

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та методики її навчання

Н. О. Генсіцька-Антонюк, Н. А. Сяська

Елементарна математика

Стереометрія

*Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності
А4 Середня освіта (Математика)
денної та заочної форм навчання*

РІВНЕ – 2026

УДК 51-028.31:514.11 (075.8)

Е 50

Елементарна математика. Стереометрія. Навчально-методичний посібник / укладачі: Н. О. Генсіцька-Антонюк, Н. А. Сяська. Рівне : РДГУ. 2026. 100 с.

У навчально-методичному посібнику міститься повний виклад матеріалу практичних робіт для аудиторного та самостійного виконання з дисципліни «Елементарна математика» за темами розділу «Стереометрія», а також наведено контрольні і тестові завдання для самостійної перевірки засвоєння матеріалу. Він орієнтований на набуття студентами денної та заочної форм навчання спеціальності А4 Середня освіта (Математика) фахових компетенцій з математики.

Укладачі:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Сяська Н.А. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рецензенти:

Гоменюк Г. В. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Синіцька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Ухвалено кафедрою математики та методики її навчання РДГУ (протокол № 8/а від 15.06.2026 р.)

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та інформатики РДГУ (протокол № 6 від 15.06.2026 р.)

© Н. О. Генсіцька-Антонюк, Н. А. Сяська., 2026

ЗМІСТ

1.	<i>Вступ</i>	4
2.	<i>Прямі та площини у просторі</i>	5
3.	<i>Кути у просторі</i>	9
4.	<i>Мимобіжні прямі</i>	14
5.	<i>Зображення фігур у стереометрії. Побудова в просторі</i>	21
6.	<i>Обчислення елементів многогранників</i>	27
7.	<i>Перерізи многогранників</i>	32
8.	<i>Геометричні місця у просторі</i>	36
9.	<i>Площа поверхні многогранника</i>	38
10.	<i>Об'єм многогранника</i>	44
11.	<i>Поверхні та об'єми тіл обертання</i>	49
12.	<i>Куля описана навколо многогранника</i>	54
13.	<i>Куля, вписана в многогранник</i>	57
14.	<i>Задачі на комбінації многогранників</i>	61
15.	<i>Задачі на комбінації многогранника і круглого тіла</i>	65
16.	<i>Задачі на комбінації круглих тіл</i>	69
17.	<i>Тестові завдання для самоперевірки</i>	73
18.	<i>Контрольна робота</i>	76
19.	<i>Список використаної літератури</i>	98

Вступ

Геометрія, особливо стереометрія, сприяє правильному сприйнятті навколишнього світу. Навчання стереометрії дозволяє розвинути логічне мислення, просторову уяву, виробити навички розв'язування практичних завдань.

Запропонований навчально методичний посібник присвячений одному з розділів змістової лінії геометрії, стереометрії.

Вивчення кожної теми розділу розпочинається з контрольних запитань, що стимулюють продуктивне мислення студентів, сприяють неформальному засвоєнню теоретичного матеріалу, формують навички порівняння, класифікації, узагальнення, застосування математичних понять і об'єктів.

На основі наведених прикладів подано навчально методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань та завдань для самостійного опрацювання.

Важливим засобом навчання і корекції знань є тестові завдання, які спрямовані не на відтворення означень, фактів, формул стереометрії, а на з'ясування елементів та структури означень математичних об'єктів; їх місця в системі інших понять.

Посібник також містить ще один вид контролю знань та самостійної роботи студентів, а саме контрольну роботу.

Отже, навчально методичний посібник «Елементарна математика. Стереометрія» містить матеріал, що сприяє засвоєнню, контролю і корекції знань студентів та вміння застосовувати їх на практиці.

Прямі та площини у просторі

Контрольні запитання

1. Які прямі в просторі називаються паралельними; перпендикулярними?
2. Що означає: пряма і площина паралельні; перпендикулярні?
3. Які площини називаються паралельними; перпендикулярними?
4. Сформулюйте ознаки паралельності прямих; прямої і площини; площин.
5. Сформулюйте властивості паралельних прямих; прямої і площини; площин.
6. Які ви знаєте способи задання площини.
7. Що таке перпендикуляр, опущений з даної точки на площину?
8. Що називається відстанню від точки до площини?
9. Сформулюйте властивості та ознаки перпендикулярності прямої та площини; перпендикулярності площин.
10. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
11. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Між двома паралельними площинами P і Q проведено відрізки AC і BD (точки A і B лежить у площині P); $AC=13$ см, $BD=15$ см, сума довжин проекцій AC і BD на одну з даних площин дорівнює 14 см. Знайти довжини цих проекцій і віддалі між даними площинами.

Розв'язання

За умовою задачі $P \parallel Q$, $AC=13$ см, $BD=15$ см, $AA_1 \perp Q$, $BB_1 \perp Q$.

$CA_1 + B_1D = 14$ см. Визначити CA_1 , B_1D і $AA_1=BB_1$ (рис. 1).

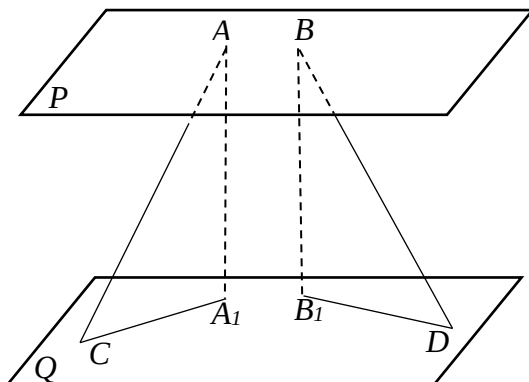


рис. 1

Позначимо $CA_1=x$, тоді $B_1D=14-x$.

З прямокутних $\triangle AA_1C$ і $\triangle BB_1D$ дістанемо $AA_1^2 = AC^2 - A_1C^2 = BD^2 - B_1D^2$, або $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$, $28x = 140$, $x = 5$ см.

Отже, $CA_1=5$ см, $B_1D = 9$ см і $AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

Відповідь. $B_1D = 9$ см, $AA_1 = 12$ см.

Задача 2. Через одну з сторін ромба проведено площину на віддалі 4 см від протилежної сторони. Проекції діагоналей ромба на цю площину дорівнюють 8 см і 2 см. Знайти проекції сторін ромба на цю площину.

Розв'язання

$ABCD$ – ромб, сторона AB якого лежить у площині P (рис. 2). За умовою задачі перпендикулярна до площини P

$DD_1=CC_1=4$ см, $AC_1=8$ см, $D_1B=2$ см. Треба знайти $BC_1=AD_1$ і D_1C_1 . Діагоналі ромба знаходимо з $\triangle ACC_1$, звідки $AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ см і $BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ см. Тоді сторона ромба $DC = D_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{80 + 20} = 5$ см.

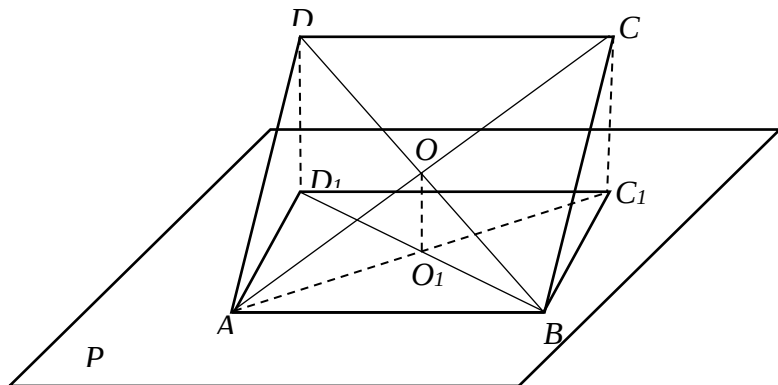


Рис. 2

З $\triangle ADD_1$ знаходимо $AD_1 = \sqrt{AD^2 - DD_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ см.

Відповідь. 5 см і 3 см.

Задачі для аудиторної роботи

1. Куб перетинається площиною α , проходить через ребро AA_1 і точку M , взятую на ребрі B_1C_1 . Доведіть, що лінія перетину площини α і площини грані B_1BCC_1 паралельна ребру AA_1 .
2. Три відрізки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 не лежать в одній площині, перетинаються в точці O і цією точкою діляться навпіл. Доведіть, що площини $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ паралельні.
3. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см². Знайдіть відстань між площиною трикутника і точкою, яка віддалена від кожної із його вершин на 10 см.
4. Із точки, яка віддалена від площини на 24 см, проведено дві похилі, кут між якими 90° . Проекції цих похилих на

- площину дорівнюють 18 см і 32 см . Знайти відстань від цієї точки до прямої, яка проходить через основи похилих.
5. Із деякої точки простору до площини трикутника, сторони якого дорівнюють 32 см , 40 см і 48 см , проведено перпендикуляр, довжина якого 18 см . Основа перпендикуляра належить стороні трикутника, що дорівнює 40 см , а дві інші сторони рівновіддалені від даної точки. Обчисліть відстань від даної точки до інших сторін трикутника.
 6. У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC дорівнює $3\sqrt{21}\text{ см}$. Через вершину B проведено площину на відстані 5 см від діагоналі AC . Проекції сторін BC і AB на цю площину дорівнюють відповідно 12 см і 9 см . Знайти довжину діагоналі BD .
 7. У прямокутному трикутнику Перпендикуляр, проведений із вершини прямого кута, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні $9:16$. Відстань від точки простору до вершин трикутника дорівнює 65 см . Знайти відстань від даної точки до площини трикутника.
 8. Доведіть, що коли дві площини α і β перпендикулярні до прямої a , то вони паралельні.
 9. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами 15 см і 20 см перегнули по діагоналі AC так, що площини ABC і ACD перпендикулярні. Знайти відстань між точками B і D .
 10. Дві прямі належать двом перпендикулярним площинам, паралельні прямій перетину площин і віддалені від неї на 5 см і 12 см . Доведіть, що через дані прямі можна провести площину і знайдіть відстань до неї від лінії перетину даних площин.

11. Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см , а гострий кут — 60° , лежить у площині α . Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α . Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
12. Через гіпотенузу AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC проведено площину β під кутом 45° до площини трикутника. Обчисліть кути нахилу катетів трикутника ABC до площини β .

Задачі для самостійної роботи

1. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.
2. В основі піраміди лежить прямокутник. Одне бічне ребро його перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди — прямокутні трикутники.
3. Із точки A , що знаходиться на відстані $6\sqrt{3}\text{ см}$ від площини, проведено до цієї площини похилі AB і AC під кутом 30° до неї. Їх проекції утворюють кут 120° . Знайдіть BC .

Кути у просторі

Контрольні запитання

1. Що називається кутом між прямими?
2. Дайте означення кута між прямою і площиною.
3. Дайте означення кута між площинами.

4. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину; кінці його знаходяться на відстанях 2 м і 3 м від площини. Знайдіть кут між даним відрізком і площиною.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. З точки M , віддаленої від площини P на відстань $MO=4$, проведемо до цієї площини похилі MA , MB , MC під кутами 30° , 45° , 60° до прямої MO , перпендикулярної до площини P . Визначити довжину похилих MA , MB , MC .

Розв'язання

Побудуємо *рис. 3* до задачі.

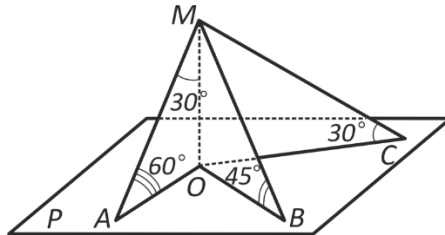


рис. 3

Нехай $MO \perp P$, $\angle MAO = 60^\circ$, $\angle MBO = 45^\circ$ і $\angle MCO = 30^\circ$.

Тоді з $\triangle MAO$ знаходимо $AO = \frac{1}{2}AM$ і (за теоремою Піфагора)

$$AM^2 - AO^2 = MO^2 \text{ або } \frac{3}{4}AM^2 = 16, \text{ звідки } AM = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

з $\triangle MBO$ ($MO=OB$) $MB = 4\sqrt{2}$; з $\triangle MCO$ ($CM=2MO$) $MC=8$.

Відповідь. $AM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $MB=4\sqrt{2}$; $MC=8$.

Задача 2. Даний відрізок має кінці на двох взаємно перпендикулярних площинах і утворює з однією з них кут 45° , а з другою – кут 30° ; довжина цього відрізка дорівнює a . Визначити частину лінії перетину площин, що знаходиться між перпендикулярами опущеними на неї з кінців даного відрізка.

Розв'язання

За умовою задачі $Q \perp P$, $AB = \alpha$, $\angle ABC = 30^\circ$, а $\angle BAD = 45^\circ$ ($AC \perp Q$ і $BD \perp P$). Визначити CD .

Побудуємо *рис.4* до задачі.

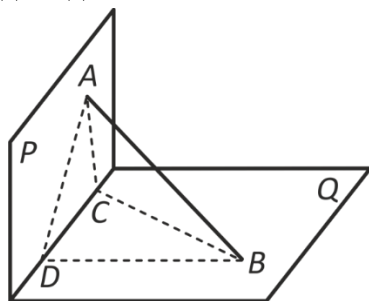


Рис.4

З $\triangle ACB$ ($\angle B = 30^\circ$) $AC = \frac{1}{2}AB$, $AB = \frac{\alpha}{2}$. З $\triangle ABD$ ($\angle A = 45^\circ$) $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, $AB = \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді з прямокутного $\triangle ACD$ знаходимо $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $CD = \frac{1}{2}\alpha$.

Задачі для аудиторної роботи

1. Через гіпотенузу прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 45° . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.
2. Точка M лежить поза площиною правильного трикутника ABC , а похилі MA , MB і MC утворюють рівні кути з площиною ABC . Довести, що проекція точки M на площину трикутника – центр цього трикутника.
3. Точка K знаходиться на відстані 6 см від площини α . Похилі KA і KB утворюють з площиною α кути 45° і 30° , а

кут між похилими дорівнює 135° . Знайти відстань між точками A і B .

4. Кінці відрізка довжиною 10 см лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах. Цей відрізок утворює з площинами кути 30° і 45° . Визначте відстань між основами перпендикулярів, опущених із кінців даного відрізка на лінію перетину площин.
5. На площині дано трапецію і точку поза нею. Прямі, які проходять через цю точку і вершини трапеції, утворюють з її площиною кути, що дорівнюють 45° . Знайдіть відстань від цієї точки до площини трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60° , а діагональ, яка виходить із вершини цього кута, $- 3\sqrt{3}$ см.
6. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, що дорівнює 16 см. Відстань між вершинами цих трикутників $- 13$ см. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, другий трикутник $-$ прямокутний. Обчисліть кут між площинами цих трикутників.
7. З точки D , що лежить на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC і віддалена від вершини прямого кута на $9\sqrt{2}$ см, проведено перпендикуляр DK до площини трикутника. Перпендикуляри, проведені з точки K на катети трикутника ABC , нахилені до площини трикутника під кутом 45° . Знайдіть відстань від вершини прямого кута трикутника ABC до точки K .
8. У грані двогранного кута поведена пряма, яка утворює з другою гранню кут 30° , а з ребром двогранного кута кут 45° . Яка величина двогранного кута?
9. Із центра O квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр OM до його площини. Площина, проведена через точку M і

- пряму AB , утворює з площиною квадрата кут 60° . Проекція відрізка OM на площину ABM дорівнює 6 см . Знайти діагональ квадрата.
10. Через гіпотенузу AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC проведено площину β під кутом 45° до площини трикутника. Обчисліть кути нахилу катетів трикутника ABC до площини β .
 11. Із даної точки до площини проведено дві рівні похилі. Кут між похилими дорівнює 60° , а кут між проекціями – прямий. Доведіть, що кожна з цих похилих утворює із площиною кут 45° .
 12. Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють 36 см^2 і 96 см^2 , мають спільну сторону, а відстань між їх паралельними сторонами дорівнює 14 см . Знайти кут між площинами квадрата і прямокутника.
 13. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC , рівну 12 см . Кут між їх площинами дорівнює 60° , $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 120^\circ$. Знайти довжину відрізка BD .

