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем:

$$\frac{x^2 - |x| - 6}{x^2 + 5x} \geq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зв'язок між взаємно оберненими виразами):

$$\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10$$

5. Розв'яжіть показниково-степеневу нерівність:

$$(x^2 - 3x + 1)^{x+2} \leq 1$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (зверніть увагу на ОДЗ та парний степінь основи):

$$\log_{x^2}(x+2) = \frac{1}{2}$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність (зведення до спільної основи):

$$\frac{\log_2(x+1) - \log_3(x+1)}{x^2 - 4} \geq 0$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (використайте формули зведення або перетворення суми/різниці):

$$\sin(3x) = \cos(2x)$$

9. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{2 \sin x - 1}{\log_2(x-2)} \geq 0$$

10. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} + \arcsin(2x-1)$.

ВАРІАНТ 5

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння вищих степенів (шляхом групування множників та заміни змінної):

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 120$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність:

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (однорідну щодо змінних):

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{10}{3} \\ x + y = 8 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведення до однорідного рівняння 2-го степеня):

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з показниковими функціями (метод інтервалів):

$$\frac{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3}{x^2 - 4} \geq 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (використайте властивість взаємно обернених логарифмів):

$$\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою та дробово-раціональним аргументом:

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < -1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (використайте формули пониження степеня):

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin(2x) - \frac{1}{2}$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції та дослідіть його (задача з параметром):

Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

ВАРІАНТ 6

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння з модулем (через розкриття на інтервалах знаковизначення):

$$|x^2 - 2x - 3| = 3x - 3$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем (зверніть увагу на область допустимих значень):

$$\frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 2$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (використайте метод введення нових змінних для добутку):

$$\begin{cases} x^2 y^2 + xy = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (винесення спільного множника за дужки):

$$4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2-3x} = 17$$

5. Розв'яжіть нерівність змішаного типу (ірраціонально-показникова):

$$\sqrt{9^x - 3^{x+1} + 2} > 3^x - 9$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (розкладання квадратного тричлена на множники):

$$\log_2(x^2 - x - 2) = 2 + \log_2(x - 2)$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (модуль в основі):

$$\log_{|x-1|}(2x + 1) > 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (зведення до одного аргументу):

$$\cos(4x) + 2 \sin^2 x = 1$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (метод інтервалів на одиничному колі):

$$\sin(2x) > \cos x$$

10. Функція задана формулою $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x-2}$. Побудуйте графік цієї функції та запишіть проміжки, на яких функція спадає.

ВАРІАНТ 7

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (перетворення виразу під коренем у повний квадрат):

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність із вкладеними модулями:

$$\frac{||x - 1| - 2|}{x^2 - 16} \leq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (використайте властивості симетричних багаточленів):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x + y + xy = 7 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведення до спільної основи за допомогою логарифмування або розкладання на множники):

$$2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$$

5. Розв'яжіть показниково-степеневу нерівність (розгляньте випадки для основи степеня):

$$|x - 2|^{x^2 - 4x + 3} < 1$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння:

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою:

$$\log_{x^2-1}(3x - 1) < 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (метод розкладання на множники):

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (використайте формули подвійного аргументу та метод інтервалів):

$$\cos(2x) + 3 \sin x \geq 2$$

10. Побудуйте графік функції $y = ||\log_2|x - 1| - 1|$ методом послідовних геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 8

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (корені різних степенів, використайте метод введення нової змінної):

$$\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (зверніть увагу на умови піднесення обох частин до квадрата):

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} > x - 2$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$$

5. Розв'яжіть систему показникових рівнянь (використайте властивості степенів та теорему Вієта):

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 24 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (заміна змінної та перехід до нової основи):

$$\log_2(x) + \log_x(16) = 5$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність (вкладені логарифми):

$$\log_x(\log_2(4^x - 6)) \leq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin(2x)$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність з урахуванням обмежень на підкореневий вираз:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2 \sin x}} \geq 0$$

10. Знаходження властивостей функції за допомогою графіка:

Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - x^2}$.

ВАРІАНТ 9

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (комбінація квадратного та кубічного коренів, використайте метод підбору з доведенням єдиності або заміну змінної):

$$\sqrt[3]{24 + x} + \sqrt{12 - x} = 6$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (зверніть увагу на ОДЗ та винесення спільного невід'ємного множника):

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (симетричну, метод введення $u = x + y$, $v = xy$):

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведення до квадратного):

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

5. Розв'яжіть показникову нерівність (метод групування, різні основи):

$$3^{x+1} - 2^x \geq 3^{x-1} + 2^{x+3}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (змінна в основі та показнику, логарифмування обох частин):

$$x^{\log_2 x + 2} = 8$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (метод раціоналізації):

$$\log_{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 3) \leq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (метод розкладання на множники):

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність:

$$\sin^4 x - \cos^4 x > \frac{1}{2}$$

10. Побудуйте графік функції $y = \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$ методом геометричних перетворень графіка функції $y = \frac{k}{x}$.

