

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

**ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ**

Практикум

Рівне 2026

УДК 519.7(0.76.5)

Д 60

Додаткові розділи математичного моделювання.
Практикум / укладач Генсіцька-Антонюк Н.О. Рівне: РДГУ. 2026.
25 с.

Автор-укладач:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рецензенти:

Петрівський Я.Б. – доктор технічних наук, професор
кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Присяжнюк І.М. – кандидат технічних наук, доцент
кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та
методики її навчання РДГУ (протокол № 8/а від 15.06.2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету
математики та інформатики Рівненського державного
гуманітарного університету (протокол № 6 від 15.06.2026 р.)

ЗМІСТ

Вступ	4
Практична робота №1. Математичне моделювання як метод вивчення доквілля. Основні етапи математичного моделювання	5
Практична робота №2. Математична модель витікання рідини із посудини. Енергетична модель роботи серця	6
Практична робота №3. Лінійний осцилятор	8
Практичне заняття №4. Динамічна система як основна математична модель природознавства	9
Практична робота №5. Модель типу «хижак-жертва»	11
Практична робота №6. Детермінована модель інфекційного захворювання	12
Практична робота №7. Закони Кеплера. Задачі двох та трьох тіл	14
Контрольна робота	16
Список використаної літератури	25

ВСТУП

Сучасний етап розвитку науки, техніки та суспільства характеризується глибокою цифровізацією та інтеграцією знань, де математичне моделювання виступає універсальним методологічним інструментом пізнання дійсності. Для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю А4 Середня освіта (Математика) поглиблене опанування методів побудови, дослідження та інтерпретації математичних моделей має подвійне значення. З одного боку, це фундаментальна складова їхньої власної науково-дослідницької компетентності, а з іншого — необхідна умова професійної готовності до викладання математики в старшій профільній школі, а також до впровадження ідей STEM-освіти.

Навчальна дисципліна «Додаткові розділи математичного моделювання» є логічним продовженням нормативних курсів математичного циклу. Вона спрямована на розширення світогляду майбутніх вчителів математики через вивчення прикладних моделей у біології, економіці, фізиці й соціології тощо.

Метою практикуму є формування у магістрантів цілісної системи практичних умінь і навичок самостійної реалізації повного циклу математичного моделювання — від змістовної постановки прикладної задачі та її формалізації до аналітичного чи чисельного розв'язання, комп'ютерної візуалізації та верифікації отриманих результатів.

Кожна практична робота у посібнику має уніфіковану структуру, що забезпечує ефективну організацію як аудиторної, так і самостійної роботи магістрантів.

Практичне заняття №1. Математичне моделювання як метод вивчення довкілля. Основні етапи математичного моделювання

Контрольні запитання

1. Що таке модель і математичне моделювання.
2. Класифікація моделей.
3. 5 основних етапів моделювання: постановка задачі, побудова формули (формалізація), розрахунок, перевірка адекватності, аналіз результатів.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. *Етапи моделювання на прикладі балансу води у водосховищі.*

У водосховищі початковий об'єм води становить $V_0 = 500\,000\text{ м}^3$. Щодоби у нього впадає річка, яка приносить $q_{\text{вх}} = 12\,000\text{ м}^3$ води, а на потреби міста та випаровування витрачається $q_{\text{вих}} = 15\,000\text{ м}^3$ води.

I етап (постановка): Запишіть вхідні дані та вкажіть, що потрібно знайти (об'єм води через t діб).

II етап (формалізація): Складіть лінійну формулу залежності об'єму води від часу: $V(t) = V_0 + (q_{\text{вх}} - q_{\text{вих}}) \cdot t$.

III етап (розрахунок): Обчисліть об'єм води через 10, 30 та 50 діб посухи. Через скільки діб об'єм впаде до критичної позначки $350\,000\text{ м}^3$?

IV–V етапи (аналіз): Зробіть висновок, на скільки потрібно зменшити споживання води містом, щоб рівень водосховища залишався стабільним.