Задачі для самостійної роботи

1. На ребрі двогранного кута величиною 60° взято відрізок довжиною $4\sqrt{2}\text{ см}$. Із його кінців у різних гранях проведено перпендикуляри до ребра довжиною 3 см і 8 см . Знайдіть довжину відрізка, який сполучає інші кінці перпендикулярів.
2. Із точки A до площини під кутом 45° проведено похилу AB . У площині проведено пряму BC , яка утворює кут 45° з проекцією похилої AB на площину. Знайдіть відстань від точки A до прямої BC і кут між прямими AB і BC , якщо AB дорівнює 12 см .

3. Однакові рівнобедрені трикутники ABC і BCD мають спільну основу BC , а їх площини утворюють кут 120° . Знайдіть бічні сторони трикутників ABC і BCD , якщо їх основи дорівнюють 3 см, а відстань між точками A і D - $\sqrt{15}$ см.
4. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 30° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.
5. Довести, що бічні сторони рівнобедреного трикутника утворюють рівні кути з площиною, що проходить через його основу.
6. Через вершину кута, рівного 60° , проведено пряму, яка утворює з сторонами цього кута кути по 60° . Знайти кут, який утворює ця пряма з площиною даного кута.

Мимобіжні прямі

Контрольні запитання

1. Які прямі називаються мимобіжними?
2. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій.
3. Дано дві мимобіжні прямі. Як провести через них дві паралельні площини?
4. Що таке спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих?
5. Що називається відстанню між мимобіжними прямими?
6. Дайте означення кута між мимобіжними прямими.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначити відстань між двома мимобіжними прямими.

Розв'язання

Нехай дано дві мимобіжні прямі l і m . Треба визначити відстань між ними.

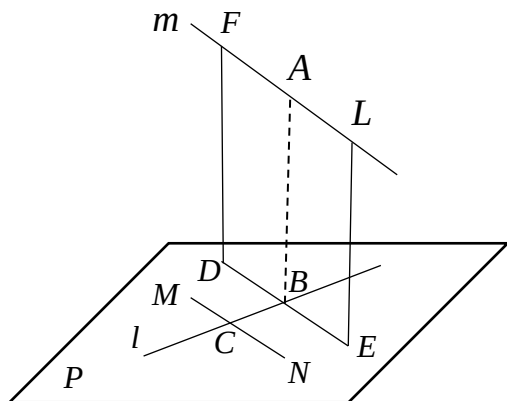


Рис. 5

Визначення відстані між даними мимобіжними прямими зводиться до побудови прямої, яка перетинає ці прямі і перпендикулярна до них обох.

Через довільну точку C прямої l (рис. 5) проводимо пряму $MN \parallel m$ і через прямі MN і l проводимо площину P , яка також паралельна до прямої m . З будь-якої точки F прямої m опускаємо на площину P перпендикуляр і через прямі DF і t проводимо площину Q , перпендикулярну до площини P . Площина Q перетне пряму l в точці B . Через точку B проводимо пряму, перпендикулярну до прямої t , яка перетне її в точці A . Таким чином відрізок AB , кінці якого лежать на даних мимобіжних прямих l і m , перпендикулярний до кожної з цих

прямих, тобто довжина відрізка AB і є відстанню між даними мимобіжними прямими.

Задача 2. Основою піраміди $HPQR$ є рівнобедрений прямокутний трикутник PQR з гіпотенузою $PQ = 2\sqrt{2}$. Бічне ребро HR перпендикулярне до площини основи і дорівнює 1. Знайти величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку H і середину ребра PR , а друга – через точку R і середину PQ .

Розв'язання

Позначимо через E – середину PQ , через A – середину PR . Тоді HA та RE – мимобіжні прямі, відстань і кут між якими і треба знайти за умов:

$$PQ = 2\sqrt{2}, \angle PRQ = 90^\circ, HR = 1, HR \perp (PQR).$$

Проведемо через точку A пряму $a \parallel RE$, а через точку R пряму $b \parallel PQ$ (у площині основи) (рис. 6).

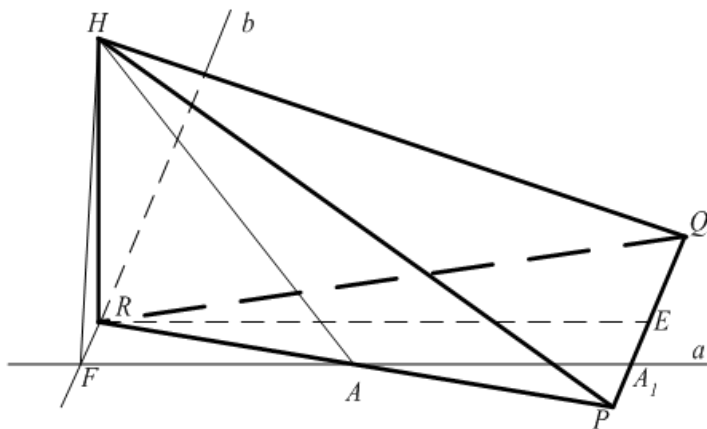


Рис. 6

F – точка перетину прямих a та b , A_1 – точка перетину прямих a та PQ .

Згідно означення кута між мимобіжними прямими, менший з кутів $\angle HAF$ та $\angle HAA_1$ і буде шуканим.

$\angle HAF$ – це кут ΔHFA .

За умовою $PE=EQ \Rightarrow RE$ - медіана рівнобедреного трикутника $\Rightarrow RE \perp PQ$, але $b \parallel PQ$, $a \parallel RE \Rightarrow a \perp b \Rightarrow \angle HFA = 90^\circ \Rightarrow \angle HAF$ - кут прямокутного трикутника $\Delta HFA \Rightarrow \angle HAF$ - шуканий.

$$3 \Delta HFA \quad tg \angle HAF = \frac{HF}{FA}, \quad FA = AA_1 = \frac{1}{2} RE = \frac{1}{2} PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3 ΔHRF $\angle HRF = 90^\circ$, $HF = \sqrt{HR^2 + RF^2}$, $HR=1$ – за умовою.

$$3 \Delta RFA \quad (a \perp b, \angle RFA = 90^\circ), \quad RF = \frac{1}{4} PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad HF = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Тоді } tg \angle HRF = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle HAF = 60^\circ.$$

Тепер знайдемо відстань між вказаними прямими. Очевидно, що в силу побудови, шукана відстань буде дорівнювати відстані від точки R до площини AFH (адже $FA \parallel RE$, $FA \perp (AFH) \Rightarrow RE \perp (AFH)$). Для знаходження цієї відстані розглянемо тетраедр $HRFA$ (рис. 7) в якому RO - шукана відстань і висота.

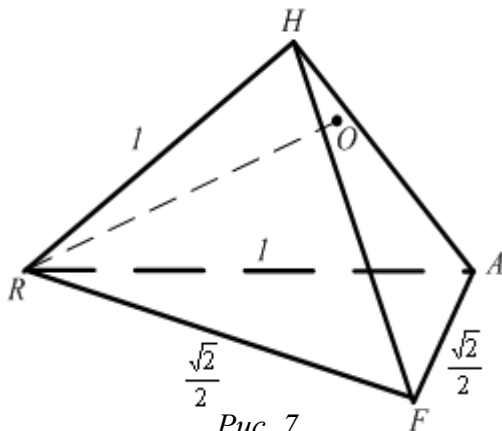


Рис. 7

$$V(HRFA) = \frac{1}{3} HR \cdot \frac{1}{2} RF \cdot FA = \frac{1}{6} HR \cdot RF \cdot FA$$

$$\begin{aligned} V(RHFA) &= \frac{1}{3} RO \cdot S(HFA) = \frac{1}{3} RO \cdot \frac{1}{2} HF \cdot FA \\ &= \frac{1}{6} RO \cdot HF \cdot FA \end{aligned}$$

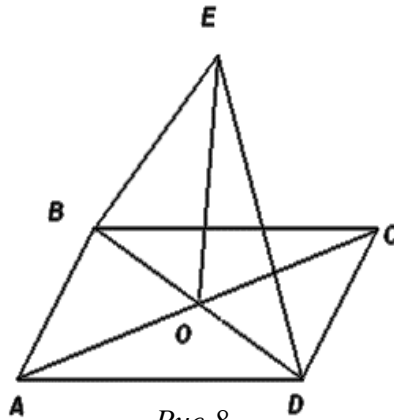
Враховуючи, що $V(HRFA) = V(RHFA)$, маємо $RO = \frac{HR \cdot RF}{HF}$,

$$RO = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь. $RO = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Задачі для аудиторної роботи

1. AM – медіана трикутника ABC , пряма MK перпендикулярна прямим AM і BC . Знайти кут між прямими AB і MK .
2. Через центр O квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр EO (рис.8). Знайти кут між прямими ED і AC .



3. Побудувати спільний перпендикуляр бічного ребра куба і діагоналі основи, які мимобіжні між собою.
4. Побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох граней куба, що не перетинаються.
5. Площі двох рівнобедрених трикутників дорівнюють 48 см^2 і 90 см^2 . Спільна основа цих трикутників має довжину 12 см . Відстань між вершинами цих трикутників 13 см . Знайдіть відстань між прямою, яка містить спільну основу, і прямою, яка проходить через вершини трикутників.
6. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть найкоротшу відстань між діагоналлю куба і діагоналлю основи куба, яка з нею мимобіжна.
7. Дано квадрат $ABCD$. Із вершини A проведено перпендикуляр AA_1 до його площини. Побудуйте кут між AB і A_1O , де O – точка перетину діагоналей квадрата.
8. Побудуйте спільний перпендикуляр діагоналі B_1D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і ребра AA_1 , яке не перетинає цю діагональ.
9. Через центр O правильного шестикутника $ABCDEF$ до його площини проведено перпендикулярну пряму. На цій прямій обрано точку K , яку з'єднано із серединою P сторони AB . Довести, що прямі KP і FC перпендикулярні.
10. Через вершину гострого кута A прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведено пряму a , перпендикулярну площині трикутника. Знайти відстань між прямими BC і a , якщо $BC = 7\text{ см}$, $AC = 25\text{ см}$.
11. Мимобіжні прямі a і b належать паралельним площинам α і β відповідно. Довести, що відстань між прямими a і b дорівнює відстані між площинами α і β .
12. Площину α проведено через сторону CD прямокутника $ABCD$ перпендикулярно його площині (рис. 9). З точки A

до площини α проведено похилу AK довжиною 15 см. Знайти відстань між прямими BC і AK , якщо $AB=8$ см, $AD=9$ см, $KC=12$ см.

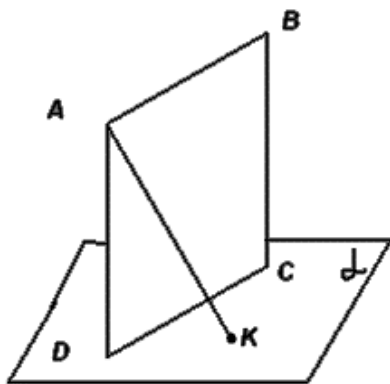


Рис.9

Задачі для самостійної роботи

1. Ребро правильного тетраедра дорівнює a . Знайдіть відстань між двома ребрами тетраедра, які є мимобіжними.
2. Катет AC трикутника ABC ($\angle C=90^\circ$) лежить у площині α , точка B не належить площині α . Трикутник AB_1C – ортогональна проекція даного трикутника на площину α . Побудуйте кут між прямими AB_1 і BC при умові, що другий катет не перпендикулярний до площини α .
3. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ побудуйте спільний перпендикуляр між діагоналлю бічної грані $A_1 B$ і відрізком MK , де M – середина $A_1 D_1$, K – середина AD .
4. Через вершину B прямокутника $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр FB довжиною 6 см. Знайти кут між прямими AB і FD , якщо $AB = 9$ см, $BC = 12$ см.

5. Через основу BC рівнобедреного трикутника ABC проведено площину α . Відстань від точки A до α дорівнює 4 см. Знайти відстань між прямою BC і прямою, яка проходить через точку A перпендикулярно площині α , якщо $BC=12$ см, $AB=10$ см.

Зображення фігур у стереометрії. Побудова в просторі

Контрольні запитання

1. Перелічіть властивості паралельного проектування.
2. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проєкціями: 1) прямої; 2) двох паралельних прямих; 3) трикутника?
3. Чи можуть дві прямі, що перетинаються, проєктуватись: 1) у дві прямі, що перетинаються; 2) у паралельні прямі; 3) в одну пряму; 4) у пряму і точку на ній; 5) у пряму і точку поза нею?
4. Дано пряму і точку, що їй не належать. Чи може проєкція даної точки належати проєкції даної прямої?
5. Чи можна при паралельному проектуванні прямокутника отримати: 1) паралелограм; 2) трапецію?
6. Чи можна при паралельному проектуванні паралелограма отримати чотирикутник з кутами 30° , 70° , 150° , 110° ?
7. Чи можуть нерівні відрізки мати рівні паралельні проєкції?
8. Чи може паралельною проєкцією відрізка бути: 1) пряма; 2) промінь; 3) точка?
9. В якому випадку трикутник проєктується: 1) у відрізок; 2) у рівний йому трикутник?
10. За яких умов квадрат проєктується в прямокутник?

11. Що є паралельною проекцією кола і як знайти центр цього кола?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. . Дано зображення трикутника і двох його висот, Побудувати зображення центра кола, описаного навколо цього трикутника.

Розв'язання

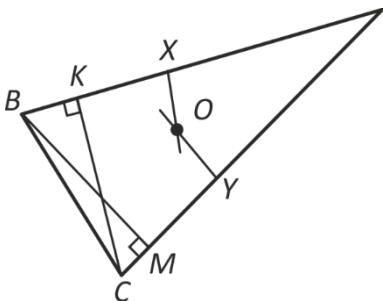


Рис. 10

Нехай $\triangle ABC$ - проекція деякого трикутника (рис. 10). BM і CK - проекції його висот. Центр кола, описаного навколо трикутника, співпадає з точкою перетину серединних перпендикулярів, тоді зображенням серединних перпендикулярів будуть відрізки XO і YO , оскільки X – середина AB і Y - середина AC , а $XO \parallel KC$ і $YO \parallel BM$. Точка O - зображення центра описаного навколо трикутника кола.

Задача 2. Побудувати площину, перпендикулярну до даної прямої, яка проходила б через дану точку.

Розв'язання

Нехай дано точку A і пряму l . Треба побудувати площину P , що проходить через точку A перпендикулярно до прямої l . Розглянемо два випадки (рис. 11).

А. Якщо точка A лежить поза прямою l , то через точку A і пряму l проводимо площину M і через l проводимо довільну площину N що не зливається з площиною M . У площині M з точки A поставимо перпендикуляр AO до прямої l , а в площині N з точки O поставимо перпендикуляр OB до прямої l . Прямі AO і OB , що перетинаються, визначають шукану площину, яка є єдиною.

Б. Якщо точка A лежить на прямій l , то через пряму l проводимо дві довільні площини, в яких з точки A поставимо перпендикуляри до прямої l . Ці перпендикуляри визначають шукану площину P , яка також буде єдиною. Таким чином, з точки поза прямою (на прямій) можна провести до цієї прямої перпендикулярну площину, і до того ж тільки одну.