ВАРІАНТ 10

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння вищих степенів (метод заміни цілого виразу):

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем:

$$\frac{|x^2 - 2x| - 3}{x - 1} \geq 1$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 18 \\ 3y^2 + xy = 6 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (логарифмування обох частин або зведення до однієї основи):

$$3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$$

5. Розв'яжіть систему показникових рівнянь:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (зверніть особливу увагу на розширення ОДЗ при застосуванні властивостей логарифмів):

$$\log_3(x^2 - 2x) - \log_3 x = 1$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою:

$$\log_x(3x - 2) > 2$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (перетворення добутку тригонометричних функцій у суму):

$$\cos(3x) \cos(6x) = \cos(4x) \cos(7x)$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (порівняння різних функцій на колі):

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x < 2 \sin x$$

10. Побудуйте графік функції $y = 2^{|x-1|} - 2$ методом послідовних геометричних перетворень. Користуючись графіком, запишіть проміжки знакосталості даної функції.

ВАРІАНТ 11

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (із кубічними коренями, метод введення двох нових змінних та складання системи):

$$\sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (зверніть увагу на два випадки розкриття залежно від знаку правої частини):

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq x + 1$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (використайте симетричність, замінивши $x + y = u$ та $xy = v$):

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (однорідне рівняння 2-го степеня, ділення на показниковий вираз):

$$6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з показниковими функціями (метод узагальнених інтервалів):

$$\frac{4^x - 2^{x+2} + 3}{x^2 - x - 2} < 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (зверніть увагу на звуження ОДЗ при необережному використанні властивостей):

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) = 1 + \log_2(x - 3)$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою:

$$\log_{3x-1}(x^2 - x + 1) \geq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (згрупуйте доданки та використайте формулу суми синусів):

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (зведення до однієї тригонометричної функції або використання допоміжного кута):

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geq \sqrt{3}$$

10. Побудуйте графік функції $y = |\log_{0.5}(|x| - 2)|$ методом послідовних геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 12

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (зверніть увагу на різницю підкореневих виразів та використайте метод множення на спряжений вираз):

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x - 1} = 2$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність із модулем (метод інтервалів):

$$\frac{||x + 1| - 3|}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (вираження однієї змінної через іншу з підстановкою):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (винесення спільного множника за дужки):

$$3^{x^2-1} + 3^{x^2-2} = 108$$

5. Розв'яжіть систему показникових рівнянь (скористайтесь перемноженням та діленням рівнянь одне на одне):

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (логарифмування обох частин за основою 5):

$$x^{\log_5 x} = 625x^3$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність (змінна основа та модуль в аргументі):

$$\log_x (|x - 2|) < 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (використайте формули пониження степеня):

$$\sin^2 x + \sin^2(2x) = \sin^2(3x)$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь (використайте додавання та віднімання рівнянь для отримання формул косинуса суми/різниці):

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції та дослідіть його:

Побудуйте графік функції $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|-1} - 2 \right|$. Користуючись побудованим графіком, запишіть проміжки зростання цієї функції.

ВАРІАНТ 13

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (застосуйте метод виділення повного квадрата або заміну змінної відносно всього підкореневого виразу):

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (зверніть увагу на два випадки розкриття залежно від знака виразу в правій частині):

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 4} > -x - \frac{1}{2}$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (однорідна система 2-го степеня):

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зверніть увагу на взаємно обернені вирази в основах степенів):

$$(3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 34$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з показниковою функцією (метод інтервалів після заміни):

$$\frac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \geq 1$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (перехід до однієї основи та використання методу заміни змінної):

$$\log_x(2) - \log_4(x) + \frac{7}{6} = 0$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (скористайтесь методом раціоналізації):

$$\log_{x+2}(x^2 - 2x) \geq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (перетворення суми тригонометричних функцій у добуток):

$$\cos x + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (пониження степеня або розкладання на множники):

$$\cos(2x) < \cos x$$

10. Спростіть вираз і побудуйте графік функції

$y = \frac{|x-3|}{x-3}(x^2 - 4x + 3)$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть область значень цієї функції на відріжку $[0; 4]$.