2. *Визначення суттєвих і несуттєвих факторів.*

Потрібно побудувати просту модель нагрівання води у мілкому ставку впродовж сонячного літнього дня. Із запропонованого списку виберіть 3 головні фактори, які варто включити в модель, і 3 другорядні, якими можна знехтувати: *інтенсивність сонячного випромінювання, площа поверхні*

ставка, глибина ставка, рух мальків риб, гравітаційний вплив Місяця, колір одягу рибалок на березі. Поясніть свій вибір.

Завдання для самостійної роботи

1. Опис етапів моделювання: Оберіть одне просте явище природи (наприклад, танення бурульки навесні або ріст дерева) та письмово розпишіть для нього всі 5 етапів математичного моделювання без складних розрахунків.

2. Розрахункова задача: У лісовому господарстві налічується 10 000 дерев. Щороку природний приріст становить 5% від поточної кількості, але 300 дерев вирубують. Обчисліть покроково кількість дерев через 1, 2 та 3 роки за формулою $N_{k+1} = N_k + 0,05N_k - 300$. Зростає чи скорочується ліс?

Використана література: [1, с. 8–32; 2, с. 10–45; 5, с. 14–38]

Практичне заняття №2. Математична модель витікання рідини із посудини. Енергетична модель роботи серця

Контрольні запитання

1. Формула Торрічеллі для швидкості витікання рідини з отвору.
2. Залежність часу витікання від висоти стовпа рідини та площі отвору.
3. Серце як насос: механічна робота та потужність серцевого скорочення.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. Модель витікання води з бака.

Швидкість витікання води з малого отвору на дні посудини визначається за формулою Торрічеллі: $v = \sqrt{2gh}$, де $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, а h — висота стовпа води. Час повного витікання

води з циліндричного бака площею перерізу S_1 через отвір площею S_2 обчислюється за готовою формулою:

$$T = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

- 1) Обчисліть початкову швидкість витікання струменя v , якщо початкова висота води у баку $H_0 = 2$ м.
- 2) Знайдіть час повного спустошення бака T , якщо площа дна бака $S_1 = 0,5$ м², а площа отвору $S_2 = 0,001$ м².
- 3) Як зміниться час витікання, якщо висоту води збільшити у 4 рази?

2. *Енергетична модель роботи серця.*

За одне скорочення лівий шлуночок серця виконує механічну роботу A , яка складається з роботи на подолання тиску крові та надання крові швидкості:

$$A = P \cdot V + \frac{mv^2}{2}$$

- 1) Розрахуйте роботу серця за один удар у стані спокою, якщо ударний об'єм крові $V = 70$ мл $= 0,00007$ м³, маса цієї порції крові $m = 0,07$ кг, середній тиск $P = 13\,000$ Па, а швидкість крові $v = 0,5$ м/с.
- 2) Яку роботу виконає серце за 1 хвилину при пульсі 70 ударів на хвилину?

Завдання для самостійної роботи

1. **Порівняльний аналіз (витікання рідини):** Побудуйте графік залежності швидкості витікання води $v = \sqrt{2gh}$ для значень висоти $h = 0$ м; 0,5 м; 1 м; 2 м; 4 м. Поясніть, чому вода наприкінці витікає значно повільніше, ніж на початку.
2. **Робота серця при навантаженні:** За формулою з аудиторної задачі обчисліть роботу одного скорочення серця спортсмена під час бігу, якщо тиск зріс до $P = 18\,000$ Па, ударний об'єм — до $V = 0,0001$ м³ ($m = 0,1$ кг), а швидкість

кровотоку — до $v = 1$ м/с. У скільки разів зросла робота одного удару порівняно зі станом спокою?

Використана література: Витікання рідини: [4, с. 42–56]

Робота серця: [3, с. 138–152; 11]

Практичне заняття №3. Лінійний осцилятор

Контрольні запитання

1. Гармонічні коливання у природі.
2. Основні характеристики осцилятора: зміщення, амплітуда, період, частота.
3. Затухаючі коливання у реальному середовищі.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. Аналіз рівняння гармонічного осцилятора.