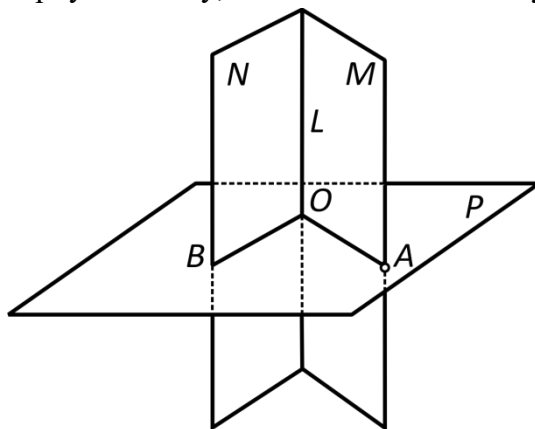


Рис. 11

Задачі для аудиторної роботи

1. Чотирикутник $ABCD$ (рис. 12) паралельною проекцією ромба, OE паралельна AD . Який вид має чотирикутник, що

проектується, якщо OE і CD – проекції двох перпендикулярних відрізків?

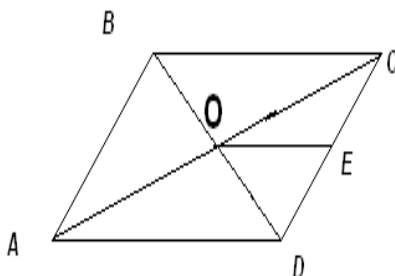


Рис. 12

2. Трикутник ABC (рис. 13) є паралельною проекцією рівностороннього трикутника. Побудувати зображення перпендикулярів, проведених з точок M і N до сторін AC і AB трикутника.

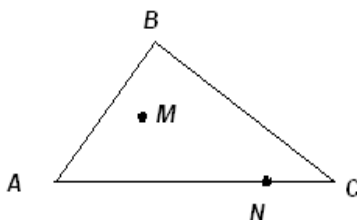


Рис. 13

3. Побудувати на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює 60° .

4. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; M і K – середини ребер DC і $A_1 B_1$. Побудуйте точки перетину прямих AM і AK з площиною грані $BB_1 C_1 C$.

5. Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює 60° .

6. Побудуйте довільний паралелограм $A_1 B_1 C_1 D_1$ і, взявши його за паралельну проекцію квадрата $ABCD$, побудуйте

проекцію прямої, що проходить через точку M , розташовану на стороні AB так, що $3 \cdot AM = MB$, і утворює кут 45° зі стороною AB .

7. Позначте три довільні точки A_1, B_1, C_1 , що не лежать на одній прямій і, визначивши ці точки як паралельні проекції вершин A, B, C правильного шестикутника $ABCDEF$, побудуйте проекцію цього шестикутника.

8. Дано зображення ромба, в якого одна з діагоналей дорівнює стороні. Побудуйте зображення висот ромба, що проходять через його центр.

9. Побудуйте кути нахилу діагоналі прямокутного паралелепіпеда до його граней.

10. Дано мимобіжні прямі a і b та точку A , що не належить жодній з них. Через точку A провести площину, паралельну прямим a і b .

11. Точки A, B і C , які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями трьох вершин паралелограма. Побудувати проекцію четвертої вершини паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

12. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ – проекція ромба $ABCD$. Точка K – середина AB . Побудувати проекцію перпендикуляра, проведеного з точки K до діагоналі AC .

Задачі для самостійної роботи

1. Трикутник ABC є паралельною проекцією рівнобедреного прямокутного трикутника, на гіпотенузі якого зовні побудовано квадрат (квадрат лежить у площині трикутника). Побудувати паралельну проекцію цього квадрата.

2. Дано паралельну проекцію кола з центром O на площину (рис. 14). Побудувати проекцію діаметра кола, перпендикулярного до хорди AB .

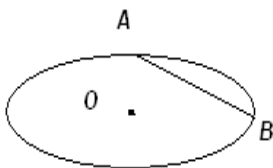


Рис. 14

3. Паралелограм $A_1 B_1 C_1 D_1$ – проекція ромба $ABCD$. Побудувати проекцію перпендикуляра, проведеного з точки перетину діагоналей квадрата до сторони AD .

Виконати графічну роботу на стандартному листку А4: непарний номер в журналі – перший варіант, парний номер в журналі – непарний варіант.

Побудувати за правилами паралельного проектування:

Варіант 1

1. два взаємно перпендикулярні діаметри в колі;
2. рівнобедрений трикутник, вписаний в коло;
3. правильний трикутник, описаний навколо кола;
4. прямокутний трикутник, вписаний в коло;
5. квадрат, описаний навколо кола;
6. правильний шестикутник, вписаний в коло;
7. правильну трикутну піраміду;
8. чотирикутну піраміду із двома гранями перпендикулярними до основи.

Варіант 2

1. два взаємно перпендикулярні діаметри в колі;
2. рівнобедрений трикутник, описаний навколо кола;
3. правильний трикутник, вписаний в коло;

4. тупокутний трикутник, вписаний в коло;
5. квадрат, вписаний в коло;
6. правильний шестикутник, описаний навколо кола;
7. правильну чотирикутну піраміду;
8. трикутну піраміду із однією гранню перпендикулярною до основи.

Обчислення елементів многогранників

Контрольні запитання

1. Що таке многогранник, опуклий многогранник?
2. Що таке грань опуклого многогранника (ребро, вершина)?
3. Що таке призма (основа призми, бічні грані, ребра, висота, діагональ, діагональний переріз), похила призма?
4. Що таке паралелепіпед, прямокутний паралелепіпед?
5. Що таке куб?
6. Що таке піраміда (основа піраміди, бічні грані, ребра, висота, вісь, апофема)?
7. Поясніть, що таке зрізана піраміда.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α . Через вершину основи і середину протилежного бічного ребра проведено площину паралельну одній з діагоналей основи. Знайти кут між цією площиною і площиною основи піраміди.

Розв'язання

Квадрат $ABCD$ - основа правильної піраміди $SABCD$ (рис. 15). M середина CA , SO - висота піраміди, $\angle SAO = \alpha$.

$SO \cap CM = K$; $PN \parallel DB$ і $K \in PN$. $CNMP$ - переріз, що задовольняє умові. Розглянемо $\triangle CSA$; SO і CM - його медіани; а K - точка

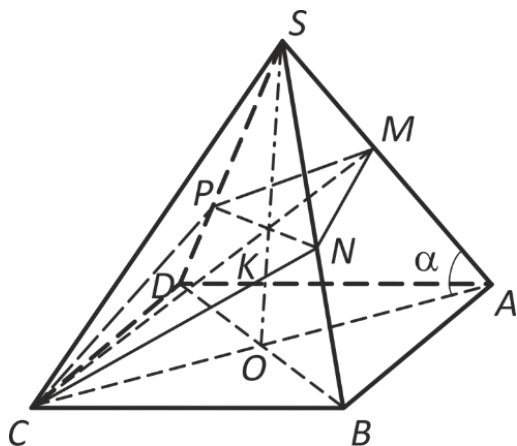


Рис. 15

перетину медіан. Тому $KO = \frac{1}{3}SO$. У $\triangle SOA$: $tg\alpha = \frac{SO}{OA}$; у $\triangle KSO$: $tg\angle KSO = \frac{KO}{OC}$. Проте $AO = OC$, тому $tg\angle KCO = \frac{\frac{1}{3}SO}{OA} = \frac{1}{3}tg\alpha$; $\angle KCO = \arctg \frac{tg\alpha}{3}$.
Відповідь: $\arctg \frac{tg\alpha}{3}$.

Задача 2. Знайти кут між апофемами двох суміжних бічних граней правильної n -кутної піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює α .

Розв'язання

Нехай SN - апофема грані SA_2A_3 ; $\angle A_2SA_3 = \alpha$ (рис. 16).
 Тоді $\angle A_2SN = \frac{\alpha}{2}$.

Позначимо $A_2N = A_2M = b$. Тоді у ΔA_2SN ($\angle N = 90^\circ$).
 $SN = b \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\angle A_1A_2A_3 = \frac{\pi(n-2)}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

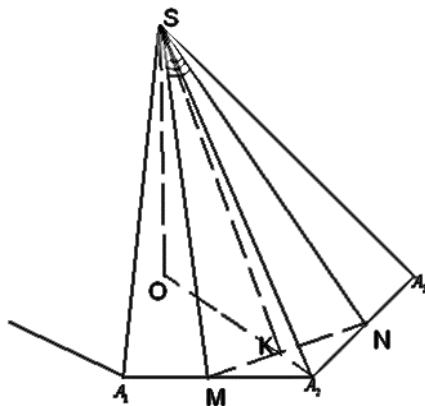


Рис. 16

У ΔMA_2N :

$$\begin{aligned} MN^2 &= b^2 + b^2 - 2b^2 \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2b^2\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) = \\ &= 2b^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} = 4b^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{n}; \end{aligned}$$

$MN = 2b \cos \frac{\pi}{n}$. SK - висота, медіана, бісектриса
 рівнобедреного ΔSMN , ($SN = SM$).

$$\begin{aligned} \sin \angle KSN &= \frac{KN}{SN} = \frac{MN}{2SN} = \frac{2b \cos \frac{\pi}{n}}{2b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; & \angle KSN = \\ & \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Тобто шуканий $\angle MNS = 2\angle KSN =$
 $2 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$.

Відповідь. $2 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$

Задачі для аудиторної роботи

1. Основою призми є трикутник, в якого одна сторона дорівнює 2 см, а дві інші по 3 см бічне ребро дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 45° . Визначте ребро куба рівновеликого призми.
2. Основою піраміди $ABCD$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Бічне ребро AD перпендикулярне до основи. Знайти гострі кути трикутника ABC , якщо $\angle DBA = \alpha$, $\angle DBC = \beta$ ($\alpha < \beta$).
3. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі, що перетинаються, двох однакових бічних граней призми утворюють між собою кут β . Через ці діагоналі проведено площину, яка утворює з площиною основи кут φ . Діагональ третьої бічної грані дорівнює b . Знайти об'єм призми.
4. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює m , а двогранний кут при основі - β . Знайти повну поверхню піраміди.
5. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Через сторону основи проведено площину під кутом φ до основи ($\alpha > \varphi$). Знайти площу перерізу, якщо висота піраміди дорівнює h .
6. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC зі стороною a . Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайти бічну поверхню призми.
7. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h .

8. Висота піраміди дорівнює 16 м. Площа основи дорівнює 512 м^2 . На якій висоті від основи знаходиться переріз, паралельний їй, якщо площа перерізу 50 м^2 .
9. У прямому паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 1 м, сторони основи дорівнюють 23 дм і 11 дм, а діагоналі основи відносяться як 2:3. Знайдіть площі діагональних перерізів.
10. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою a . Кожне ребро утворює з площиною основа кут β . Знайдіть висоту піраміди.

Задачі для самостійної роботи

1. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні суміжні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом ϕ . Визначте, якщо найбільше бічне ребро дорівнює a .
2. В основі прямої призми лежить прямокутник. Діагональ призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут β , а діагональ однієї з бічних граней нахилена до площини основи під кутом ϕ . Обчисліть об'єм призми.
3. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом 60° . Ребро AA_1 також дорівнює a і утворює з ребрами AB і AD кути 45° . Визначте об'єм паралелепіпеда.
4. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° .
5. За даною стороною основи a і бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди:
1) трикутної, 2) чотирикутної, 3) шестикутної.

Перерізи многогранників

Контрольні запитання

1. Які ви знаєте методи побудови плоских перерізів многогранників? В чому їх зміст?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Побудувати переріз куба AC_1 площиною, що проходить через три задані точки N, C, D_1

Розв'язання

Сліди перерізу на гранях $ABCD$ і CC_1D_1D одержуємо, сполучаючи точки N і C , C і D_1 (рис. 17). Для побудови слідів на гранях ABB_1A_1 і ADD_1A_1 продовжуємо прямі CN і CD_1 до їх перетину в точці K .

Точка K лежить на продовженні ребра AD , отже, і на грані ADD_1A_1 . Сполучимо точки K і D_1 . Пряма KD_1 обов'язково перетне ребро AA_1 , яке також лежить на грані ADD_1A_1 . Одержану при перетині прямих AA_1 і KD_1 точку M сполучимо з точками N і D_1 , NCD_1M – шуканий переріз.

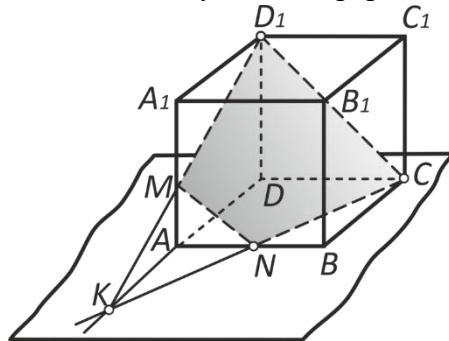


рис. 17

Задача 2. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через точки K' і N' , дані на гранях призми, і точку D' , дану на її ребрі.

Розв'язання

З даних точок K' і N' в площинах граней AA_1B_1B і BB_1C_1C опускаємо перпендикуляри до їх перетину з ребрами AB і BC відповідно в точках K і N (рис. 18). Сполучаємо попарно точки K' і N' , K і N , B і D . З точки S , в якій в якій перетинаються прямі KN і BD , що лежать в одній і тій самій площині (площині основ призми), поставимо перпендикуляр до цієї площини до його перетину з прямою $K'N'$. Через одержану точку S' проводимо пряму $D'S'$ до її перетину з ребром BB_1 в точці B' .

Проводячи тепер через дані точки K' і N' відрізки $B'K'$ і $B'N'$ і продовжуючи їх до перетину з ребрами AA_1 і CC_1 , дістанемо точки A' і C' .

Чотирикутник $A'B'C'D'$ і є шуканим перерізом.

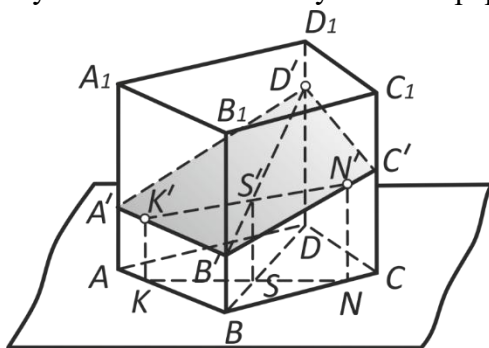


Рис. 18

Задачі для аудиторної роботи

1. Побудувати переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 19) площиною, яка проходить через дані точки.

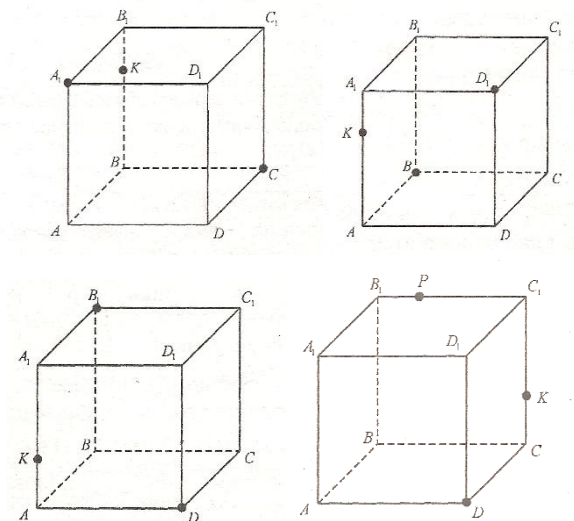


Рис. 19

2. Точки M і K – середини ребер SC і AC піраміди $SABC$. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через точки B, M, K .
3. Дано точки M і N , що лежать на бічних гранях чотирикутної піраміди, і точку P – на її бічному ребрі. Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через ці три точки.
4. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини ребер AB, BC і DD_1 . Визначте вид перерізу.
5. Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через центр основи піраміди паралельно бічній грані піраміди.
6. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K , які лежать відповідно на ребрах AA_1, DD_1, CC_1 .
7. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки $M,$

- N , K , які лежать відповідно на ребрах AA_1 , B_1C_1 , у грані DD_1C_1C .
8. У правильній чотирикутній призмі через діагональ основи проведено переріз паралельно діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи призми дорівнює 2 см, а її висота – 4 см.
 9. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M , N , K , які лежать відповідно на ребрах AA_1 , B_1C_1 , DC .
 10. Побудуйте переріз прямої п'ятикутної призми $ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ площиною, що проходить через точки M , N , P , які належать трьом суміжним бічним граням.