ВАРІАНТ 14

1. Розв'яжіть (симетричне) алгебраїчне рівняння 4-го степеня:

$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем:

$$\frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (введення нових змінних для дробів):

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показниково-степеневе рівняння (логарифмування обох частин або розгляд різних баз):

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

5. Розв'яжіть систему показниково-логарифмічних рівнянь:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144 \\ \log_2(y - x) = 2 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (використайте формулу переходу до нової основи):

$$\log_4(x + 12) \cdot \log_x(2) = 1$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (зверніть увагу на повний квадрат в аргументі):

$$\log_{\frac{x}{3}}(x^2 - 4x + 4) \leq 0$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (застосуйте метод введення допоміжного кута):

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність з алгебраїчними обмеженнями (врахуйте ОДЗ підкореневого виразу):

$$\frac{2 \cos x - 1}{\sqrt{25 - x^2}} \geq 0$$

10. Побудуйте графік функції $y = |\log_3 |x| - 1|$ методом послідовних геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 15

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (застосуйте метод введення нової змінної для всього підкореневого виразу):

$$x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (стандартний вигляд, вимагає переходу до сукупності або подвійної системи):

$$\sqrt{x^2 - x - 2} < 2x + 1$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (введіть заміни $u = x - y$ та $v = xy$):

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 30 \\ x + xy - y = 13 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння:

$$2^{3x} + 8 \cdot 2^{-3x} = 9$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з показниковими функціями:

$$\frac{5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5}{5^x - 25} \leq 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (використайте властивості степеня аргументу та заміну змінної):

$$\log_3^2 x - \log_3(x^3) + 2 = 0$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (скористайтеся методом раціоналізації):

$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6) \geq 2$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння:

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

1. Спростіть вираз і побудуйте графік функції

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}.$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть найбільше та найменше значення цієї функції на множині дійсних чисел.

ВАРІАНТ 16

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння вищих степенів (шляхом групування крайніх і середніх множників та введення заміни):

$$(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 24$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x| - 2} \geq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (симетричну, метод виділення повного квадрата суми):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (використайте властивість монотонності показникової функції, поділивши обидві частини на 5^x):

$$3^x + 4^x = 5^x$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність змішаного типу (показникова функція та многочлен, метод узагальнених інтервалів):

$$\frac{2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4}{x^2 - 3x} > 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (застосуйте перехід до однієї основи):

$$\log_x(2) + \log_2(x) = 2.5$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (зверніть увагу на ОДЗ основи та аргументу):

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (згрупуйте доданки попарно для застосування формули суми синусів):

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь (зведіть до тригонометричного рівняння з однією змінною за допомогою підстановки):

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції $y = |\log_{0.5}(|x + 2|)|$ методом послідовних геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 17

1. Розв'яжіть зворотне алгебраїчне рівняння 4-го степеня (діленням на x^2 та підстановкою $t = x + \frac{1}{x}$):

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем (метод інтервалів):

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - 4} \geq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (введіть нові змінні для дробових виразів):

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведення до квадратного відносно 2^x):

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

5. Розв'яжіть систему показникових рівнянь (логарифмування або використання властивостей степенів з переходом до лінійної системи):

$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^x \cdot 27^y = 9 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (зверніть увагу на виявлення сторонніх коренів через ОДЗ):

$$\log_4(x + 2) + \log_4(x - 1) = 1$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою:

$$\log_{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x + 1) \leq 2$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (однорідне рівняння 2-го степеня):

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (дробово-раціональна відносно тригонометричних функцій на відрізку $[0; 2\pi]$):

$$\frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x + 1} \leq 0$$

10. Побудуйте графік функції $y = 2^{|x+1|} - 2$ методом послідовних геометричних перетворень графіка $y = 2^x$.

Використовуючи побудований графік, запишіть проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень.

ВАРІАНТ 18

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння (застосуйте метод введення нової змінної для спільної частини підкореневих виразів):

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} - \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 5$$

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність (класичний перехід до системи нерівностей):

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq x - 2$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (симетричну, розв'яжіть за допомогою заміни $u = x + y$, $v = xy$):

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (зведення до квадратного рівняння відносно 3^x):

$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

5. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з показниковими функціями (метод узагальнених інтервалів або метод раціоналізації):

$$\frac{2^{x+1} - 8}{3^x - 27} \geq 0$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (змінна в основі, врахуйте ОДЗ):

$$\log_x(5x - 4) = 2$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність зі змінною основою (розгляньте два випадки для основи або застосуйте метод раціоналізації):

$$\log_{2x-1}(x^2 - 3x + 2) \leq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (згрупуйте перший і третій доданки та застосуйте формулу суми синусів):

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$$

9. Розв'яжіть тригонометричну нерівність (використайте формулу косинуса подвійного кута для зведення до квадратної нерівності):

$$\cos(2x) + \cos x \geq 0$$

10. Побудуйте графік функції $y = |\log_3(|x - 1|)|$ методом послідовних геометричних перетворень.