Гілка дерева після пориву вітру здійснює гармонічні коливання, що описуються законом:

$$x(t) = 0,15 \cos(2\pi t) \text{ (м)}$$

- 1) Зіставляючи це рівняння зі стандартним виглядом $x(t) = A \cos(\omega t)$, запишіть значення максимального відхилення (амплітуди A) та циклічної частоти ω .
- 2) Обчисліть період коливань гілки за формулою $T = \frac{2\pi}{\omega}$ та частоту $\nu = \frac{1}{T}$.
- 3) Знайдіть положення гілки в моменти часу $t = 0$ с, $t = 0,25$ с та $t = 0,5$ с.

2. Визначення періоду власних коливань пружинного маятника (модель поплавка).

Тіло масою $m = 0,2$ кг коливається під дією пружної сили з коефіцієнтом жорсткості $k = 50$ Н/м. Обчисліть власну частоту коливань $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ та період коливань $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Завдання для самостійної роботи

1. **Задача на затухаючі коливання:** Поплавок на воді здійснює затухаючі коливання з початковою амплітудою $A_0 = 10$ см. Відомо, що кожні 5 секунд амплітуда його коливань зменшується рівно вдвічі. Складіть таблицю значень амплітуди для моментів часу $t = 0, 5, 10, 15, 20$ с та побудуйте графік спадання амплітуди.
2. **Явище резонансу в природі:** Наведіть 2–3 приклади корисного та руйнівного прояву резонансу в природі, біології чи техніці (наприклад, розгойдування дерев вітром, коливання мостів, робота слухового апарату людини) та поясніть умову його виникнення.

Використана література: [3, с. 44–68; 4, с. 210–235]

Практичне заняття №4. Динамічна система як основна математична модель природознавства

Контрольні запитання

1. Поняття динамічної системи та її стану.
2. Дискретні та неперервні системи.
3. Точки рівноваги (стаціонарні стани): стійка та нестійка рівновага на простих прикладах.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. Дослідження дискретної динамічної системи.

Чисельність популяції комах на ізольованій ділянці щороку змінюється за законом:

$$x_{n+1} = 0,5x_n + 100$$

де x_n — чисельність у поточному році, а x_{n+1} — у наступному.

- 1) Нехай початкова чисельність становить $x_0 = 40$ особин. Обчисліть чисельність популяції на 1-й, 2-й, 3-й та 4-й роки (x_1, x_2, x_3, x_4).
- 2) Знайдіть стаціонарний (рівноважний) стан системи x^* , підставивши у формулу умову незмінності чисельності $x_{n+1} = x_n = x^*$ (розв'яжіть лінійне рівняння $x^* = 0,5x^* + 100$).

2. Пошук точок рівноваги неперервної моделі росту популяції.

Швидкість зміни біомаси водоростей у ставку описується рівнянням Ферхюльста (логістичною моделлю):

$$\frac{dx}{dt} = 0,2x \left(1 - \frac{x}{500}\right)$$

- 1) Знайдіть стаціонарні стани системи, прирівнявши швидкість зміни до нуля: $\frac{dx}{dt} = 0$. Поясніть біологічний зміст обох знайдених точок ($x = 0$ та $x = 500$).
- 2) Обчисліть швидкість росту $\frac{dx}{dt}$ при $x = 100$ та при $x = 600$. У якому випадку біомаса зростає, а в якому — скорочується?

Завдання для самостійної роботи

1. **Розрахунок траєкторії:** Для дискретної моделі з аудиторної задачі №1 ($x_{n+1} = 0,5x_n + 100$) обчисліть перші 4 кроки за умови, що початкова чисельність більша за рівноважну: $x_0 = 300$. Побудуйте на одному графіку обидві лінії (для $x_0 = 40$ та $x_0 = 300$) і переконайтеся, що вони наближаються до одного й того самого стаціонарного значення $x^* = 200$.
2. **Аналіз стійкості на побутових і природних прикладах:** Замалюйте кульку на дні ямки, на вершині гірки та на рівному столі. Підпишіть, який із цих станів відповідає *стійкій*, *нестійкій* та *байдужій* рівновазі динамічної системи, і наведіть по одному екологічному аналогу до кожного випадку.