Задачі для самостійної роботи

1. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною, що проходить через ребро SB і точку K , яка лежить на ребрі AC .
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Побудуйте пряму перетину площин, що проходять через точки A , C , D_1 і A , C , B_1 .
3. Побудуйте переріз даної призми $ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ площиною, що проходить через точки M , N , P (M належить ребру EE_1 , N – ребру CC_1 , P – грані $AA_1 B_1 B$).
4. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, що проходить через діагональ основи AD і паралельна бічному ребру SE .
5. Основою правильної призми є шестикутник із стороною 3 дм, висота призми дорівнює 13 дм. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві протилежні сторони верхньої і нижньої основ призми.

Геометричні місця у просторі

Контрольні запитання

1. Що таке ГМТ ?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти геометричне місце точок, що знаходяться на даній площині Q , з яких даний відрізок AB видно під прямим кутом.

Розв'язання.

Припустимо, що N - довільна точка шуканого геометричного місця. Сполучимо точку N з кінцями A і B даного відрізка (рис. 20). Оскільки за умовою задачі $\triangle ABN$ – прямокутний, то $NO = \frac{1}{2}AB$ (як медіана, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу). Отже, точка O рівновіддалена від усіх точок шуканого геометричного місця точок.

Таким чином, усі шукані точки рівновіддалені від деякої точки O_1 , яка є проекцією точки O на площину Q .

Отже, шукане геометричне місце точок є колом, яке знаходиться на площині Q і має радіус $R = O_1N =$

$$\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - OO_1^2}.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти *ГМТ*, що знаходяться на даній площині, з яких даний відрізок *AB* видно під прямим кутом.
2. Знайти *ГМТ*, рівновіддалених від сторін даного кута.
3. Знайти *ГМТ*, рівновіддалених від даної площини на задану відстань.
4. Знайти *ГМТ*, які є вершинами пірамід даного об'єму *V* і побудованих на даній основі *S*.
5. Знайти геометричне місце центрів сфер даного радіусу, що дотикаються до двох площин, що перетинаються.
6. Знайти геометричне місце прямих, що проходять через дану точку *A* і перетинають дану площину під кутом α .
7. Знайти геометричне місце перпендикулярів, опущених з даної точки *A* на площини, що проходять через дану пряму *a*.

Задачі для самостійної роботи

1. Визначити *ГМТ*, рівновіддалених від двох даних точок.
2. Знайти *ГМТ*, рівновіддалених від трьох даних точок, що не лежать на одній прямій.
3. Знайти *ГМТ*, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються.

Площа поверхні многогранника

Контрольні запитання

1. Що таке бічна і повна поверхні призми і піраміди?

2. Доведіть, що бічна поверхня прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.
3. Доведіть, що бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.
4. Доведіть, що бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ правильний трикутник ABC зі стороною a . Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 нахилене до площини основи під кутом 60° . Визначити бічну поверхню призми.

Розв'язання

Нехай A_1 проектується в точку O – центр нижньої основи (рис. 22); $O \in AK$, AK – висота. Проведемо $KT \perp AA_1$. Тоді площина CTB перпендикулярна до ребра A_1A . Тобто шукана бічна поверхня $S_b = P_{BTC} \cdot AA_1$, де P_{CTB} – периметр ΔCTB .

Відрізок AO – проекція A_1A на площину основи, тому $\angle A_1AO$ – кут нахилу ребра A_1A до площини основи, $\angle A_1AO = 60^\circ$, AO – радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a ,

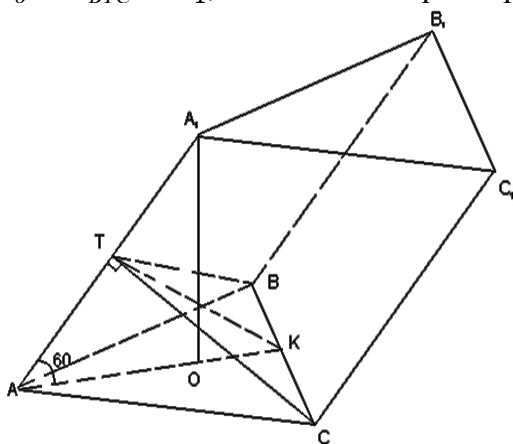


Рис. 22

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

У $\triangle AA_1O$ ($\angle O = 90^\circ$):

$$AA_1 = \frac{AO}{\cos \angle A_1AO} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Висота правильного трикутника } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

У $\triangle ATK$ ($\angle T = 90^\circ$): $TK = AK \cdot \sin \angle TAK = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$. У

$\triangle TKS$ ($\angle K = 90^\circ$; $KS = \frac{a}{2}$): $TS = \sqrt{TK^2 + KS^2} =$

$$\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}.$$

Аналогічно $TB = \frac{a}{4}\sqrt{13}$. Тоді

$$\begin{aligned} S_6 &= \left(a + \frac{a}{4}\sqrt{13} + \frac{a}{4}\sqrt{13}\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{13}) \cdot \frac{2a\sqrt{13}}{3} = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{3}(2 + \sqrt{13}) \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}(2 + \sqrt{13})$

Задача 2. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною a . Одна з бічних граней – також рівносторонній трикутник і перпендикулярна до площини основи. Визначити площу повної поверхні піраміди.

Розв'язання

$DABC$ - піраміда, у якої основа ABC - правильний трикутник (рис. 23); $\triangle DAB$ - також правильний, грань DAB перпендикулярна до основи. Повна поверхня піраміди $S_{\text{повн}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DCA} + S_{\triangle DBC}$. Проте

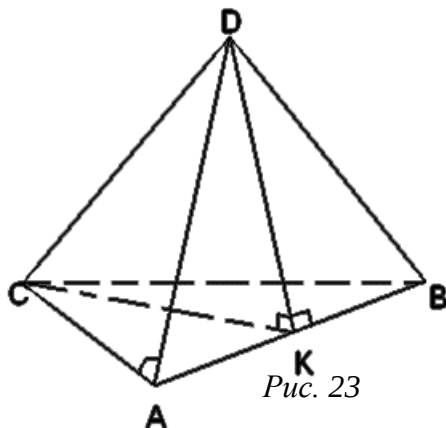


Рис. 23

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{і}$$

$\triangle DCA = \triangle DCB$ (за трьома сторонами), тому $S_{\triangle DCA} = S_{\triangle DBC}$. CK - висота правильного трикутника CAB зі стороною a . $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; аналогічно $DK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. У $\triangle DKC$ ($\angle K = 90^\circ$):

$$CD = \sqrt{CK^2 + DK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2}DA \cdot$$

$AC \cdot \sin \angle DAC = \frac{a^2}{2} \sin \angle DAC$. У $\triangle DAC$, використовуючи

теорему косинусів, маємо: $\cos \angle DAC = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2AC \cdot AD} =$

$$\frac{a^2 + a^2 - \frac{3}{2}a^2}{2a^2} = \frac{1}{4}; \quad \text{тоді} \quad \sin \angle DAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DAC} =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}. \quad \text{Маємо} \quad S_{\triangle DAC} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}, \quad \text{тому} \quad S_{\text{повн}} =$$

$$2 \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{15}}{8} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} (2 + \sqrt{5}).$$

Відповідь. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} (2 + \sqrt{5})$

Задачі для аудиторної роботи

1. Основою піраміди є паралелограм, у якого сторони дорівнюють 10 м і 8 м, а одна з діагоналей дорівнює 6 м. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 4 м. Визначити площу повної поверхні піраміди.
2. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, у якої бічна сторона дорівнює a , а гострий кут дорівнює α . Усі бічні грані утворюють з основою піраміди один і той самий кут β . Знайти площу повної поверхні піраміди.
3. Всі ребра прямої трикутної призми мають однакову довжину. Площа повної поверхні призми дорівнює $(4 + 8\sqrt{3}) \text{ см}^2$. Знайдіть площу її основи.
4. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α , причому діагоналі трапеції перпендикулярні до бічних сторін. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайти об'єм призми.
5. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через сторону основи a і середину її висоти, нахилена до основи під кутом φ .
6. Основою піраміди є правильний шестикутник зі стороною a , одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і дорівнює стороні основи. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.
7. В основі піраміди лежить квадрат. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші - нахилені до неї під кутом φ . Визначте об'єм піраміди, якщо найбільше бічне ребро дорівнює b .
8. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро має довжину 24 м і

віддалене від двох інших ребер на відстань 12 м і 35 м. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

Задачі для самостійної роботи

1. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює h і утворює з апофемою кут α . Знайдіть повну поверхню піраміди.
2. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція $ABCD$, $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см, $AD=21$ см. Площа її діагонального перерізу дорівнює 180 см². Обчислити повну поверхню призми.
3. Основа піраміди — паралелограм з гострим кутом 30° і сторонами 32 см і 70 см. Бічне ребро довжиною 12 см перпендикулярне до основи. Знайдіть площу поверхні піраміди.
4. Через діагональ нижньої і вершину верхньої основи правильної чотирикутної призми проведено площину, яка перетинає дві суміжні бічні грані призми по прямих, що утворюють між собою кут 60° . Обчисліть бічну поверхню призми, якщо сторона основи дорівнює a .
5. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом α . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя - нахилена до неї під кутом β . Визначте повну поверхню піраміди, якщо найменше бічне ребро дорівнює b .
6. Площі основ і діагонального перерізу правильної чотирикутної зрізаної піраміди відповідно дорівнюють 16 дм², 324 дм² і 88 дм². Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

Об'єм многогранника

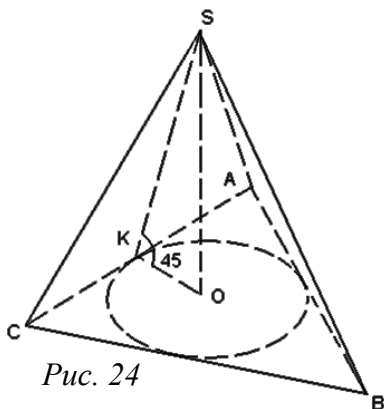
Контрольні запитання

1. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Доведіть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його лінійних розмірів.
3. Доведіть, що об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.
4. Доведіть, що об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі основи на висоту.
5. Вивести формулу для об'єму трикутної піраміди.
6. Доведіть, що об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.
7. Доведіть, що об'єми подібних тіл відносяться, як куби відповідних лінійних розмірів.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Основою піраміди є трикутник з довжинами сторін 6 см, 5 см і 5 см. Бічні грані піраміди утворюють з її основою однакові кути, що містять по 45° . Визначити об'єм піраміди.

Розв'язання



На рис. 24 піраміда $SABC$, SO – висота, точка O – центр вписаного кола. Маємо $p = \frac{6+5+5}{2} = 8$; $S_{\Delta ABC} = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12$; $OK = r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = 1,5$ (см)

У ΔSOK : $\angle O = 90^\circ$; $\angle K = 45^\circ$.

Тоді $\angle KSO = 45^\circ$ і $SO = OK = 1,5$ см. Шуканий об'єм $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 1,5 = 6$ (см³)

Відповідь. 6 см³

Задача 2. Основою похилої призми є рівнобедрена трапеція, у якої бічна сторона і менша основа дорівнюють a , а гострий кут дорівнює β . Одна з вершин верхньої основи призми рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро утворює з площиною основи кут α .

Розв'язання

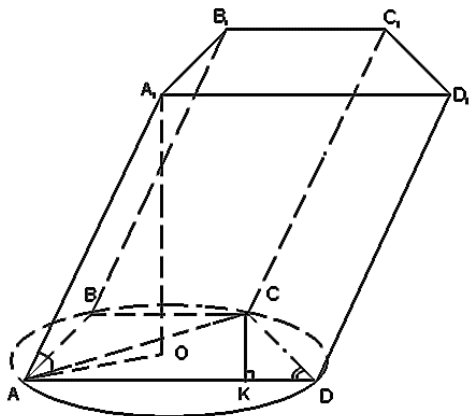


Рис. 25

$ABCD$ – основа призми, $AD \parallel BC$, $AB=BC=CD=a$, $\angle CDA = \beta$ (рис. 25).

Оскільки A_1 – рівновіддалена від точок A, B, C, D , вона проектується в центр описаного кола – точку O . AO – проекція

AA_1 на площину основи. Тоді $\angle A_1AO$ - кут, що утворює бічне ребро з основою $\angle A_1AO = \alpha$.

Шуканий об'єм $V = S_{ABCD} \cdot A_1O$. Проведемо висоту CK трапеції $ABCD$. Тоді у $\triangle CKD$: $CK = a \sin \beta$; $KD = a \cos \beta$. Оскільки $KD = \frac{AD-BC}{2}$, то $AD = 2KD + BC = 2a \cos \beta + a$. Тоді $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CK = \frac{2a \cos \beta + a + a}{2} \cdot a \sin \beta = a^2(1 + \cos \beta) \sin \beta$.

$AO = R$ – радіус кола, описаного навколо $ABCD$, а також навколо $\triangle ABC$. Тому $\frac{BC}{\sin \angle ABC} = 2R$; $\angle ABC = \pi - \beta$. $\triangle ABC$ - рівнобедрений (оскільки $AB=BC$). Тому $\angle BAC = \frac{\pi - (\pi - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$. Тоді $R = AO = \frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$.

Маємо в $\triangle AOA_1$ ($\angle O = 90^\circ$): $A_1O = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$.

Тоді

$$\begin{aligned} V &= a^2(1 + \cos \beta) \sin \beta \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \\ &= \frac{a^3(1 + \cos \beta) \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = \\ &= a^3 \cdot 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha = 2a^3 \cdot \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Відповідь. $2a^3 \cdot \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$

Задачі для аудиторної роботи

1. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β і радіусом описаного кола R . Діагональ бічної грані, що

містить сторону, до якої дані кути прилягають, утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.

2. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм $ABCD$, в якого $AB=3$ дм, $AD=7$ дм, $BD=6$ дм. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 1 м^2 . Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

3. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β . Висота піраміди дорівнює H . Знайдіть об'єм піраміди.

4. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторона верхньої основи дорівнює 3 см, а бічне ребро довжиною 5 см нахилене до більшої основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

5. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою, що дорівнює c , і гострим кутом 30° . Через гіпотенузу нижньої основи і вершину прямого кута верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 45° . Визначити об'єм трикутної піраміди, відтятої від призми площиною.

6. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α і гіпотенузою c . Кожна бічна грань нахилена до основи піраміди під кутом β . Знайти бічну поверхню піраміди.

7. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a . Кут між суміжними бічними гранями дорівнює α . Знайти бічну поверхню піраміди.

8. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α , а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R . Знайти об'єм піраміди.

9. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α . Бічна грань піраміди, що містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до основи піраміди, а три інші грані нахилені до неї під кутом β . Знайти об'єм піраміди.
10. В основі прямої призми лежить ромб. Більша діагональ призми дорівнює v і нахилена до площини основи під кутом φ , а менша – утворює з бічним ребром кут α . Знайти об'єм призми.

Задачі для самостійної роботи

1. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , її об'єм дорівнює V . Знайти косинус кута між діагоналями, які перетинаються, двох суміжних бічних граней.
2. Найбільша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює d і утворює з бічним ребром призми кут 30° . Знайти об'єм призми.
3. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник, площа якого дорівнює S , бічні ребра піраміди однакові й утворюють із площиною основи кут 45° . Кут між діагоналями основи дорівнює 60° . Знайти об'єм піраміди.
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, нахилена до площини основи під кутом φ . Діагоналі двох інших бічних граней дорівнюють d . Визначте об'єм призми.
5. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайти об'єм піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює v .

6. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α . Всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом β . Знайти об'єм піраміди.