ВАРІАНТ 19

1. Розв'яжіть алгебраїчне рівняння вищих степенів (шляхом введення нової змінної для спільного квадратного двочлена):

$$(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) + 24 = 0$$

2. Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність з модулем:

$$\frac{|x^2 - 3x| - 4}{x + 1} \leq 0$$

3. Розв'яжіть систему алгебраїчних рівнянь (однорідну щодо змінних у першому рівнянні):

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть показникове рівняння (шляхом групування доданків з однаковими основами):

$$5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2}$$

5. Розв'яжіть систему показникових рівнянь (перемножте та поділіть рівняння одне на одне):

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18 \\ 3^y \cdot 2^x = 12 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть логарифмічне рівняння (використайте властивості логарифмів, звернувши увагу на модуль при винесенні парного степеня):

$$\log_2(\sqrt{x^2 + 7x}) = 1 + \log_2 x$$

7. Розв'яжіть логарифмічну нерівність (зверніть увагу на парний степінь в основі логарифма):

$$\log_{x^2}(x + 2) \leq 1$$

8. Розв'яжіть тригонометричне рівняння (застосуйте формулу різниці квадратів та основну тригонометричну тотожність):

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

9. Розв'яжіть систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 6|x| + 5|$ методом послідовних геометричних перетворень.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Максимальна кількість 10 балів, кожне завдання по 1 балу.

Критерії оцінювання окремого завдання (макс. 1 бал)

- 1 бал (Повністю правильне розв'язання):
 - Обрано правильний метод розв'язування.
 - Вираз спрощено до максимально можливого компактного вигляду. Усі еквівалентні перетворення (винесення спільного множника, застосування формул скороченого множення, тригонометричних тотожностей тощо) виконані безпомилково та логічно послідовно. За потреби правильно визначено та враховано ОДЗ (наприклад, при скороченні дробів або перетвореннях логарифмів)
 - Усі логічні кроки та математичні перетворення виконані безпомилково.
 - Повною мірою враховано область допустимих значень (ОДЗ) та інші обмеження (наприклад, основа логарифма $a > 0$, $a \neq 1$, або знаменник дробу не дорівнює нулю).
 - Отримано правильну остаточну відповідь (для функції — правильно побудовано графік або вичерпно описано її властивості).
- 0,5 бала (Частково правильне розв'язання):
 - Хід розв'язування та обраний алгоритм є абсолютно правильними, але на певному етапі допущено незначну арифметичну помилку (наприклад, помилка в знаку при перенесенні доданка), яка призвела до неправильної остаточної відповіді.
 - При спрощення виразів здобувач правильно застосував перші кілька формул, але зупинився на проміжному етапі, не побачивши можливості подальшого згортання виразу. Або ж у процесі правильних міркувань допущено концептуальну алгебраїчну помилку (наприклад, скорочено доданки замість

множників у дробі), що докорінно змінило суть подальших перетворень.

- При розв'язуванні системи рівнянь знайдено значення лише однієї змінної (наприклад, правильно обчислено x , але не знайдено y).

- Отримано корені рівняння, але не виконано перевірку або не відкинуто сторонні корені через неврахування ОДЗ.

- Для нерівностей: розв'язок правильний, але у фінальній відповіді неправильно вказано тип дужок (включено або не включено кінці проміжку).

- Для функцій: правильно знайдено похідну чи опорні точки (нулі функції, екстремуми), але допущено неточність у побудові самого графіка (наприклад, не виколото точку розриву).

- 0 балів (Завдання не виконано або виконано неправильно):

- Допущено грубу концептуальну помилку, яка свідчить про нерозуміння теми (наприклад, скорочення на вираз зі змінною без розгляду випадку, коли він дорівнює нулю).

- Хід розв'язання цілком неправильний або не має логічного зв'язку з умовою.

- Записана лише правильна відповідь без жодних перетворень чи обґрунтувань (якщо специфікація роботи вимагає розгорнутого розв'язання).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ключко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Ч. І. Алгебра. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013. 320 с.
2. Ключко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Ч. II. Алгебра. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013. 224 с.
3. Ключко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Ч. III. Алгебра і початки аналізу. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013. 304 с.
4. Ясінський В. В. Метематика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський; за ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. К.: НТУУ «КПІ», 2005. 372 с. — (Серія «На допомогу абітурієнту»)
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 8 клас : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти з поглибл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2021. 384 с.
6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 9 клас : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти з поглибл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
7. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 272 с.
8. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас : профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2019. 240 с.