Використана література: [2, с. 64–98; 7, с. 18–54; 8, с. 72–110]

Практичне заняття №5. Модель типу «хижак-жертва»

Контрольні запитання

1. Біологічна взаємодія видів.
2. Система рівнянь Лотки—Вольтерри: зміст коефіцієнтів народжуваності, смертності та зустрічей.
3. Рівноважна чисельність хижаків і жертв.
4. Циклічність коливань.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. *Знаходження точки рівноваги в системі «карасі — щуки».*

Взаємодія популяції карасів (x , сотень штук) та щук (y , десятків штук) в озері описується системою:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,6x - 0,2xy \\ \frac{dy}{dt} = -0,4y + 0,1xy \end{cases}$$

- 1) Поясніть зміст кожного доданка: що відбудеться з карасями, якщо щук не буде ($y = 0$)? Що станеться зі щуками, якщо зникнуть карасі ($x = 0$)?
- 2) Знайдіть стаціонарну (рівноважну) чисельність обох видів (x^*, y^*), за якої їхня кількість не змінюється з часом (прирівняйте праві частини рівнянь до нуля: $0,6x - 0,2xy = 0$ та $-0,4y + 0,1xy = 0$).

2. *Визначення напрямку зміни популяцій у заданий момент.*

Використовуючи систему з попередньої задачі, визначте, зростає чи зменшується чисельність карасів і щук у момент, коли в озері є $x = 5$ (сотень карасів) та $y = 2$ (десятки щук). Для цього

просто підставте $x = 5$, $y = 2$ у праві частини рівнянь та визначте знаки $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$.

Завдання для самостійної роботи

1. **Вплив вилову риби (принцип Вольтерри):** Уявіть, що в озері з аудиторної задачі №1 почали однаково інтенсивно виловлювати сітками і карасів, і щук (коефіцієнт вилову $\varepsilon = 0,1$). Система набула вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(0,6 - 0,1)x - 0,2xy \\ \frac{dy}{dt} = -(0,4 + 0,1)y + 0,1xy \end{cases}$$

Знайдіть нову точку рівноваги $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ і порівняйте її з початковою. Чисельність якого виду в стані рівноваги несподівано збільшилася?

2. **Читання графіків:** За готовим графіком коливань чисельності зайців та рисей (із підручника або роздаткового матеріалу) визначте приблизний період коливань (у роках) та поясніть, чому пік чисельності хижаків завжди запізнюється відносно піку чисельності жертв приблизно на чверть періоду.

Використана література: [2, с. 102–134; 4, с. 340–362; 8, с. 115–142]

Практичне заняття №6. Детермінована модель інфекційного захворювання

Контрольні запитання

1. Поділ населення на групи: S (сприйнятливі до хвороби), I (інфіковані/хворі), R (ті, що одужали й отримали імунітет). Базове репродуктивне число R_0 .
2. Умова виникнення епідемії та розрахунок колективного імунітету.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. Оцінка спалаху інфекції та колективного імунітету.

У містечку проживає $N = 5000$ осіб. Базове репродуктивне число вірусу (середня кількість людей, яких заражає один хворий у повністю несприйнятливому середовищі) визначається за формулою:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

де $\beta = 0,0001$ доба⁻¹ — коефіцієнт передачі інфекції, а $\gamma = 0,2$ доба⁻¹ — швидкість одужання (тобто середня тривалість хвороби становить $1/\gamma = 5$ діб).

- 1) Обчисліть значення R_0 . Оскільки $R_0 > 1$, зробіть висновок щодо початку епідемії.
- 2) Обчисліть частку населення, яку необхідно вакцинувати для створення колективного імунітету (щоб епідемія не поширювалася), за формулою:

$$p_c = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \cdot 100\%$$

2. Покроковий розрахунок початку епідемії (модель SIR).

Зміна кількості хворих за одну добу описується формулою:
 $\Delta I = \beta S I - \gamma I$.

На початку у містечку ($N = 5000$) захворіло $I_0 = 20$ осіб, а здорових сприйнятливих було $S_0 = 4980$ осіб ($\beta = 0,0001, \gamma = 0,2$).

Обчисліть, скільки нових людей заразяться за першу добу ($\beta S_0 I_0$), скільки одужає за першу добу (γI_0) і яким буде загальний приріст хворих ΔI на завтра.