Поверхні та об'єми тіл обертання

Контрольні запитання

1. Що є бічною поверхнею циліндра (конуса, зрізаного конуса)?
2. Виведіть формулу для об'єму циліндра(конуса).
3. Виведіть загальну формулу для об'ємів тіл обертання.
4. Що таке кульовий сегмент, кульовий шар, кульовий сектор?
5. Виведіть формули для об'єму кулі, кульового сегмента, кульового сектора.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дві вершини рівностороннього трикутника зі стороною a лежать на колі верхньої основи циліндра, а третя вершина - на колі нижньої основи. Площина трикутника утворює з твірною циліндра кут α . Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання

Вершини A і B лежать на колі верхньої основи, а C нижньої, $AB = AC = BC = a$. Проведемо твірну CE , а потім $ED \perp AB$. ED - медіана, бісектриса рівнобедреного $\triangle ABE$ (рис. 26). Оскільки $\angle ECD = \alpha$ (за умовою) і $DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (висота рівностороннього трикутника), то

$$EC = DC \cdot \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha;$$

$$DE = DC \cdot \sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.$$

У $\triangle ADE$ ($\angle D =$

$$90^\circ): \operatorname{tg} \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} \sin \alpha}.$$

Тобто (використовуючи формулу

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}) \text{ маємо}$$

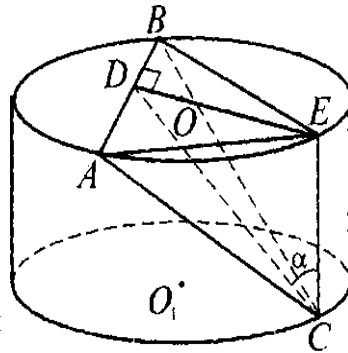


Рис. 26

$$\begin{aligned} \sin \angle AEB &= \sin(2 \cdot \angle AED) = \frac{2 \operatorname{tg} \angle AED}{1 + \operatorname{tg}^2 \angle AED} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3} \sin \alpha}}{1 + \frac{1}{3 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} \sin \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } AO = R = \frac{AB}{2 \sin \angle AEB} = \frac{a}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3} \sin \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{a(3 \sin^2 \alpha + 1)}{4\sqrt{3} \sin \alpha}.$$

Шукана площа бічної поверхні:

$$S_6 = 2\pi R h = 2\pi \cdot \frac{a(3 \sin^2 \alpha + 1)}{4\sqrt{3} \sin \alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{\pi a^2}{4} (3 \sin^2 \alpha + 1) \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\text{Відповідь. } \frac{\pi a^2}{4} (3 \sin^2 \alpha + 1) \operatorname{ctg} \alpha$$

Задача 2. Перпендикуляр, опущений з центра основи конуса на твірну, обертається навколо осі конуса. Знайти кут між його твірною і віссю, якщо поверхня обертання ділить об'єм конуса пополам.

Розв'язання.

Нехай шуканий $\angle BSO = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 27).

Позначимо висоту конуса $SO = h$.

Тоді в $\triangle SOB$: $BO=R=h \operatorname{tg} \alpha$,

а значить об'єм даного конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi h^3}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha. \text{ Маємо } OM \perp SB.$$

Обертаючись навколо SO , відрізок OM відтинає від конуса поверхню, що являє собою два конуси, які мають спільні основи; в одного з них висота SQ , в іншого - QO . Об'єм V^* отриманого тіла $V^* = V_1 + V_2$, де V_1 - об'єм конуса, радіус основи якого QM , а висота SQ , а V_2 - об'єм конуса, радіус основи якого QM і висота QO . Тоді

$$V^* = \frac{1}{3} \pi \cdot MQ^2 \cdot SQ + \frac{1}{3} \pi \cdot MQ^2 \cdot OQ = \frac{1}{3} \pi \cdot MQ^2 \cdot (SQ + OQ) = \frac{1}{3} \pi \cdot MQ^2 \cdot SO.$$

$$\text{У } \triangle SMO: SM = h \cos \alpha.$$

$$\text{У } \triangle SQM: MQ = SM \sin \alpha = h \cos \alpha \sin \alpha.$$

$$\text{Тоді } V^* = \frac{1}{3} \pi h^3 \cdot \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

$$\text{За умовою } V^* = \frac{1}{2} V;$$

$$\text{Скорочуючи на } \frac{1}{3} \pi h^3 \sin^2 \alpha \neq 0,$$

$$\text{дістанемо } \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Враховуючи } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{маємо } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

$$\text{Відповідь. } \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

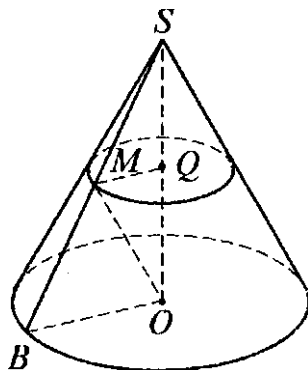


Рис.27

Задачі для аудиторної роботи

1. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює r , гострий кут трапеції дорівнює α . Ця трапеція

обертається навколо меншої бічної сторони. Знайти бічну поверхню тіла обертання.

2. Металеву кулю радіуса R перелито на конус, бічна поверхня якого в три рази більша за площу основи. Обчислити висоту конуса.

3. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює r , гострий кут трапеції дорівнює α . Ця трапеція обертається навколо меншої бічної сторони. Знайти бічну поверхню тіла обертання.

4. Об'єм кулі дорівнює V . Знайти об'єм її сектора, у якого центральний кут в осьовому перерізі дорівнює α .

5. Діагоналі осьового перерізу циліндра перетинаються під кутом, що дорівнює α , повернутим до основи. Об'єм циліндра дорівнює V . Знайти висоту циліндра.

6. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді a . Діагональ перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з серединою хорди нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайти об'єм циліндра.

7. Через дві твірні конуса проведено площину, що нахилена до площини основи під кутом α . Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра його основи під кутом φ . Знайти об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l .

8. У зрізаному конусі твірна дорівнює 5 см , а радіуси основ – 6 см і 10 см . Знайти радіус циліндра такої ж висоти, повна поверхня якого рівновелика бічній поверхні даного зрізаного конуса.

9. Сторони трикутника 13 см , 14 см , 15 см . Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, якщо радіус кулі – 5 см .
10. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а із вершини конуса – під кутом φ . Визначте бічну поверхню конуса, якщо відрізок, який сполучає вершину конуса з серединою цієї хорди, дорівнює l .
11. Хорда основи циліндра стягує дугу основи, яка дорівнює α . Площа бічної поверхні циліндра дорівнює Q . Знайти площу перерізу, проведеного через дану хорду паралельно осі циліндра.

Задачі для самостійної роботи

1. Радіус основи рівностороннього циліндра дорівнює R . Через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму. Відстань від цієї прямої до осі циліндра дорівнює b . Знайти кут нахилу цієї прямої до площини основи циліндра.
2. Відрізок, який сполучає центр основи конуса з серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом α . Довжина цього відрізка дорівнює m . Знайти повну поверхню конуса.
3. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну із точок перерізу, має довжину $4\sqrt{2}d_m$ і утворює з площиною кут 45° . Знайти довжину лінії перетину.
4. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді, відстань до якої від вершини 6 см . Знайдіть об'єм конуса, якщо довжина радіуса — 5 см .

5. Циліндр перетнуто площиною, паралельною осі так, що в перерізі утворився квадрат з діагоналлю $\alpha\sqrt{2}$ см. Переріз відтинає від кола основи дугу в 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
6. Зовнішній діаметр порожнистої кулі — 18 см, товщина стінок — 3 см. Знайдіть об'єм стінок.

Куля описана навколо многогранника

Контрольні запитання

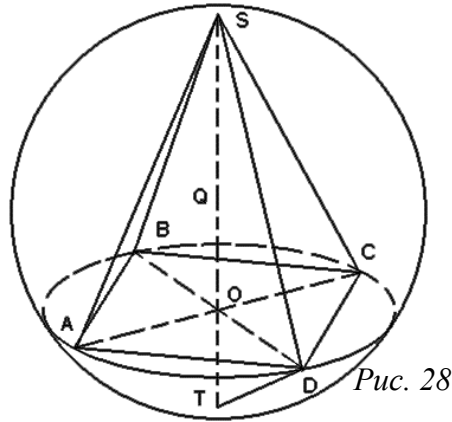
1. Чи можна навколо будь-якого многогранника описати кулю? Відповідь обґрунтуйте. Де лежить центр такої кулі?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду. Визначити об'єм цієї піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює r .

Розв'язання

На *рис.28* зображена правильна чотирикутна піраміда $SABCD$ (основа – квадрат $ABCD$) вписана в кулю. За умовою $OA=r$. Тоді $AC=BD=2r$ і площа основи $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD=r^2$.



Нехай Q – центр кулі; SO – висота. Точка Q належить прямій SO . Продовжимо SO до другого перетину з кулею у точці T . Тоді $ST=2R$ – діаметр кола, значить $\angle SOT=90^\circ$. Тому, використовуючи властивість висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника, дістанемо $OD^2 = SO \cdot OT$. Позначимо висоту піраміди $SO=h$.

Тоді $r^2=h \cdot (2R-h)$; $h^2-2Rh+r^2=0$; $h_{1,2}=R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$.

Зазначимо, що $h_1=R - \sqrt{R^2 - r^2}$, якщо точка Q розташована між S і O ; а $h_2=R + \sqrt{R^2 - r^2}$, якщо точка O розташована між S і Q .

Шуканий об'єм

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2}) = \frac{2r^2}{3} (R \pm \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Відповідь. $\frac{2r^2}{3} (R \pm \sqrt{R^2 - r^2})$

Задачі для аудиторної роботи

1. У кулю радіуса R вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з меншою бічною гранню кут α . Діагональ основи паралелепіпеда утворює з більшою

стороною основи кут β . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

2. У кулю вписано правильну трикутну призму. Радіус кулі дорівнює $3\sqrt{3}$ см. При якій довжині висоти призми об'єм її буде найбільшим?

3. Навколо правильної трикутної призми описано кулю радіуса R . Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з площиною її основи кут γ . Знайти об'єм призми.

4. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до основи під кутом α . Обчислити об'єм піраміди. Якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .

5. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з кутом α і гіпотенузою c , вписано сферу. Знайти об'єм призми.

6. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β . Знайти поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .

7. У кулю вписано правильну трикутну призму. Радіус кулі дорівнює $3\sqrt{3}$ см. При якій довжині висоти призми об'єм її буде найбільшим?

Задачі для самостійної роботи

1. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом в і протилежним кутом β . Діагональ грані, яка містить цей катет. Нахилена до основи під кутом φ . Знайти площу поверхні описаної сфери.

2. У правильній трикутній піраміді відстань від центра описаної навколо неї кулі до бічного ребра дорівнює m . Визначити повну поверхню піраміди, якщо її бічні ребра нахилені до основи під кутом β .

3. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h . Перпендикуляр, опущений з центра кулі, описаної навколо піраміди, на її бічну грань, утворює з висотою кут α . Знайти об'єм кулі.
4. У кулю, радіус якої R , вписано пряму призму, основа її – прямокутний трикутник, а найбільша грань – квадрат. Знайти гострий кут основи, якщо об'єм призми дорівнює V .
5. Бічні ребра і дві сторони основи трикутної піраміди мають однакову довжину a , а кут між рівними сторонами основами основи дорівнює α . Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Куля, вписана в многогранник

Контрольні запитання

1. Чи можна у будь-який многогранник вписати кулю?
Відповідь обґрунтуйте. Де лежить центр такої кулі?

Приклади розв'язування задач

Задача 2. У даній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Визначити площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі r .

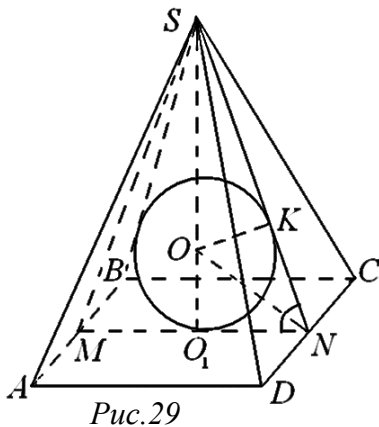


Рис. 29

Розв'язання

$\angle SNO_1 = \alpha$ (за умовою), OO_1 – радіус кулі (рис. 29).

Центр кулі є перетин бісектрис $\triangle MSN$. Тому $\angle O_1NO = \angle KNO = \frac{\alpha}{2}$.

З $\triangle OO_1N$ ($\angle O_1 = 90^\circ$,
 $\angle N = \frac{\alpha}{2}$), $O_1N = OO_1$, $\operatorname{ctg} \angle N =$
 $r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. $AD = 2O_1N = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

$S_{\text{б.н.}} = \frac{S_{\text{оч.}}}{\cos \alpha}$, а $S_{\text{оч.}} = AD^2$,

$$S_{\text{оч.}} = (2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2})^2 = 4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}. \text{ Отже, } S_{\text{б.н.}} = \frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Відповідь. $\frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$

Задача 2. Поверхня кулі, вписаної в правильну зрізану трикутну піраміду, відноситься до повної поверхні піраміди, як $\pi : 6\sqrt{3}$. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

Розв'язання

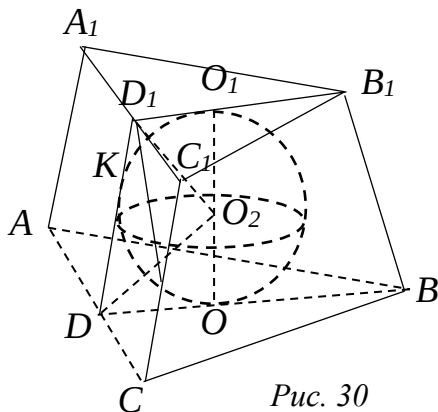


Рис. 30

Позначимо

$$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a_1,$$

$$AB = BC = AC = a,$$

$$O_2O_1 = O_2O = R, \text{ де } R -$$

радіус кулі, $\angle D_1DB = \alpha$, а

O_1 і O – центри

трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC .

З'єднаємо точки O_2 і D , O_2

і D_1 , де O_2 – центр кулі

(рис. 30).

Розглянемо осьовий переріз DD_1B_1B заданих тіл:

$$O_1D_1 + OD = D_1K + DK = D_1D$$

і з прямокутного трикутника D_1ED ($\angle D_1ED = 90^\circ$) $DD_1 = \frac{D_1E}{\sin D_1DE} = \frac{2R}{\sin \alpha}$.

Далі в прямокутному трикутнику D_1O_2D ($\angle D_1O_2D = 90^\circ$) знайдемо:

$$D_1K \cdot DK = O_2K^2 \quad (O_1K \perp D_1D); \quad O_1D_1 \cdot OD = R^2. \quad 3a$$

умовою,

$$\frac{4\pi R^2}{S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + 3S_{\Delta AA_1C_1C}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$O_1D_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6}, OD = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a_1 = 2\sqrt{3}O_1D_1, a = 2\sqrt{3}OD.$$

Тоді отримуємо:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = (2\sqrt{3}O_1D_1)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}O_1D_1^2,$$

$$S_{\Delta ABC} = (2\sqrt{3}OD)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}OD^2.$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta AA_1C_1C} &= \frac{A_1C_1 + AC}{2} \cdot D_1D = \frac{a_1 + a}{2} (O_1D_1 + OD) = \\ &= \frac{2\sqrt{3}O_1D_1 + 2\sqrt{3}OD}{2} (O_1D_1 + OD) \\ &= \sqrt{3}(O_1D_1 + OD)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \frac{4\pi R^2}{3\sqrt{3}OD^2 + 3\sqrt{3}O_1D_1^2 + 3\sqrt{3}(O_1D_1 + OD)^2} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}};$$

$$4R^2 = \left(\frac{2R}{\sin \alpha}\right)^2 - R^2 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Відповідь. } \arcsin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Задачі для аудиторної роботи

1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом описаного кола R . Знайти об'єм вписаної кулі, якщо кожна бічна грань піраміди утворює з основою кут φ .
2. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β . Знайти поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .
3. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює m . Бічне ребро утворює з висотою кут α . Знайти об'єм описаної кулі.
4. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом α . Діагональ грані, яка містить цей катет, утворює з площиною основи кут β . Знайти об'єм кулі, описаної навколо цієї призми.
5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , плоский кут при вершині дорівнює α . В піраміду вписано кулю. Знайти площу перетину цієї кулі площиною, яка проходить через центр основи піраміди, перпендикулярно її бічному ребру.
6. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю, радіус якої дорівнює R ; двогранний кут при ребрі основи дорівнює α . Знайти об'єм піраміди, вершина якої лежить в центрі кулі, а вершини основ – в точках дотику кулі до бічних граней заданої піраміди.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти об'єм правильної чотирикутної призми, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R . Цей радіус,

проведений до вершини призми, утворює кут φ з бічною гранню, що містить цю вершину.

2. Основа піраміди – прямокутна трапеція з основами a і b ; двогранні кути при основі α . Знайти об'єм вписаної кулі.

3. Радіус кулі вписаної в правильну трикутну піраміду в 4 рази менший довжини сторони основи піраміди. Знайти косинус плоского кута при вершині піраміди.

4. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ . Знайти об'єм піраміди, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r .

Задачі на комбінації многогранників

Контрольні запитання

1. Який многогранник називається вписаним в інший многогранник?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини знаходяться на бічних ребрах, а останні чотири знаходяться в площині її основи. Знайдіть ребро куба, якщо в піраміді сторона основи дорівнює a , а висота — h .

Розв'язання

Нехай $SABCD$ – правильна чотирикутна піраміда, у якої $AB=a$, $SO \perp (ABC)$, $SO=h$ (рис. 31). Оскільки, за умовою, $ABCD$

– квадрат, то його діагональ $AC=a\sqrt{2}$, тоді $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

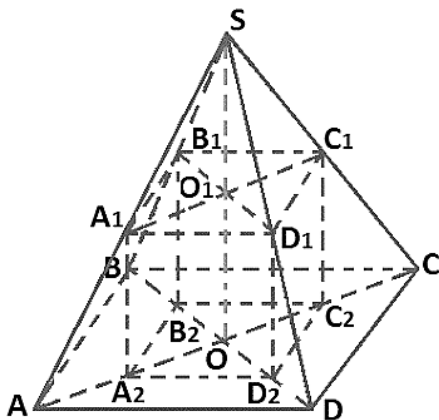


Рис. 31

$$ax = hx; ah = x(a+h);$$

$$\text{тоді шукане ребро: } x = \frac{ah}{a+h}.$$

Відповідь. $\frac{ah}{a+h}$

Задача 2. Центри граней правильного октаедра є вершинами куба. Знайдіть відношення об'ємів октаедра і куба.

Пояснення побудови описаного навколо куба правильного октаедра (рис. 32).

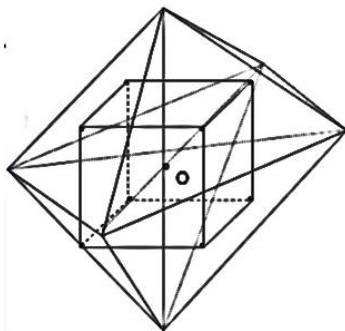
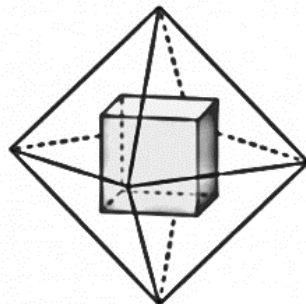


Рис. 32



Нехай в кубі $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ сторона $A_1B_1 = x$, тоді $SO_1 = h - x$,
 $A_2O = A_1O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle SAO \sim \triangle SA_1O_1$, з подібності трикутників випливає пропорційність сторін: $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{SO}{SO_1}$;

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}x} = \frac{h}{h-x}; \quad \frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}; \quad ah -$$

Через центри протилежних граней куба проведемо прямі, які перетинаються в точці O – центрі куба – і є взаємно перпендикулярними. На кожній із цих прямих з обох сторін від точки O відкладаємо відрізки довжиною $1,5a$, де a – довжини ребер куба. Кінці цих відрізків є вершинами правильного октаедра, який утвориться при послідовному сполученні цих вершин.

Розв'язання

Нехай ребро правильного октаедра дорівнює a . На *рис. 33* зображено переріз даної комбінації тіл площиною, яка проходить через дві протилежні вершини B, D октаедра і центр N однієї його грані.

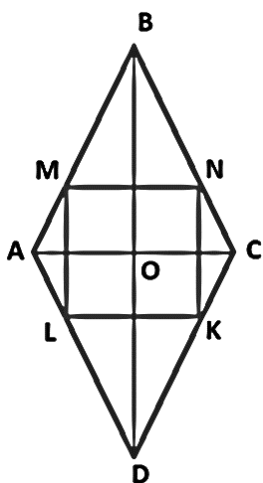


Рис. 33

Перерізом октаедра є ромб $ABCD$, сторона якого дорівнює висоті правильного трикутника зі стороною a : $BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = a$.

Перерізом куба є прямокутник $MNKL$, NK – ребро куба, MN – діагональ його грані. Оскільки точка N – центр правильного трикутника, то $NC:BC = 1:3$.

Виражаємо через a об'єми октаедра і куба:

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{З } \triangle BOC: BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Об'єм V_1 октаедра дорівнює об'єму правильної чотирикутної піраміди з площею основи a^2 і висотою BO : $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Оскільки $\Delta NCK \sim \Delta BCD$, то $\frac{NK}{BD} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{3}$, звідки $NK =$
 $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot BO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Об'єм V_2 куба: $V_2 = NK^3 = \frac{a^3 2\sqrt{2}}{27}$.

Отже, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} : \frac{a^3 2\sqrt{2}}{27} = 9 : 2$.

Відповідь. 9 : 2

Задачі для аудиторної роботи

1. Центр верхньої основи правильної чотирикутної призми і середини сторін нижньої основи є вершинами вписаної в призму піраміди, об'єм якої V . Знайти об'єм призми.
2. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини розміщено на апофемах піраміди і чотири – у площині основи. Всі ребра піраміди рівні між собою і кожне дорівнює a . Знайти повну поверхню і об'єм куба.
3. Довжина ребра куба $6\sqrt[3]{2}$. Обчислити об'єм многогранника, вершинами якого є середини ребер куба.

Задачі для самостійної роботи

1. Центри граней правильного октаедра є вершинами куба. Знайти відношення об'ємів октаедра і куба.
2. Обчислити об'єм многогранника, вершинами якого є центри граней куба з ребром a .
3. Центр куба, ребро якого дорівнює a , сполучено з усіма його вершинами. Визначити об'єм і повну поверхню кожної з утворених пірамід.

Задачі на комбінації многогранника і круглого тіла

Контрольні запитання

1. Сформулюйте властивості комбінації многогранників з циліндром?
2. Сформулюйте властивості комбінації многогранників з конусом?

Задача 1. Основою призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ грані, що проходить через основу трикутника, дорівнює l і нахилена до основи під кутом β . Визначити бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

Розв'язання

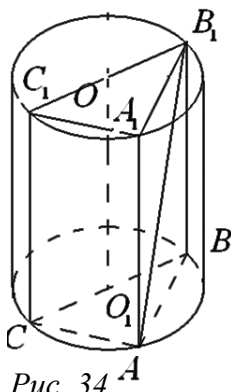


Рис. 34

За умовою $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB_1 = l$, $\angle B_1AB = \beta$ (рис. 34).

З $\triangle AB_1B$ ($\angle B = 90^\circ$) $H = BB_1 = l \sin \beta$.

З $\triangle ABC$ $AB = l \cos \beta$. З наслідку теореми синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R, \text{ звідси } R = \frac{l \cos \beta}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{l \cos \beta}{2 \sin 2\alpha}.$$

$$\text{Отже, } S_{\text{б.н.}} = 2\pi \frac{l \cos \beta}{2 \sin 2\alpha} l \sin \beta = \frac{\pi l^2 \sin 2\beta}{2 \sin 2\alpha}$$

Відповідь. $\frac{\pi l^2 \sin 2\beta}{2 \sin 2\alpha}$

Задача 2. Твірна конуса дорівнює l і утворює з основою кут в 60° . У конус вписана правильна трикутна призма, бічне ребро якої у 2 рази більше сторони основи. Знайдіть ребра призми.

Розв'язання

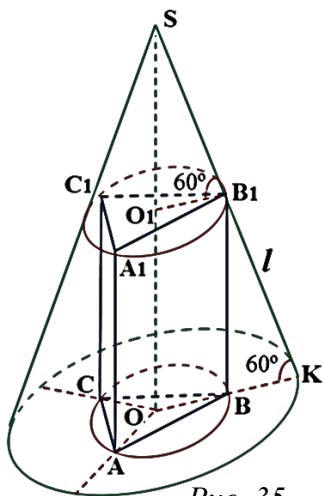


Рис. 35

Нехай на рис. 35 дано зображення конуса, твірна якого дорівнює l ($SK=l$) і утворює з площиною основи кут 60° , тобто $\angle SKO = 60^\circ$. У даний конус вписано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. За означенням призми, вписаної в конус, $OK \parallel O_1B_1$ і $OB = O_1B_1$. Отже, $\angle SB_1O_1 = 60^\circ$.

За умовою бічне ребро призми у 2 рази більше

сторони основи, тобто $BB_1 = 2AB$.

Припустимо, що $AB = x$, тоді $BB_1 = 2x$.

Верхня основа призми – правильний трикутник $\triangle A_1B_1C_1$, вписаний в коло, радіус якого знайдемо за формулою

$$R_3 = O_1B_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}}, \quad O_1B_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки, в $\triangle SB_1O_1$ кут $\angle SO_1B_1 = 90^\circ$, $\angle SB_1O_1 = 60^\circ$, то $\angle B_1SO_1 = 30^\circ$. За властивістю кута в 30° :

$$SB_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}, \text{ а } SO_1 = O_1B_1 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ, \quad SO_1 = x.$$

Виходячи з того, що $\triangle SO_1B_1 \sim \triangle SOK$ – за I ознакою подібності ($\angle O_1 = \angle O$, $\angle B_1 = \angle B$) маємо пропорційність сторін:

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1B_1}{OK} = \frac{SB_1}{SK},$$

Обчисливши висоту конуса SO :

$$SO = SO_1 + OO_1, \text{ де } OO_1 = BB_1 = 2x,$$

маємо, що $SO = 3x$.

$$\text{Звідси, } \frac{SO_1}{SO} = \frac{SB_1}{SK}, \quad \frac{x}{3x} = \frac{2x}{l\sqrt{3}}, \quad x = \frac{l\sqrt{3}}{6},$$

тобто ребро основи призми $AB = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

Виходячи з умови задачі, бічне ребро правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ матиме довжину в 2 рази більшу, ніж ребро основи, тобто $BB_1 = 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $AB = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, $BB_1 = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Задачі для аудиторної роботи

1. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною c і прилеглими кутами α і β . Діагональ грані, що містить дану сторону, нахилена до площини основи під кутом ϕ . Знайти об'єм циліндра, вписаного в дану призму.
2. У циліндр, твірна якого дорівнює l , вписано піраміду так, що її основу — правильний трикутник — вписано в основу циліндра, а вершина лежить у другій основі циліндра. Знайдіть бічну поверхню піраміди, коли відомо, що дві бічні грані піраміди перпендикулярні до її основи, а третя утворює з основою двогранний кут α .
3. У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює d . Знайти повну поверхню вписаного в піраміду конуса, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α .
4. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Через діагоналі двох бічних граней, що містять сторони кута α проведено переріз, площа якого S . Кут між цими діагоналями дорівнює β . Знайти бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.
5. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β . Визначте повну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює h .

6. У конус вписано піраміду, основа якої – прямокутний трикутник. Бічна грань, що проходить через один з катетів, утворює з площиною основи кут α . Знайти об'єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом β .
7. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть повну поверхню вписаного конуса, якщо площа основи піраміди дорівнює S .

Задачі для самостійної роботи

1. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, більша сторона основи якого дорівнює a . Діагональ паралелепіпеда утворює з його більшою бічною гранню кут β , а з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
2. Радіус основи конуса дорівнює r , а твірна нахилена до площини основи під кутом ϕ . Навколо цього конуса описано піраміду, в основі якої – прямокутний трикутник з гострим кутом α . Визначте об'єм і бічну поверхню піраміди.
3. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра піраміди рівні. Бічна грань піраміди, яка містить основу рівнобедреного трикутника, утворює з площиною основи кут ϕ . Знайти бічну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, висота якої H .
4. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a ; переріз, проведений через протилежні сторони основ, утворює з основою призми кут α . Знайдіть площу бічної поверхні описаного циліндра.

Задачі на комбінації круглих тіл

Контрольні запитання

1. Чи можна у будь-який циліндр (конус) вписати кулю? Де лежить центр вписаної кулі?
2. Чи можна описати навколо будь-якого циліндра (конуса) кулю? Де лежить центр такої кулі?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Радіус основи конуса дорівнює 39 см, а висота – 52 см. У нього вписано циліндр такої висоти, що його бічна поверхня рівновелика бічній поверхні малого конуса, який стоїть на його верхній основі. Знайдіть висоту циліндра.

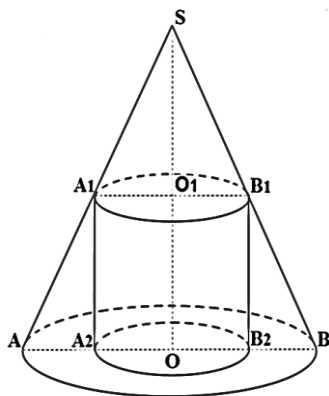


Рис. 36

Розв'язання

Нехай на рис. 36 дано зображення конуса, радіус основи якого $OB=39$ см, висота $SO=52$ см. В цей конус вписано прямий циліндр, бічна поверхня якого рівновелика бічній поверхні малого конуса, тобто

$$S_{\text{бічн.цил.}} = S_{\text{бічн.кон.}SA_1B_1},$$

$$S_{\text{бічн.цил.}} = 2\pi R_{\text{ц}} H_{\text{ц}},$$

$$S_{\text{бічн.кон.}SA_1B_1} = \pi R_{\text{к}} l,$$

$$2\pi \cdot O_1B_1 \cdot OO_1 = \pi \cdot O_1B_1 \cdot SB_1, \quad 2 \cdot OO_1 = SB_1, \quad SB_1 = 2OO_1.$$

З $\triangle SOB$ ($\angle SOB=90^\circ$) за теоремою Піфагора:
 $SB^2 = SO^2 + OB^2$,

$$SB = \sqrt{52^2 + 39^2} = \sqrt{4225} = 65 \text{ (см)}.$$

Оскільки, $\triangle SOB \sim \triangle SO_1B_1$ за I ознакою подібності

трикутників, то $\frac{SO}{SO_1} = \frac{OB}{O_1B_1} = \frac{SB}{SB_1}$, де $SO_1 = SO - OO_1 = 52 - OO_1$.

$$\text{Звідси } \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1},$$

$$\frac{52}{52 - OO_1} = \frac{65}{200_1}$$

$OO_1 = 20 \text{ см.}$

Відповідь. 20 см

Задача 2. У сферу радіуса R вписано циліндр, діагональ осевого перерізу якого утворює з основою кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

Розв'язання

Нехай на *рис. 37* дано зображення сфери, радіус якої дорівнює R , тобто $AO = R$. В цю кулю вписано прямий циліндр, осевим перерізом якого є прямокутник AA_1B_1B .