Завдання для самостійної роботи

1. **Порівняння інфекцій:** Обчисліть необхідний відсоток вакцинації населення $p_c = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \cdot 100\%$ для трьох різних захворювань: сезонного грипу ($R_0 = 1,5$), вітряної віспи ($R_0 = 8$) та кору ($R_0 = 15$). Побудуйте стовпчасту діаграму.

2. **Модельовання впливу карантину:** Умовою згасання епідемії є нерівність $\beta S < \gamma$. Використовуючи дані аудиторної задачі №2 ($\beta = 0,0001, \gamma = 0,2$), визначте, при якій кількості здорових людей $S_{\text{пор}} = \frac{\gamma}{\beta}$ хвороба досягне піку і кількість хворих почне спадати природним шляхом.

Використана література: [9, с. 84–120; 11, с. 240–265]

Практичне заняття №7. Закони Кеплера. Задачі двох та трьох тіл

Контрольні запитання

1. Формулювання трьох законів Кеплера.
2. Еліптичні орбіти планет та супутників.
3. Задача двох тіл і поняття спільного центра мас (барицентра).
4. Задача трьох тіл і точки Лагранжа.

Завдання для практичної роботи в аудиторії

1. Застосування третього закону Кеплера в астрономічних одиницях.

Якщо час вимірювати у земних роках ($T_{\oplus} = 1$ рік), а відстань — в астрономічних одиницях ($a_{\oplus} = 1$ а. о. — середня відстань від Землі до Сонця), то третій закон Кеплера для будь-якого тіла Сонячної системи має простий вигляд:

$$T^2 = a^3$$

- 1) Велика піввісь орбіти карликової планети Церери в поясі астероїдів дорівнює $a = 2,77$ а. о. Обчисліть період її обертання навколо Сонця $T = \sqrt{a^3}$ (у роках).
- 2) Період обертання Юпітера навколо Сонця становить приблизно $T = 11,86$ року. Знайдіть середню відстань від Юпітера до Сонця в астрономічних одиницях: $a = \sqrt[3]{T^2}$.

2. Задача двох тіл: пошук центра мас системи «Земля — Місяць».

Два небесні тіла масами M_1 та M_2 , що перебувають на відстані R одне від одного, обертаються навколо спільного центра мас. Відстань від центра більшого тіла (M_1) до спільного центра мас обчислюється за формулою:

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot R$$

- 1) Знайдіть положення центра мас системи «Земля — Місяць», якщо маса Землі у 81 раз більша за масу Місяця ($M_1 = 81M_2$), а середня відстань між ними $R = 384\,400$ км.
- 2) Порівняйте отримане значення r_1 із радіусом Землі ($R_\oplus = 6371$ км). Де саме розташований цей центр мас — у відкритому космосі чи всередині земної кулі?

Завдання для самостійної роботи

1. **Перший та другий закони Кеплера (розрахунок перигелію та афелію):** Орбіта комети має велику піввісь $a = 10$ а. о. та ексцентриситет (ступінь витягнутості) $e = 0,8$. Обчисліть найближчу відстань комети до Сонця (у перигелії) за формулою $r_{min} = a(1 - e)$ найдалшу відстань (в афелії) за формулою $r_{max} = a(1 + e)$ якій із цих двох точок комета рухається з найбільшою швидкістю згідно з другим законом Кеплера?

2. **Задача трьох тіл і точки Лагранжа:** За допомогою схематичного рисунка покажіть розташування п'яти точок Лагранжа (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) у системі «Сонце — Земля». Обчисліть відстань від Землі до точки L_1 за наближеною формулою $d \approx 0,01 \cdot R$, де $R = 150$ млн км — відстань від Землі до Сонця. Напишіть, для чого сучасні космічні агентства використовують точки L_1 та L_2 (на прикладі телескопа «Джеймс Вебб»).