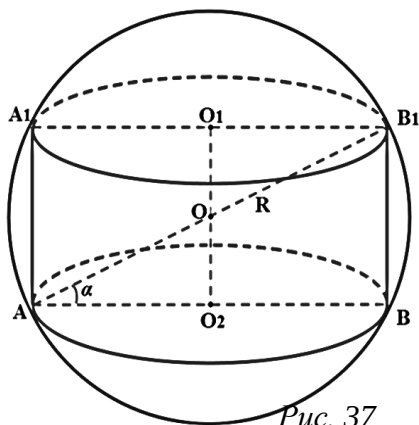


Рис. 37

Діагональ AB_1 даного осевого перерізу утворює з основою кут α , тобто

$$\angle B_1AB = \alpha.$$

Центр кулі, точка O , описаної навколо циліндра, лежить на середині осі циліндра і є точкою перетину діагоналей прямокутника AA_1B_1B . Отже, $AB_1 = 2R$.

З $\triangle ABB_1$ ($\angle ABB_1 = 90^\circ$): $AB = 2R \cos \alpha$, $BB_1 = 2R \sin \alpha$, тоді радіус циліндра $AO_2 = R \cos \alpha$.

Об'єм циліндра обчислимо за формулою $V_{\text{ц.}} = \pi \cdot R_{\text{ц}}^2 \cdot H_{\text{ц.}}$, де $R_{\text{ц}} = R \cos \alpha$, $H_{\text{ц.}} = 2R \sin \alpha$. Звідси $V_{\text{ц.}} = \pi \cdot R^2 \cos^2 \alpha \cdot 2R \sin \alpha = \pi R^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$.

Відповідь. $\pi R^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$

Задачі для аудиторної роботи

1. У нижній основі циліндра проведено хорду довжиною a , яку видно з центра цієї основи під кутом α . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут φ . Знайти об'єм описаної навколо циліндра кулі.
2. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ . Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d . Знайти повну поверхню кулі.
3. Навколо кулі описано зрізаний конус, в якого твірна нахилена до основи під кутом α . Визначте повну поверхню зрізаного конуса, якщо радіус кулі дорівнює r .
4. Навколо кулі описано циліндр. Знайдіть відношення поверхонь цих тіл.
5. Конус вписано в циліндр так, що основа конуса збігається з нижньою основою циліндра, а вершина конуса збігається з центром верхньої основи циліндра. Знайдіть об'єм конуса, якщо осьовим перерізом прямого циліндра є прямокутник з діагоналлю d , яка утворює з висотою прямокутника кут β .

Задачі для самостійної роботи

1. Кут між твірною конуса і його висотою дорівнює β . Відстань від центра описаної навколо конуса кулі до основи висоти дорівнює b . Знайти повну поверхню конуса.
2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 24 см і 15 см , а його висота – 27 см . Знайти об'єм описаної кулі.
3. У циліндр, що вписаний в кулю, вписано кулю. Знайти відношення площ поверхонь і об'ємів цих куль.

4. У конус вписано циліндр, діагоналі осьового перерізу якого паралельні твірним конуса. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи конуса під кутом α . Знайти частину простору, обмеженого бічними поверхнями конуса і циліндра, та площиною їхньої спільної основи.

Тестові завдання для самоперевірки

1. Основа прямої трикутної призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Висота призми 10 см. Чому дорівнює площа повної поверхні призми?

A) 132 см^2	Б) 120 см^2	В) 145 см^2	Г) 135 см^2
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

2. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині 90° . Чому дорівнює площа бічної поверхні піраміди?

A) 54 см^2	Б) 108 см^2	В) 122 см^2	Г) 110 см^2
----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

3. Основою піраміди є ромб з діагоналями 6 см і 9 см. Висота піраміди 11 см. Чому дорівнює об'єм піраміди?

A) 135 см^3	Б) 325 см^3	В) 297 см^3	Г) 99 см^3
-----------------------	-----------------------	-----------------------	----------------------

4. Квадрат обертається відносно своєї діагоналі. Знайдіть об'єм тіла обертання, якщо сторона квадрата дорівнює $2\sqrt{2} \text{ см}$.

Б) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \text{ см}^3$	В) $\frac{16\pi}{3} \text{ см}^3$	Г) $\frac{8\pi}{3} \text{ см}^3$	Д) $16\pi \text{ см}^3$
--	-----------------------------------	----------------------------------	-------------------------

5. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, якщо площі основи й бічної поверхні цієї піраміди дорівнюють відповідно 36 см^2 і 60 см^2 .

A) 15 см	Б) 10 см	В) 5 см	Г) 20 см
----------	----------	---------	----------

6. Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Площа бічної грані цієї призми дорівнює 48 см². Обчисліть діагональ бічної грані.

А) 6 см	Б) 8 см	В) 10 см	Г) 12 см
---------	---------	----------	----------

7. Осьовий переріз циліндра квадрат, площа якого 36 см². Чому дорівнює площа основи циліндра?

А) 3π см ²	Б) $32,5\pi$ см ²	В) 10π см ²	Г) 9π см ²
---------------------------	------------------------------	----------------------------	---------------------------

8. Твірна конуса – 10 см, висота – 8 см. Чому дорівнює об'єм конуса?

А) 288π см ²	Б) 96π см ²	В) 126π см ²	Г) 135π см ²
-----------------------------	----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

9. Якщо в рівносторонній конус вписано кулю, то відношення об'єму конуса до об'єму кулі дорівнює:

А) 3:1	Б) 9:4	В) $27\pi:4$	Г) $27:4$
--------	--------	--------------	-----------

10. Якщо в кулю вписано рівносторонній конус, то відношення площі поверхні кулі до площі повної поверхні конуса дорівнює:

А) 2:1	Б) 3:2	В) 4:3	Г) 16:9
--------	--------	--------	---------

11. Якщо в куб вписано циліндр, то відношення повної поверхні куба до повної поверхні циліндра дорівнює:

А) $6:\pi$	Б) $4:\pi$	В) $3\sqrt{2}:\pi$	Г) $\pi:4$
------------	------------	--------------------	------------

12. Об'єм куба відноситься до об'єму октаедра, вершинами якого є центри граней куба, як:

А) 2 : 1	Б) 3 : 1	В) 4 : 1	Г) 6 : 1
----------	----------	----------	----------

13. Якщо навколо кулі з радіусом 3 см описано деякий многогранник, об'єм якого дорівнює 400 см^3 , то площа повної поверхні цього многогранника дорівнює:

А) $\frac{400}{3} \text{ см}^2$	Б) 400 см^2	В) 1200 см^2	Г) 3600 см^2
---------------------------------	-----------------------	------------------------	------------------------

14. Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a , то радіус кулі, описаної навколо тетраедра, дорівнює:

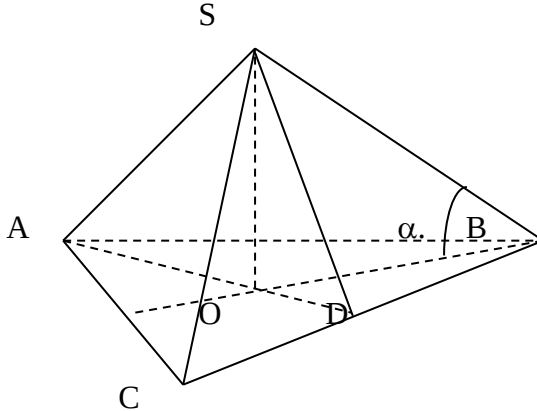
А) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$	Б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$	В) $\frac{a\sqrt{6}}{9}$	Г) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$
--------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------

Контрольна робота

Варіант 0

1. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює 1, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання



OB – проекція SB на площину основи, тому кут між бічним ребром SB і площиною основи є $\angle SBO$. SD – апофема, $SD=1$.

Нехай сторона основи піраміди дорівнює a ($a>0$). Тоді за властивістю правильного трикутника радіус описаного кола $OB=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, а радіус вписаного кола $OD=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{З } \triangle SBO (\angle SOB=90^\circ): SO=OB \operatorname{tg} \alpha=\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

З $\triangle SOD$ ($\angle SOD=90^\circ$) складаємо рівняння:

$$SD^2=SO^2+OD^2; 1^2=\frac{a^2}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{12}; a^2 \cdot \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{12} = 1^2;$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{4tg^2\alpha + 1}}.$$

Об'єм піраміди обчислюємо за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{4tg^2\alpha + 1};$$

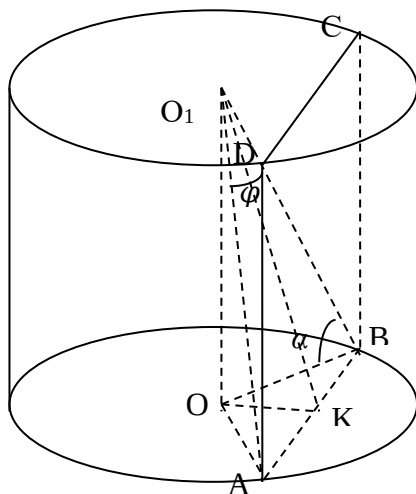
$$H = SO = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{4tg^2\alpha + 1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot tg\alpha = \frac{2ltg\alpha}{\sqrt{4tg^2\alpha + 1}}.$$

$$\text{Отже, } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}l^2}{4tg^2\alpha + 1} \cdot \frac{2ltg\alpha}{\sqrt{4tg^2\alpha + 1}} = \frac{2\sqrt{3}l^3 tg\alpha}{\sqrt{(4tg^2\alpha + 1)^3}}.$$

Відповід. $V = \frac{2\sqrt{3}l^3 tg\alpha}{\sqrt{(4tg^2\alpha + 1)^3}}$

2. У циліндрі паралельно його осі на відстані d від неї проведено площину, що перетинає його нижню основу по хорді, яку видно із центра верхньої основи під кутом φ . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α . Знайти площу перерізу.

Розв'язання



Прямокутник $ABCD$ – переріз циліндра, $(ABC) \parallel OO_1$. $OK \perp (ABC)$, $OK=d$, $\angle AO_1B=\varphi$. OB – проекція O_1B на площину основи, тому $\angle O_1BO=\alpha$. У рівнобедреному трикутнику AOB висота OK є медіаною і бісектрисою. Нехай радіус основи циліндра $OA=R(R>0)$.

З $\triangle BOK$ ($\angle OKB=90^\circ$): $BK=\sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$, тоді $AB=2BK=2\sqrt{R^2 - d^2}$.

З $\triangle BOO_1$ ($\angle BOO_1=90^\circ$): $BO_1=\frac{BO}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$. У рівнобедреному трикутнику AO_1B ($AO_1=O_1B$) O_1K – медіана, висота і бісектриса.

$$\text{З } \triangle BO_1K (\angle BKO_1=90^\circ): BK=BO_1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{R \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \alpha}.$$

Прирівняємо два вирази для BK : $\sqrt{R^2 - d^2} = \frac{R \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \alpha}$; $R^2 -$

$$d^2 = \frac{R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \alpha}; \quad R^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \alpha}\right) = d^2; \quad R^2 = \frac{d^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}};$$

$$R = \frac{d \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \text{ Тоді}$$

$$AB=2 \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{d^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - d^2} =$$

$$2 \sqrt{\frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{2d \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

З $\triangle BOO_1$ ($\angle BOO_1=90^\circ$):

$$OO_1 = OB \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \alpha = \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}}.$$

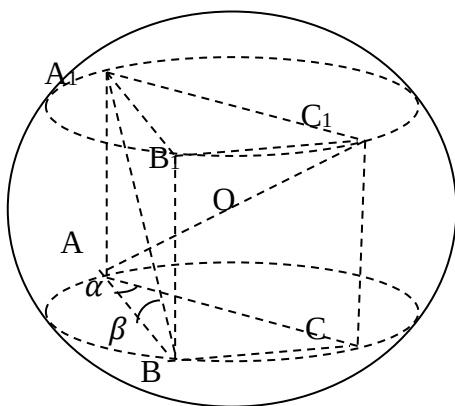
$$AD = OO_1 = \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}}.$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = \frac{2d \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \cdot \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = \frac{2d^2 \sin \alpha \sin \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } S = \frac{2d^2 \sin \alpha \sin \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\phi}{2}}.$$

3. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом α . Діагональ грані, яка містить цей катет, утворює з площиною основи кут β . Знайти об'єм кулі, описаної навколо цієї призми.

Розв'язання



У трикутнику ABC $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $AB = a$, AB – проекція A_1B на площину основи призми, тому кут між

діагоналлю бічної грані A_1B і площиною основи буде $\angle A_1BA = \beta$.

Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині відрізка, який сполучає центри описаних кіл навколо основ призми. Оскільки в основі призми лежить прямокутний трикутник, то центр описаного кола навколо основи лежить на середині гіпотенузи. Тому центр кулі буде розміщений на середині діагоналі AC_1 бічної грані, яка містить гіпотенузу. Отже, $AC_1 = 2R$.

$$\text{З } \triangle ABC (\angle ABC = 90^\circ): AC = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

$$\text{З } \triangle A_1BA (\angle A_1AB = 90^\circ): AA_1 = AB \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{З } \triangle AC_1C (\angle ACC_1 = 90^\circ): AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2};$$

$$AC_1 = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

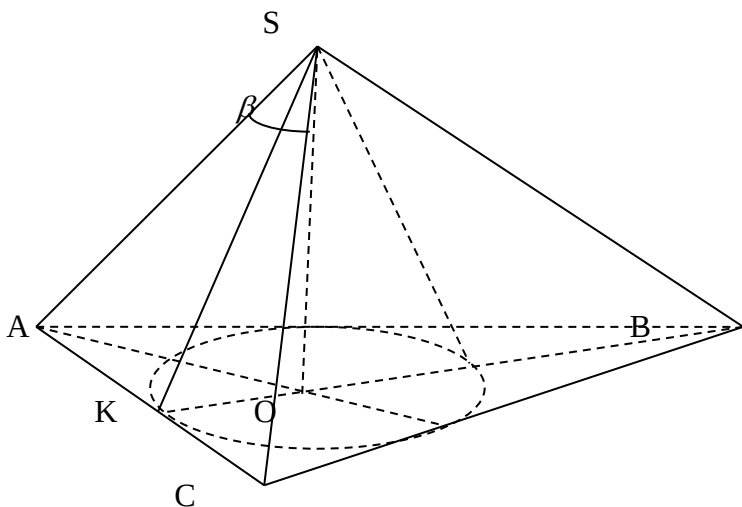
$$\text{Отже, } R = \frac{1}{2} AC_1 = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

$$\text{Об'єм кулі } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi a^3}{6 \cos^3 \alpha} (1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } V = \frac{\pi a^3}{6 \cos^3 \alpha} (1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta)^{\frac{3}{2}}.$$

4. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m , а плоский кут при вершині - β . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в піраміду.

Розв'язання



SK – апофема піраміди, $SK=m$, плоский кут при вершині - $\angle ASK=\beta$. Об'єм вписаного конуса з віссю SO обчислимо за формулою $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

З $\triangle SKC$ ($\angle SKC=90^\circ$):

$$\angle KSC=\frac{\beta}{2}, KC=SK \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=m \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

За властивістю правильного трикутника радіус вписаного кола $R=OK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, де $a=AC=2KC=2m \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Тому $R=\frac{\sqrt{3}}{3}m \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

З $\triangle SKO$ ($\angle SOK=90^\circ$):

$$SO=\sqrt{SK^2-KO^2}=\sqrt{m^2-\frac{m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{3}}=\frac{m}{3}\sqrt{9-3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Отже, об'єм конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi \frac{m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{3} \frac{m}{3} \sqrt{9-3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}=\frac{\pi m^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{27} \sqrt{9-3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Відповідь: $V=\frac{\pi m^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{27} \sqrt{9-3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$

Варіант 1

1. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник. Основа якого – $(\sqrt[3]{\sqrt{2}} + 2)$ см, а кут при ній 45° . Знайдіть об'єм призми, якщо її бічна поверхня дорівнює сумі площ основ.
2. У зрізаному конусі твірна дорівнює 5 см, а радіуси основ – 6 см і 10 см. Знайдіть радіус циліндра такої ж висоти, повна поверхня якого рівновелика бічній поверхні даного зрізаного конуса.
3. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, якщо радіус описаної навколо неї сфери дорівнює R . Цей радіус, проведений до вершини призми, утворює кут φ з бічною гранню, що містить цю вершину.
4. У конус вписано піраміду, основа якої – прямокутний трикутник. Бічна грань, що проходить через один із катетів, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом β .