Використана література: [6, с. 92–128]

Контрольна робота

Номер варіанта к.р. згідно номера списку здобувача у журналі

Варіант 1

Однорідна струна натягнута між точками $x=0$, $x=l$. У точці $x=c$ струну відтягують на невелику відстань h від положення рівноваги і в момент часу $t=0$ відпускають без початкової швидкості. Визначити відхилення $u(x,t)$ струни для будь-якого моменту часу $t>0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} &= 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} \frac{h}{c} \cdot x, & 0 < x \leq c, \\ \frac{h \cdot (l-x)}{l-c}, & c < x \leq l, \end{cases} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Варіант 2

Труба, відкрита з одного кінця, рухається поступово у напрямі своєї осі зі сталою швидкістю v . У момент часу $t=0$ труба миттєво зупиняється. Визначити зміщення $u(x,t)$ повітря всередині труби на відстані x від закритого кінця труби для довільного моменту часу $t>0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} &= 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v.$$

Варіант 3

Однорідний стержень довжиною $2 \cdot l$ стиснутий прикладеними до його кінців силами так, що він укоротився до довжини $2 \cdot l(1 - \varepsilon)$. У момент часу $t = 0$ навантаження зняте. Вивести закон коливань поперечного перерізу стержня - $u(x, t)$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad -l < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-l} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x,0) = -\varepsilon \cdot x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 4

Однорідний стержень, який має довжину l і закріплений на кінці $x = 0$, перебуває у стані спокою. У момент часу $t = 0$ до вільного кінця стержня прикладена сила Q , яка розрахована на одиницю площі і діє вздовж стержня. Визначити переміщення $u(x, t)$ поперечного перерізу стержня з абсцисою x для довільного моменту часу $t > 0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{Q}{E}, \quad E - \text{модуль Юнга.}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 5

Дослідити поперечні коливання струни що є закріпленою на кінці $x=0$, а до кінця $x=l$ прикладена гармонічна сила, яка викликає коливання $A \cdot \sin \omega t$, $A - \text{const}$. До моменту дії сили струна перебувала у стані спокою.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = A \cdot \sin \omega t$$

$$u(x, 0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 6

Дослідити повздовжні коливання стержня, один кінець ($x=0$) якого закріплений жорстко, інший ($x=l$) є вільним, якщо початкове відхилення є пропорційним довжині стержня, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

$$u(x, 0) = k \cdot x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 7

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня з вільними кінцями, якщо початкове зміщення пропорційне синусоїдальному закону, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x,0) = k \cdot \sin \omega x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 8

Визначити поперечні коливання стержня довжиною l кінці якого закріплені жорстко, початкові відхилення від положення рівноваги пропорційні квадрату довжини, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = k \cdot x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 9

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня при пружному закріпленні обох кінців для однакових значень коефіцієнтів жорсткості закріплення. Початкові зміщення пропорційні довжині стержня, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x,t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x,t) \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

$$h = \text{const},$$

$$u(x,0) = k \cdot x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 10

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня, які виникають після того, як з початкового моменту часу з одного кінця стержня ($x=0$) миттєво зникає дія повздовжньої сили $F_0 = \text{const}$, під дією якої стержень перебував у стані рівноваги,

якщо інший кінець закріплений пружно ($x = l$) і початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0, h = \text{const},$$

$$u(x, 0) = \frac{F_0}{E \cdot S} \cdot x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

E - модуль Юнга, S - площа поперечного перерізу стержня.

Варіант 11

Однорідна струна натягнута між точками $x = 0, x = l$. У точці $x = c$ струну відтягують на невелику відстань h від положення рівноваги і в момент часу $t = 0$ відпускають без початкової швидкості. Визначити відхилення $u(x, t)$ струни для будь-якого моменту часу $t > 0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} \cdot x, & 0 < x \leq c, \\ \frac{h \cdot (l - x)}{l - c}, & c < x \leq l, \end{cases} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 12

Труба, відкрита з одного кінця, рухається поступово у напрямі своєї осі зі сталою швидкістю v . У момент часу $t = 0$ труба миттєво зупиняється. Визначити зміщення $u(x, t)$ повітря

всередині труби на відстані x від закритого кінця труби для довільного моменту часу $t > 0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v.$$

Варіант 13

Однорідний стержень довжиною $2 \cdot l$ стиснутий прикладеними до його кінців силами так, що він укоротився до довжини $2 \cdot l(1 - \varepsilon)$. У момент часу $t = 0$ навантаження зняте. Вивести закон коливань поперечного перерізу стержня - $u(x, t)$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, -l < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-l} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x, 0) = -\varepsilon \cdot x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 14

Однорідний стержень, який має довжину l і закріплений на кінці $x = 0$, перебуває у стані спокою. У момент часу $t = 0$ до вільного кінця стержня прикладена сила Q , яка розрахована на одиницю площі і діє вздовж стержня. Визначити переміщення $u(x, t)$ поперечного перерізу стержня з абсцисою x для довільного моменту часу $t > 0$.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{Q}{E}, \quad E - \text{модуль Юнга.}$$

$$u(x,0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 15

Дослідити поперечні коливання струни що є закріпленою на кінці $x=0$, а до кінця $x=l$ прикладена гармонічна сила, яка викликає коливання $A \cdot \sin \omega t$, $A - \text{const}$. До моменту дії сили струна перебувала у стані спокою.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = A \cdot \sin \omega t$$

$$u(x,0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 16

Дослідити повздовжні коливання стержня, один кінець ($x=0$) якого закріплений жорстко, інший ($x=l$) є вільним, якщо початкове відхилення є пропорційним довжині стержня, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

$$u(x,0) = k \cdot x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 17

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня з вільними кінцями, якщо початкове зміщення пропорційне синусоїдальному закону, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x, 0) = k \cdot \sin \omega x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Варіант 18

Визначити поперечні коливання стержня довжиною l кінці якого закріплені жорстко, початкові відхилення від положення рівноваги пропорційні квадрату довжини, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = k \cdot x^2, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Варіант 19

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня при пружному закріпленні обох кінців для однакових значень коефіцієнтів жорсткості закріплення. Початкові зміщення пропорційні довжині стержня, а початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

$$h = \text{const},$$

$$u(x,0) = k \cdot x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Варіант 20

Дослідити повздовжні коливання пружного стержня, які виникають після того, як з початкового моменту часу з одного кінця стержня ($x=0$) миттєво зникає дія повздовжньої сили $F_0 = \text{const}$, під дією якої стержень перебував у стані рівноваги, якщо інший кінець закріплений пружно ($x=l$) і початкових швидкостей немає.

Вказівка. Математичною моделлю є мішана задача

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h \cdot u(x,t) \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad h = \text{const},$$

$$u(x,0) = \frac{F_0}{E \cdot S} \cdot x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

E - модуль Юнга, S - площа поперечного перерізу стержня.

Список використаної літератури

1. Біляєв М. М., Біляєва В. В., Кіріченко П. С. Моделювання і прогнозування стану довкілля : підручник. Кривий Ріг : Вид. Р. А. Козлов, 2018. 234 с.
2. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : навч. посіб. Київ : Вид. дім «КМ Академія», 2002. 203 с.
3. Медична та біологічна фізика : нац. підручник / О. В. Чалий та ін. ; за ред. О. В. Чалого. Вид. 3-тє, випр. і допов. Вінниця : Нова Книга, 2017. 528 с.
4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. Київ : Либідь, 2003. 504 с.
5. Томашевський В. М. Моделювання систем : підручник. Київ : Видавнича група ВНУ, 2005. 352 с.
6. Климишин І. А. Астрономія : підручник. Львів : Світ, 1993. 384 с.
7. Григорків В. С., Ярошенко О. І. Моделювання динамічних систем в екології та економіці : навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2013. 216 с.
8. Моделювання і прогнозування стану довкілля : навч. посіб. / В. І. Лаврик та ін. Київ : ВЦ «Академія», 2010. 400 с.
9. Марценюк В. П., Кравець Н. О. Математичне моделювання в медицині та біології (компаративний підхід) : навч. посіб. Тернопіль : ТДМУ «Укрмедкнига», 2008. 236 с.
10. Ніколюк П. К. Моделювання систем : навч. посіб. Вінниця : ДонНУ ім. Василя Стуса, 2023. 160 с.
11. Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленевська А. В. Вища математика та інформатика у прикладах і задачах (для студентів медичних і біологічних спеціальностей) : навч. посіб. Київ : Книга плюс, 2012. 368 с.