Варіант 2

1. Всі ребра прямої трикутної призми мають однакову довжину. Площа повної поверхні призми дорівнює $(4 + 8\sqrt{3})$ см². Знайдіть площу її основи.
2. У зрізаному конусі висота, твірна і бічна поверхні дорівнюють відповідно H , L і S . Визначте площу осьового перерізу.
3. У кулю радіуса R вписано призму, в основі якої лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Діагональ бічної грані, яка містить катет, прилеглий до цього кута, утворює з основою кут β . Знайдіть об'єм призми.

4. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює l , а плоский кут при вершині – α . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

Варіант 3

1. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Діагоналі двох бічних граней, що містять сторони цього кута, нахилені до площини основи під кутом φ . Діагональ третьої бічної грані дорівнює l . Визначте об'єм призми.
2. Площа основи конуса дорівнює Q , кут нахилу твірної до площини основи – φ . Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює β .
3. У кулю радіуса R вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з меншою бічною гранню кут α . Діагональ основи паралелепіпеда утворює з більшою стороною основи кут β . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.
4. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Визначте повну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Варіант 4

1. Площі двох граней прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 2:5. Діагоналі цих граней 10 см і 17 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
2. Через вершину конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи кут φ . Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із його вершини під кутом β .

Знайдіть бічну поверхню конуса, якщо його висота дорівнює h .

3. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з основою кут β . Обчисліть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .
4. У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d . Знайдіть повну поверхню вписаного в піраміду конуса, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α .

Варіант 5.

1. Правильна шестикутна призма, в якій бічні грані – квадрати, перетинається площиною, що проходить через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи. Сторона основи дорівнює 5 дм. Знайдіть площу утвореного перерізу.
2. Площа основи конуса - $9\pi \text{ см}^2$, повна поверхня - $24\pi \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм конуса.
3. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до основи під кутом β . Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .
4. Повна поверхня конуса дорівнює S . Твірна його нахилена до площини основи під кутом α . Обчисліть об'єм правильної шестикутної піраміди, вписаної в цей конус.

Варіант 6

1. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α , причому діагоналі трапеції перпендикулярні до бічних сторін. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

2. Твірна конуса дорівнює $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}\right)$ см. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо кут при вершині осьового перерізу конуса прямий.
3. У правильній трикутній піраміді відстань від центра вписаної в неї кулі до сторони основи дорівнює d . Визначте повну поверхню піраміди, якщо її бічна грань нахилена до основи під кутом φ .
4. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра піраміди рівні. Бічна грань піраміди, яка містить основу рівнобедреного трикутника, утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, висота якої дорівнює H .

Варіант 7

1. Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми дорівнює Q . Знайдіть площу перерізу призми площиною, що перпендикулярна до більшої діагоналі основи і ділить її у відношенні 1:1.
2. У зрізаному конусі, відношення площ основ якого дорівнює 4, твірна довжиною 4 см нахилена до площини основи під кутом 30° . Визначте об'єм цього конуса.
3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть поверхню піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .
4. Радіус основи конуса дорівнює R , а кут при вершині осьового перерізу – α . Знайдіть об'єм правильної піраміди, описаної навколо конуса.

Варіант 8

1. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною a . Діагоналі призми утворюють з площиною основи кути α і β . Знайти об'єм призми.
2. Визначте повну поверхню зрізаного конуса, діагоналі осевого перерізу якого взаємно перпендикулярні, твірна нахилена до площини основи під кутом 60° , а висота дорівнює 6 см .
3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .
4. У конус вписано правильну піраміду, висота якої дорівнює $2\sqrt{2}\text{ см}$, а плоский кут при вершині - α . Знайдіть об'єм конуса.

Варіант 9

1. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Площа перерізу, що проходить через бічну сторону нижньої основи та протилежну вершину основи, утворює з основою кут φ . Знайдіть об'єм призми.
2. Повна поверхня циліндра дорівнює $105\pi\text{ см}^2$, а бічна поверхня – $80\pi\text{ см}^2$. Знайдіть об'єм циліндра.
3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R .
4. В основі конуса проведено хорду довжиною b , яку видно з вершини під кутом β . Кут при вершині осевого перерізу дорівнює φ . Знайдіть площу поверхні, вписаної в конус сфери.

Варіант 10

1. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом α і меншою основою a . Діагоналі трапеції є бісектрисами гострих кутів. Діагональ призми нахилена до площини основи під кутом φ . Знайдіть об'єм призми.
2. Твірна конуса дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$ см. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо кут при вершині осьового перерізу конуса прямий.
3. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α . Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R . Знайдіть об'єм описаної кулі.
4. В основі конуса проведено хорду довжиною a , яку видно з центра основи під кутом α . Твірна конуса нахилена до основи під кутом φ . Знайдіть об'єм описаної кулі.

Варіант 11

1. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює h і утворює з апофемою кут α . Знайдіть повну поверхню піраміди.
2. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді a , яка стягує дугу α . Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом φ . Знайдіть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R .
3. Основа прямої призми – прямокутник з кутом φ між діагоналями. Діагональ однієї з бічних граней утворює з основою кут β , а діагональ суміжної з нею бічної грані дорівнює m . Обчисліть бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

4. У кулю, площа поверхні якої S , вписано конус. Кут між твірною конуса і площиною основи дорівнює α . Визначте площу повної поверхні конуса.

Варіант 12

1. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α , а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R . Знайдіть об'єм піраміди.
2. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді b , яку видно із центра верхньої основи під кутом φ . Діагоналі перерізу утворюють між собою кут α . Знайдіть об'єм циліндра.
3. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює h . Бічне ребро утворює з висотою кут α . Знайдіть об'єм описаної кулі.
4. У правильній трикутній призмі через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи проведено переріз. З вершини , що не належить цій стороні , до площини перерізу проведено перпендикуляр, який дорівнює a і утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайдіть об'єм циліндра , вписаного в дану призму.

Варіант 13

1. В основі піраміди лежить правильний трикутник. Дві бічні грані перпендикулярні до основи, а третя — нахилена до неї під кутом φ . Визначте об'єм піраміди, якщо найбільше бічне ребро дорівнює l .
2. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає його нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом β . Відрізок, який сполучає центр

- верхньої основи циліндра з серединою хорди нижньої основи, нахилений до площини нижньої основи під кутом φ . Знайдіть площу перерізу, діагональ якого дорівнює d .
3. У кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду з плоским кутом при вершині, що дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди.
4. У правильній трикутній призмі через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α . Площа перерізу дорівнює S . Знайдіть бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

Варіант 14

1. Основа піраміди — паралелограм з гострим кутом 30° і сторонами 32 см і 70 см . Бічне ребро довжиною 12 см перпендикулярне до основи. Знайдіть площу поверхні піраміди.
2. Хорда основи циліндра дорівнює a і стягує дугу кола основи величиною α . Площа перерізу, проведеного через цю хорду перпендикулярно до площини основи, дорівнює S . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
3. У кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду, бічні грані якої нахилені під кутом α до основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагоналі двох рівних бічних граней, що мають спільну вершину, утворюють між собою кут β . Знайдіть об'єм призми, якщо радіус циліндра, описаного навколо призми, дорівнює R .

Варіант 15

1. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l , а бічна грань нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
2. У рівносторонньому циліндрі, радіус основи якого дорівнює R , через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму, яка нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть відстань цієї прямої до осі циліндра.
3. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює H . Плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть площу поверхні описаної кулі.
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Через дві рівні діагоналі двох бічних граней, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, площа якого дорівнює S . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

Варіант 16

1. Визначити бічну поверхню правильної шестикутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює a , а бічна грань рівновелика діагональному перерізу, проведеному через діаметр основи.
2. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо його бічна поверхня дорівнює $208\pi \text{ см}^2$, твірна — 13 см , а висота — 5 см .
3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Обчисліть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .

4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Через основу трикутника нижньої грані і протилежну вершину верхньої грані проведено переріз, який утворює з площиною основи призми кут φ . Перпендикуляр, проведений з вершини нижньої основи, що не належить даному перерізу, до цього перерізу, дорівнює b . Знайдіть бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

Варіант 17

1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Дві рівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом β . Визначте площу повної поверхні піраміди, якщо менше бічне ребро дорівнює d .
2. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 60° . Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса.
3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Дві рівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань утворює з нею кут φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює r .
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить сторону основи цього трикутника, нахилена до площини основи під кутом φ . Знайдіть бічну поверхню призми, якщо радіус циліндра, описаного навколо даної призми, дорівнює R .

Варіант 18

1. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b , а двогранний кут при основі — α . Знайдіть повну поверхню піраміди.
2. Хорда основи циліндра стягує дугу основи, яка дорівнює α . Площа бічної поверхні циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу перерізу, проведеного через дану хорду паралельно осі циліндра.
3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r .
4. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Через діагоналі двох бічних граней, що містять сторони кута α , проведено переріз, площа якого S . Кут між цими діагоналями дорівнює β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

Варіант 19

1. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l , а бічна грань нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
2. У циліндрі паралельно його осі і на відстані d від неї проведено площину, що перетинає його нижню основу по хорді, яку видно із центра верхньої основи під кутом φ . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу перерізу.
3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом вписаного кола r . Знайдіть об'єм

описаної навколо піраміди кулі, якщо бічні ребра піраміди нахилені під кутом φ до основи.

4. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β . Діагональ грані, що містить сторону, прилеглу до даних кутів, утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми. Висота призми дорівнює H .

Варіант 20

1. В основі піраміди лежить прямокутник. Дві суміжні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші - нахилені до неї під кутами α і β ($\alpha > \beta$). Визначте бічну поверхню піраміди, якщо висота піраміди дорівнює h .
2. У циліндрі паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра верхньої основи під кутом α , а з центра нижньої основи під кутом β . Знайдіть площу перерізу, якщо висота циліндра H .
3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Всі бічні грані піраміди утворюють з площиною основи кут β . В цю піраміду вписано кулю. Відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює m . Знайдіть об'єм піраміди.
4. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною c і прилеглими кутами β і α . Діагональ грані, що містить дану сторону, нахилена до площини основи під кутом φ . Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

Варіант 21

1. В основі піраміди лежить прямокутна трапеція з більшою бічною стороною d і гострим кутом β . Всі бічні грані

- піраміди нахилені до основи під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.
2. Знайдіть бічну поверхню циліндра, висота якого дорівнює 5 см, якщо при збільшенні його висоти на 4 см, об'єм збільшується на 36π см³.
 3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Всі бічні грані нахилені під кутом β до основи. Знайдіть об'єм вписаної кулі.
 4. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, більша сторона основи якого дорівнює a . Діагональ паралелепіпеда утворює з його більшою бічною гранню кут β , а з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Варіант 22

1. Основа піраміди – трапеція, в якій паралельні сторони – 30 см і 48 см, а висота – 13 см. Довжина кожного бічного ребра піраміди – 65 см. Знайдіть об'єм піраміди.
2. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, знаючи, що об'єм циліндра дорівнює 240π см³, а бічна поверхня - 120π см².
3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом α . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .
4. Основа прямої призми – прямокутник з кутом φ між діагоналями. Діагональ однієї з бічних граней утворює з основою кут β , а діагональ суміжної з нею бічної грані

дорівнює m . Обчисліть бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

Варіант 23

1. Визначте об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, в якій сторони основ – 30 м і 20 м, а площа бічної поверхні рівновелика сумі площ основ.
2. У зрізаному конусі висота дорівнює 5 см, його твірна утворює з площиною нижньої основи кут 60° і перпендикулярна до діагоналі осьового перерізу, що проходить через верхній кінець твірної. Визначте бічну поверхню зрізаного конуса.
3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Всі бічні ребра рівні. Навколо піраміди описано кулю. Центр кулі належить висоті піраміди. Відстань від центра кулі до основи висоти піраміди дорівнює l . Знайдіть об'єм піраміди, якщо кут нахилу бічного ребра до площини основи піраміди дорівнює β .
4. В основі прямої призми лежить ромб з тупим кутом β . Переріз, проведений через більшу діагональ нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, нахилений до основи під кутом φ . Площа перерізу дорівнює Q . Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

Варіант 24

1. В основі піраміди лежить ромб. Дві суміжні бічні грані її перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою тупий кут α , а дві інші бічні грані нахилені до основи під кутом β . Визначте площу бічної поверхні піраміди, якщо висота піраміди дорівнює h .

2. Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса ділиться віссю на відрізки $11\frac{2}{3}$ см та $3\frac{1}{3}$ см. Знаючи, що твірна дорівнює 13 см, визначте його об'єм.
3. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб з тупим кутом β . Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від центра вписаної кулі до вершини піраміди дорівнює d .
4. В основі прямої призми лежить ромб з тупим кутом β . Переріз, проведений через більшу діагональ нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, нахилений до основи під кутом φ . Площа перерізу дорівнює S . Знайдіть, бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

Варіант 25

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя грань нахилена до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо більше бічне ребро дорівнює l .
2. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник. Площа повної поверхні конуса дорівнює 18 см^2 . Знайдіть площу основи.
3. Основа піраміди – ромб з гострим кутом α , двогранні кути при основі φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус вписаної кулі r .
4. У зрізаний конус вписано кулю радіуса r . Твірна конуса нахилена до основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню зрізаного конуса.

Варіант 26

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник. Дві бічні грані, що містять сторони гострого кута цього трикутника, перпендикулярні до основи. Найменше бічне ребро піраміди дорівнює l , а дві інші бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α і β ($\alpha < \beta$). Обчисліть об'єм піраміди.
2. Висота і твірна конуса відносяться як 4:5, а об'єм конуса дорівнює $96\pi \text{ см}^3$. Знайдіть його повну поверхню.
3. Основа піраміди - рівнобічна трапеція з основами a і b ; двогранні кути при основі φ . Знайдіть об'єм вписаної кулі.
4. У нижній основі циліндра проведено хорду довжиною a , яку видно з центра цієї основи під кутом α . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть об'єм описаної навколо циліндра кулі.

Список використаної літератури

1. Кушнір І. Методи розв'язання задач з геометрії // Книга для вчителя / І. Кушнір. – К. : Абрис, 1994. – 464 с.
2. Сержук С. В. Комбінації геометричних тіл [Міні-підручник] // Математика в школах України / С. В. Сержук, А. М. Сержук – Х. : Основа, 2008. – №7 – С. 9-13
3. Чехова А. М. Геометрія в таблицях, 7-11 кл.: Навч. посіб. / А. М. Чехова. – Х.: Науково-методич. центр, 2003. – 115 с.
4. Ясінський В. В. Математика. Навчальний посібник для слухачів підготовчих курсів ІМЯО НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський. – К. : Гнозис, 2016. – 472 с. – (Серія «На допомогу абітурієнту»).
5. Нелін Є. П. Геометрія. 10 клас. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 240 с.
6. Нелін Є. П. Геометрія. 11 клас. Профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2019. 208 с.
7. Каленюк П., Білонога Д. Алгебра та геометрія. Львів: Львівська політехніка. 2016. 375 с.
8. Козира В. Елементарна та вища математика: посібник-довідник для учнів, абітурієнтів, студентів. Тернопіль: Астон. 2021. 168 с.
9. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / А. М. Капіносов [та ін.]. Тернопіль : Підручники і посібники, 2022. 480 с.